ΑΠΟ ΤΑ ΝΟΥΚΛΕΟΝΙΑ ΣΤΟΥΣ ΠΥΡΗΝΕΣ

8.1 Η ολική πυρηνική ενέργεια

Θεωρήστε ότι έχουμε ένα πυρήνα που αποτελείται από *A* νουκλεόνια. Υποθέτουμε ότι από τα *A* νουκλεόνια τα Ζ είναι πρωτόνια και τα υπόλοιπα *A*-*Z*=*N* είναι νετρόνια.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ολική ενέργεια αυτού του πυρήνα, η οποία αποτελείται από την ενέργεια ηρεμίας $Z\,m_p c^2 + N\,m_n c^2$ των νουκλεονίων (όταν είναι απομονωμένα) συν την κινητική ενέργεια E_K (βάσει των αρχών του Heisenberg και του Pauli) συν τη δυναμική ενέργεια E_Δ. Η ποσότητα $-(E_K+E_\Delta)$, που είναι θετική, ονομάζεται ενέργεια σύνδεσης και συμβολίζεται συνήθως με *B*: $B = -(E_K+E_\Delta)$. Άρα $E_{o\lambda} = Zm_pc^2 + Zm_nc^2 + E_\Delta + E_K = Zm_pc^2 + Zm_nc^2 - B$.

Ο όγκος *V* του πυρήνα είναι ανάλογος του γινομένου του όγκου, V_o, κάθε νουκλεονίου επί τον αριθμό, *A*, των νουκλεονίων.

$$V = a\,A V_o \tag{8.1}$$

όπου η ‘σταθερά’ αναλογίας *a* είναι προφανώς μεγαλύτερη από τη μονάδα (αφού μεταξύ των νουκλεονίων υπάρχει ακάλυπτος χώρος). Ο όγκος V_o, του κάθε νουκλεονίου, ισούται με V_o=(4π/3)r_o^3, όπου η ακτίνα r_o του κάθε νουκλεονίου είναι ίση με 0,84f [1].

Η ακτίνα του πυρήνα *R* συνδέεται με τον όγκο του, *V*: V=(4π/3)R^3. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις για το *V* και το V_o στην (8.1) έχουμε ότι

$$\boxed{R = a^{1/3}A^{1/3}r_o} \tag{8.1΄}$$

Η εμπειρική τιμή του $a^{1/3}r_o$ είναι περίπου $1{,}24 \pm 0{,}06\,\mathrm{f}$ που αντιστοιχεί στη μέση τιμή *a*= 3,22 και αλλάζει λίγο με το μέγεθος του πυρήνα. Οι μικρότερες τιμές του *a* αντιστοιχούν στα μεγάλα *A*, ενώ οι μεγαλύτερες στα μικρά *A*. Η τιμή του *a* για κάθε πυρήνα, όπως και όλων των ελεύθερων παραμέτρων, πρέπει να μπορεί να προκύψει θεωρητικά, από την ελαχιστοποίηση της ολικής ενέργειας.

Η δυναμική ενέργεια έχει δύο συνιστώσες: την απωστική ενέργεια (Coulomb) $E_{\Delta C}$, μεταξύ των πρωτονίων (η οποία ισούται με τον αριθμό, *Z*(*Z*-1)/2, των ζευγών πρωτονίων επί μια μέση τιμή e^2/r, της δυναμικής ενέργειας Coulomb).

$$E_{\Delta C} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{Z}\frac{e^2}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{Z(Z-1)e^2}{r}, \quad r \approx \frac{5}{6}R \ ^{2} \tag{8.2}$$

και την ελκτική ενέργεια $E_{\Delta I}$, λόγω των ισχυρών αλληλεπιδράσεων.

---

[1] $1\,\mathrm{f} \equiv 1\,\mathrm{fm} \equiv 10^{-15}\,\mathrm{m}$

[2] Ο συντελεστής 5/6 προκύπτει αν δεχτούμε ότι τα πρωτόνια είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα στον όγκο του πυρήνα. Μπορείτε να το αποδείξετε;

Η $E_{\Delta\text{Ι}}$ ισούται με μια μέση ισχυρή ενέργεια, $-\varepsilon$, μεταξύ ενός ζεύγους *διπλανών*[3] νουκλεονίων επί τον αριθμό των ζευγών *διπλανών* νουκλεονίων. Παρατηρήστε όμως ότι ένα νουκλεόνιο που βρίσκεται στην επιφάνεια του πυρήνα έχει κατά μέσο όρο λιγότερους γείτονες, έστω K', από ένα που βρίσκεται στο εσωτερικό του πυρήνα και έχει κατά μέσο όρο K γείτονες. Εάν A_s είναι ο αριθμός των νουκλεονίων που βρίσκονται στην επιφάνεια και A_B ο αριθμός αυτών που βρίσκονται στο εσωτερικό, τότε ο αριθμός όλων των ζευγών ισούται με $\frac{1}{2}A_sK'+\frac{1}{2}A_BK$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $A_s+A_B=A$ ($\Rightarrow A_B=A-A_s$) έχουμε για την συνολική ελκτική ισχυρή δυναμική ενέργεια $E_{\Delta\text{Ι}}$:

$$E_{\Delta\text{Ι}}=-\tfrac{1}{2}(A-A_s)K\varepsilon-\tfrac{1}{2}A_sK'\varepsilon \tag{8.3}$$

Για τα K και K' μια εύλογη επιλογή είναι $K\approx8$ και $K'\approx5$. Δεδομένου ότι η απόσταση μεταξύ γειτονικών νουκλεονίων κυμαίνεται από περίπου 1,5f έως 2,5f με μέση τιμή γύρω στα 2,1fm μια λογική τιμή του ε, βάσει του Σχ. 7.1, είναι $\varepsilon\approx11{,}4$MeV. Ο αριθμός A_s των νουκλεονίων που βρίσκονται στην επιφάνεια του πυρήνα είναι προφανώς ανάλογος του εμβαδού αυτής της επιφάνειας, το οποίο εμβαδόν ισούται με $4\pi R^2$. Λόγω της (8.1΄) το R^2 είναι ανάλογο του $A^{2/3}$. Άρα και το A_s είναι ανάλογο του $A^{2/3}$. Θα επιλέξουμε το συντελεστή αναλογίας ίσο με τη μονάδα. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω αριθμητικές τιμές, έχουμε για τη συνολική ισχυρή δυναμική ενέργεια το εξής αποτέλεσμα:

$$E_{\Delta\text{Ι}}=-4\varepsilon\,A+1{,}5\varepsilon\,A^{2/3}=-45{,}6A+17{,}1A^{2/3}\text{MeV} \tag{8.3΄}$$

Απομένει να υπολογίσουμε την ελάχιστη κινητική ενέργεια (που δεν πρέπει να τη ξεχνάμε ποτέ). Βάσει του τύπου (2.12) έχουμε:

$$E_K=2{,}87Z\frac{\hbar^2}{m_p}\left(\frac{Z}{V'}\right)^{2/3}+2{,}87N\frac{\hbar^2}{m_n}\left(\frac{N}{V'}\right)^{2/3} \tag{8.4}$$

όπου V' είναι ο *διαθέσιμος*[4] όγκος, που είναι περίπου το 0,5 του συνολικού όγκου του πυρήνα: $V'\approx\frac{1}{2}V=(2\pi/3)a\,r_o^3A$. Αντικαθιστούμε την έκφραση για το V' στην (8.4) και έχουμε:

$$E_K=0{,}804\frac{\hbar^2}{m\,r_0^2}\frac{Z^{5/3}+N^{5/3}}{A^{2/3}} \tag{8.4΄}$$

θεωρώντας ότι $m_p\approx m_n\approx m\approx1837{,}4m_e$. Η ποσότητα $(Z^{5/3}+N^{5/3})/A^{2/3}$ μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά στην πιο βολική μορφή (την οποία να αποδείξετε κάνοντας μια ανάπτυξη Taylor ως προς τη διαφορά N-Z):

$$\frac{Z^{5/3}+N^{5/3}}{A^{2/3}}\approx\frac{1}{2^{2/3}}\left[A+\frac{5}{9}\frac{(N-Z)^2}{A}\right] \tag{8.4΄΄}$$

---

[3] Λόγω του ότι οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις είναι βραχείας εμβέλειας, γίνονται αισθητές *μόνο μεταξύ γειτονικών νουκλεονίων*, σε αντίθεση με τις αλληλεπιδράσεις Coulomb.

[4] Ο όγκος που καταλαμβάνουν ίσες εφαπτόμενες σφαίρες σε τυχαία διάταξη δεν μπορεί να είναι μικρότερος από περίπου 2 φορές το άθροισμα των όγκων τους, γιατί πάντοτε θα υπάρχουν τα διάκενα μεταξύ σφαιρών που εφάπτονται. Στην περίπτωσή μας τα νουκλεόνια δεν εφάπτονται αφού η μέση απόσταση μεταξύ των κέντρων γειτονικών νουκλεονίων είναι περίπου ίση με 1,2 φορές τη διάμετρό τους.

που δείχνει ότι το *ελάχιστο της κινητικής ενέργειας για σταθερό αριθμό νουκλεονίων, επιτυγχάνεται όταν Z=N=A/2.*

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές για τα $\hbar$, m, r_o, a =3,22, $\varepsilon \approx$11,4MeV στις σχέσεις (8,2), (8,3΄), (8.4΄), (8.4΄΄), έχουμε το εξής αποτέλεσμα για την ενέργεια σύνδεσης B (σε MeV)

B=45,6A-17,1$A^{2/3}$ (λόγω ισχυρής έλξης)

$-0,71\dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$ (λόγω άπωσης Coulomb)

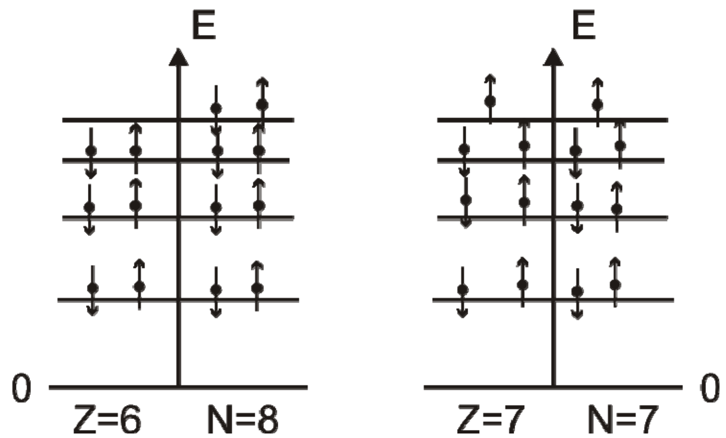
$$\left.\begin{array}{l} -29,74A \\ -16,52\dfrac{(N-Z)^2}{A} \\ +\delta \end{array}\right\} \text{(λόγω κινητικής ενέργειας Heisenberg-Pauli)} \qquad (8.5)$$

όπου το δ είναι μια διόρθωση που οφείλεται στο ότι οι πυρήνες με Z και N άρτιο αξιοποιούν πιο αποτελεσματικά τις ενεργειακές στάθμες σε σχέση με τους πυρήνες με Z και N περιττό (όπως φαίνεται στο Σχ. 8.1). Οι πυρήνες με A περιττό είναι σε ενδιάμεση ενεργειακή κατάσταση. Η ποσότητα δ δίνεται από τον εμπειρικό τύπο:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{34}{A^{3/4}}\text{M}eV && \text{όταν Z, N είναι άρτια} \\ &= 0 && \text{όταν A περιττός} \\ &= -\frac{34}{A^{3/4}} && \text{όταν Z, N είναι περιττά} \end{aligned} \qquad (8.6)$$

Συνδυάζοντας τον πρώτο όρο της ισχυρής έλξης με τον πρώτο όρο της κινητικής ενέργειας καταλήγουμε στον τύπο:

$$\boxed{B = 15,86A - 17,1A^{2/3} - 0,71\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - 16,52\frac{(N-Z)^2}{A} + \delta \quad \text{ολα σε MeV}} \qquad (8.5΄)$$



Σχ. 8.1 *Και οι δύο πυρήνες έχουν A=14. Ο πυρήνας όμως με Z=6 και N=8 έχει περίπου την ίδια ενέργεια με τον πυρήνα με Z=N=7, παρόλο που ο δεύτερος έχει ήδη κερδίσει 5 MeV περίπου λόγω του ότι N=Z. Επομένως οι πυρήνες με Z, N άρτιους έχουν ένα ενεργειακό πλεονέκτημα κατά δ έναντι αυτών με A περιττό και κατά 2δ έναντι αυτών με N, Z περιττούς.*

Ο τύπος (8.5΄) προέκυψε με βάση τη μάλλον στοιχειώδη ανάλυση της παρούσας ενότητας. Στη βιβλιογραφία δίνεται ένας όμοιος τύπος, όπου όμως οι συντελεστές έχουν προσαρμοσθεί με βάση εμπειρικά δεδομένα. Ο τύπος αυτός είναι ακόλουθος:

$$\boxed{B = (a_{I\Delta} - a_{K0})A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_K \frac{(N\text{-}Z)^2}{A} + \delta \ \text{MeV}} \qquad (8.5΄΄)$$

όπου $(a_{I\Delta} - a_{K0})$=15,75, β=17,8, γ=0,71, a_K=23.69. Πιο πρόσφατες εναλλακτικές τιμές των συντελεστών είναι αντιστοίχως: 15,5 16,8 0,72 23.

Είναι εντυπωσιακό πόσο λίγο διαφέρει ο δικός μας τύπος (8.5΄) από τον ημιεμπειρικό τύπο (8.5΄΄) (κυρίως στο συντελεστή του όρου $(N\text{-}Z)^2/A$).

8.2 Ελαχιστοποιώντας την ολική ενέργεια

Έχοντας την ολική ενέργεια $Zm_pc^2+Nm_nc^2-B$ μπορούμε να την ελαχιστοποιήσουμε ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους προκειμένου να υπολογίσουμε τις ιδιότητες του κάθε πυρήνα. Οι ελεύθερες παράμετροι είναι οι εξής:

(α) Ο αριθμός των πρωτονίων Z για δεδομένο A, οπότε $N=A\text{-}Z$. Ο αριθμός αυτός είναι ελεύθερος, αφού λόγω των ασθενών αλληλεπιδράσεων νετρόνια μπορούν να μετατραπούν σε πρωτόνια (βλέπε Σχ.1.4) ή πρωτόνια να μετατραπούν σε νετρόνια (βλέπε Σχ.1.5 και κείμενο που ακολουθεί) ανάλογα με το ποια από τις δύο διαδικασίες μειώνει την **ολική** ενέργεια του πυρήνα.

(β) Ο αριθμός των νουκλεονίων A μέσω διάσπασης του πυρήνα σε δύο ή περισσότερα θραύσματα[5]:

$$A \to A_1 + A_2 + \ldots \qquad (8.7)$$

(γ) Το μέγεθος του πυρήνα, που χαρακτηρίζεται από την παράμετρο a, του τύπου (8.1) ή (8.1΄). Για να υπολογίσουμε το a χρειαζόμαστε την εξάρτηση του ε, στον τύπο (8.3΄), από το a. Αν δεχτούμε ότι $\varepsilon \approx -78/d^{2,5} \approx -32.5/a^{0,83}$ MeV για d γύρω στα 2f προκύπτει η θεωρητική τιμή, $a \approx 3,3$ που συμπίπτει πρακτικά με την εμπειρική τιμή α=3,22.

Για να ελαχιστοποιήσουμε ως προς Z την ολική ενέργεια υπό σταθερό A, την παραγωγίζουμε ως προς Z (αφού θέσουμε $N=A\text{-}Z$ και αφού παραλείψουμε για απλότητα τον όρο δ) και μηδενίζουμε την παράγωγο, οπότε προκύπτει το ποσοστό των πρωτονίων ως συνάρτηση του A:

$$\boxed{\frac{Z}{A} = \frac{1 + \dfrac{(m_n - m_p)c^2}{4\alpha_K} + \dfrac{\gamma A^{-1/3}}{4\alpha_K}}{2 + \dfrac{\gamma A^{2/3}}{2\alpha_K}}} \qquad (8.8)$$

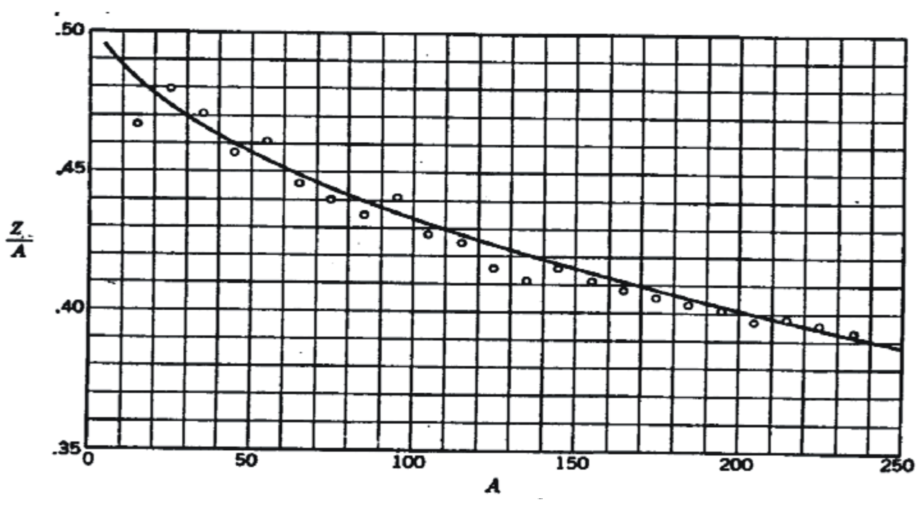
ή, αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές, έχουμε

[5] Το ένα από τα δύο θραύσματα μπορεί να είναι ο πυρήνας του Ηλίου 4 με A_1=4, N_1=Z_1=2 επειδή για το μέγεθός του έχει πολύ χαμηλή ενέργεια. Έχουμε τότε την ακτινοβολία α. Άλλη περίπτωση είναι η σχάση (για πολύ μεγάλους πυρήνες) όπου τα θραύσματα A_1, A_2 είναι παρόμοιου μεγέθους.

$$\frac{Z}{A} = \frac{1,0136 + 0,0075 / A^{1/3}}{2 + 0,015 A^{2/3}} \quad \text{ή, απλούστερα,} \quad \frac{Z}{A} \approx \frac{1,01}{2 + 0,015 A^{2/3}} \qquad (8.8')$$

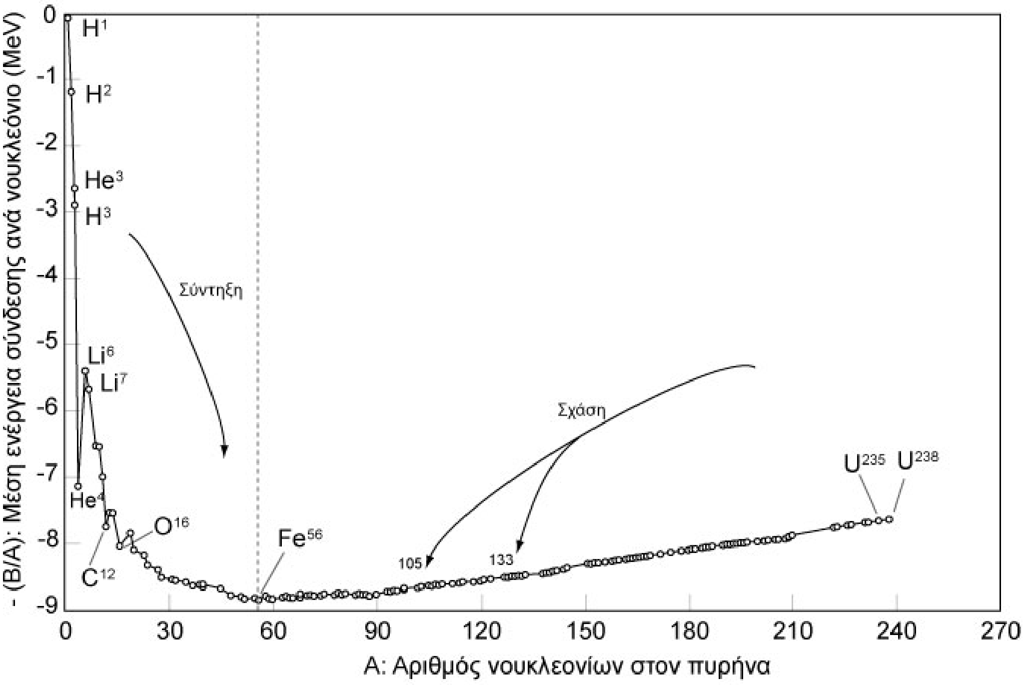
Από τον τύπο (8.8) προκύπτει ότι η απόκλιση του λόγου Z/A από την τιμή 1/2 οφείλεται κυρίως στο γ / α_K και ιδιαίτερα στον όρο $\gamma A^{2/3} / 2\alpha_K$ στον παρανομαστή της σχέσης (8.8). Από φυσική άποψη ο λόγος γ / α_K εκφράζει τον ανταγωνισμό μεταξύ ενέργειας Coulomb (που είναι ανάλογη του γ) και της απόκλισης από την τιμή Z/A=1/2 (που είναι ανάλογη του α_K και οφείλεται στην κινητική ενέργεια, η οποία ευνοεί την επιλογή N=Z). Έπεται ότι για τους μικρούς πυρήνες θα έχουμε Z/A$\approx$0,5, δηλαδή ίσο αριθμό πρωτονίων και νετρονίων. Καθώς εξετάζουμε μεγαλύτερους πυρήνες (μεγαλύτερο A) ο όρος της άπωσης (Coulomb) (που είναι υπεύθυνος για τον προσθετέο $\gamma A^{2/3} / 2\alpha_K$ στον παρανομαστή του τύπου (8.8) παίζει όλο και μεγαλύτερο ρόλο ευνοώντας φυσικά όσο το δυνατόν λιγότερα πρωτόνια. Μ' άλλα λόγια το ποσοστό των πρωτονίων καθορίζεται από τον ανταγωνισμό της κινητικής ενέργειας που ευνοεί N=Z=$A/2$ και της ενέργειας Coulomb που ευνοεί N=A-1, Z=1. Για μικρούς πυρήνες κυριαρχεί η κινητική ενέργεια και έχουμε $N \approx Z$. Για μεγάλους πυρήνες ο ρόλος των απώσεων Coulomb έναντι της κινητικής ενέργειας αυξάνει επειδή οι απώσεις αυτές είναι ανάλογες του $Z(Z-1)/A^{1/3} \propto A^{5/3}$, ενώ η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του A. Επομένως ο λόγος τους είναι ανάλογος του $A^{5/3}/A = A^{2/3}$ και έτσι δικαιολογείται ο παράγοντας $A^{2/3}$ που εμφανίζεται στον όρο $\gamma A^{2/3} / 2\alpha_K$. Πιο συγκεκριμένα ο λόγος ενέργειας Coulomb προς την απόκλιση της κινητικής ενέργειας από την τιμή Z/A=1/2 κυμαίνεται από 0,0378 για το He-4 έως 0,29 για το U-238.

Στο Σχ. 8.2 συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον τύπο (8.8) με τα πειραματικά δεδομένα για διάφορους πυρήνες με A περιττό (ώστε να είναι δ=0). Είναι πράγματι εντυπωσιακό πόσο καλά συμφωνεί η απλοϊκή μας θεωρία με τα πειραματικά δεδομένα.



Σχήμα 8.2 *Ο λόγος Z/A, όπως δίνεται από τον τύπο (8.8) (συνεχής γραμμή) και όπως προσδιορίζεται από το πείραμα για πυρήνες με A περιττό (ώστε να αποφευχθεί ο ρόλος του όρου δ που δεν ελήφθη υπόψη στον τύπο (8.8)). Leighton[34], σελ. 548*

Στο σχήμα 8.3 συγκρίνονται τα πειραματικά δεδομένα για την ποσότητα [6], $-B/A$, ως συνάρτηση του A, με τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα, βάσει του τύπου (8.5΄΄), και αφού γίνει η αντικατάσταση του Z και του $N=A-Z$ από τον τύπο (8.8).



Σχ. 8.3 *Η ποσότητα –B/A (σε* MeV*) ως συνάρτηση του A. Η συνεχής γραμμή είναι βάσει των τύπων (8.5΄΄), (8.8) (χωρίς τον όρο δ) και τα σημεία είναι τα πειραματικά δεδομένα. Παρατηρήστε ότι οι μικροί άρτιοι-άρτιοι πυρήνες (και ιδίως το* He^4*) έχουν αισθητά χαμηλότερη τιμή του –B/A, λόγω του όρου δ (Για το* He^4, $-B/A=-4.3$ MeV *(χωρίς τον όρο δ), ενώ με τον όρο* $\delta/A=34/4^{7/4}=3$MeV *η τιμή γίνεται* $-B/A=-7,3$ MeV*, δηλαδή, πολύ κοντά στην πειραματική τιμή* $-B/A\approx-7{,}074$ MeV. *Εν γένει η συμφωνία πειραματικών δεδομένων και απλοικής θεωρίας είναι εντυπωσιακά καλή. Σημειώστε ότι για μεγάλα A, A>100, η καμπύλη μπορεί να προσεγγισθεί αρκετά καλά από τη σχέση* $-B/A\approx-9{,}45+0{,}008A$

8.3 Απαντώντας σε μερικές εύλογες ερωτήσεις

Ο τύπος για την ολική ενέργεια του πυρήνα επιτρέπει να έχουμε απαντήσεις σε ορισμένες βασικές ερωτήσεις που αφορούν τη συμπεριφορά των διαφόρων πυρήνων.

1. *Γιατί οι πυρήνες είναι τέτοιοι τεράστιοι ενεργειακοί γίγαντες;*

Επειδή είναι τέτοιοι μικροσκοπικοί νάνοι σε μέγεθος: Πράγματι η ενεργειακή κλίμακα των πυρήνων καθορίζεται από την ενεργειακή κλίμακα της κινητικής ενέργειας ανά νουκλεόνιο, η οποία δίνεται περίπου από τη βασική σχέση:

---

[6] Συνήθως, στα περισσότερα βιβλία, δίνεται η γραφική παράσταση του B/A και όχι του $-B/A$. Είναι, νομίζω, προτιμότερο να σχεδιάζουμε το $-B/A$ γιατί το $-B/A$ δίνει ουσιαστικά την εικόνα της ολικής ενέργειας ανά νουκλεόνιο, $E_{ολ}/A$ (αφού $E_{ολ}/A \approx m_p c^2 - (B/A)$) και συνδέει το ελάχιστο με τη μεγαλύτερη σταθερότητα. Δίνει επίσης πιο παραστατικά γιατί παίρνουμε ενέργεια από τη σύντηξη ή τη σχάση.

$\varepsilon_K \approx \hbar^2 / m_p r_o^2$ που για $r_o \approx 1\text{fm}$ ισούται με περίπου 41,5 MeV.

2. Γιατί δεν υπάρχουν πυρήνες με $A \gtrsim 240$ *;*

Επειδή συμφέρει ενεργειακά (και είναι και εφικτή) η διάσπαση ενός πυρήνα με $A \gtrsim 240$ σε δύο κομμάτια. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που το ένα κομμάτι είναι ο πυρήνας του He^4, μια διαδικασία που είναι γνωστή ως διάσπαση-α. Για να συμβεί αυτή η διάσπαση θα πρέπει κατ' αρχήν η ενέργεια ηρεμίας των προϊόντων να είναι μικρότερη της ενέργειας ηρεμίας του αρχικού πυρήνα: $E(A) > E(A-4) + E(4)$ ή $B(A) < B(A-4) + B(4)$, όπου το *B* στην περιοχή μεγάλων τιμών του *A*-4 μπορεί να προσεγγισθεί από τη σχέση

$$B \times (A-4) \approx (A-4)\left[9{,}45 - 0{,}008(A-4)\right] \qquad (8.5''')$$

ενώ $B(4) = 4 \times 7{,}074 = 28{,}3\,\text{MeV}$. Αντικαθιστώντας στην ανισότητα βρίσκομε $A \geq 150{,}4$. Όμως η ύπαρξη ενεργειακού κέρδους δεν εξασφαλίζει το ότι η διάσπαση θα λάβει χώρα. Είναι και θέμα ενεργειακού φράγματος που αν είναι υψηλό και φαρδύ μπορεί να αποτρέψει πρακτικά τη διάσπαση. Άρα από τον προηγούμενο υπολογισμό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν θα πρέπει να υπάρχει διάσπαση-α σε πυρήνες με A μικρότερο ή περίπου ίσο με 150, ενώ μπορεί να γίνει για πυρήνες με $A \geq 150$. Τα πειραματικά δεδομένα είναι συμβατά με αυτά τα θεωρητικά συμπεράσματα: Δεν υπάρχει πυρήνας με $A < 144$ που να υφίσταται αυθόρμητη διάσπαση-α. Μεταξύ $144 \leq A \leq 151$ υπάρχουν μόνο πέντε πυρήνες που υπόκεινται σε διάσπαση-α, αλλά με τεράστιους χρόνους ζωής (της τάξεως του 10^{11} έτη!). Για A μεταξύ 152 και 208 είναι μερικοί πυρήνες που υφίστανται αυθόρμητη διάσπαση-α, αλλά η πλειονότητα είναι σταθεροί. Για $A > 208$ όλοι οι πυρήνες είναι μετασταθείς. Π.χ. το U^{238} μέσω μιας σειράς διασπάσεων-α και μετασχηματισμών-β καταλήγει στο σταθερό πυρήνα Pb^{206}.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση της αυθόρμητης σχάσης, δηλαδή του να σπάσει ο πυρήνας σε δύο κομμάτια παρόμοιου μεγέθους. Για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι τα δύο κομμάτια είναι ίσου μεγέθους, αν και άνισα κομμάτια έχουν μικρότερη ανηγμένη μάζα και επομένως μεγαλύτερη πιθανότητα να ξεπεράσουν ένα ενδεχόμενο φράγμα δυναμικού μέσω του κβαντομηχανικού φαινομένου σήραγγος. Η διαφορά ενέργειας ΔΕ μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης ισούται με $\Delta\mathrm{E} = 0{,}37\gamma Z^2 / A^{1/3} - 0{,}26\beta A^{2/3}$. Για να φτάσουμε στη σχέση αυτή για το ΔΕ προσεγγίσαμε το *Z*-1 με *Z* στον τύπο (8.5΄΄). Χρησιμοποιώντας τις τιμές $\beta = 17{,}8$ και $\gamma = 0{,}71$ βρίσκουμε ότι το ΔΕ γίνεται θετικό όταν $Z^2 / A \geq 17{,}62$ που αντιστοιχεί περίπου στο Ζιρκόνιο με *Z*=40, Α=91 και $Z^2 / A = 17{,}58$. Αυτό που διασώζει τους πυρήνες των υπόλοιπων στοιχείων του Περιοδικού Πίνακα από $Z = 41$ έως $Z = 92$ είναι το φράγμα δυναμικού που αποτρέπει την αυθόρμητη σχάση τους και καθιστά το φαινόμενο σήραγγας πολύ απίθανο δεδομένου ότι η ανηγμένη μάζα των θραυσμάτων είναι πολύ μεγάλη, μεγαλύτερη του 24 m_p. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το ύψος E_B του φράγματος αυτού για να βεβαιωθούμε ότι έχει πράγματι την απαιτούμενη τιμή. Όπως φαίνεται στο Σχ. 8.4 (σελ. 111) το E_B ισούται με τη διαφορά $E_c - \Delta\mathrm{E}$, όπου το ΔΕ είναι η ενεργειακή διαφορά που μόλις υπολογίσαμε και E_c

είναι η μέγιστη τιμή της άπωσης Coulomb που προκύπτει εάν αντιστρέψουμε την πορεία των δύο θραυσμάτων και τα υποχρεώσουμε να πλησιάσουν μεταξύ τους όχι όμως τόσο κοντά ώστε η ισχυρή πυρηνική δύναμη να γίνει σημαντική. Η ενέργεια αυτή Coulomb δίνεται από το γνωστό τύπο $E_c = Z_1 Z_2 e^2 / d_i$, όπου η απόσταση d_i που αντιστοιχεί στο μέγιστο μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής, $d_i \approx R_1 + R_2 + 4\,\mathrm{fm}$, όπου R_1 και R_2 είναι οι ακτίνες των δύο θραυσμάτων και η απόσταση $4\,\mathrm{fm}$ εξασφαλίζει ότι η πυρηνική έλξη δεν έχει πάρει σημαντικές τιμές. Λαμβάνοντας υπόψη την (8.1΄) και υποθέτοντας ότι η τελική τιμή του A θα είναι γύρω στο 300 μπορούμε να εκφράσουμε το d_i στην πιο βολική μορφή $d_i \approx 1,62(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \approx 2,58A^{1/3}$, αφού $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}A$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του d_i στον τύπο για τη μέγιστη άπωση Coulomb βρίσκουμε $E_c \approx 0,1394Z^2 A^{-1/3}$ και επομένως το ύψος του ενεργειακού φράγματος προκύπτει ίσο με $E_B = 4,628A^{2/3} - 0,1233Z^2 / A^{-1/3}$. Το φράγμα αυτό μηδενίζεται σύμφωνα με τα παραπάνω όταν $Z^2 / A \approx 38$. Για το U^{238} ο λόγος Z^2 / A είναι ίσο με 35,56, δηλαδή σαφώς κάτω από το υπολογισθέν όριο του 38. Επομένως, το όριο άνω του οποίου κανένας πυρήνας δεν μπορεί να υπάρξει γιατί θα υποστεί άμεση[7] σχάση προκύπτει από τους υπολογισμούς μας (με βάση τον παρακάτω πίνακα) ότι είναι ο τρανσουράνιος πυρήνας $Z = 98$, $A = 250$.

A	Z / A (7.8')	Z	Z^2 / A
250	0,393	98	38,42
270	0,388	105	40,83
275	0,387	106	40,85
285	0,3827	109	41,69
290	0,3816	111	42,49
295	0,3805	112	42,52
300	0,3795	114	43,32
305	0,3784	115	43,36

Στο φυσικό περιβάλλον της Γης δεν υπάρχει κανείς πυρήνας με A μεγαλύτερο του 250. Πειραματικά έχουν δημιουργηθεί μεγαλύτεροι μετασταθείς, εξαιρετικά βραχύβιοι πυρήνες, όπως αυτός με $Z = 116$ και $A = 292$ $(Z^2 / A = 46)$ ή αυτός με $Z = 114$ και $A = 298$ $(Z^2 / A = 43.61)$. Το συμπέρασμα είναι ότι η απλοϊκή μας θεωρία παράγει αποτελέσματα κοντά στην πραγματικότητα, η οποία δείχνει ότι το άνω όριο αστάθειας λόγω άμεσης αυθόρμητης σχάσης είναι κοντά στο A=300 και ότι δεν εξαρτάται μόνο από το λόγο Z^2 / A αλλά και από από άλλους παράγοντες όπως είναι π.χ. οι λεπτομέρειας των ενεργειακών σταθμών.

[7] Σχάση μπορεί να υπάρξει και κάτω του ορίου $Z^2 / A = 38$ λόγω κβαντομηχνικού φαινομένου σήραγγας. Αυτό όμως θα οδηγήσει σε μετασταθείς καταστάσεις με μη μηδενικό χρόνο ζωής, ενώ η άμεση σχάση σημαίνει ασταθείς καταστάσεις με μηδενικό χρόνο ζωής.

3. Πόση ενέργεια εκλύεται από τη σχάση του U^{235};

Ο τύπος $\Delta E = 0,2627Z^2 / A^{1/3} - 4,628A^{2/3}$ δίνει $\Delta E = 184,1\,\text{MeV}$ ανά πυρήνα U^{235} έναντι $180,9\,\text{MeV}$ που είναι η πειραματική τιμή. Οι παραπάνω τιμές δεν περιλαμβάνουν την ενέργεια των $30,4\,\text{MeV}$ που εκλύεται στη συνέχεια λόγω ραδιενεργού διάσπασης των θραυσμάτων. Από αυτά τα $30,4\,\text{MeV}$ ένα μέρος ίσο με 21,6 MeV μένει στον αντιδραστήρα και προστίθεται στα 180,9 για να δώσει συνολικά $202,5\,\text{MeV}$ ανά πυρήνα U^{235}, ενώ τα υπόλοιπα $8,8\,\text{MeV}$ είναι η ενέργεια των αντινετρίνων τα οποία την μεταφέρουν στο Σύμπαν. Για τη μέγιστη ενέργεια Coulomb βρίσκουμε από τον τύπο $E_c \approx 0,1394Z^2 / A^{1/3}$, $E_c = 191,2\,\text{MeV}$, ενώ η πειραματική τιμή είναι $186,9\,\text{MeV}$. Επομένως η πειραματική τιμή για το ύψος του φράγματος δυναμικού στο U^{235} είναι περίπου $6\,\text{MeV}$, ενώ η πειραματική τιμή για το U^{238} είναι κατά τι μεγαλύτερη (γύρω στο $6,2\,\text{MeV}$).

4. Γιατί το U^{235} είναι σχάσιμο ενώ το U^{238} δεν είναι;

Επειδή η αύξηση της ενέργειας του U^{235} με την ενσωμάτωση ενός νετρονίου μηδενικής κινητικής ενέργειας υπερβαίνει το φράγμα δυναμικού, ενώ στο U^{238} δεν το υπερβαίνει. Είδαμε ότι στα ισότοπα του Ουρανίου υπάρχει ένα φράγμα δυναμικού της τάξεως των $6\,\text{MeV}$ που αποτρέπει την άμεση αυθόρμητη σχάση. Η τελευταία μπορεί να συμβεί μόνο μέσω του φαινομένου της σήραγγας και αυτό σπάνια λόγω του ότι η ανηγμένη μάζα των θραυσμάτων, $m \approx 56m_p$, είναι πολύ μεγάλη (για κάθε 50 εκατομμύρια διασπάσεις-α συμβαίνει κατά μέσο όρο μια μόνο αυθόρμητη σχάση). Όμως η σχάση μπορεί να γίνει άμεση αν στον πυρήνα A, Z ενσωματωθεί ένα νετρόνιο. Ο νέος πυρήνας που θα προκύψει, $A+1, Z$ θα έχει ενέργεια $E^*(A+1,Z)$ ίση με $E(A,Z)+\varepsilon_K$, λόγω διατήρησης της ενέργειας, όπου ο αστερίσκος σημαίνει ότι νέος πυρήνας μπορεί να είναι σε διεγερμένη κατάσταση και ε_K είναι η κινητική ενέργεια του νετρονίου. Και από τα δύο μέλη της ισότητας έχει αφαιρεθεί η ενέργεια $Nm_pc^2 + Zm_pc^2$ ώστε να έχουμε τη σχέση $\delta E \equiv E^*(A+1,Z) - E(A+1,Z) = E(A,Z) + \varepsilon_K - E(A+1,Z) = -B(A,Z) + \varepsilon_K + B(A+1,Z)$. Χρησιμοποιώντας τη προσεγγιστική σχέση (8.5′′′) που ισχύει για μεγάλα A, $B = 9,45A - 0,008A^2 + \delta$ έχουμε ότι

$$\delta E = \varepsilon_K + 9,45 - 0,016A + \delta(A+1) - \delta(A)$$

Όταν η κινητική ενέργεια του νετρονίου είναι πρακτικά μηδέν[8], έχουμε $\delta E = 6,24\,\text{MeV}$ για το U^{235} και 5,07 MeV για το U^{238}. Η διαφορά στο δE μεταξύ των δύο ισοτόπων οφείλεται κυρίως στο ότι για A μονό (όπως το U^{235})

[8] Όσο πιο μικρή η κινητική ενέργεια του νετρονίου τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα ενσωμάτωσης στον πυρήνα. Γι' αυτό το λόγο στους πυρηνικούς αντιδραστήρες επιβραδύνουμε τα νετρόνια.

το $+\delta(A+1)-\delta(A)$ είναι θετικό και περίπου ίσο με $34/A^{3/4}$, ενώ για A ζυγό το $+\delta(A+1)-\delta(A)$ είναι αρνητικό και ίσο με $-34/A^{3/4}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι το δE είναι μεγαλύτερο από το φράγμα δυναμικού E_B για το U^{235} και επομένως ο πυρήνας U^{235} θα οδηγηθεί σε άμεση σχάση με την ενσωμάτωση ενός νετρονίου ακόμη και μηδενικής κινητικής ενέργειας, είναι δηλαδή εξ ορισμού σχάσιμος, όπως σχάσιμοι είναι και οι μονοί τεχνητοί πυρήνες Pu^{239} και U^{233}. Αντίθετα το U^{238} δεν είναι σχάσιμο γιατί η ενσωμάτωση ενός νετρονίου μηδενικής κινητικής ενέργειας δεν του προσδίδει αρκετή ενέργεια ώστε να ξεπεράσει το φράγμα δυναμικού. Για να υποστεί άμεση σχάση το U^{238} θα πρέπει το νετρόνιο που θα ενσωματωθεί να έχει κινητική ενέργεια τουλάχιστον ίση με $6,2-5,07 \approx 1,1\,\text{MeV}$, που είναι και η πειραματική τιμή. Αλλά και τότε το αμιγές U^{238} δεν μπορεί να θεωρηθεί σχάσιμο γιατί η πιθανότητα ενσωμάτωσης ενός νετρονίου τόσο υψηλής κινητικής ενέργειας είναι πολύ μικρή για να οδηγήσει σε αλυσωτή αντίδραση.

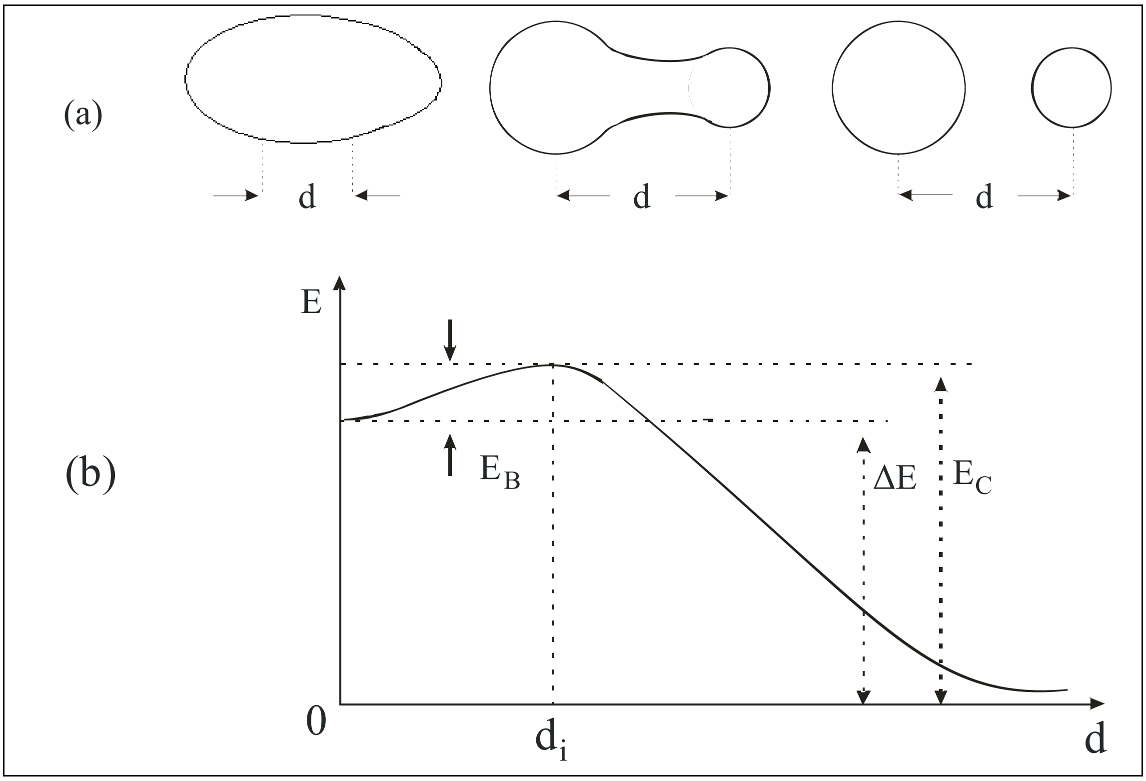
5. *Γιατί τα θραύσματα της σχάσης μεγάλων πυρήνων είναι ραδιενεργά*;

Επειδή έχουν κληρονομήσει από το μητρικό πυρήνα το ποσοστό των νετρονίων (περίπου 61%) που του αναλογεί, ενώ για τα θραύσματα το ποσοστό των νετρονίων που ελαχιστοποιεί την ολική τους ενέργεια είναι χαμηλότερο γύρω στο 55% με 58% (βλέπε Σχ.8.2). Άρα νετρόνια θα μετατραπούν σε πρωτόνια μέσω της “διάσπασης”-*β*, εκπέμποντας ηλεκτρόνια και αντινετρίνα. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις μετά τη διάσπαση-*β* ο πυρήνας είναι σε διεγερμένη κατάσταση και αποδιεγείρεται εκπέμποντας φωτόνιο υψηλής ενέργειας, δηλαδή ακτίνες γ. Οι συνέπειες της ραδιενέργειας οφείλονται στην εκπομπή ηλεκτρονίων και ακτίνων γ.

6. *Πόσοι σταθεροί πυρήνες υπάρχουν με διαφορετικό A*;

Αφού για κάθε A υπάρχει μια τιμή του Z που ελαχιστοποιεί την ολική ενέργεια, είναι λογικό να περιμένουμε ότι θα υπάρχουν τόσοι διαφορετικοί πυρήνες όσο είναι το μέγιστο A που αντιστοιχεί σε σταθερό πυρήνα. Μία προφανής εξαίρεση σε αυτό το συμπέρασμα είναι η περίπτωση που το Z το οποίο ελαχιστοποιεί την ενέργεια να πέφτει ακριβώς στη μέση μεταξύ δύο διαδοχικών ακέραιων έτσι ώστε και οι δύο αυτοί ακέραιοι να δίνουν την ίδια συνολική ενέργεια. Αυτό συμβαίνει σε τέσσερις περιπτώσεις μονών πυρήνων (Γιατί δεν θα μπορούσε να συμβεί σε ζυγό πυρήνα;): $A=87$ και $Z=38$ ή 37. $A=113$ και $Z=49$ ή 48. $A=115$ και *Z*=50 ή 49. *A*=123 και *Z*=51 ή 52. Όμως οι ζυγοί πυρήνες είναι αρκετά περισσότεροι από ό,τι θα περίμενε κανείς με βάση το επιχείρημα του Z που ελαχιστοποιεί την ολική ενέργεια. Για να δείτε το λόγο θεωρήστε τρεις ζυγούς πυρήνες με το ίδιο *A*: (Z, N), (Z-1, N+1), (Z-2, N+2) και με το Z ζυγό. Υποθέστε ακόμη ότι ο πυρήνας (Z, N) έχει τη μικρότερη ενέργεια ανάμεσα στους τρεις. Λόγω του όρου δ είναι δυνατόν ο μονός/μονός πυρήνας (Z-1, N+1) να έχει τη μεγαλύτερη ενέργεια και από τους τρεις. Αυτό όμως καθιστά τον πυρήνα (Z-2, N+2) σταθερό, γιατί η μετάβασή του στον πυρήνα (Z, N) μέσω δύο *διαδοχικών* διασπάσεων-*β* είναι απαγορευμένη αφού περνάει από τον υψηλότερης ενέργειας πυρήνα (Z-1, N+1), εκτός εάν μια ταυτόχρονη διπλή διάσπαση-*β* είναι εφικτή. Έτσι για το ίδιο ζυγό *A* είναι δυνατό να έχουμε δύο ή και τρεις σταθερούς ζυγούς/ζυγούς πυρήνες.

Το αποτέλεσμα είναι ότι ο συνολικός αριθμός σταθερών πυρήνων που αντιστοιχεί σε τιμές του A από 1 έως 208 και τιμές του Z από 1 έως 82 (με εξαίρεση τους τεχνητούς ραδιενεργούς πυρήνες Z=43 (Tc) και Z=61 (Pm)) είναι περίπου 270.



Σχ.8.4. (α) *Η σχάση ενός πυρήνα ακολουθεί το στάδιο της επιμήκυνσης, της ανάπτυξης ενός «λαιμού» και τέλος αυτό του διαχωρισμού συνήθως σε δύο θυγατρικούς πυρήνες με τον μικρότερο να έχει A γύρω στο 95 και τον μεγαλύτερο να έχει A γύρω στο 140 (Βλ. Eisberg and Resnick, Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles, J. Wiley, New York, 1974, p. 654).* (β) *Η μεταβολή της ενέργειας ενός σχάσιμου πυρήνα ως συνάρτησης της απόστασης d, όπως προσδιορίζεται από το* (α)

Για πιο λεπτομερείς απαντήσεις βλ. το βιβλίο, *Η Φυσική Σήμερα* Τόμος ΙΙ, σελ. 69-84, καθώς και το βιβλιο του Leighton, *Principles of Modern Physics*, McGraw-Hill, New York (1959).

Επίλεκτα προβλήματα

1. Το Ουράνιο 238 έχει χρόνο υποδιπλασιασμού ίσο με $4{,}51\times10^9$ έτη. Πόσες διασπάσεις ανά δευτερόλεπτο (δηλαδή πόσα Bequerel) συμβαίνουν σ' ένα γραμμάριο Ουρανίου 238; Γιατί το Ουράνιο είναι ραδιενεργό; Ποια είναι η ηλεκτρονική δομή του ατόμου του Ουρανίου; Από πόσα νετρόνια και από πόσα πρωτόνια αποτελείται ο πυρήνας του Ουρανίου 238; Το Ουράνιο 238 έπειτα από μια σειρά *α*- και β^- διασπάσεων (εκπέμποντας συνολικά 8*α* και 6β^- σωμάτια) καταλήγει σε μόλυβδο 206. Πόση ενέργεια απελευθερώνεται συνολικά ανά διάσπαση Ουρανίου 238 μέχρι να καταλήξει στο *Pb*-206; (Δίνεται ότι η διαφορά $Mc^2 - Am_uc^2$ είναι 116,6 MeV, 36,15 MeV και 3,607 MeV για το *U*-238, το *Pb*-206 και το *He*-4 αντιστοίχως). Σε τι διαφέρει το *U*-235 από το Ουράνιο 238; Ποια είναι η περιεκτικότητα του φυσικού Ουρανίου σε *U*-238 και *U*-235; Τι είναι το απεμπλουτισμένο ουράνιο (*Depleted Uranium, DU*); Πως επιτυγχάνεται; Με φυσικές ή χημικές μεθόδους ; Με ποιες;
2. Γιατί τα ραδιενεργά κατάλοιπα ενός πυρηνικού αντιδραστήρα σχάσεως εκπέμπουν ακτινοβολία *β* (δηλαδή ηλεκτρόνια;).
3. Γιατί οι πυρηνικοί αντιδραστήρες χρησιμοποιούν κάποιο υλικό ως επιβραδυντή; Γιατί το βαρύ ύδωρ είναι ο προτιμότερος επιβραδυντής (αγνοώντας το κόστος);
4. Ποια πυρηνική αντίδραση αποτελεί το πρώτο βήμα στη θερμοπυρηνική σύντηξη του υδρογόνου προς ήλιο (κύκλος καύσης pp) και ποια η σημασία της; Ποια χαρακτηριστική θερμοκρασία απαιτείται για την έναρξη της καύσης του κύκλου pp; Ποιος είναι ο ρυθμός καύσης υδρογόνου προς ήλιο στο εσωτερικό του Ήλιου (σε τόνους/sec);
5. Ένα ελεύθερο νετρόνιο διασπάται σύμφωνα με την εξώθερμη αντίδραση, $n \rightarrow p + e + \overline{\nu}_e + 0{,}78\,\mathrm{MeV}$. Γιατί όλα τα νετρόνια κάθε πυρήνα δεν μετατρέπονται σε πρωτόνια;
6. Η ενέργεια συνδέσεως ενός πυρήνα είναι περίπου 8 MeV ανά νουκλεόνιο. Γιατί είναι τόσο μεγάλη;
7. Η κατανομή του μαζικού αριθμού των θραυσμάτων της σχάσης που οφείλεται σε ενσωμάτωση νετρονίου εξαρτάται από την ενέργεια του νετρονίου. Σ' ένα πυρηνικό αντιδραστήρα παρουσιάζει δύο μέγιστα για *A*=92 και *A*=140 και ένα έντονο ελάχιστο στο μέσο (*A*=116). Αντίθετα στην περίπτωση πυρηνικών όπλων και τα μέγιστα και το ελάχιστο είναι «στρογγυλεμένα» μέχρι σημείου να είναι δυσδιάκριτα. Έχετε κάποια εξήγηση;
8. Γιατί το He^4 είναι τόσο έξω από τη συνεχή καμπύλη του Σχ. 7;
9. Το φυσικό ουράνιο αποτελείται από U^{238} σε ποσοστό 99,3% και από U^{235} σε ποσοστό 0,7%. Οι αντίστοιχοι χρόνοι ημισείας ζωής είναι $4{,}51\times10^9$ έτη και $7{,}1\times10^8$ έτη. Δώστε κάποια όρια για την ηλικία του Σύμπαντος και για την ηλικία του πλανητικού μας συστήματος.