Introduktion till gruppteori

- gruppaxiomen
- delgrupp, Abelsk/icke-Abelsk grupp
- symmetrigrupp (fysik!)
- permutationsgruppen

- Cayleys sats
- cykliska gruppen C_n, diedergruppen D_n
- ekvivalensrelation, ekvivalensklass
- konjugering, konjugatklass
- sidoklass
- kvotmängd G/H, kvotgrupp
- Lagranges sats

Evariste Galois, 1811-1832

INTRODUKTION TILL GRUPPTEORI

$G = \{g_1, g_2, \ldots g_n\}$ + kompositionsregel ("gruppmultiplikation")

bildar en grupp omm elementen uppfyller:

GRUPPAXIOMEN

- $g_i g_j \in G \quad \forall g_i, g_j$
- $(g_i g_j) g_k = (g_i g_j) g_k \quad , \quad \forall g_i, g_j, g_k$
- $\exists e \in G, \quad e g_i = g_i e = g_i \quad \forall g_i$
- $\forall g_i \exists g_i^{-1} : \quad g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$

$H \subset G$ DELGRUPP om H uppfyller gruppaxiomen.

$\{e\}, G$ "TRIVIALA DELGRUPPER".

$g_i g_j = g_j g_i \quad \forall g_i, g_j \implies$ ABELSK GRUPP

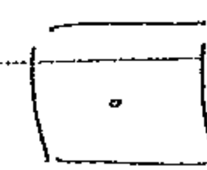
Abstrakt?! Varför intressant i fysiken?

FYSIK: G oftast: en SYMMETRIGRUPP

grupp av symmetritransformationer

FYSIKALISK LAG/ TEORI/MODELL/EKVATION ...

OBJEKT

EX. 

EX. $\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$:

$G = \{g_1 = \pi/2\text{-rotation},\ g_2 = \dots ?\}$

$$G = \left\{ g_\gamma = \left[x \to \gamma(x - vt),\ y \to y,\ z \to z,\ t \to \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right],\ \dots ? \right\}$$

Lorentzgruppen (Obs! "KONTINUERLIG" GRUPP!)

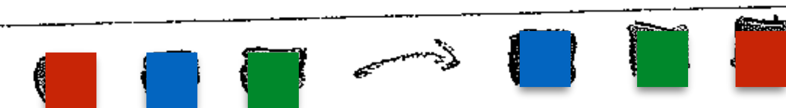
$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Ett speciellt viktigt exempel på en <u>ändlig</u> grupp är

PERMUTATIONSGRUPPEN $S_n = \{P_1, P_2, \ldots, P_{n!}\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

något av $P_1, P_2, \ldots, P_{n!}$

EX $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: 

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \neq QP \Rightarrow S_n \text{ är ICKE-ABELSK}$$

EX

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{(1)}(23)\cdot(132) = (12)\cancel{(3)}$$

$$(23)(132) = (12)$$

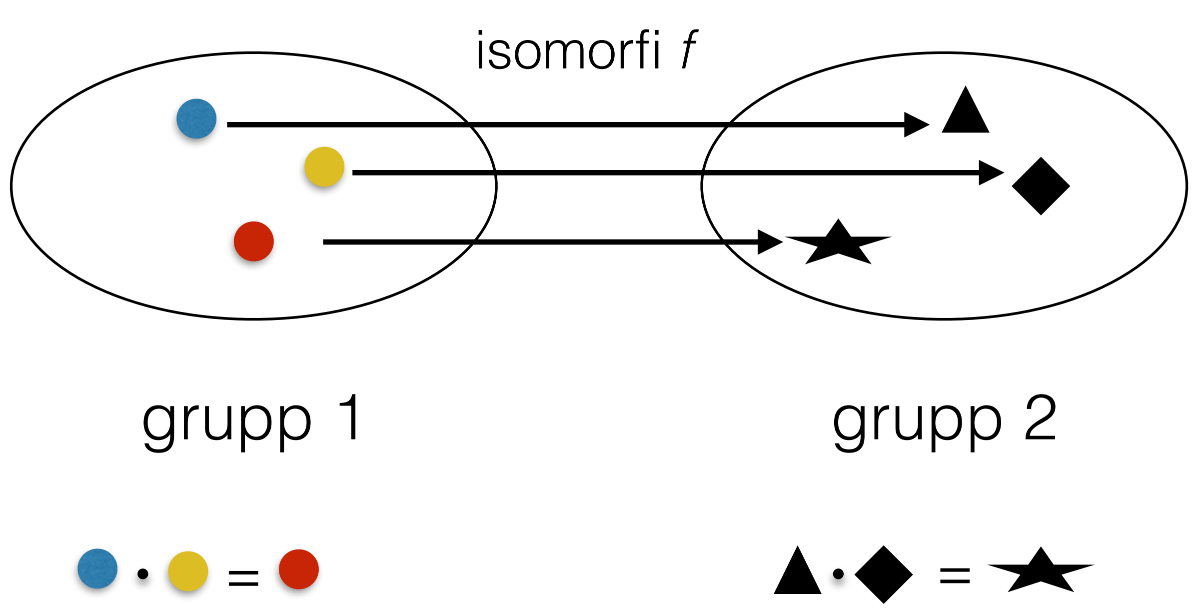
Varje element i S_n kan skrivas som en produkt av disjunkta CYKLER. Cykler kommuterar.

Varför är S_n intressant? Jo,

CAYLEYS SATS

Varje grupp av ordning n är ISOMORF med en delgrupp till S_n.

- 1-1
- gruppmultiplikationen bevarad



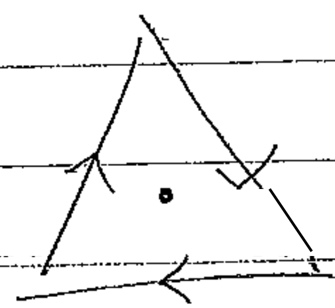
Andra viktiga ändliga grupper:

CYKLISKA GRUPPEN C_n (= symmetrigruppen av rotationer av en liksidig polygon med n orienterade sidor) och

DIEDERGRUPPEN D_n (= ... icke-orienterade sidor)

EX

C_3



$C_3 = \{a, b, e\}$

$2\pi/3$-rotation runt •

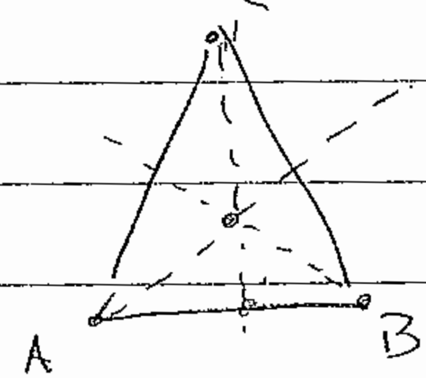
$4\pi/3$-rotation runt •

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

"multiplikationstabell"

EX

D_3



$D_3 = \{a, b, e, c_1, c_2, c_3\}$

π-rotation ∂A ∂B ∂C
rount OA

$\simeq S_3$

isomorf

NÅGRA VIKTIGA BEGREPP

KONJUGERING

$a, b \in G$ är KONJUGERADE om $\exists g \in G$

"konjugerande element"

$a = gbg^{-1}$

a, b ekvivalenta under konjugering : $a \sim b$

Ex på en EKVIVALENSRELATION

definieras av

(i) $a \sim a$ reflexiv

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ symmetrisk

(iii) $a \sim b, \; b \sim c \Rightarrow a \sim c$ transitiv

Är konjugering en ekvivalensrelation?

TEST: (i) OK ty $a = eae^{-1}$

(ii) OK ty $a = gbg^{-1} \Rightarrow b = g^{-1}ag$

(iii) $a = gbg^{-1}$, $b = hch^{-1}$

$\Rightarrow a = g(hch^{-1})g^{-1} = (gh)c(gh)^{-1}$

$\Rightarrow a \sim c$ (med konjugerande element (gh))

EKVIVALENSKLASS

Välj $a \in G$ $\quad (a) = \{b \in G \mid b \sim a\}$

$(b) = \{c \in G \mid c \sim b\}$

$b \notin (a) \Rightarrow (a) \cap (b) = \emptyset$

ty antag att $\exists d$, $d \sim a$ och $d \sim b \Rightarrow a \sim b$ *

KONJUGATKLASSER

$(a) = \{b \mid b = gag^{-1}, \exists g \in G\}$

Det finns en annan typ av ekvivalensklass:

SIDOKLASS

$H = \{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ delgrupp till G.

Välj $g \in G$, bilda VÄNSTER SIDOKLASS AV H MED AVSEENDE PÅ g

$gH \equiv \{gh_1, gh_2, \dots, gh_r\}$

(analogt för höger!)

Mängden av sidoklasser $\{g_1H, g_2H, \dots, g_sH\} \equiv G/H$ kallas KVOTMÄNGD. Om H är normal, dvs $gH = Hg$ $\forall g$ så är G/H en grupp (KVOTGRUPP)

DEF: $a \sim b$: $b \in aH$

TEST (i) $a \in aH$ ok ty $e \in H$

(ii) $b \in aH \overset{?}{\Rightarrow} a \in bH$.

$b \in aH \Rightarrow \exists h : b = ah \Rightarrow a = bh^{-1}$, $h^{-1} \in H$

$\Rightarrow a \in bH$ ok

(iii) $b \in aH$ och $c \in bH \overset{?}{\Rightarrow} c \in aH$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$b = ah, \exists h \in H \qquad c = bh', \exists h' \in H$

$\Downarrow$

$c = ahh' \Rightarrow c \in aH$ ty $hh' \in H$

(ordningen hos H) = [h] = r

Varje sidoklass innehåller r element

$gH = \{gh_1, gh_2, \ldots, gh_r\}$

Antag att $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ *

Sidoklasserna disjunkta : $s[h] = [g]$
ty ekvivalensklass

\# sidoklasser

LAGRANGES TEOREM

En grupp av primtalsordning kan inte ha äkta delgrupper