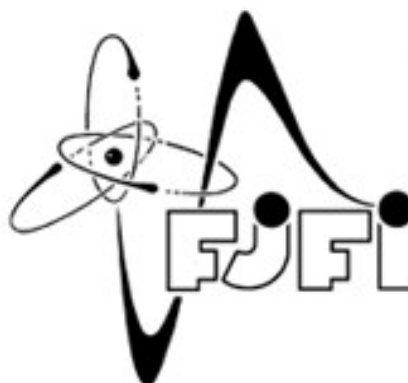


České vysoké učení technické v Praze

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

**Katedra fyziky
Jaderné inženýrství
Experimentální jaderná fyzika**



Struktura nukleonu v termodynamickém přiblížení

Bakalářská práce

**Autor: Lukáš Ferencz
Vedoucí práce: Mgr. Petr Závada, CSc., DSc.
Rok odevzdání: 2013**

Zadání práce

Prehlásenie

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracoval samostatne a použil som len podklady, uvedené v priloženom zozname.

Nemám závažný dôvod proti použitiu tohto školského diela v zmysle § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov.

V Prahe dňa

.....
podpis

Názov práce: Štruktúra nukleónu v termodynamickom priblížení
Autor práce: Lukáš Ferencz
Obor: Jadrové inžinierstvo
Druh práce: Bakalárska práca
Veduci práce: Mgr. Petr Závada, CSc., DSc.
Fyzikální ústav AV ČR, v.v.i.

Abstrakt

Táto práca si kladie za cieľ zhrnúť niektoré možné modely popisu nukleónu postavených na metódach známych z termodynamiky a štatistickej fyziky. Základom experimentu, na ktorom je celá myšlienka získavania obrazu vnútorného sveta protónu resp. neutrónu založená, je hlboký nepružný rozptyl leptónu na nukleóne. Tento fenomén zohráva dôležitú úlohu pri extrahovaní štruktúrnych funkcií z diferenciálneho účinného prierezu, ktoré sú vhodným matematickým prostriedkom pre popis vnútornej štruktúry nukleónu. Súčasne existuje kvark-partonový model, poskytujúci distribučné funkcie kvarkov a gluónov, ktoré v prípade kvarkov a antikvarkov priamo vstupujú do štruktúrnych funkcií s kvadrátmi ich nábojov. V závere práce je zároveň naznačený význam priečnej zložky hybnosti, ktorá sa stáva dôležitou pri vysokých hodnotách Bjorkenovej premennej x a dáva tak námet pre teoretický a experimentálny výskum distribučných partonových funkcií závislých na tejto veličine. Okrem zmienených termodynamických modelov je možné formulovať aj prístupy, ktorých myšlienka nepochádza z termodynamiky a štatistickej fyziky, napr. kovariantný model, ktorý získava pri trojrozmernej interpretácii kvarku obzvlášť veľký význam.

Kľúčové slová: hlboký nepružný rozptyl, kvark-partonový model, štruktúrne funkcie, termodynamický popis, EMC efekt

Abstract

The aim of this work is to summarize some possible models of nucleon description based on the methods known from thermodynamics and statistical physics. The essence of experiment, which the whole idea of obtaining the picture of inner world of proton or neutron is based on, is the deep inelastic scattering of lepton at nucleon. This phenomenon plays the crucial role in extraction of structure functions from differential cross-section, that are suitable mathematical instruments for describing the inner structure of nucleon. There exists quark-parton model as well which yields quark- and gluon distribution functions that in case of quarks and antiquarks enter these structure functions together with the roots of their charges. At the end of the work, there is also denoted meaning of transversal component of momentum, which becomes important in high values of Bjorken variable x and gives us a motive for theoretical and experimental research of transverse momentum dependent parton distributions. Except the mentioned thermodynamical models, it is also possible to formulate "non-thermodynamical" approaches, e.g. the covariant model that becomes important in three-dimensional interpretation of quark.

Keywords: deep inelastic scattering, quark-parton model, structure functions, thermodynamic approach, EMC effect

Pod'akovanie

Rád by som poďakoval pánovi Mgr. Petrovi Závadovi, CSc., DSc. za ochotu, trpezlivosť a cenné rady, poskytnuté počas veľmi prínosných konzultácií, ktoré viedli k finálnej podobe tejto bakalárskej práce.

Lukáš Ferencz

Obsah

1 Úvod	7
2 Systematika elementárnych častíc	8
3 Skúmanie subatómovej štruktúry hmoty	10
3.1 Hlboký nepružný rozptyl	10
3.2 Štruktúrne a distribučné funkcie	12
4 Termodynamický a štatistický popis sústav s veľkým počtom častíc	17
4.1 Štatistická entropia	17
4.2 Kanonický a grandkanonický súbor	18
4.3 Termodynamické potenciály	20
5 Štatistické rozdelenia systémov s veľkým počtom častíc	22
5.1 Maxwelllovo – Boltzmannovo rozdelenie	22
5.2 Boseho – Einsteinovo rozdelenie	22
5.3 Fermiho – Diracovo rozdelenie	23
5.4 Aplikácia štatistických rozdelení: Fermiho – Diracov model atómového jadra	23
6 Úvod do modelov nukleónu v termodynamickom priblížení	25
6.1 Štatistické formule pre Model 1 a Model 2	25
6.2 Štatistické formule pre Model 3	25
7 Modely nukleónu v termodynamickom priblížení	26
7.1 Model 1 – Bhaleraov model	26
7.2 Model 2 - BKR model	30
7.3 Model 3 – Buccellov - Sofferov model	35
8 Kovariantný a nekovariantný kvark-partónový model	46
9 Záver	47

Kapitola 1

Úvod

Dôležitým a veľmi zaujímavým javom v oblasti jadrovej a časticovej fyziky je hlboký nepružný rozptyl, označovaný aj ako DIS, z anglického Deep Inelastic Scattering. Jeho význam je možné pozorovať pri získavaní dostatočne dobrého obrazu o vnútornej štruktúre nukleónu v reči štruktúrnych funkcií a distribúcií valenčných a morských kvarkov. Tak ako ukazujú rôzne odborné publikácie, citované v tejto práci, je navyše možné kvarkovú štruktúru nukleónu popísať metódami termodynamiky a štatistickej fyziky, ktoré nahliadajú na vnútorný svet protónu a neutrónu ako na plyn vzájomne neinteragujúcich partónov a vytvárajú tak spojovací most medzi popisom klasického plynu a kvantovými časticami. Cieľom tejto práce je vytvoriť prierez niektorých navrhnutých termodynamických modelov a zároveň porovnať výhody a nevýhody rôznych prístupov na základe údajov získaných z experimentálnych pozorovaní. Snahou bolo taktiež dodržať notáciu veličín v súlade s oblasťou fyziky elementárnych častíc, napr. prirodzená sústava jednotiek. V kapitolách o jednotlivých modeloch sa dodržiava značenie podľa odborných publikácií, v ktorých boli tieto návrhy prezentované.

Druhá kapitola si kladie za cieľ zhrnúť najdôležitejšie poznatky zo sveta subatómových častíc a ich konštituentov a v uvedených tabuľkách podáva obraz o niektorých ich vlastnostiach. Prítomná je taktiež stručná charakteristika štyroch interakcií. Nadväzujúca časť o skúmaní subatómovej štruktúry hmoty vytvára pôdu pre matematický popis nukleónu v jazyku týchto funkcií. Prevedená je taktiež analýza procesu zrážky vysokoenergetického leptónu a terčového protónu, pričom sa uvažuje jednofotónová výmena a súčasne je zdôraznený význam dvoch invariantných veličín, Bjorkenovej premennej a kvadrátu prenesenej hybnosti. Štvrtá kapitola predstavuje fundamentálne veličiny známe z termodynamiky a štatistickej fyziky aplikované na klasický plyn. Piata kapitola zhrňuje poznatky o Maxwellovej, Boseho – Einsteinovej a Fermiho – Diracovej štatistike a matematicky ich formuluje. Taktiež poukazuje na štatistickú aplikáciu u Fermiho – Diracovho modelu atómového jadra, ktorý tvorí akýsi prechodový stupeň medzi popisom jadier a nukleónov. Tento model je užitočný napríklad pri určení hĺbky potenciálovej jamy v atómovom jadre. Ťažiskom práce zostávajú šiesta a siedma kapitola, pretože ukazujú niekoľko rôznych možných pohľadov na termodynamický popis nukleónov. Aj keď sa formule známe zo štatistickej fyziky na prvý pohľad líšia prítomnosťou jednotlivých parametrov, sú ale obecné po formálnej stránke rovnaké a týmto nepatrným rozdielom vlastne len zdôrazňujú odlišný prístup rôznych termodynamických modelov. V príslušných grafoch je taktiež prevedené zrovnanie teoretických prognóz a experimentálne určených dát a v texte je vysvetlený popis jednotlivých členov prítomných v daných vzťahoch, hlavne ich dominancia podľa veľkosti parametru x – Bjorkenovej premennej. Samotný záver fenomenologických modelov ešte obsahuje krátky náhľad na „netermodynamický“ prístup a charakterizuje tak nekovariantný a kovariantný kvark-partónový model spolu s ich výhodami a nevýhodami použitia.

Ako bude možné vidieť z uvedených výsledkov, ukazuje sa, že štatistický (termodynamický) popis nukleónov je dostatočne dobrým vodítkom pri pozorovaní vnútorného sveta týchto subatómových častíc. V závislosti na vybranej metóde teda môžeme pozorovať ich štruktúru vyjadrenú pomocou príslušných modelovo závislých distribúcií a ich vzťah k experimentálne zmeraným štruktúrnym funkciám.

Kapitola 2

Systematika elementárnych častíc

Súčasnú predstavu o vnútornej štruktúre nukleónov sa opierajú o existenciu tzv. partónov (kvarkov, antikvarkov a gluónov), čiže konštituentov uväznených vo vnútri protónov a neutrónov. Kvarky, ktoré všeobecne zaradíme medzi fermióny kvôli poločíslenému spinu, sú rozdelené do troch rodín tak ako je uvedené v Tab.2.1 a každý jeden z nich má spin $s=1/2$, baryónové číslo $B=1/3$ a leptónové číslo $L=0$. Ku každému kvarku existuje tzv. antikvark vyznačujúci sa presne opačnými hodnotami náboju a baryónového čísla.

Generácia	Typ kvarku	Elektrický náboj [e]
I.	horný kvark (up – u)	$2/3$
I.	dolný kvark (down – d)	$-1/3$
II.	pôvabný kvark (charm – c)	$2/3$
II.	podivný kvark (strange – s)	$-1/3$
III.	vrchný kvark (top – t)	$2/3$
III.	spodný kvark (bottom – b)	$-1/3$

Tab.2.1: Typy kvarkov [1].

Uvedené kvarky (antikvarky) sa môžu spájať do hadrónov, ktoré rozdeľujeme na baryóny, čiže hadróny všeobecne zapísané ako kombinácia troch kvarkov resp. antikvarkov a mezóny zložené z jedného kvarku a jedného antikvarku. Analogicky ako u kvarkov k nim definujeme ich antičastice. Príklady niektorých sú uvedené v Tab.2.2, resp. v Tab.2.3, vrátane ich kvarkového zloženia.

Ďalšími dôležitými reprezentantmi subatómovej štruktúry sú leptóny, patriace taktiež medzi fermióny, charakteristické spinom $s=1/2$, baryónovým číslom $B=0$ a leptónovým číslom $L=1$. Taktiež k nim môžeme priradiť ich antičastice s opačnými hodnotami náboja a leptónového čísla.

Baryón	Symbol	Kvarkové zloženie	Elektrický náboj [e]
protón	p	uud	1
neutrón	n	udd	0
lambda	Λ^0	uds	0
antiprotón	\bar{p}	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	-1
sigma plus	Σ^+	uus	1
omega minus	Ω^-	sss	-1

Tab.2.2 : Prehľad niektorých baryónov [1].

Mezón	Symbol	Kvarkové zloženie	Elektrický náboj [e]
pión	π^0	$u\bar{u}$	0
kaón	K^0	$d\bar{s}$	0
ró plus	ρ^+	$u\bar{d}$	1
B nula	B^0	$d\bar{b}$	0

Tab.2.3: Prehľad niektorých mezónov [1].

Poslednú skupinu predstavujú kvantá kalibračných polí, ktoré slúžia na sprostredkovanie interakcie medzi jednotlivými časticami a vďaka celočíselnému spinu ($s=1$, v prípade zatiaľ hypotetického gravitónu $s=2$) ich zaradujeme medzi bozóny. V prírode nachádzame štyri typy interakcií: silnú, slabú, elektromagnetickú a gravitačnú. Silná interakcia je uskutočňovaná gluónmi: $g_i, i \in \hat{8}$ a je zodpovedná za viazanie kvarkov v hadrónoch a viaže nukleóny v atómovom jadre. Intermediátormi slabej interakcie sú intermediálne bozóny: W^+, W^-, Z^0 , ktoré pôsobia medzi všetkými typmi kvarkov a leptónov a spôsobujú napríklad β rozpad. Pokiaľ obe interagujúce častice nesú elektrický náboj, tak z hľadiska kvantovej teórie si vymieňajú virtuálny fotón a jedná sa o elektromagnetickú interakciu, ktoré je zodpovedná za viazanie elektrónu v poli atómového jadra. Posledným typom je gravitačná interakcia, sprostredkovaná zatiaľ hypotetickou časticou, nazvanou gravitón. Avšak, vzhľadom k jej relatívnej veľkosti, sa jej účinok v jadrovej a subjadrovej fyzike zanedbáva. Stručný prehľad interakcií je zhrnutý v Tab.2.4.

Typ interakcie	Relatívna sila interakcie	Dosah [m]	Intermediálna častica	Hmotnosť intermediálnej častice [GeV]
silná	1	10^{-15}	gluón: $g_i, i \in \hat{8}$	0
slabá	10^{-7}	10^{-18}	intermediálny bozón: W^+, W^-, Z^0	80,4 (W^+, W^-) 91,2 (Z^0)
elektromagnetická	10^{-2}	∞	fotón: γ	0
gravitačná	10^{-39}	∞	gravitón: G	0

Tab.2.4: Prehľad typov interakcií a ich vlastností [1].

Kapitola 3

Skúmanie subatómovej štruktúry hmoty

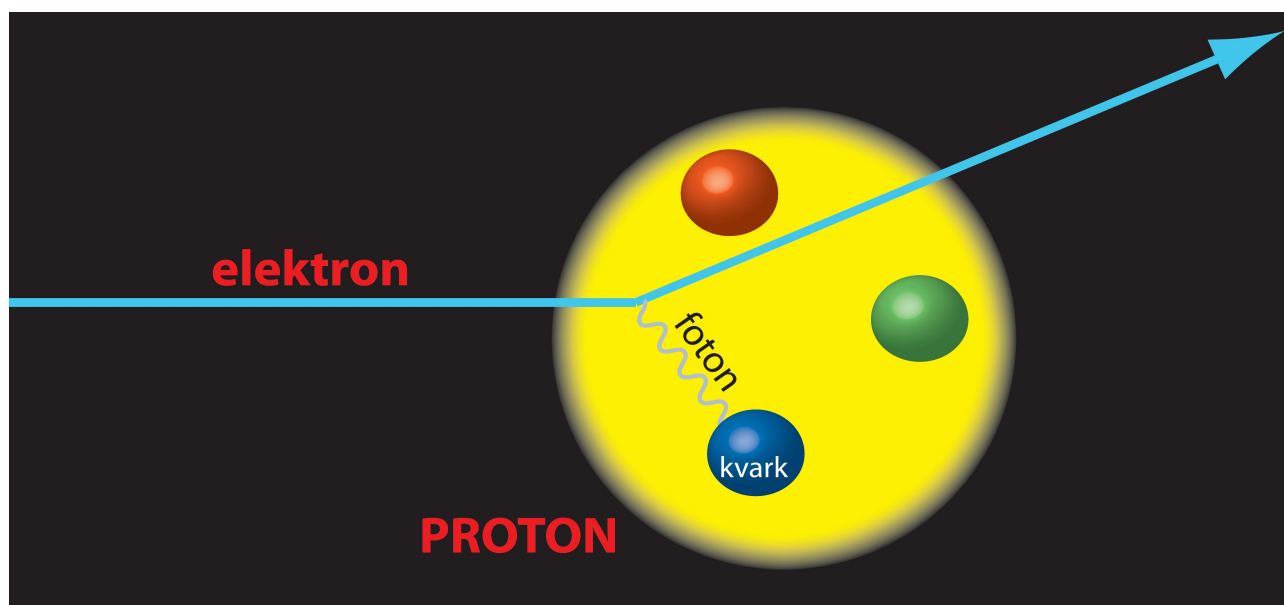
3.1: Hlboký nepružný rozptyl (Deep Inelastic Scattering – DIS)

Teoretická analýza výsledkov získaných v SLAC (Stanford Linear Accelerator Center v USA) potvrdila existenciu vnútornej štruktúry nukleónov tak, ako ju predpovedali v roku 1964 americkí fyzici Murray Gell – Mann a George Zweig. Častice vo vnútri protónov a neutrónov nazval Feynmann partóny [2], ktoré boli následne rozdelené na kvarky a gluóny. Prvé z nich hrajú fundamentálnu úlohu napríklad pre určenie výsledného náboja nukleónu, kým druhé predstavujú kvantá kalibračných polí a sú mediátormi silnej interakcie.

Experiment bol prevedený na konci šesťdesiatych rokov v SLAC a jednalo sa o zrážku vysokoenergetických elektrónov s energiou 20 GeV s protónmi (nepolarizované zrážky). Hlavný dôvod pre tak veľkú energiu je ten, že v prípade malých energií by sme daný proces nemohli popísať ako zrážku elektrónu s jednotlivým uväzneným kvarkom vo vnútri protónu, čo by znamenalo, že by sme nedostali dostatočný obraz o jeho vnútornej štruktúre. Vzhľadom k tomu, že tak ako dopadajúci elektrón, tak i interagujúci kvark majú elektrický náboj, je možné ich vzájomnú elektromagnetickú interakciu popísať pomocou výmeny fotónu (pre jednoduchosť uvažujeme jednofotónovú výmenu). Po tejto zrážke, sa elektrón odchyli o uhol θ voči pôvodnému smeru letu a stráca časť svojej energie, čo je vlastne dôvod názvu nepružný rozptyl. Celý tento proces môžeme zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$e + p \rightarrow e + X$$

kde X označuje bližšie neurčený stav nukleónu po hadronizácii. Grafické znázornenie procesu je vidieť na Obr.3.1.



Obr.3.1: Hlboký nepružný rozptyl elektrónu na protónovom kvarku [3].

Po experimente v SLAC postupne nasledovali ďalšie, pričom sa podarilo získať veľmi dôležité dáta z tzv. polarizovaných zrážok leptónov a nukleónov. Obecné, z rozdelenia energií a uhlov rozptylu elektrónov sa následne dajú určiť veľmi používané štruktúrne funkcie: F_1, F_2, g_1, g_2 , ktoré majú zásadný význam pre predstavu zloženia nukleónu. Prvé dve z nich nazývame nepolarizované štruktúrne funkcie, pričom posledné dve zohľadňujú tzv. polarizáciu, t.j. projekciu spinu do určitého smeru, a v tomto prípade hovoríme o polarizovaných štruktúrnych funkciách, ktoré sú však vďaka zmienenej polarizácii náročnejšie na praktické meranie. Medzi nepolarizovanými štruktúrnymi funkciami môžu platiť približné vzťahy, napr. Callan-Grossov vzťah:

$$\frac{F_2}{F_1} = 2x \quad (3.1)$$

Z kinematického hľadiska túto zrážku môžeme popísať pomocou nasledujúcich veličín:

- E – energia elektrónu pred rozptylom
- m – hmotnosť elektrónu
- E' – energia elektrónu po rozptyle
- θ – rozptylový uhol, pod ktorým sa rozptýli nalietajúci elektrón
- Ω – priestorový uhol
- $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ – štvorhybnosť nukleónu
- $M = \sqrt{P^2}$ – hmotnosť nukleónu
- $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ – štvorhybnosť kvarku
- $m = \sqrt{p^2}$ – hmotnosť kvarku
- $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ – štvorhybnosť fotónu
- α – konštanta jemnej štruktúry
- $L^{\mu\nu}$ – leptónový tenzor
- $W^{\mu\nu}$ – tenzor obsahujúci informáciu o štruktúrnych funkciách

Súčasne definujeme v úvode spomínané invariantné veličiny, t.j. Bjorkenovu premennú resp. kvadrát prenesenej hybnosti ako:

$$x = \frac{Q^2}{2Pq} \quad \text{resp.} \quad Q^2 = -q^2 \quad (3.2)$$

ktoré môžeme pomocou hore definovaných veličín a zanedbaní hmotnosti elektrónu napísať v prípade prvého invariantu ako:

$$x = \frac{2EE'}{M(E-E')} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.3)$$

Pre druhý z nich dostávame:

$$Q^2 = 4EE' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.4)$$

Veličiny E, E' a θ sa vzťahujú k pokojovej sústave daného nukleónu a z ich rozdelenia sme schopní určiť diferenciálny účinný prierez zrážky, ktorý slúži na extrahovanie štruktúrnych funkcií. Pre diferenciálny účinný prierez platí vzťah:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{2Mq^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (3.5)$$

Veličina $W^{\mu\nu}$ je tzv. hadronový tenzor, z ktorého sa získavajú všetky uvažované štruktúrne funkcie. Meranie účinného prierezu vyjadreného vzťahom (3.5) je preto metódou merania štruktúrnych funkcií.

3.2: Štruktúrne a distribučné funkcie

Tak ako bolo uvedené v predchádzajúcej stati, obidva typy štruktúrnych funkcií nám poskytujú dostatočne dobrý náhľad do vnútornej štruktúry nukleónu. Podľa partónového modelu je možné tieto funkcie vyjadriť kombináciou distribučných funkcií $q(x)$ jednotlivých partónov. Distribúcie vyjadrujú pravdepodobnostné zastúpenie typov kvarkov, antikvarkov a gluónov v závislosti na frakcii hybnosti nimi nesenej (premenná x). Zároveň vieme, že v protóne sú obsiahnuté valenčné (dominantné) kvarky: u, d a morské kvarky: $\bar{u}, \bar{d}, s, \bar{s}$, takže pre ich výsledné distribučné funkcie (podľa typu kvarku) platí:

$$u(x) = u_v(x) + u_s(x) \quad (3.6)$$

$$d(x) = d_v(x) + d_s(x) \quad (3.7)$$

Z partónového modelu plynie vzťah medzi distribučnými a štruktúrnymi funkciami:

$$F_2(x) = x \sum_i e_i^2 [q_i(x) + \bar{q}_i(x)] \quad (3.8)$$

pričom $i \in \{u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}\}$ a e označuje náboj príslušného kvarku resp. antikvarku. Vzhľadom k tomu, že gluóny nenesú žiadny elektrický náboj, nevstupujú do hore uvedenej sumy, čo však ale neznamená, že nenesú frakciu hybnosti.

Teda pre prípad protónu, je zrejme, že platí:

$$\frac{F_2^p(x)}{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \quad (3.9)$$

Analogicky je možné dospieť k analytickému vzťahu pre štruktúrne funkciu neutrónu, pokiaľ využijeme izotopickú invarianciu distribúcie kvarkov obsiahnutých v protóne (p) a neutróne (n), čo znamená:

$$u^p(x) = d^n(x) = u(x) \quad (3.10)$$

$$d^p(x) = u^n(x) = d(x) \quad (3.11)$$

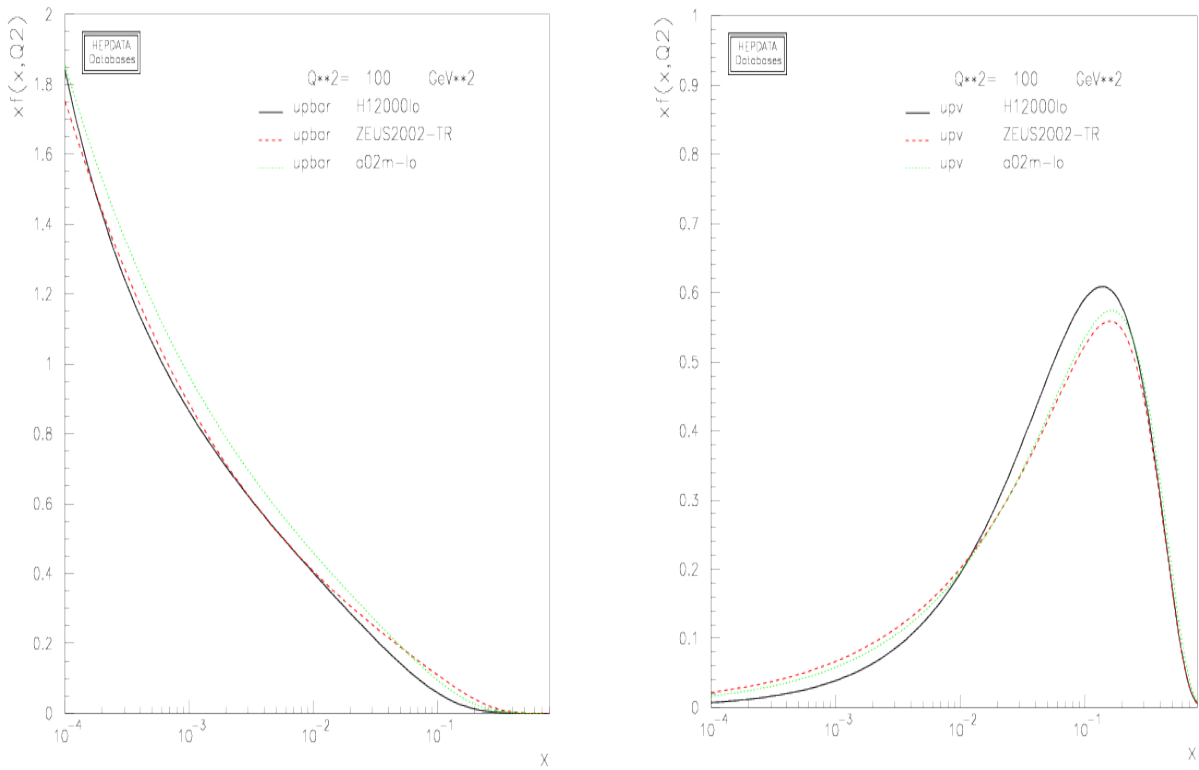
Tu je však nutné poznamenať, že v skutočnosti dochádza k narušeniu tejto symetrie, tzv. Charge Symmetry Violation [4], čo sa prejaví zavedením funkcií vyjadrujúcich toto narušenie:

$$\delta u(x) = u^p(x) - d^n(x) \quad (3.12)$$

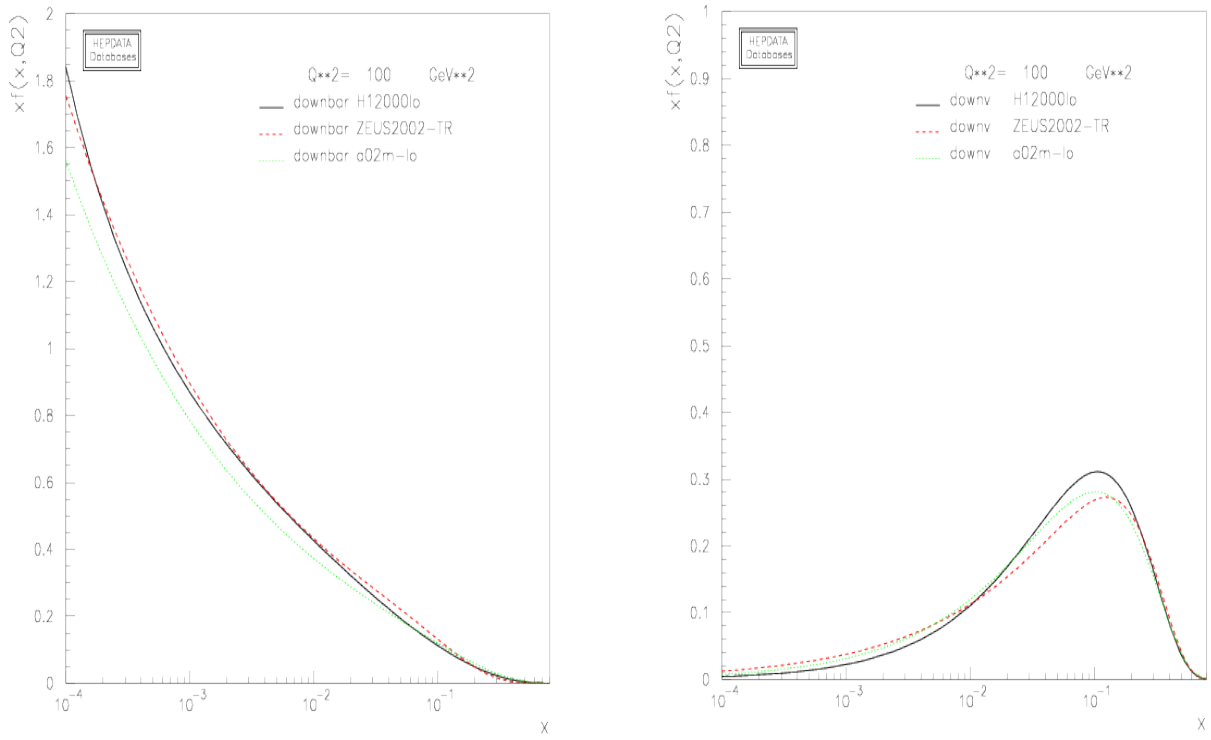
$$\delta d(x) = d^p(x) - u^n(x) \quad (3.13)$$

Pre účely tohto textu (okrem Modelu 2 v Kapitole 7) tak ako aj vo fenomenológii popisujúcej hlboký nepružný rozptyl však môžeme túto korekciu zanedbať a pracovať naďalej so vzťahmi (3.10) a (3.11).

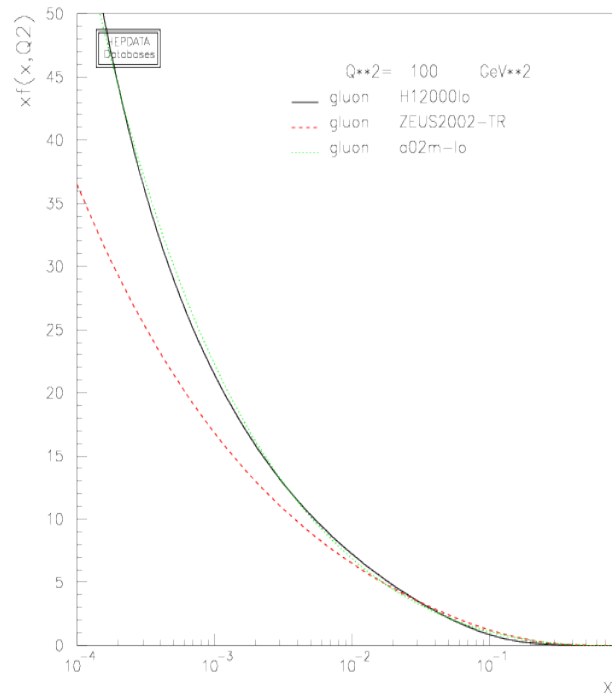
Príklady grafického priebehu niektorých distribučných funkcií v závislosti na parametre x (pri $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$) sú uvedené na Obr.3.2 až 3.4 vygenerovaných v prostredí Durham HepData Project [5]. Pre porovnanie sú uvedené merania troch rôznych skupín (H1, ZEUS a Alekhin). Priebeh niektorých z nich bude detailnejšie vysvetlený v Kapitole 7, kde budú prezentované možné termodynamické modely protónu.



Obr.3.2: Distribučné funkcie xu_s (vľavo) a xu_v .



Obr.3.3: Distribučné funkcie $x\bar{d}_s$ (vľavo) a $x\bar{d}_v$.



Obr.3.4: Distribučná funkcia gluónov xG .

Využitím známeho faktu, že $p \equiv uud$, nutne musí byť splnená nasledujúca séria rovností :

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2 \quad (3.14)$$

$$\int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1 \quad (3.15)$$

$$\int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0 \quad (3.16)$$

Súčasne rešpektujeme zákon zachovania hybnosti, ktorý hovorí že súčet hybností všetkých kvarkov, antikvarkov a gluónov dáva výslednú hybnosť protónu p . Matematicky to znamená:

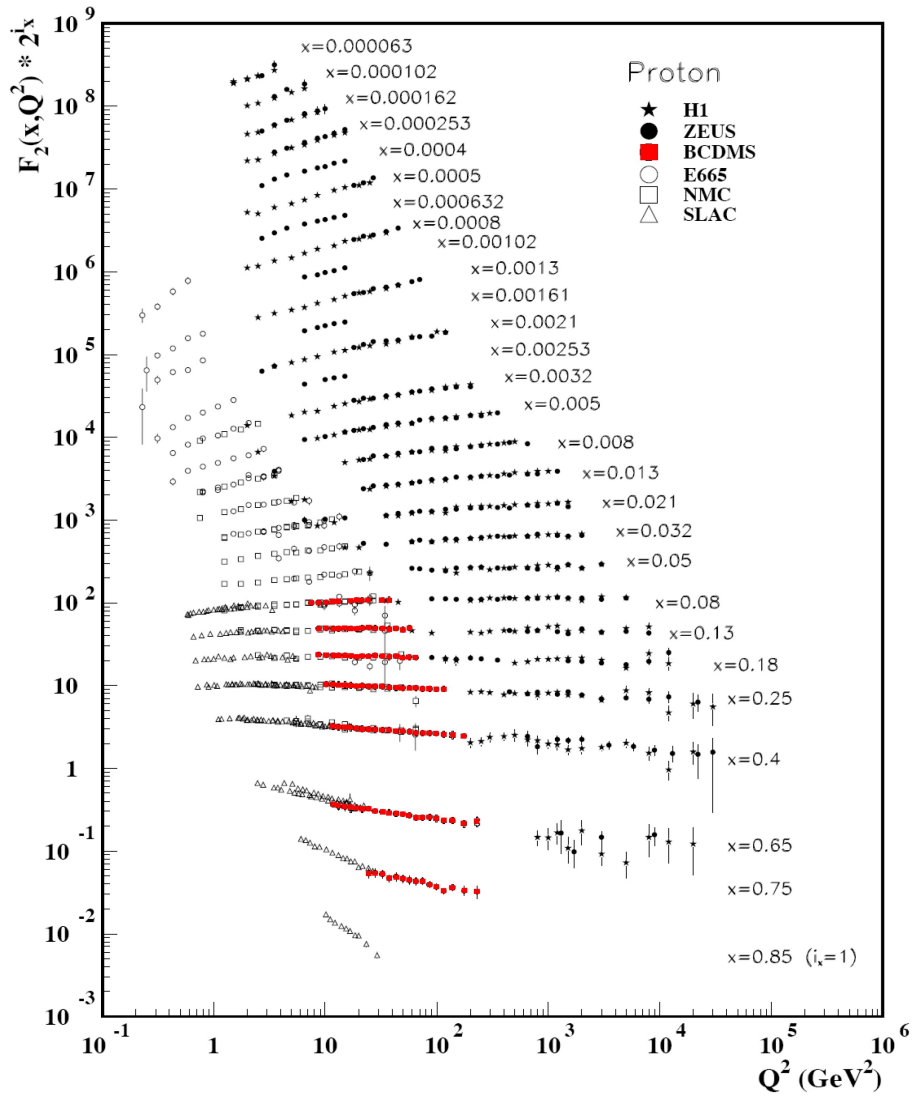
$$p = p_q + p_{\bar{q}} + p_g = \int_0^1 xp[u(x) + d(x) + s(x)] dx + \int_0^1 xp[\bar{u}(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x)] dx + p_g \quad (3.17)$$

V jednoduchosti sa dá povedať, že zo znalosti distribučných funkcií je možné stanoviť štruktúrnú funkciu. Pôvod obidvoch veličín je ale rôzny. Kým štruktúrne funkcie sme schopní získať z rozptylového experimentu, konkrétne z diferenciálneho účinného prierezu (Stav 3.1), tak distribučné plynú zo zavedenia kvark-partónového modelu zohľadňujúceho vnútornú štruktúru nukleónu. U zmeranej funkcie F_2 môžeme pozorovať zvláštny jav, tzv. narušenie škálovania, ktorý súvisí s faktom, že kvarky vo vnútri nukleónu nie sú úplne voľnými časticami, ale že ich správanie je riadené zákonmi kvantovej chromodynamiky – QCD. Prejavom narušenia škálovania je pomerne slabá závislosť tejto štruktúrnej funkcie na invariante Q^2 (Obr.3.5) [3].

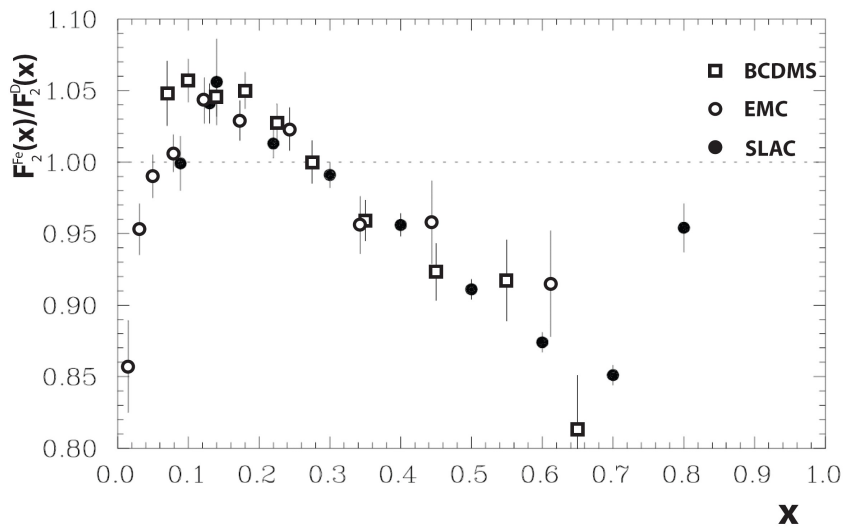
Všetky spomínané úvahy sa týkali toho najjednoduchšieho, vodíkového jadra, resp. neutrónu. Avšak, v osemdesiatych rokoch bol uskutočnený experiment v CERN, ktorý implikoval existenciu EMC efektu ako javu, prítomného v atómových jadrách. Ako terčiky boli postupne použité jadrá deutéria a železa a ukazuje sa, že vplyv ostatných nukleónov v jadre (a tým pádom výmena mezónov v súlade s Yukawovou teóriou jadrových síl) zohráva podstatnú úlohu v priebehu štruktúrnych funkcií v kinematických oblastiach (v tomto prípade) mimo interval $x \in (0,1; 0,3)$.

Na Obr.3.6 [3] je vyobrazený podiel r štruktúrnych funkcií:

$$r = \frac{F_2^{Fe}(x)}{F_2^D(x)} \quad (20)$$



Obr.3.5: Štruktúrna funkcia protónu F_2 zmeraná v experimentoch H1 [6], ZEUS [7], BCDMS [8], NMC [9], E665 [10] a SLAC [11].



Obr.3.6: EMC efekt zmeraný pre podiel štruktúrnych funkcií jadier železa a deutéria. Dáta prevzaté z [12] pre BCDMS, z [13] pre EMC a z [14] pre SLAC.

Kapitola 4

Termodynamický a štatistický popis sústav s veľkým počtom častíc

4.1: Štatistická entrópia

Pre štatistický popis vnútornej štruktúry nukleónu je nutné sa najskôr oboznámiť s týmto typom popisu pre sústavy známe z klasickej fyziky (ideálny plyn, van der Waalsov plyn). Práve tieto systémy obsahujúce rádovo 10^{23} častíc sú vhodným kandidátom na aplikovanie metód štatistickej fyziky v dôsledku vysokého počtu atómov, molekúl resp. iónov prítomných v plyne za určitých podmienok. Je výhodné využiť aparát teoretickej fyziky a zaviesť pojem fázový priestor, ktorý je $2n$ -rozmerným priestorom q (obecnej súradnice) a p (obecnej hybnosti). To znamená, že každá usporiadaná dvojica (q,p) predstavuje jeden tzv. mikrostav tohto systému a časový vývoj častíc je možné vyjadriť pomocou fázových trajektórií, ktoré sa v tomto priestore nepretínajú.

Dôležitú úlohu zohráva funkcia – miera informácie (miera neurčitosti), ktorá udáva množstvo informácie, ktoré o príslušnom stave máme. Jej stredná hodnota sa nazýva štatistická entrópia a v diskretnom prípade je definovaná ako:

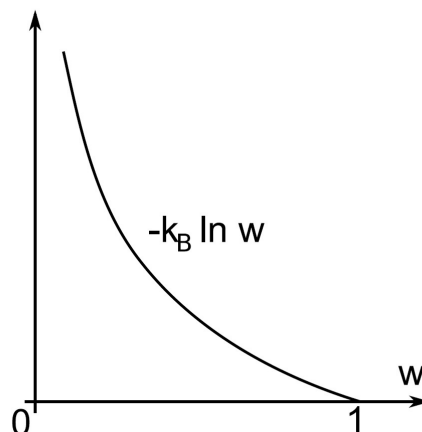
$$S = \langle I \rangle = -k \sum_{\gamma} w_{\gamma} \ln(w_{\gamma}) \quad (4.1)$$

kde k je Boltzmannova konštanta, γ je mikrostav a w_{γ} predstavuje tzv. najpravdepodobnejšie rozdelenie. Grafický priebeh tejto funkcie je znázornený na Obr.4.1.

V spojitom prípade prechádza suma vo vzťahu (4.1) na intergrál a platí teda:

$$S = \langle I \rangle = -k \int \rho(x) \ln(\rho(x)) dx \quad (4.2)$$

kde sme navyše vykonali substitúciu: $w_{\gamma} = \rho(x)$ na znak toho, že rozlišujeme najpravdepodobnejšie diskretné a spojité rozdelenie.



Obr.4.1: Priebeh štatistickej entrópie S [15].

Najpravdepodobnejšie rozdelenie určíme napr. pre diskretný prípad, použitím vzťahu (4.1) a zároveň väzbových podmienok:

$$\sum_y w_y = 1 \quad (4.3)$$

$$\sum_y w_y A_{ly} = \langle A_l \rangle, l \in \hat{m} \subset \mathbf{N} \quad (4.4)$$

Prvý z hore uvedených vzťahov predstavuje normováciu podmienku rozdelenia, kým druhý z nich udáva všeobecný vzťah pre určenie strednej hodnoty ľubovoľnej veličiny (v tomto prípade m veličín). Použitím tzv. Metódy Langrangeových multiplikátorov zostavíme Langrangeovu funkciu:

$$A = S - k \alpha \left(\sum_y w_y - 1 \right) - k \sum_{l=1}^m \lambda_l \left(\sum_y w_y A_{ly} - \langle A_l \rangle \right) \quad (4.5)$$

pričom λ_l, α predstavujú $m+1$ Lagrangeových multiplikátorov. Podľa vyššie zmienenej metódy zderivujeme rovnicu podľa všetkých premenných w_y a použitím väzbových podmienok dostaneme výraz pre hľadané najpravdepodobnejšie rozdelenie:

$$w_y = \frac{\exp\left(-\sum_{l=1}^m \lambda_l A_{ly}\right)}{\sum_y \exp\left(-\sum_{l=1}^m \lambda_l A_{ly}\right)} = \frac{1}{Z_K} \exp\left(-\sum_{l=1}^m \lambda_l A_{ly}\right) \quad (4.6)$$

kde menovateľ zlomku označuje partičnú funkciu, široko používanú v kanonických a grandkanonických súboroch.

Následne môžeme určiť všeobecný výraz pre výpočet strednej hodnoty ľubovoľnej veličiny ako:

$$\langle A_l \rangle = \frac{-\partial(\ln(Z_K))}{\partial \lambda_l} \quad (4.7)$$

4.2: Kanonický a grandkanonický súbor

Kanonické a grandkanonické súbory nám dostatočne dobre môžu poslúžiť na demonštráciu zatiaľ všeobecných vzťahov odvodených v predchádzajúcej stati.

Pre kanonický súbor uvažujme plyn uzavretý v nádobe o konečnom objeme V s konštantným počtom častíc N v tepelnej rovnováhe s okolím o teplote T . Z vyššie uvedeného teda pre kanonickú partičnú funkciu, najpravdepodobnejšie rozdelenie a strednú hodnotu energie (vnútornú energiu) plynie:

$$Z_K = \sum_y \exp(-\beta E_y) \quad (4.8)$$

$$w_y = \frac{1}{Z_K} \exp(-\beta E_y) \quad (4.9)$$

$$\langle E \rangle = U = \frac{-\partial(\ln(Z_K))}{\partial \beta} \quad (4.10)$$

Používame pritom konvenciu, že Lagrangeov multiplikátor príslušný k energii E značíme β a energia systému konkrétneho mikrostavu odpovedá E_y . Fyzikálny význam multiplikátoru určíme tak, že analyticky vyjadříme maximálnu hodnotu entropie. Kombináciou vzťahov (4.1) a (4.6) dostávame:

$$S = k (\ln(Z_K) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \langle A_l \rangle) \quad (4.11)$$

Odtiaľ plynie pre totálny diferenciál rovnosť:

$$dS = k \sum_{l=1}^m \lambda_l d \langle A_l \rangle \quad (4.12)$$

čo môžeme využiť pre určenie konštanty β v kanonickom súbore. V našom prípade to teda znamená, že:

$$dS = k \beta dU = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} \quad (4.13)$$

kde druhá rovnosť predstavuje definíciu entropie pomocou tepla a posledná rovnosť bola získaná z prvého princípu termodynamického, kde sme položili $dV=0$ vzhľadom k faktu, že $V=konšt.$ Zo vzťahu (4.13) je už zrejmé, že:

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad (4.14)$$

Získaný vzťah teda definuje parameter β ako „inverznú“ teplotu.

Pokiaľ uvažujeme grandkanonický súbor častíc, tak predpokladáme, že počet častíc daného plynu o konečnom objeme V v tepelnej rovnováhe s okolím o teplote T nie je konštantný, čo nám automaticky implikuje ďalšiu väzbu na stredný počet častíc s Lagrangeovým multiplikátorom α . Grandkanonická partičná funkcia môže byť zapísaná použitím (4.8) v tvare:

$$Z_G = \sum_y \exp(-\beta E_y - \alpha N_y) = \sum_N \exp(-\alpha N) Z_K \quad (4.15)$$

kde N_y označuje počet častíc v danom mikrostave s energiou systému E_y .

Úplne analogicky ako v kanonickom súbore, môžeme ďalej odvodiť vzťahy pre najpravdepodobnejšie rozdelenie, strednú hodnotu energie (vnútornú energiu) a stredný počet častíc systému:

$$w_y = \frac{1}{Z_G} \exp(-\beta E_y - \alpha N_y) \quad (4.16)$$

$$U = \frac{-\partial \ln(Z_G)}{\partial \beta} \quad (4.17)$$

$$N = \frac{-\partial \ln(Z_G)}{\partial \alpha} \quad (4.18)$$

Zatiaľ neznámy multiplikátor α získame podobne ako parameter β v predchádzajúcom prípade a dostaneme, že:

$$\alpha = \frac{-\mu}{kT} \quad (4.19)$$

Parameter μ predstavuje chemický potenciál a zohráva dôležitú úlohu pri procesoch so zmenou počtu častíc, napr. v chemických reakciách.

4.3: Termodynamické potenciály

Fundamentálnu úlohu v termodynamike a štatistickej fyzike zohrávajú termodynamické potenciály, pomocou ktorých sme schopní získať stavovú rovnicu plynu (kanonický a grandkanonický súbor). Každý takýto potenciál (resp. jeho totálny diferenciál) je vyjadrený v prirodzených premenných (trojica symbolov uvedená v zátvorke pri príslušnom potenciále). Dvojica indexov pri parciálnej derivácii značí konštantnosť uvedenej dvojice veličín. V tejto stati zhrnieme tých najdôležitejších predstaviteľov a uvedieme základné vzťahy nutné pre ich výpočet.

Vnútorňá energia:

$$U = U(S, V, N)$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dN = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} dN \quad (4.20)$$

Voľná energia:

$$F = F(T, V, N)$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} dV + \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} dN \quad (4.21)$$

Entalpia:

$$H = H(S, p, N)$$

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p,N} dS + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S,N} dp + \left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{S,p} dN \quad (4.22)$$

Gibbsov potenciál:

$$G = G(T, p, N)$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,N} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,N} dp + \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{T,p} dN \quad (4.23)$$

Grandkanonický potenciál:

$$\Omega = \Omega(T, V, \mu)$$

$$d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu} dT + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu} dV + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} d\mu \quad (4.24)$$

pričom T je termodynamická teplota, V objem sústavy, p tlak, N počet častíc, S entropia, μ chemický potenciál, definovaný ako:

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,p} \quad (4.25)$$

Pri detailnejšom pohľade na hore uvedené vzťahy dostávame tzv. prvú sériu Maxwellových vzťahov:

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{p,N} = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} \quad (4.26)$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{S,N} = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_{T,N} \quad (4.27)$$

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T,\mu} \quad (4.28)$$

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} \quad (4.29)$$

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{p,N} = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V,\mu} \quad (4.30)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,p} = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{S,p} = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} \quad (4.31)$$

Pri dokazovaní identít termodynamických vzťahov má taktiež zmysel tzv. druhá séria Maxwellových vzťahov:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{V,N} \quad (4.32)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,N} = - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T,N} \quad (4.33)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,N} \quad (4.34)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_{p,N} \quad (4.35)$$

Kapitola 5

Štatistické rozdelenia systémov s veľkým počtom častíc

5.1: Maxwelllovo – Boltzmannovo rozdelenie

Uvažujme systém klasických nerozlišiteľných častíc, napr. ideálneho plynu, ktorý je v tepelnej rovnováhe s okolitým prostredím o teplote T a pripustíme možnosť, že počet častíc nebude konštantný. Jedná sa teda o grandkanonický súbor, ktorý je možné popísať pomocou grandkanonickej partičnej sumy:

$$Z_G^{MB} = \sum_N \exp(-\alpha N) Z_K^{MB} = \prod_i \exp(g_i e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}) \quad (5.1)$$

kde výraz

$$Z_K^{MB} = \frac{1}{N!} \left[\sum_i g_i \exp\left(\frac{-\varepsilon_i}{kT}\right) \right]^N \quad (5.2)$$

predstavuje kanonickú partičnú funkciu pre Maxwelllovo – Boltzmannovo rozdelenie pri konštantnom počte častíc N , s degeneráciou g_i -tej energetickej hladiny o energii ε_i .

Použitím vzťahu (4.18) získavame z rovnice (5.1) stredný počet častíc systému ako súčet stredného počtu častíc nachádzajúcich sa na jednotlivých energetických hladinách:

$$N = \sum_i g_i \exp(-\alpha - \beta \varepsilon_i) = \sum_i g_i \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right) = \sum_i \langle n_i \rangle \quad (5.3)$$

kde

$$\langle n_i \rangle = g_i \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right) \quad (5.4)$$

značí už spomínaný stredný počet častíc na príslušnej energetickej hladine.

5.2: Boseho – Einsteinovo rozdelenie

Tento typ rozdelenia sa využíva pre nerozlišiteľné kvantové častice s celočíselným spinom (bozóny; napr. fotóny) nepodliehajúce Pauliho vylučovaciemu princípu. Pokiaľ využijeme notáciu z predchádzajúceho rozdelenia, platí pre grandkanonickú partičnú funkciu nasledujúci vzťah:

$$Z_G^{BE} = \prod_i \left\{ \frac{1}{[1 - \exp(-\alpha - \beta \varepsilon_i)]^{g_i}} \right\} \quad (5.5)$$

Analogicky potom dostávame pre stredný počet častíc na určitej energetickej hladine vzťah:

$$\langle n_i \rangle = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) - 1} \quad (5.6)$$

5.3: Fermiho – Diracovo rozdelenie

Posledný druh rozdelenia, Fermiho – Diracovo, aplikujeme na nerozlíšiteľné kvantové častice s poločíselným spinom (fermióny; napr. elektróny), podliehajúce Pauliho vylučovaciemu princípu. Grandkanonická partičná suma sa rovná:

$$Z_G^{FD} = \prod_i \{ [1 + \exp(-\alpha - \beta \varepsilon_i)^{g_i}] \} \quad (5.7)$$

Odpovedajúci stredný počet častíc na určitej energetickej hladine je potom vyjadrený nasledovne:

$$\langle n_i \rangle = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) + 1} \quad (5.8)$$

Poznámka: Detailnejší pohľad na problematiku týchto dvoch kapitol je možné získať v elektronických skriptách [15] a [16].

5.4: Aplikácia štatistických rozdelení: Fermiho – Diracov model atómového jadra

Poznámka: V celej stati používame nasledujúcu symboliku:

V - objem atómového jadra

p - hybnosť nukleónu,

$g=2$ - degeneračný faktor,

\hbar - redukovaná Planckova konštanta,

p_F - Fermiho hybnosť (s indexom p pre protóny, n pre neutróny) - hybnosť, ktorou disponuje najslabšie viazaný nukleón v atómovom jadre,

Z - protónové číslo atómu,

A - nukleónové číslo atómu,

N - neutrónové číslo atómu,

$r_0 \approx 1,2 \text{ fm}$,

$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ - rýchlosť svetla vo vákuu,

$m_N c^2 \approx 940 \text{ MeV}$ - pokojová energia nukleónu

Ako príklad využitia štatistickej fyziky a termodynamiky nám dobre môže poslúžiť Fermiho – Diracov model atómového jadra, ktorý je postavený na myšlienke, že jadro je tvorené fermiónovým plynom vzájomne neinteragujúcich nukleónov (protónov, neutrónov) pri teplote $T=0 \text{ K}$. Tento model je veľmi výhodný na určenie hĺbky potenciálovej jamy napr. v symetrickom jadre. Počet nukleónov v jadre je možné vyjadriť pomocou Fermiho – Diracovej štatistiky ako [1]:

$$dN(T \rightarrow 0) = \frac{4\pi g V p^2 dp}{(2\pi \hbar)^3} \quad (5.9)$$

Po vyintegrování výrazu (5.9) cez všetky hybnosti v intervale: $p \in (0, p_F)$ dostávame pre prípad protónov, protónové číslo Z v tvare:

$$Z = \frac{4 A p_{p,F}^3 r_0^3}{9\pi \hbar^3} \quad (5.10)$$

kde sme objem V aproximovali výrazom pre objem gule:

$$V = \frac{4}{3} \pi A r_0^3 \quad (5.11)$$

Keďže je pohyb nukleónov v jadre nerelativistický, možno Fermiho kinetickú energiu protónov, čiže energiu, ktorú ma najslabšie viazaný protón, vyjadriť nasledovne :

$$T_{p,F} = \frac{p_{p,F}^2}{2m_N} = \frac{1}{2m_N} \left[\frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi Z}{4A}} \right]^2 = \frac{(\hbar c)^2}{2m_N (c r_0)^2} \left(\frac{9\pi Z}{4A} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.12)$$

Analogicky dostaneme Fermiho kinetickú energiu pre neutróny:

$$T_{n,F} = \frac{p_{n,F}^2}{2m_N} = \frac{1}{2m_N} \left[\frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi N}{4A}} \right]^2 = \frac{(\hbar c)^2}{2m_N (c r_0)^2} \left(\frac{9\pi N}{4A} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.13)$$

Pre symetrické jadro uvažujeme $Z=N=\frac{1}{2}A$ a teda jednak Fermiho kinetická energia pre protóny a jednak pre neutróny bude rovnaká a po vyčíslení zistíme, že: $T_F \approx 34 \text{ MeV}$. Zároveň vieme, že jadrový potenciál je možné vyjadriť ako súčet separačnej energie nukleónu a Fermiho energie nukleónu, čiže: $V_N = S_N + T_F \approx 41 \text{ MeV}$.

Kapitola 6

Úvod do modelov nukleónu v termodynamickom priblížení

Táto kapitola si kladie za cieľ uviesť základné myšlienky a formule pre popis nukleónu v reči veličín a štatistických prístupov popisovaných v predchádzajúcej kapitole. Vo všetkých uvedených modeloch prijmeme predstavu (obecný predpoklad) nukleónu o hmotnosti M ako plynu nehmotných vzájomne neinteragujúcich partónov (kvarkov, antikvarkov, gluónov) v tepelnej rovnováhe o teplote T uzavretých v guli o polomere R . Tak ako bolo uvedené v stati o štruktúrnych a distribučných funkciách, okrem valenčných kvarkov dominujúcich v protóne resp. neutróne, predpokladáme taktiež existenciu morských kvarkov, ktorá ma okrem iného výrazný vplyv na priebeh distribučných funkcií partónov a tým pádom aj štruktúrnych funkcií nukleónu v závislosti na Bjorkenovej premennej x .

Kvôli konvencii používanej v odborných článkoch zaoberajúcich sa touto problematikou prejdeme k nasledujúcemu značeniu veličín definovaných v minulej stati :

6.1: Štatistické formule pre Model 1 a Model 2 [17]:

Prvý prezentovaný termodynamický model je vhodný pre popis nepolarizovaných štruktúrnych funkcií a štatistická interpretácia sa vyjadruje pomocou distribučnej funkcie Fermiho-Diracovho resp. Boseho-Einsteinovho rozdelenia ako:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right) \pm 1} \quad (6.1)$$

kde ε značí energiu príslušného partónu v pokojovej sústave nukleónu, μ je jeho chemický potenciál a T je termodynamická teplota. Z formálneho hľadiska sa jedná vlastne o vzťahy (5.6) resp. (5.8).

Druhý prezentovaný model, ktorý kvalitatívne rozširuje svojho predchodcu o výpočet polarizovaných štruktúrnych funkcií, pričom využíva rovnakú distribučnú funkciu $f(\varepsilon)$.

6.2: Štatistické formule pre Model 3 [18] :

Vzťah (6.1) prepíšeme do tvaru:

$$f(x) = \frac{1}{\exp\left(\frac{x - X_{0j}}{\bar{x}}\right) \pm 1} \quad (6.2)$$

Premenná x naďalej značí Bjorkenovu premennú, \bar{x} termodynamickú teplotu a X_{0j} chemický potenciál j -tého partónu (kvarku, antikvarku, gluónu). Premennú x je možné taktiež interpretovať ako mieru energie; napr. hodnota $x=0,1$ odpovedá energii 100 MeV.

Tento model si kladie za cieľ vytvoriť reláciu medzi nepolarizovanými a polarizovanými štruktúrными funkciami a v jeho závere sa v krátkosti predstaví existencia transversálnej zložky hybnosti, ktorá bude námetom pre ďalšiu krátku kapitolu pojednávajúcu o kovariantných a nekovariantných modeloch nukleónu.

Kapitola 7

Modely nukleónu v termodynamickom priblížení

7.1: Model 1 - Bhalariaov model

Prvý z možných prezentovaných modelov nukleónu je určený pre výpočet nepolarizovaných štruktúrnych funkcií a v prípade protónu predpokladá prítomnosť len kvarkov u a d , ich antikvarkov a gluónov. Z rozptylových experimentov miónov na protónových a deuterónových terčoch vyplýva narušenie tzv. Flavor symmetry, v oblasti distribúcií morských kvarkov, matematicky vyjadrenej nerovnosťou:

$$\bar{d}(x) \neq \bar{u}(x) \quad (7.1)$$

Z experimentálnych dát dostávame, že Gottfriedov integrál:

$$S_G = \int_0^1 \left[\frac{F_2^p(x) - F_2^n(x)}{x} \right] dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 [\bar{d}(x) - \bar{u}(x)] dx \quad (7.2)$$

nadobudne hodnotu : $S_G \approx 0,228$ [19] miesto očakávanej jednej tretiny, čo by platilo za predpokladu, že by k narušeniu tejto symetrie nedochádzalo. K uvedenému záveru poprvýkrát dospela kolaborácia NMC v CERN pri hodnote $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$. Odtiaľ teda plynie, že:

$$\frac{2}{3} \int_0^1 [\bar{d}(x) - \bar{u}(x)] dx \approx 0,105 \quad (7.3)$$

Za obecného predpokladu modelu nukleónu ďalej uvažujeme dve sústavy, v ktorej je terčový protón v pokoji a sústavu, v ktorej má „nekonečnú“ hybnosť, tzv. Infinite Momentum Frame (označíme ju vo vzťahoch horných indexom i a v texte IMF). Keďže je hustota partónov v obidvoch týchto sústavách rovnaká, platí [20]:

$$\frac{dn^i}{d^3 p^i d^3 r^i} = \frac{dn}{d^3 p d^3 r} = \frac{g}{(2\pi)^3} f(\varepsilon) \quad (7.4)$$

V pokojovej sústave protónu máme pre element $d^3 p$ nasledujúci vzťah:

$$d^3 p = p^2 dp \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\psi) d\varphi d\psi = 4\pi p^2 dp \quad (7.5)$$

kde sme využili integráciu cez sférické súradnice (φ resp. ψ značia azimutálny resp. polárny uhol). Keďže dané partóny považujeme za nehmotné, dostávame v prirodzenej sústave jednotiek :

$$d^3 p d^3 r = 4\pi \varepsilon^2 d\varepsilon d^3 r \quad (7.6)$$

Použitím transformačného vzťahu platného v IMF pre hybnosť partónu (v smere z) v tejto

sústave:

$$p_z^i = Mv \gamma x \quad (7.7)$$

kde γ značí relativistický faktor a v je rýchlosť protónu v IMF v smere osi z . Potom dostávame podľa [20]:

$$d^3 p^i d^3 r^i = 2\pi p_T^i d p_T^i Mv dx d^3 r = 2\pi M^2 x d\varepsilon dx d^3 r \quad (7.8)$$

Parameter p_T^i označuje priečnu (transverzálnu) zložku hybnosti partónu v IMF systéme, kde táto veličina je okrem iného závislá na Bjorkenovej premennej x .

Porovnaním pravých strán rovníc (7.6) a (7.8) zistíme, že:

$$\frac{dn^i}{dx} = \frac{M^2 x}{2} \int_{\frac{xM}{2}}^{\frac{M}{2}} \left[\frac{dn}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \right] \quad (7.9)$$

čím sme dostali vzťah, dávajúci do súvislosti rozdelenia partónov v dvoch spomínaných vzťahných sústavách.

Termodynamický (štatistický) prístup aplikujeme do prvého podielu diferenciálov v integrále vo výraze (7.9):

$$\frac{dn}{d\varepsilon} = g f(\varepsilon) \left(\frac{V\varepsilon^2}{2\pi^2} + aR^2\varepsilon + bR \right) = g \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right) \pm 1} \left(\frac{V\varepsilon^2}{2\pi^2} + aR^2\varepsilon + bR \right) \quad (7.10)$$

kde parametre a a b stanovíme zo štruktúrnej funkcie získanej z rozptylového experimentu. Sčítance v zátvorke výrazu (7.10) nazývame korekčné členy (objemový, povrchový a člen zakrivenia) a v termodynamickej limite má význam akurát prvý z nich.

Nakoniec teda dostávame rovnosť:

$$\frac{dn^i}{dx} = \frac{M^2 g x}{(2\pi)^2} \int d^3 r \int_{\frac{xM}{2}}^{\frac{M}{2}} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{M^2 g x V}{(2\pi)^2} \int_{\frac{xM}{2}}^{\frac{M}{2}} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (7.11)$$

ktorá bude zohrávať fundamentálnu úlohu pre určenie teploty T a chemických potenciálov μ jednotlivých partónov.

Z kvark-partónového modelu vieme, že platí:

$$F_2(x) = x \sum_j e_j^2 [q_j(x) + \bar{q}_j(x)] \quad (7.12)$$

kde distribučné funkcie partónov možno vyjadriť pomocou veličín diskutovaných v tejto kapitole ako:

$$q_j(x) = \frac{dn_j^i}{dx} \quad \text{resp.} \quad \bar{q}_j(x) = \frac{dn_{\bar{j}}^i}{dx} \quad (7.13)$$

čo nám umožňuje prepísať vzťah (7.12) pre kvarky u a d a ich antikvarky do podoby:

$$F_2(x) = \frac{4x}{9} \left[\left(\frac{dn_u^i}{dx} + \frac{dn_{\bar{u}}^i}{dx} \right) \right] + \frac{x}{9} \left[\left(\frac{dn_d^i}{dx} + \frac{dn_{\bar{d}}^i}{dx} \right) \right] \quad (7.14)$$

Pokiaľ zoberieme do úvahy obmedzenia pre počet valenčných kvarkov v protóne (rovnice (7.15) a (7.16) a zákon zachovania celkovej hybnosti (7.17), môžeme použitím rovníc (7.9), (7.10) a (7.11) písať, v súlade s [20] :

$$\frac{M^2}{2} \int_0^1 x \left[\int_{\frac{xM}{2}}^{\frac{M}{2}} \left(\frac{dn_u}{d\varepsilon} - \frac{dn_{\bar{u}}}{d\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \right] dx = n_u - n_{\bar{u}} = 2 \quad (7.15)$$

$$\frac{M^2}{2} \int_0^1 x \left[\int_{\frac{xM}{2}}^{\frac{M}{2}} \left(\frac{dn_d}{d\varepsilon} - \frac{dn_{\bar{d}}}{d\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \right] dx = n_d - n_{\bar{d}} = 1 \quad (7.16)$$

$$\frac{M^2}{2} \int_0^1 x^2 \left[\int_{\frac{xM}{2}}^{\frac{M}{2}} \left(\frac{dn_u}{d\varepsilon} + \frac{dn_{\bar{u}}}{d\varepsilon} + \frac{dn_d}{d\varepsilon} + \frac{dn_{\bar{d}}}{d\varepsilon} + \frac{dn_g}{d\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \right] dx = 1 \quad (7.17)$$

Z danej sústavy troch rovníc dostávame pomocou Davidenko – Broydenovej metódy tri neznáme parametre: T, μ_u, μ_d , ktoré vstupujú do funkcií $f(\varepsilon)$ [21]. Integrácia cez x bola prevedená analyticky, integrácia cez ε kvôli zložitosti integrandu numericky. Navyše sme využili vzťah (7.3), ktorý je možné napísať vo vhodnom tvare:

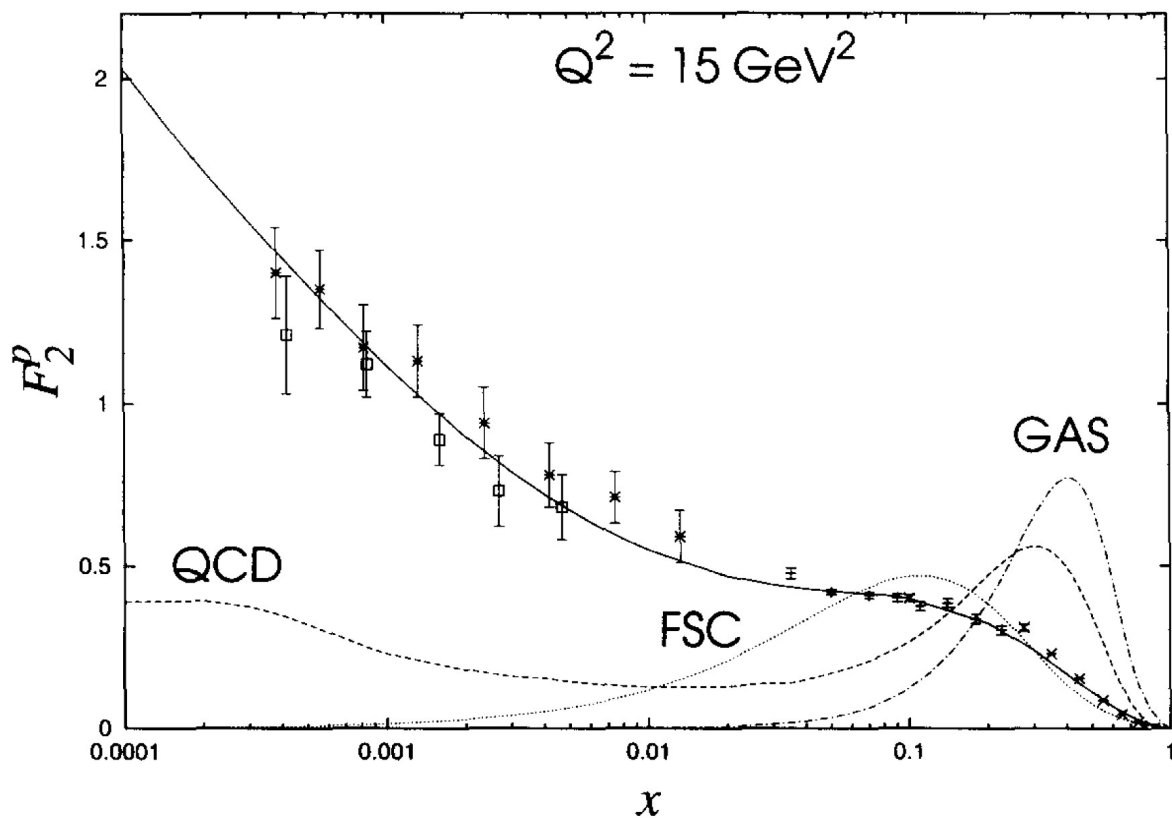
$$n_{\bar{d}} - n_{\bar{u}} = \int_0^1 [\bar{d}(x) - \bar{u}(x)] dx \approx 0,158 \quad (7.18)$$

čím sme z rovníc vylúčili parametre $\mu_{\bar{u}}, \mu_{\bar{d}}$, ktoré rovnako ako ostatné potenciály a teplota T nezávisia na premennej x . Chemický potenciál gluónov je nulový.

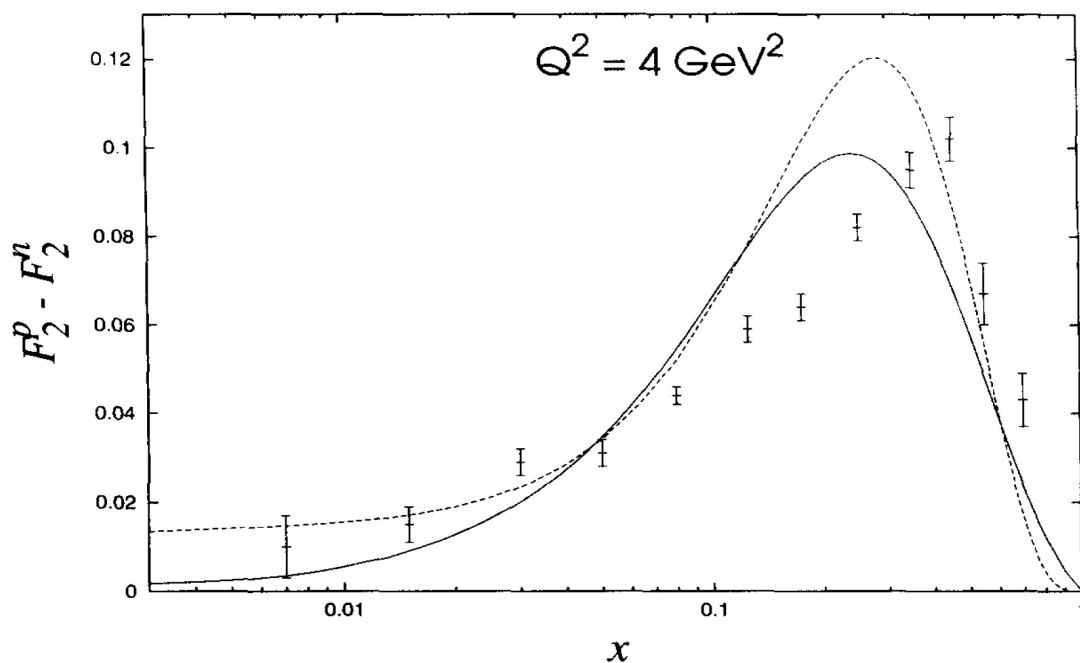
Daná sústava rovníc má po dosadení číselných hodnôt parametrov $a = -0,400$; $b = 0,475$ získaných z nameranej štruktúrnej funkcie nasledujúce riešenia: $T = 72 \text{ MeV}$, $\mu_u = 162 \text{ MeV}$, $\mu_d = 81 \text{ MeV}$.

[22] Týmto spôsobom sme teda dostali parametre, ktoré majú priamu náväznosť na veličiny používané v termodynamike a štatistickej fyzike a zároveň vystupujú vo vzťahoch vstupujúcich pre explicitné vyjadrenie štruktúrnej funkcie. Jej priebeh a teda najpodstatnejší výsledok tohto modelu je znázornený na Obr.7.1 [20].

Obr.7.2 demonštruje rozdiel medzi štruktúrnymi funkciami protónu a neutrónu získaného pomocou nášho modelu (súvislá čiara) a pomocou tzv. Glückovej parametrizácie (čiarkovane) [20].



Obr.7.1: Priebeh štruktúrnej funkcie protónu podľa nášho modelu (súvislá čiara) [20], experimentálne dáta prevzaté z [23] a [24].



Obr.7.2: Rozdiel medzi štruktúrnymi funkciami protónu a neutrónu (Prezentovaný model – súvislá čiara [20], Glückova parametrizácia – čiarkovane [25]), experimentálne dáta [26].

7.2: Model 2 – BKR model

Tento model (názov je odvodený od jeho autorov: R.S. Bhalerao, N.G. Kelkar, B. Ram) je vhodným rozšírením predchádzajúceho termodynamického prístupu , ktorý si kladie za cieľ pomocou parametrov a, b (opäť určených pomocou zmeranej funkcie F_2) získať jednak nepolarizované a jednak polarizované štruktúrne funkcie súčasne. Tým pádom sa stáva univerzálnym prostriedkom na vytvorenie priebehu štruktúrnych funkcií bez ohľadu na polarizáciu projektilovej a terčovej častice.

Kľúčovým elementom, v ktorom sa obidva tieto modely líšia je fakt, že práve prezentovaný rozlišuje medzi chemickým potenciálom istého partónu so spinom smerom hore \uparrow a partónu so spinom smerom dole \downarrow . V celej tejto kapitole budeme uvažovať [17] :

$$\mu_{\bar{\alpha}\uparrow} = -\mu_{\alpha\downarrow} \quad \text{a} \quad \mu_{\bar{\alpha}\downarrow} = -\mu_{\alpha\uparrow} \quad (7.19)$$

a navyše budeme brať do úvahy aj prítomnosť morských kvarkov s a ich antikvarkov, od čoho sme abstrahovali v predchádzajúcej stati. Platí teda: $\alpha \in \{u, d, s\}, \bar{\alpha} \in \{\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}\}$.

Analogicky ako v prvom modeli (rovnice (7.15), (7.16) a (7.17)), dostávame v súlade s [17] :

$$n_{u\uparrow} + n_{u\downarrow} - n_{\bar{u}\uparrow} - n_{\bar{u}\downarrow} = 2 = \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx \quad (7.20)$$

$$n_{d\uparrow} + n_{d\downarrow} - n_{\bar{d}\uparrow} - n_{\bar{d}\downarrow} = 1 = \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx \quad (7.21)$$

$$n_{s\uparrow} + n_{s\downarrow} - n_{\bar{s}\uparrow} - n_{\bar{s}\downarrow} = 0 = \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx \quad (7.22)$$

$$n_{u\uparrow} - n_{u\downarrow} + n_{\bar{u}\uparrow} - n_{\bar{u}\downarrow} = \Delta u = \int_0^1 [\Delta u(x) + \Delta \bar{u}(x)] dx \quad (7.23)$$

$$n_{d\uparrow} - n_{d\downarrow} + n_{\bar{d}\uparrow} - n_{\bar{d}\downarrow} = \Delta d = \int_0^1 [\Delta d(x) + \Delta \bar{d}(x)] dx \quad (7.24)$$

$$n_{s\uparrow} - n_{s\downarrow} + n_{\bar{s}\uparrow} - n_{\bar{s}\downarrow} = \Delta s = \int_0^1 [\Delta s(x) + \Delta \bar{s}(x)] dx \quad (7.25)$$

$$\sum_j x_j = 1 \quad (7.26)$$

kde integrály na pravých stranách rovníc (7.20) až (7.26) obsahujú distribučné funkcie vyjadrené vo všeobecnom tvare (analogicky pre antikvarky):

$$q(x) = q_{\uparrow}(x) + q_{\downarrow}(x) \quad (7.27)$$

$$\Delta q(x) = q_{\uparrow}(x) - q_{\downarrow}(x) \quad (7.28)$$

a index j v sume rovnici (7.26) prebieha gluóny, kvarky typu u, d, s a ich antikvarky. Prvé tri rovnice tak predstavujú z fenomenologického hľadiska príspevky vstupujúce do nepolarizovaných štruktúrnych funkcií, kým ďalšia trojica vstupuje do polarizovaných štruktúrnych funkcií a predstavuje teda už spomínaný doplnok k predošlému modelu a týmto spôsobom ho kvalitatívne rozširuje.

Spôsob riešenia je identický s metódou popísanou v prvom modeli a teda vhodne kombinuje analytické a numerické metódy výpočtu integrálov ukrývajúcich sa na ľavej strane rovníc (7.20) až (7.25). Na prvý pohľad sa v tejto sústave 7 nelineárnych rovníc nachádza 13 neznámych, avšak použitím vzťahu (7.19) a toho, že pre glóny platí: $\mu_g=0$ sa nám ich počet zredukuje na 7, konkrétne: $\mu_{u\uparrow}, \mu_{u\downarrow}, \mu_{d\uparrow}, \mu_{d\downarrow}, \mu_{s\uparrow}, \mu_{s\downarrow}, T$. Taktiež využijeme namerané hodnoty $\Delta u, \Delta d$ a Δs pre protón a neutrón, ktoré zhŕňa nasledujúca tabuľka.

Typ častice	Δu	Δd	Δs
Protón	$0,83 \pm 0,03$	$-0,43 \pm 0,03$	$-0,10 \pm 0,03$
Neutrón	$-0,40 \pm 0,04$	$0,86 \pm 0,04$	$-0,06 \pm 0,04$

Tab.7.1: Hodnoty Δq pre protón a nukleón získané v experimente E142 [27].

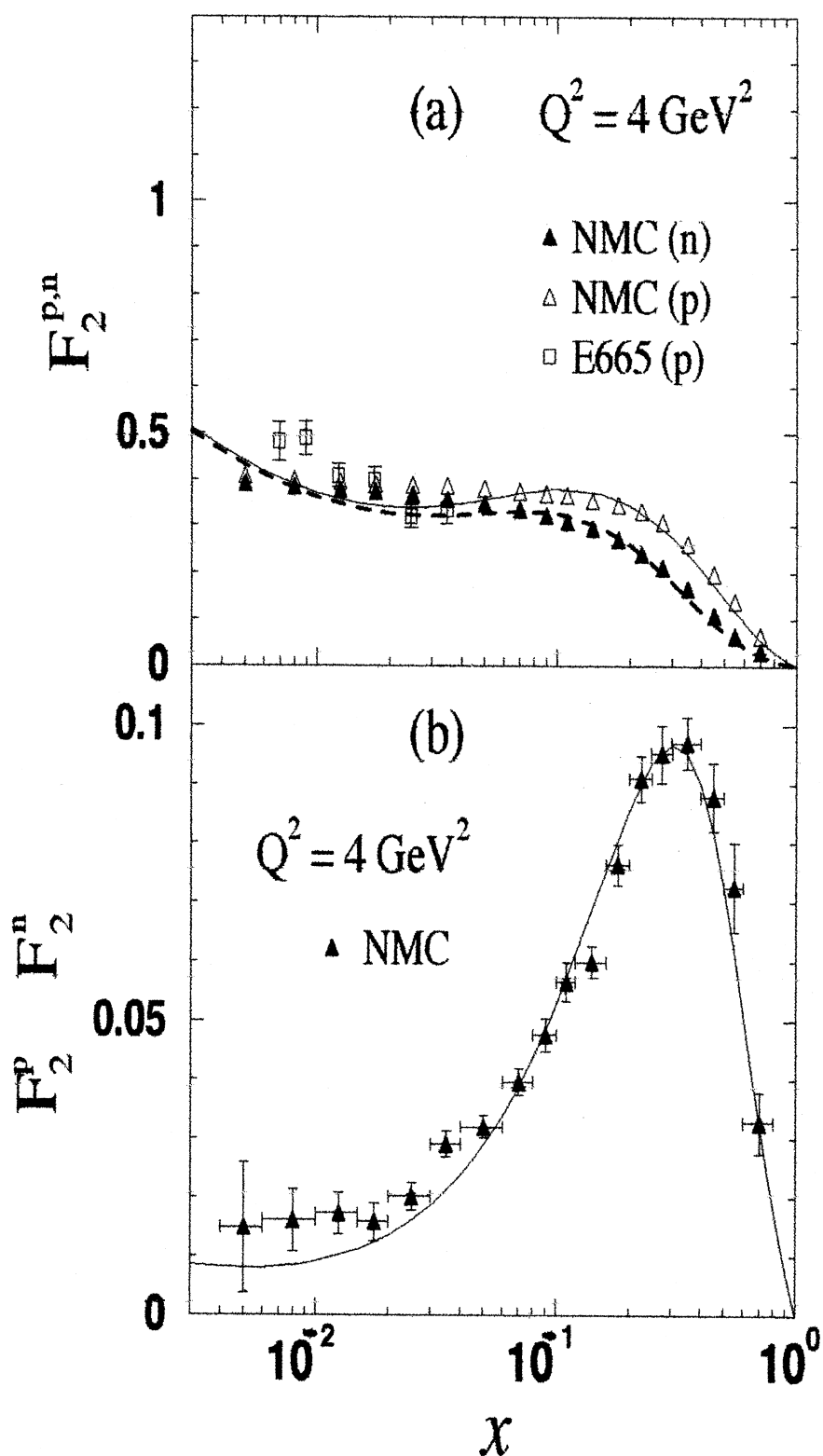
Na Obr.7.3 a) [17] môžeme vidieť nabitované štruktúrne funkcie pre protón a neutrón v porovnaní s dátami získanými v experimentoch NMC a E665 a v Tab.7.2 sú uvedené fitovacie parametre a a b rovnako aj hodnoty siedmich parametrov vypočítaných z hore uvedenej sústavy rovníc.

Parameter	Protón	Neutrón
a	$-0,376$	$-0,300$
b	$0,504$	$0,504$
$\mu_{u\uparrow}$ [MeV]	210	40
$\mu_{u\downarrow}$ [MeV]	86	94
$\mu_{d\uparrow}$ [MeV]	42	188
$\mu_{d\downarrow}$ [MeV]	106	76
$\mu_{s\uparrow}$ [MeV]	-7	-4
$\mu_{s\downarrow}$ [MeV]	7	4
T [MeV]	62	59

Tab.7.2 : Číselné hodnoty veličín vstupujúcich do štruktúrnych funkcií nukleónu [17].

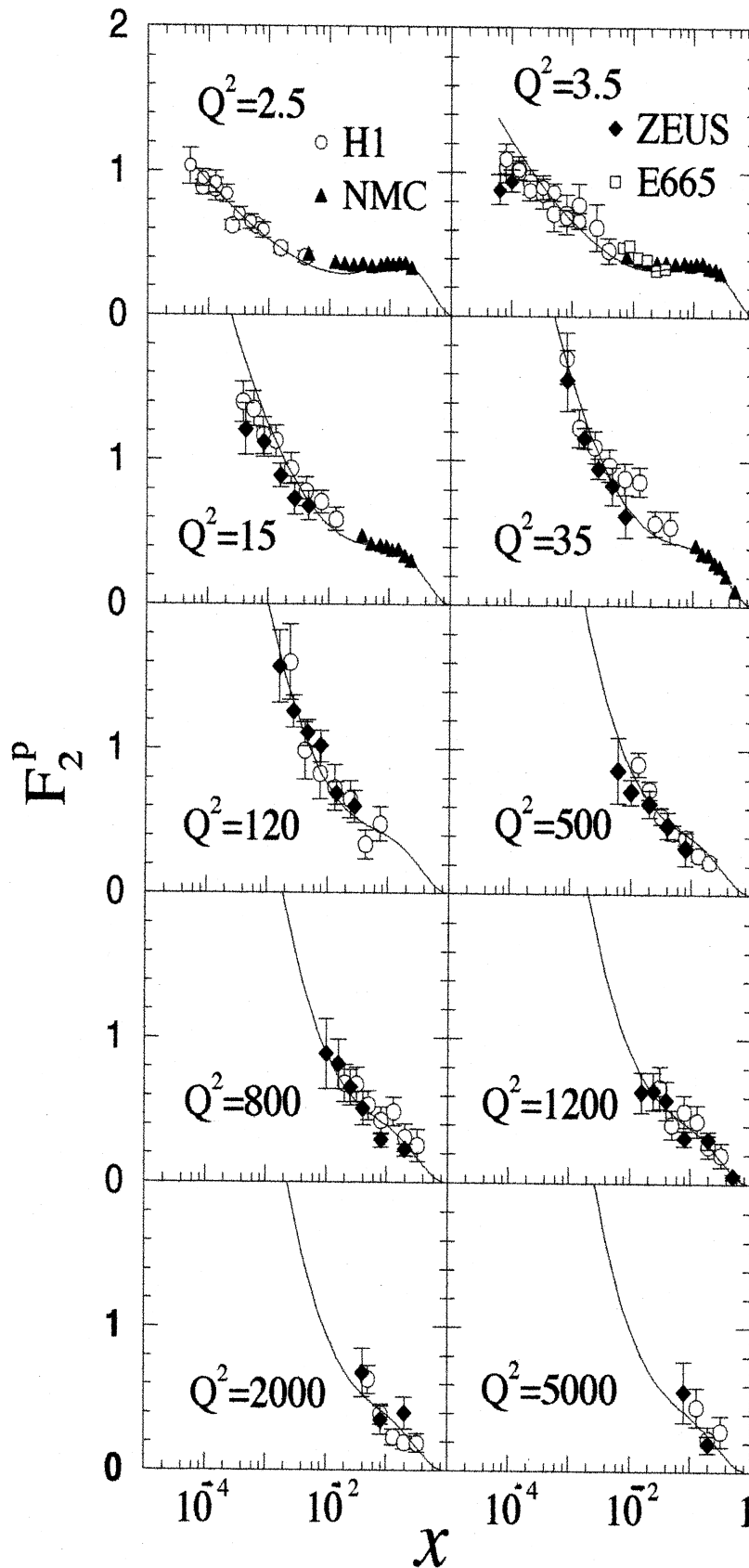
Obrázok 7.3 b) [17] podobne ako v prvom modeli zobrazuje rozdiel medzi štruktúrnymi funkciami protónu a neutrónu. Dáta pochádzajú z experimentu NMC.

Rozdielne hodnoty parametrov a a b tak ako aj hodnôt Δq pre protón a neutrón vypovedajú o tom, že tento model neuvažuje obecnú používanú nábojovú symetriu pre uvažované nukleóny. Na základe parametrov z Tab.7.2 a vďaka prostriedkom kvantovej chromodynamiky (Dokshitzerove – Gribovove – Lipatovove – Altarelliho – Parisiovove rovnice [22]) sme schopní predvídať priebeh štruktúrnych funkcií v rozšírenej oblasti kvadrátov prenesenej hybnosti (Obr. 7.4) [17]. Dáta odpovedajú výsledkom z experimentov H1, NMC, ZEUS a E665.



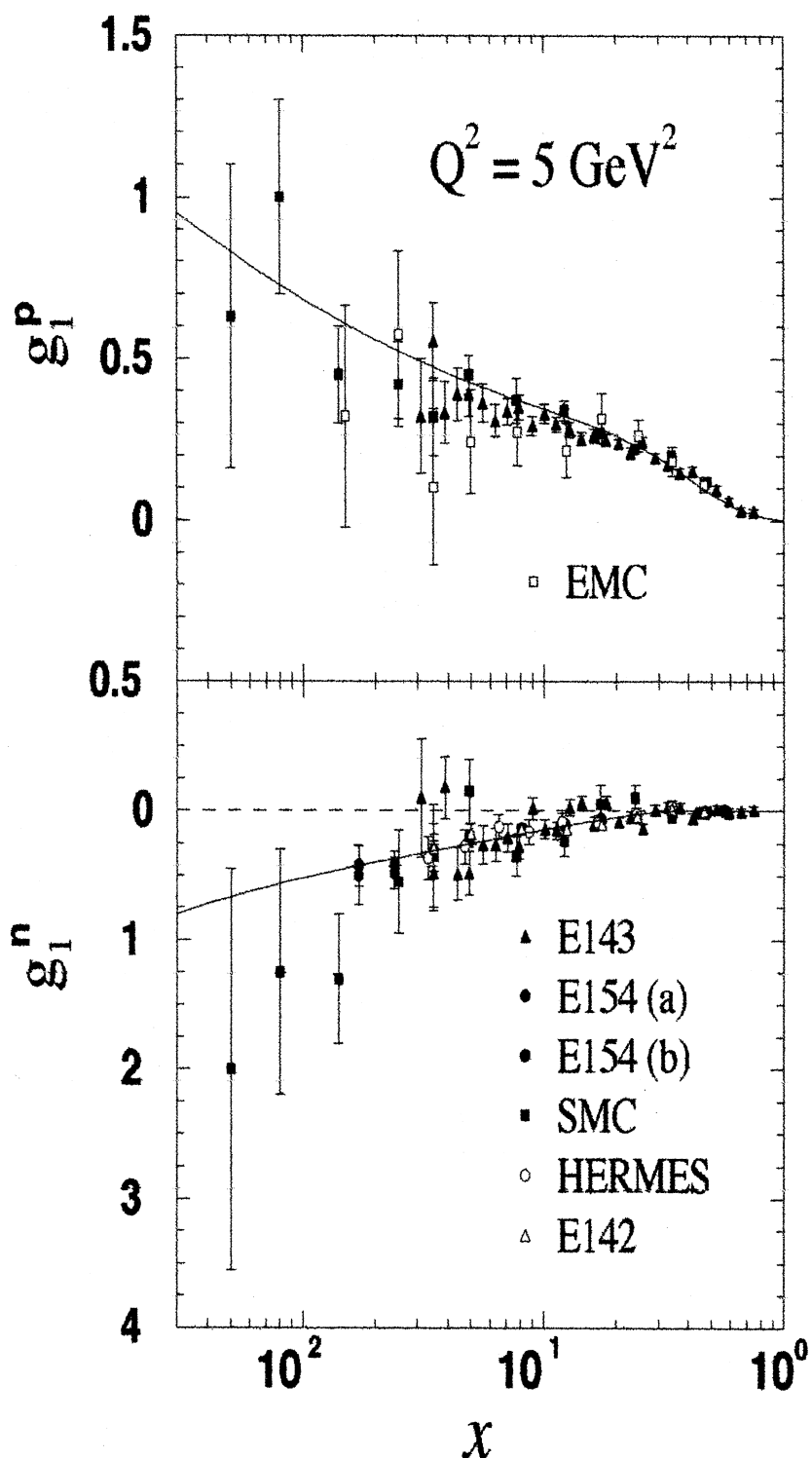
Obr.7.3: a) Fit štruktúrnych funkcií protónu (súvislá čiara) a neutrónu (čiarkovane) podľa modelu [17]. Dáta pre protón z NMC [9] a E665 [10], pre neutrón z NMC [28].

b) Rozdiel štruktúrnych funkcií protónu a neutrónu v porovnaní s dátami z experimentu NMC [28].



Obr.7.4: Priebeh štruktúrnej funkcie F_2 predpovedanej modelom [17] pre protón pri rôznych hodnotách Q^2 v konfrontácii s experimentálnymi hodnotami NMC [9], E665 [10], H1 [29] a ZEUS[30].

Tak ako bolo uvedené v úvode tejto state, týmto modelom je možné predpovedať taktiež tvary polarizovaných štruktúrnych funkcií, čo neprichádzalo do úvahy v prvom prezentovanom prístupe. Ich grafický priebeh je demonštrovaný na Obr.7.5 [17] v porovnaní s údajmi nameranými v experimentoch EMC, E143, E154, SMC, HERMES a E142.



Obr.7.5 : Polarizované štruktúrne funkcie protónu a neutrónu pre model [17] a experimentálne data [27].

7.3: Model 3 – Buccellov - Sofferov model

Charakteristickým elementom tohto modelu je odvodenie vzťahu medzi polarizovanými a nepolarizovanými štruktúrnymi funkciami nukleónu. Pre hodnoty Bjorkenovej premennej vymezennej nerovnosťou $0,2 \leq x < 1$, kde hrajú dominantnú úlohu valenčné kvarky nad morskými, môžeme predpokladať [31] :

$$\Delta u(x) = u(x) - d(x) \quad (7.29)$$

Z hore uvedenej rovnosti môžeme odvodiť ďalšie dôležité vzťahy, ktoré dávajú dostatočný súhlas s experimentálne nameranými hodnotami.

Nadalej predpokladáme platnosť elementárnych rovností predstavených v Stati 7.2 :

$$q(x) = q_{\uparrow}(x) + q_{\downarrow}(x) \quad (7.30)$$

$$\Delta q(x) = q_{\uparrow}(x) - q_{\downarrow}(x) \quad (7.31)$$

kde rovnica (7.31) špecifikovaná pre u kvark dáva spolu s predpokladom (7.29) a rovnosťou (7.30) vzťah:

$$u_{\downarrow}(x) = \frac{1}{2}(d_{\uparrow}(x) + d_{\downarrow}(x)) = \frac{1}{2}d(x) \quad (7.32)$$

a taktiež po pričítaní výrazu $\bar{d}_{\uparrow}(x) + \bar{d}_{\downarrow}(x)$ k oboj strane rovnice (7.31) (pre kvark u) :

$$\frac{1}{2}(d(x) + \bar{d}(x)) = u_{\downarrow}(x) + \frac{1}{2}\bar{d}(x) \quad (7.33)$$

Pokiaľ zoberieme do úvahy, že platí implikácia [31] :

$$u_{\downarrow}(x) = \frac{1}{2}d(x) \Rightarrow \bar{u}_{\downarrow}(x) = \frac{1}{2}\bar{d}(x) \quad (7.34)$$

tak dostávame:

$$u_{\downarrow}(x) + \bar{u}_{\downarrow}(x) = \frac{1}{2}(d(x) + \bar{d}(x)) \quad (7.35)$$

Z rovnosti na pravej strane implikácie (7.34) zároveň vyplýva:

$$\bar{u}(x) - \bar{d}(x) = \bar{u}_{\uparrow}(x) - \bar{u}_{\downarrow}(x) = \Delta \bar{u}(x) \approx -0,14 \quad (7.36)$$

kde číselná hodnota vo vzťahu vychádza z meraní NMC a potvrdzuje tzv. Flavor asymmetry (Stať 7.1).

Pomocou vzťahu (7.29), ku ktorému pripočítame distribúciu $\Delta \bar{u}(x)$, následne získavame:

$$\Delta u(x) + \Delta \bar{u}(x) = u(x) + \bar{u}(x) - d(x) - \bar{d}(x) \quad (7.37)$$

Distribučnú funkciu $\Delta d(x)$ zapíšeme nasledovne:

$$\Delta d(x) + \Delta \bar{d}(x) = \Delta d_v(x) + \Delta d_s(x) + \Delta \bar{d}(x) \quad (7.38)$$

kde sme rozlíšili príspevky polarizovaných funkcií pre valenčné resp. morské kvarky.

Použitím vzťahu (3.9) pre nepolarizované štruktúrne funkcie protónu a neutrónu a vzťahov (3.10) a (3.11) definujúcich izospinovú invariáciu zo State 3.2 máme rovnosti :

$$\frac{F_2^p(x)}{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] \quad (7.39)$$

$$\frac{F_2^n(x)}{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] \quad (7.40)$$

z ktorých plynie:

$$\frac{2}{3} \left[\frac{F_2^p(x) - F_2^n(x)}{x} \right] = \frac{2}{9} (u^p(x) - d^p(x)) + \frac{8}{27} (\bar{u}^p(x) - \bar{u}^n(x)) + \frac{2}{27} (\bar{d}^p(x) - \bar{d}^n(x)) \quad (7.41)$$

Na druhej strane, pre polarizovanú štruktúrne funkciu podľa definície platí, že:

$$g_1^p(x) = \frac{1}{2} [e_u^2 (\Delta u(x) + \Delta \bar{u}(x)) + e_d^2 (\Delta d(x) + \Delta \bar{d}(x))] \quad (7.42)$$

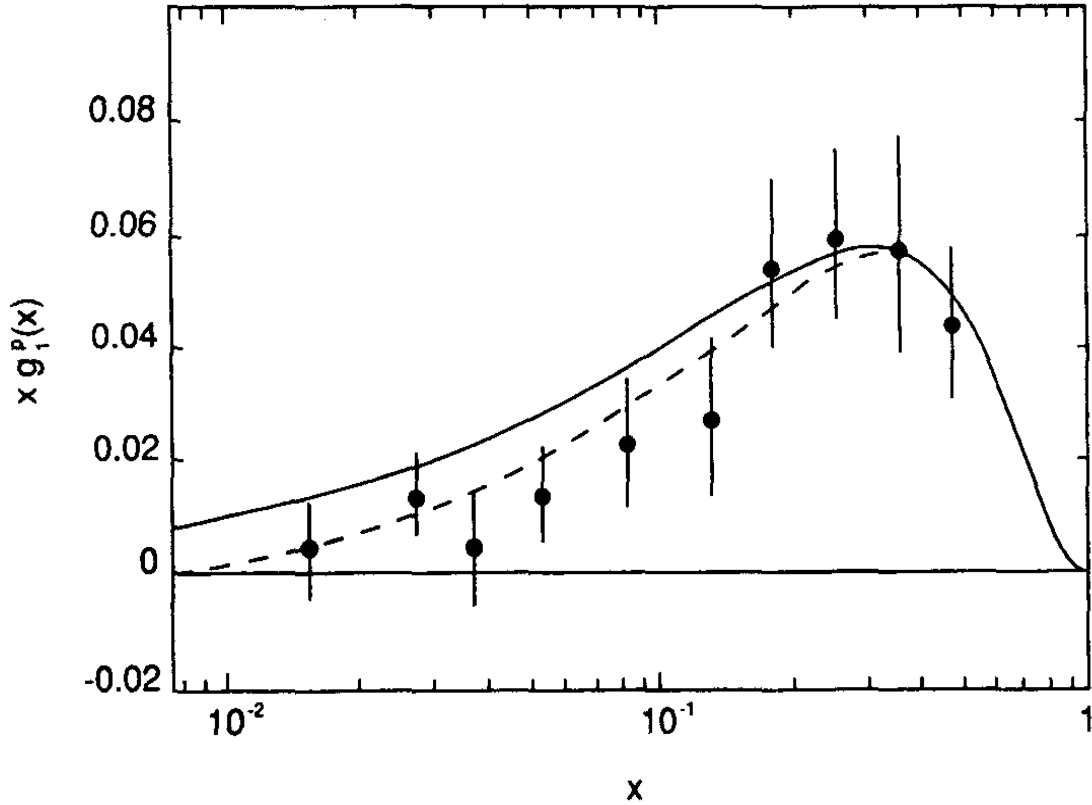
Potom, aplikovaním vzťahov (7.37) a (7.38) na predchádzajúcu rovnosť, budeme mať:

$$g_1^p(x) = \frac{2}{9} (u^p(x) - d^p(x) + \bar{u}^p(x) - \bar{d}^p(x)) + \frac{1}{18} (\Delta d_v(x) + \Delta d_s(x) + \Delta \bar{d}(x)) \quad (7.43)$$

Vzhľadom k tomu, že druhý sčítanec vzťahu (7.43) je možné vďaka podielu druhých mocnín nábojov kvarkov u a d zanedbať, prichádzame k záveru, že po tejto aproximácii, sú pravé strany rovníc (7.41) a (7.43) identické, čo znamená, že sme získali hľadanú rovnosť medzi polarizovanými a nepolarizovanými funkciami v tvare [31] :

$$xg_1^p(x) = \frac{2}{3} [F_2^p(x) - F_2^n(x)] \quad (7.44)$$

Grafický priebeh funkcie $xg_1^p(x)$ je demonštrovaný na Obr.7.6 [31] súvislou čiarou pri hodnotách nepolarizovaných štruktúrnych funkcií zmeraných pri $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$.



Obr.7.6: Priebeh funkcie $x g_1^p(x)$ predpovedanej modelom [31] (súvislá čiara) v porovnaní s dátami [32].

Termodynamický popis bude postavený na formulách pre kvarkové a antikvarkové distribúcie opierajúcich sa o štatistické rozdelenia tvaru (6.2) (Kapitola 6). Potom máme, podľa [18] :

$$x q^h(x, Q_0^2) = \frac{A X_{0q}^h x^b}{\exp\left[\frac{x - X_{0q}^h}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] + 1} \quad (7.45)$$

$$x \bar{q}^h(x, Q_0^2) = \frac{\bar{A} (X_{0q}^{-h})^{-1} x^{2b}}{\exp\left[\frac{x + X_{0q}^{-h}}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] + 1} \quad (7.46)$$

kde sme využili vzťah poprvýkrát použitý v predchádzajúcej kapitole, tentokrát však napísaný v tvare (h značí helicitu partónu) :

$$X_{0q}^h = -X_{0\bar{q}}^{-h} \quad (7.47)$$

V nasledujúcich riadkoch uvedieme popis tvaru formúl (7.45) a (7.46) a dôležitosť jednotlivých členov v nich prítomných.

V prípade kvarkových distribúcií prvý zo sčítancov, nazývaný aj nerozptyľový člen (non-diffractive term), dominuje pri vysokých hodnotách x a naopak pri malých hodnotách tejto premennej vymizne. Z tohto dôvodu má prvý zlomok v čitateli prítomný hore uvedený faktor, pričom A je normalizačná konštanta nezávislá na helicite kvarku, chemický potenciál X_{0q}^h zachováva súlad

nášho modelu s experimentálne získanými hodnotami a b je kladné číslo. Naopak, v oblastiach nízkych hodnôt x hrá dominantnú úlohu druhý z členov rovnice (7.45) a nazýva sa rozptylový člen (diffractive term), ktorý narozdiel od predchádzajúceho členu nezávisí na typu kvarku a jeho helicity. Konštanta \tilde{A} má opäť normalizačný význam a \tilde{b} je záporné číslo [18].

V prípade antikvarkov je vysvetlenie analogické s rozdielom mocniny $2b$, ktorú indikuje fakt, že funkcia $x\bar{d}(x) - x\bar{u}(x)$ má v oblasti nízkych hodnôt x rastúci charakter [33] (Obr.7.7).

V prípade gluónu s nulovým chemickým potenciálom predpokladáme výraz vychádzajúci z rozdelenia Boseho – Einsteinovho v tvare [18] :

$$x G(x, Q_0^2) = \frac{A_G x^{b_G}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] - 1} \quad (7.48)$$

Po stanovení číselných hodnôt parametrov b a b_G nám exponent $b_G = \tilde{b} + 1$ naznačí fakt, že distribučná funkcia gluónov dominuje pri malých hodnotách invariantu x , podobne ako distribúcia antikvarkov. A_G predstavuje normalizačnú konštantu.

Z faktov, že v prípade protónu funkcia $u(x)$ dominuje nad $d(x)$ a že polarizované štruktúrne funkcie splňujú relácie $\Delta u(x) > 0$ a $\Delta d(x) < 0$, plynie v danom poradí nasledujúca séria nerovností pre príslušné chemické potenciály:

$$X_{0u}^h + X_{0u}^{-h} > X_{0d}^h + X_{0d}^{-h} \quad (7.49)$$

$$X_{0u}^h > X_{0u}^{-h} \quad (7.50)$$

$$X_{0d}^h < X_{0d}^{-h} \quad (7.51)$$

ktorú spolu so vzťahom (7.47) aplikujeme na distribúcie antikvarkov a následne obdržíme:

$$\Delta \bar{u}(x) > 0 \quad \text{resp.} \quad \Delta \bar{d}(x) < 0 \quad (7.52)$$

Chemické potenciály zo sústavy nerovnic (7.49) až (7.51) možno ešte prepísať do podoby:

$$X_{0u}^h > X_{0u}^{-h} \sim X_{0d}^{-h} > X_{0d}^h \quad (7.53)$$

pričom prostredná aproximácia potenciálov je taktiež tak ako aj celá uvedená nerovnosť v súlade s experimentálne získanými hodnotami. Celkovo teda máme v rovniach (7.45), (7.46) a (7.48) 11 neznámych parametrov, z ktorých 8 predstavujú tzv. voľné parametre, určené pomocou fitov založených na experimentálnych dátach (NMC) a zvyšné tri získame z dvoch normalizačných podmienok a zákona zachovania celkovej hybnosti (vzťahy (7.15) až (7.17) v stati 7.1). V tabuľkách 7.3 a 7.4 sú zhrnuté ich číselné hodnoty.

Veličina	Hodnota
A	1,74938
\bar{A}	1,90801
A_G	14,27535

Tab.7.3 : Hodnoty normalizačných konštánt [18].

Veličina	Hodnota
X_{0u}^h	0,46128
X_{0u}^{-h}	0,29766
X_{0d}^h	0,22775
X_{0d}^{-h}	0,30174
\bar{x}	0,09907
b	0,40962
\tilde{b}	- 0,25347
\tilde{A}	0,08318

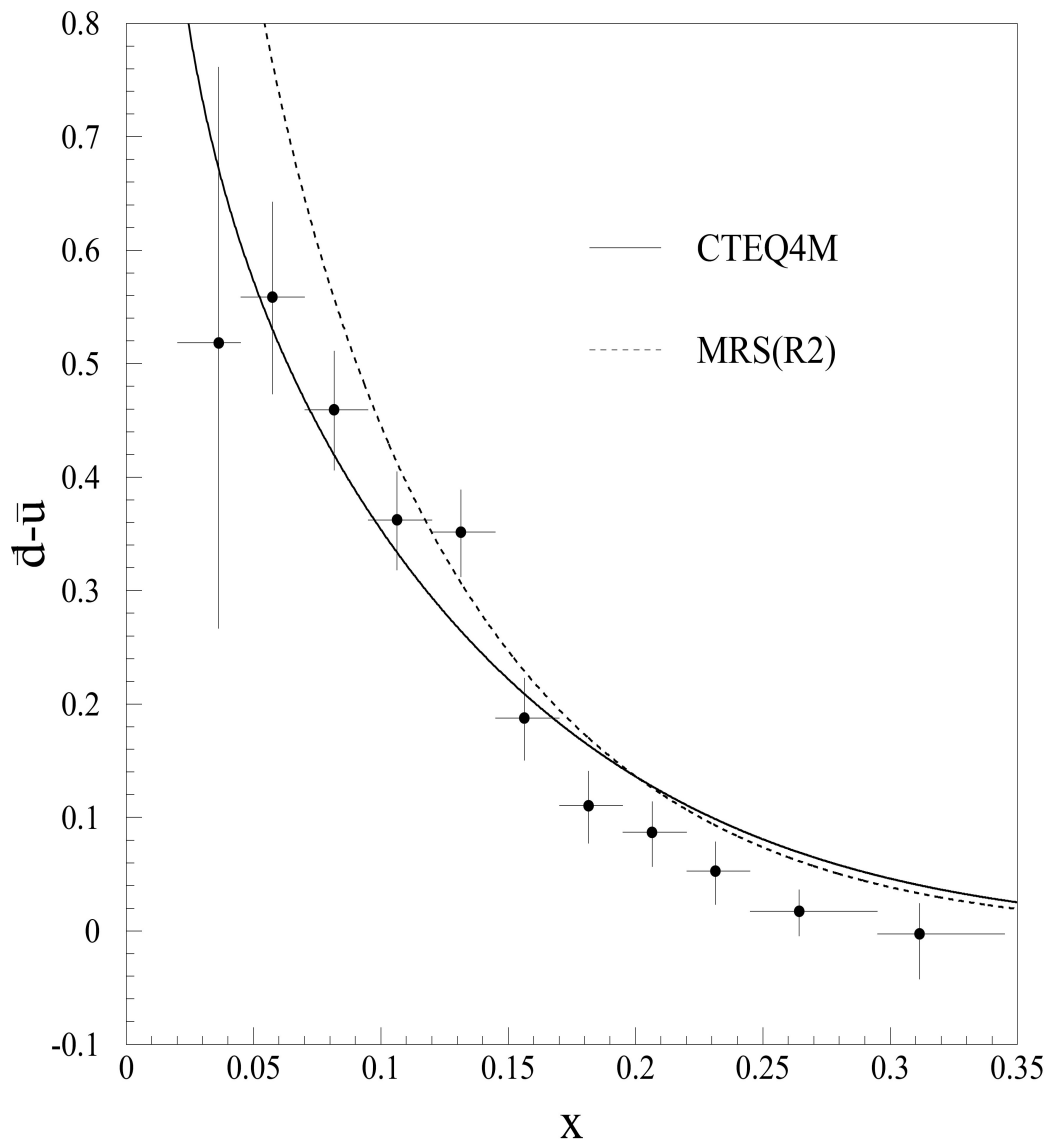
Tab.7.4 : Hodnoty voľných parametrov [18].

Obr.7.8 a 7.9 ilustrujú distribučné funkcie ľahkých kvarkov a ich antikvarkov s príslušnými helicitami . Je z nich zrejme, že obidve skupiny distribúcií vykazujú v oblasti malých hodnôt x podobný priebeh, čo je v súlade s dominanciou rozptylového členu (diffractive term) v rovniciach (7.45) a (7.46) pri nízkych hodnotách Bjorkenovej premennej. Naopak, pri vyšších hodnotách tohto invariantu začínajú nad antikvarkmi (morskými kvarkmi) už podľa očakávania prevažovať valenčné kvarky a teda pri porovnaní týchto dvoch skupín funkcií v tejto kinematickej oblasti je vidieť značný rozdiel v ich monotónnosti.

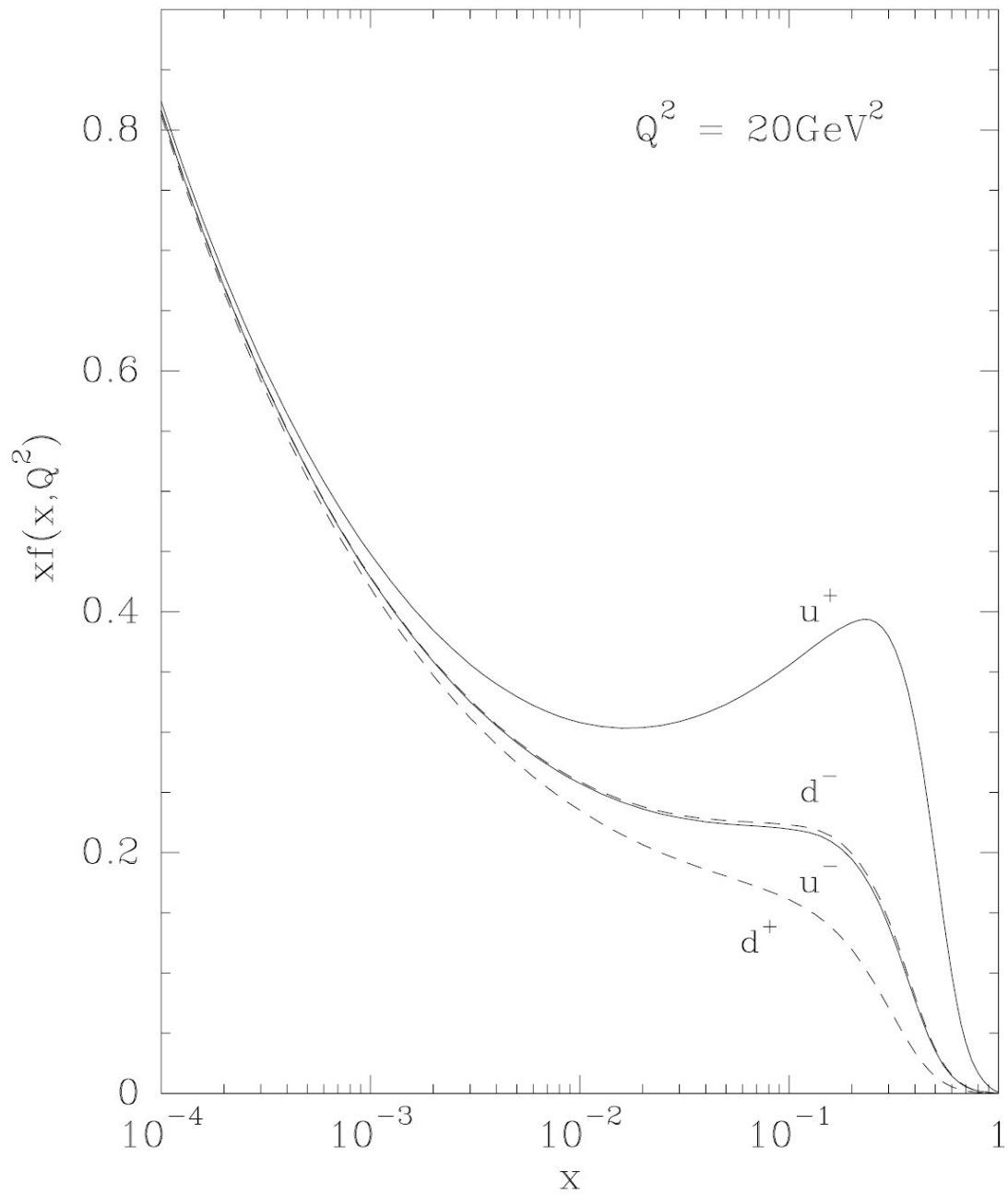
Obr. 7.10 vykresľuje priebeh funkcie xG pre gluóny a je z neho taktiež možné vidieť klesajúci charakter tejto funkcie na celom danom intervale hodnôt x . Pri porovnaní nášho modelu založeného na termodynamicknej formule (7.48) s experimentálne zmeranými hodnotami sa presvedčujeme o správnosti našej úvahy a je teda možné pozorovať istú analógiu medzi gluónovými a antikvarkovými distribúciami.

Na koniec, Obr.7.11 konfrontuje teoretickú predpoveď polarizovaných štruktúrnych funkcií g_1 pre protón, deutérium a hélium s experimentálnymi dátami.

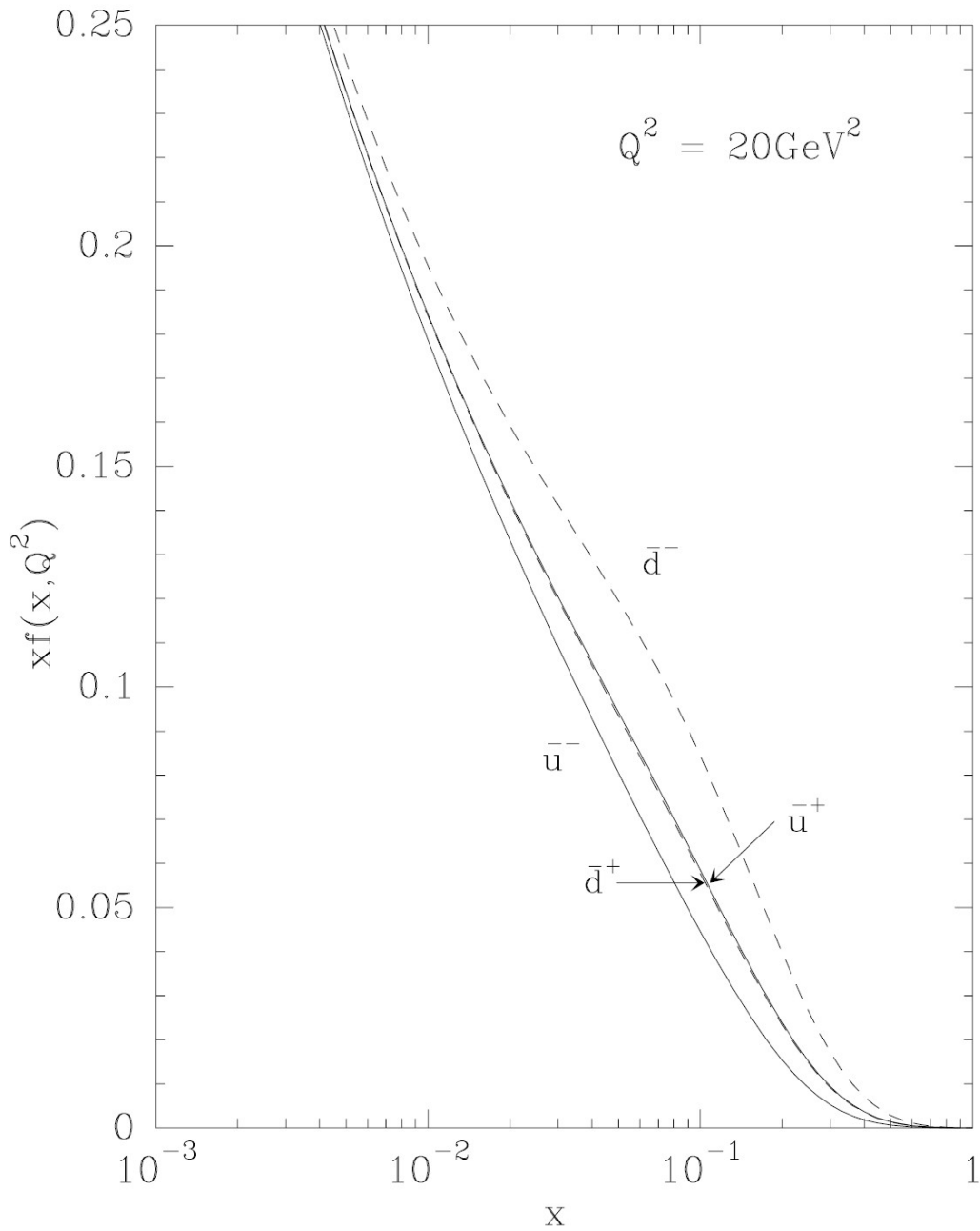
Podotýkame, že uvedené grafické reprezentácie boli získané metódami kvantovej chromodynamiky (QCD), pomocou tzv. next-to-leading order evolution (NLO) a boli prevzaté z práce [18].



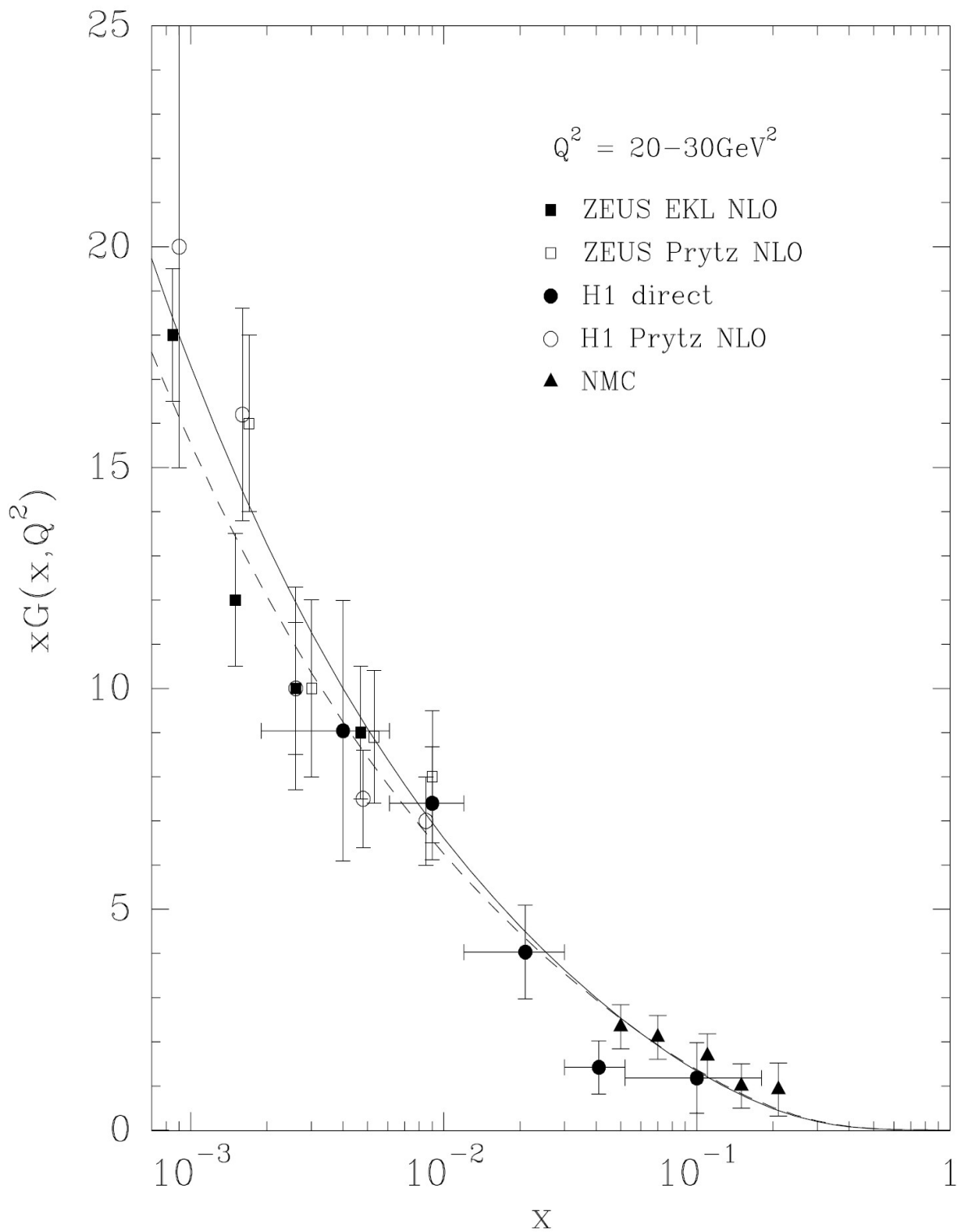
Obr.7.7 : Priebeh funkcie $\bar{d} - \bar{u}$ v závislosti na x ($Q=7,35 \text{ GeV}$) [33].



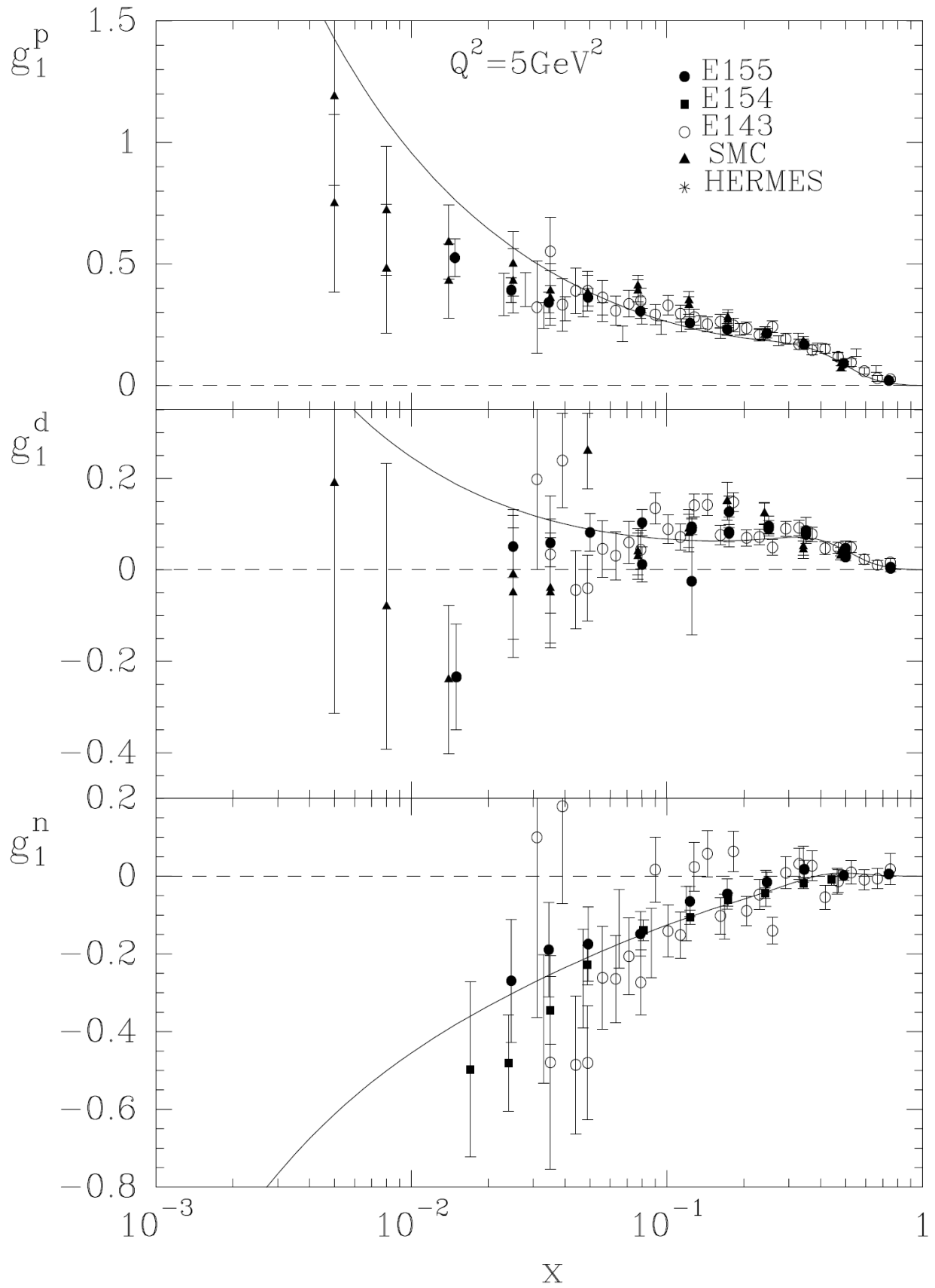
Obr.7.8 : Priebeh funkcií xf v závislosti na Bjorkenovej premennej x ('+' značí kladnú helicitu h , '-' značí zápornú helicitu $-h$ príslušného kvarku) - kvarkové distribúcie.



Obr.7.9 : Priebeh funkcií xf v závislosti na Bjorkenovej premennej x ('+' značí kladnú helicitu h , '-' značí zápornú helicitu $-h$ príslušného antikvarku) - antikvarkové distribúcie.



Obr.7.10 : Priebeh funkcie xG v závislosti na Bjorkenovej premennej x pri hodnotách $Q^2=20\text{ GeV}^2$ (čiarkovane) a $Q^2=30\text{ GeV}^2$ (súvislá čiara). Zrovnanie modelu [18] a dát z experimentov NMC [34], H1 [35] a ZEUS [36].



Obr.7.11 : Priebeh funkcií $g_1^{p,d,n}$ pre protón, deuterón a neutrón v závislosti na Bjorkenove premennej x .

Na záver tejto kapitoly ešte pripomenieme dôležitosť transversálnej zložky hybnosti partónu p_T , ktorá začína mať význam pri vyšších hodnotách parametru x a naopak jej príspevok je zanedbateľný pri nízkych hodnotách tejto invariantnej veličiny.

Pokiaľ si označíme distribučnú funkciu ľubovoľného partónu ako: $q_i(x, p_T^2)$, tak môžeme pre zákon zachovania hybnosti písať v súlade s [37] :

$$\sum_i \int_0^1 \left[\int_0^{(p_T^2)_{max}} x q_i(x, p_T^2) d p_T^2 \right] dx = 1 \quad (7.54)$$

V oblastiach malých x dominuje longitudálna hybnosť p_z nad transversálnou zložkou p_T a preto môžeme rozvinúť energiu protónu E s pokojovou hmotnosťou M a energiu nehmotného partónu ε do Taylorovho radu, čo znamená:

$$E \approx p_z + \frac{M^2}{2 p_z} \quad (7.55)$$

$$\varepsilon \approx x p_z + \frac{p_T^2}{2 x p_z} \quad (7.56)$$

Je zrejmé, že po sčítaní energií jednotlivých partónov musíme dostať energiu protónu, a toto je možné dosiahnuť využitím vzťahov (7.54), (7.55) a (7.56) :

$$p_z \sum_i \int_0^1 \left[\int_0^{(p_T^2)_{max}} x q_i(x, p_T^2) d p_T^2 \right] dx + \sum_i \int_0^1 \left[\int_0^{(p_T^2)_{max}} q_i(x, p_T^2) \frac{p_T^2}{2 x p_z} d p_T^2 \right] dx = p_z + \frac{M^2}{2 p_z} \quad (7.57)$$

Vďaka norme (26) vidíme, že v práve odvodenej rovnosti je prvý sčítanec na ľavej strane identický s prvým sčítancom na pravej strane, čo ihneď implikuje formulu pre určenie konštanty M :

$$\sum_i \int_0^1 \left[\int_0^{(p_T^2)_{max}} q_i(x, p_T^2) \frac{p_T^2}{x} d p_T^2 \right] dx = M^2 \quad (7.58)$$

Distribučná funkcia partónov q_i je určená pomocou metód štatistickej fyziky a termodynamiky, postavenej na Lagangeových multiplikátoroch (Kapitola 4). Podrobnejší popis jej odvodenia a následného určenia hmotnosti nukleónu M je uvedený v článku [37].

Kapitola 8

Kovariantný a nekovariantný kvark-partónový model

Cieľom tejto kapitoly je podať základné rozdiely medzi kovariantným a nekovariantným kvark-partónovým modelom. Dôvod pre vytvorenie samostatnej state je ten, že ani jeden z nich nie je postavený na myšlienke termodynamického prístupu a teda nevyužíva k popisu nukleónov formule známe z termodynamiky a štatistickej fyziky.

Nekovariantný prístup tak, ako ukazuje napríklad dizertačná práca [3] alebo i iné odborné články, napr. [38] resp. [39], sa ukazuje nevhodným pri popise polarizovaných štruktúrnych funkcií a je preto prirodzené hľadať iné metódy popisu. Jednou z nich je práve kovariantný model, ktorý využíva sférickú symetriu pravdepodobnostného rozdelenia hybnosti kvarkov v pokojovej sústave nukleónu v závislosti na veľkosti hybnosti kvarku (resp. energie, keďže predpokladáme jeho nulovú hmotnosť) - p_0 popísanú funkciami $G_i^\uparrow(p_0)$ a $G_i^\downarrow(p_0)$ resp. $\Delta G_i^\uparrow(p_0)$ a $\Delta G_i^\downarrow(p_0)$ (horný index opäť určuje polarizáciu kvarku resp. antikvarku) . Tento fyzikálny fakt je možné v prípade nepolarizovaných štruktúrnych funkcií vyjadriť matematicky ako:

$$G(p_0) = \sum_i e_i^2 G_i(p_0) = \sum_i e_i^2 [G_i^\uparrow(p_0) + G_i^\downarrow(p_0)] \quad (8.1)$$

kde funkcia $G(p_0)$ už priamo vstupuje do štruktúrnych funkcií nukleónu. Analogicky, pre prípad polarizovaných štruktúrnych funkcií dostávame:

$$\Delta G(p_0) = \sum_i e_i^2 \Delta G_i(p_0) = \sum_i e_i^2 [\Delta G_i^\uparrow(p_0) - \Delta G_i^\downarrow(p_0)] \quad (8.2)$$

pričom podobne ako v predchádzajúcom prípade, funkciu na ľavej strane je možné priamo aplikovať do výrazu pre štruktúrne funkcie nukleónu.

Kovariantný model je zároveň výhodný pre určovanie partónových distribučných funkcií závislých na transversálnej zložke hybnosti (záver Kapitoly 7), čo nám teda umožňuje hľadať na kvark ako na trojrozmerný objekt a tak z nameraných nukleónových štruktúrnych funkcií vytvoriť trojrozmerné rozdelenie hybnosti kvarkov v pokojovej sústave nukleónu. Navyše toto „priestorové“ chápanie partónu zohráva dôležitú úlohu pri riešení orbitálneho momentu kvarku. Vďaka ďalšej vlastnosti, tzv. relativistickej kovariancii, môžeme prostredníctvom Lorentzových transformácií dokonca prejsť k ľubovoľným ďalším súradnicovým sústavám.

Na záver je teda možné všeobecne povedať, že podstatný rozdiel týchto prístupov spočíva v tom, že kým nekovariantný prístup redukuje pohyb kvarku do jednej dimenzie, tak kovariantný prístup popisuje jeho pohyb v troch rozmeroch. V prvom prípade je distribučná funkcia partónu vlastne pravdepodobnosť, s akou príslušný kvark nesie istú frakciu hybnosti x , kým v druhom táto distribúcia predstavuje pravdepodobnostné rozdelenie hybnosti kvarkov v 3D priestore. Podrobnejší popis a zrovnanie týchto dvoch modelov je uvedený napr. v práci [3].

Kapitola 9

Záver

V predloženej práci sme sa pokúsili demonštrovať, že je možné s dostatočnou presnosťou popísať a analyzovať vnútorný svet nukleónov pomocou metód známych z termodynamiky a štatistickej fyziky. V jednotlivých prístupoch sa vytvárali rôzne aproximácie, napr. v prvom z nich sa obecné zanedbával príspevok distribučných funkcií morských kvarkov (s , c) a ich antikvarkov. V článku [18] je ale prítomný popis týchto distribučných funkcií, ktorý po následnej aplikácii NLO - evolution podáva konzistentnejší a presnejší obraz štruktúry nukleónu. Aj napriek týmto korekciám však môžeme prehlásiť prezentované prístupy v tejto práci sa dostatočne uspokojivé.

Veľmi aktuálnymi oblasťami pre teoretický a experimentálny výskum sú distribučné funkcie závislé na priečnej zložke hybnosti. Možnosť veľmi efektívneho využitia termodynamického prístupu i v tejto oblasti ukazuje nedávna práca [40]. Iným veľmi zaujímavým problémom, o ktorom sme sa zmienili, zostáva doposiaľ úplne nevysvetlený EMC efekt, oslavujúci v týchto dňoch svoje 30. výročie. V časopise CERN COURIER mu bol pri tejto príležitosti venovaný samostatný článok [41].

Po dohode s vedúcim práce sa miesto druhého bodu osnovy bakalárskej práce vygenerovali grafy distribučných funkcií na Obr. 3.2 až 3.4.

Referencie

- [1] Nosek, D.; Jádra a částice; Matfyzpress, Praha 2005
- [2] Feynman, R.P.; Photon-Hadron Interactions; Benjamin, Reading, Massachusetts 1972
- [3] Závada, P.; Průhled do nitra protonu v obraze strukturních funkcí; dizertační Dsc. práce, AVČR; Praha 2010
- [4] Boros, C.; Londergan, J. T.; Thomas, A. W.; Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 4075
- [5] <http://hepdata.cedar.ac.uk/pdf/pdf3.html>
- [6] Adloff, C. *et al.* ; Eur. Phys. J. C **21** (2001) 33; Eur. Phys. J. C **30** (2003) 1
- [7] Chekanov, S. *et al.* , ; Eur. Phys. J C **21** (2001) 443; Phys. Rev. D **70** (2004) 052001
- [8] Benvenuti, A. C.; Závada, P. ; *et al.* [BCDMS Collaboration]; Phys. Lett. B **223** (1989) 485
- [9] Arneodo, M. *et al.*; Nucl. Phys. B **483** (1997) 3
- [10] Adams, M. R. *et al.*; Phys. Rev. D **54** (1996) 3006
- [11] Whitlow, L. W. *et al.*; Phys. Lett. B **282** (1992) 475
- [12] Benvenuti, A. C.; Závada P., *et al.* [BCDMS Collaboration]; Phys. Lett. B **189** (1987) 483
- [13] Ashman, J. *et al.* [European Muon Collaboration]; Z. Phys. C **57** (1993) 211
- [14] Gomez, J. *et al.* ; Phys. Rev. D **49** (1994) 4348
- [15] https://wikiskripta.fjfi.cvut.cz/wiki/images/latexdoc/02TSFA/02TSFA_e6a83b61.pdf
- [16] https://wikiskripta.fjfi.cvut.cz/wiki/images/latexdoc/02TSFsbirka/02TSFsbirka_8c257277.pdf
- [17] Bhalerao, R. S.; Kelkar, N. G.; Ram, B.; Phys. Lett. B **476** (2000) 285
- [18] Bourrely, C.; Soffer, J.; Buccella, F.; Eur. Phys. J. C **23** (2002) 487
- [19] Amaudruz, P. *et al.*; Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2712;
Arneodo M. *et al.*; Nucl. Phys. B **487** (1997) 3
- [20] Bhalerao, R. S.; Phys. Lett. B **380** (1996) 1
- [21] Antia, H. M.; Numerical Methods for Scientists and Engineers; Tata McGraw-Hill, New Delhi 1991
- [22] Gribov, V. N.; Lipatov, L. N. ; Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1975) 438, 675;
Altarelli, G., Parisi, G.; Nucl.Phys. B **126** (1977) 297;
Dokshitzer, Y. L. ; Sov. Phys. JETP **46** (1977) 641
- [23] Derrick, M. *et al.* [Zeus Collaboration], Z. Phys. C **65** (1995) 379; Phys. Lett. B **316** (1993) 412;
Ahmed, T. *et al.* [H1 Collaboration], Nucl. Phys. B **439** (1995) 471;
Abt, I *et al.*, Nucl. Phys. B **407** (1993) 515
- [24] Amaudruz, P. *et al.* [NMC Collaboration], Phys. Lett. B **295** (1992) 159;
Benvenuti, A. C. *et al.* [BCDMS Collaboration], Phys.Lett. B **223** (1989) 485
- [25] Glück, M.; Reya, E.; Vogt, A.; Z. Phys. C **53** (1992) 127; Phys. Lett. B **306** (1993) 391;
Martin, A.D.; Stirling, W. J.; Roberts, R.G.; Phys. Rev. D **50** (1994) 6734; Lai, H. L. *et al.* [CTEQ Collaboration]; Phys. Rev. D **51** (1995) 4763
- [26] Amaudruz, P. *et al.*, [NMC Collaboration]; Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2712;
Arneodo M. *et al.*, Phys. Rev. B **50** (1994) R1
- [27] Anthony, P. *et al.* [E 142]; Phys. Rev. D **54** (1996) 6620;
Abe, K. *et al.* [E 143]; Phys. Rev. D **58** (1998) 112003;
Abe, K. *et al.* [E 154]; (a) Phys. Lett. B **405** (1997) 180;
(b) Phys. Rev.Lett. **79** (1997) 26; Adeva B. *et al.* [SMC]; Phys. Rev. D **58** (1998) 112002; Ackerstaff, K. *et al.* [HERMES] Phys. Lett. B **404** (1997) 383
- [28] Kabuss, E.-M. [NMC Collaboration] ; e-print hep-ph/9706435
- [29] Adloff, C. *et al.* [H1 Collaboration], Nucl. Phys. B **497** (1997) 3

- [30] Derrick, M. *et al.* [Zeus Collaboration], *Z. Phys. C* **72** (1996) 399
- [31] Buccella, F.; Soffer, J.; *Mod. Phys. Lett. A* **8** (1993) 225
- [32] Ashman, J. *et al.* [European Muon Collaboration]; *Phys. Lett. B* **206** (1988) 364; *Nucl. Phys. B* **328** (1989) 1
- [33] Hawker, E. A. *et al.* [FNAL Nusea Collaboration]; *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 3715
- [34] Allasia, D. *et al.* [New Muon Collaboration]; *Phys. Lett. B* **258** (1991) 493
- [35] Aid, S. *et al.* [H1 Collaboration]; *Nucl. Phys. B* **449** (1995) 3
- [36] Derrick, M. *et al.* [ZEUS Collaboration]; *Phys. Lett. B* **345** (1995) 576
- [37] Bourrely, C.; Soffer, J.; Buccella, F.; *Mod. Phys. Lett. A* **21** (2006) 143
- [38] Závada, P.; *Phys. Rev. D* **67** (2003) 014019
- [39] Závada, P.; *Eur. Phys. J. C* **52** (2007) 121
- [40] Bourrely, C.; Buccella, F.; Soffer, J.; *International Journal of Modern Physics A* **28** (2013) 1350026
- [41] <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1305/1305.7143.pdf>