

實驗六 RLC 串聯電路

實驗目的：

以直流電訊號驅動 RLC 串聯電路，藉以了解阻尼振盪現象與特徵頻率的關係。

實驗儀器：

示波器，訊號產生器，電阻器，電容器，電感器

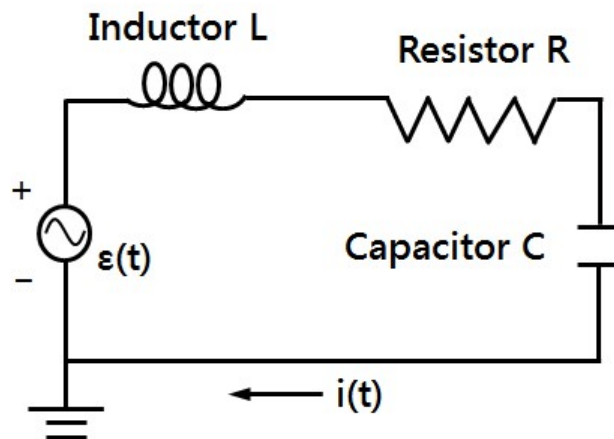
實驗原理：

電子元件中，電阻並無法儲存能量，屬於能量消耗元件；電容 C 與電感 L 皆不會消耗能量屬於能量儲存元件。在 LC 串聯電路中並無串接電阻 R，故能量消耗為零，為維持能量守恆，電路所儲存的能量會於電容 C 與電感 L 內進行交換，而此交換的頻率稱為特徵頻率。特徵頻率可藉由測量電容中電壓對時間的關係，或電感中磁場對時間的關係取得。若在 LC 串聯電路中再串接電阻 R 就成為 RLC 串聯電路，電阻 R 在電路中所扮演的角色就是阻尼，其作用即為消耗能量。

欲測量 LC 或 RLC 串聯電路中的特徵頻率，最簡單的方式就是於電路中再串接驅動源(例：訊號產生器)。訊號產生器的作用為驅動電路內的電子移動，其驅動方式可分為直流與交流驅動，而交流驅動頻率會與電路內的特徵頻率相互影響。

圖一為 RLC 串聯電路示意圖，完整的 RLC 串聯電路是由訊號產生器、電阻 R、電容 C 和電感 L 及電壓測量儀所組成，最常使用的電壓測量儀器即為示波器。

以電動勢 $\varepsilon(t)$ 來驅動 RLC 電路時，各元件其電壓與相位均會隨時間增加而改變。



圖一 RLC 串聯電路示意圖。

由克希荷夫定律(Kirchhoff law)可知『任一封閉迴路的總電壓降為零』，則

$$V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = \varepsilon(t) \quad (1)$$

其中， $\varepsilon(t)$ 為訊號產生器所提供的電動勢， $V_R(t)$ 、 $V_L(t)$ 、 $V_C(t)$ 分別為電阻 R、電感 L 與電容 C 三個元件的兩端電壓。

在 RLC 電路中，電阻 R、電感 L、電容 C 的特性皆可以電流 $i(t)$ 方式表示：

1. 電容 C 特性： $C = \frac{Q(t)}{V_C(t)}$ & $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt}$

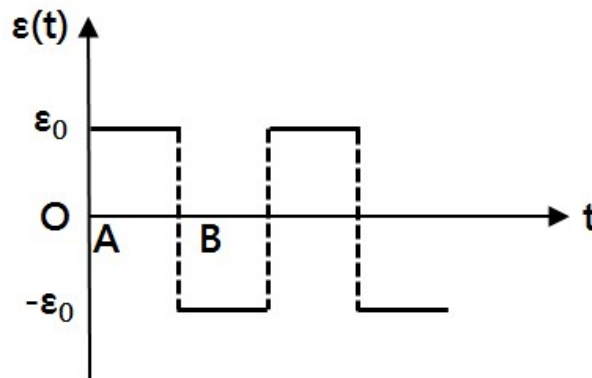
2. 電阻 R 特性 (歐姆定律)： $R = \frac{V_R(t)}{i(t)} \Rightarrow V_R(t) = i(t) \cdot R = RC \cdot \frac{dV_C(t)}{dt}$

3. 電感 L 特性： $L = \frac{d\phi(t)}{di(t)}$ & $V_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \Rightarrow V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = LC \cdot \frac{d^2V_C(t)}{dt^2}$

分別將電阻 R、電感 L、電容 C 的特性代入公式(1)，可得與電容電壓 $V_C(t)$ 有關的二次微分方程式，如下表示：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = \frac{1}{LC} \varepsilon(t) \quad (2)$$

在本實驗是以訊號產生器提供電動勢 $\varepsilon(t)$ 的直流(方波)訊號，其電動勢 $\varepsilon(t)$ 隨時間變化的關係圖，如圖二所示。



圖二 $\varepsilon(t)$ 對時間 t 變化關係圖 <方波>。

假設 $\varepsilon(t)$ 為低頻方波，則此電路會受到兩個過程所作用。

1. 在 A 點電動勢由 $-\varepsilon_0$ 變成 ε_0 ：相當於電動勢對電容充電直到電容充滿電荷。
2. 在 B 點電動勢由 ε_0 變成 $-\varepsilon_0$ ：相當於電路短路，即電容放電後會再反向充電直到電容充滿電荷。
3. 充電過程：

將電動勢 $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ 代入公式(2)，可得二次微分方程式如下所示：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = \frac{1}{LC} \epsilon_0 \quad (3)$$

如圖二所示，充電過程的起始電壓 $V_C(t=0) = -\epsilon_0$ ，則此二次微分方程式所解得的電容電壓 $V_C(t)$ 如下所示：

$$\begin{aligned} V_C(t) &= \epsilon_0 \left(1 - 2\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2} e^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi) \right) \\ &\Rightarrow V_C(t) = \epsilon_0 - 2\epsilon_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2} e^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\beta = \frac{R}{2L}$ ，角頻率 $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ ，相位差 $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\omega}\right)$

振幅項 $|V_C(t)| = 2\epsilon_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2} e^{-\beta t}$

振盪項 $\cos(\omega t - \phi)$

4. 反向充電過程：

將電動勢 $\epsilon(t) = -\epsilon_0$ 代入公式(2)，可得二次微分方程式如下所示：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = -\frac{1}{LC} \epsilon_0$$

如圖二所示，充電過程的起始電壓 $V_C(t=0) = \epsilon_0$ ，則此二次微分方程式所解得的電容電壓 $V_C(t)$ 如下所示：

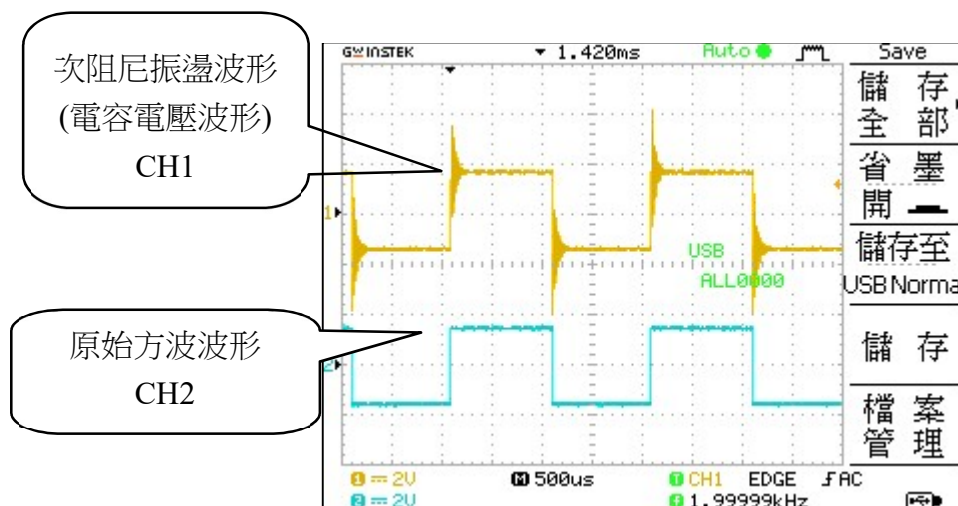
$$V_C(t) = 2\epsilon_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2} e^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi) - \epsilon_0 \quad (5)$$

其中 $\beta = \frac{R}{2L}$ ，角頻率 $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ ，相位差 $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\omega}\right)$

振幅項 $|V_C(t)| = 2\epsilon_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2} e^{-\beta t}$

振盪項 $\cos(\omega t - \phi)$

將公式(4)與公式(5)分別對時間作圖，即可得電容電壓振盪波形，稱為阻尼振盪。圖三為示波器上所顯示原始方波(CH2)與次阻尼振盪波形(CH1)。



圖三 示波器顯示波形示意圖。

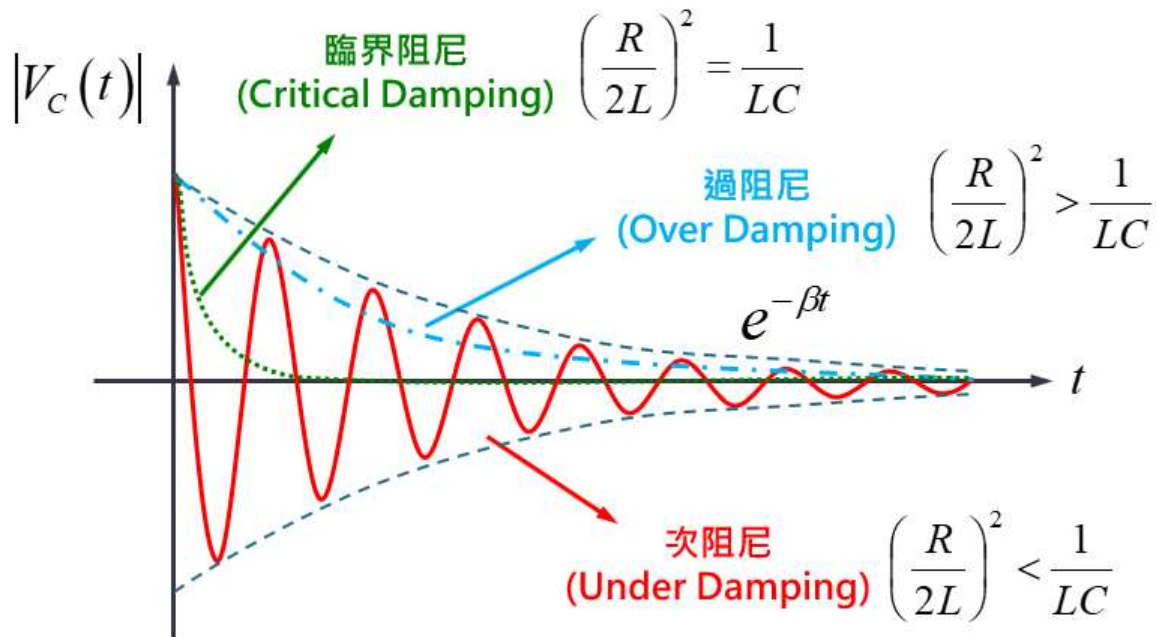
在公式(4)與公式(5)中，計算所得的振幅項均有 $e^{-\beta t}$ 指數函數(衰減因子)且振盪項均有 $\cos(\omega t)$ ，代表在振盪的過程中電容電壓振幅會受到指數函數影響而衰減，此與力學中彈簧阻尼振盪的行為類似。

承上， β 值及角頻率 ω 均與 RLC 電路中的電阻 R、電感 L、電容 C 有關，即當 RLC 串聯電路中各元件數值大小不同時，其所產生的振盪形式亦會有所不同，如下所示：

1. 當 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ ，則 $\omega=0$ ，無振盪產生，電容電壓會隨時間增加而以指數函數變小，稱為「**臨界阻尼 (Critical Damping)**」。
2. 當 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ ，則 ω 為虛數，故 $\cos(\omega t) = \cosh(i\omega t)$ 可視為 Hyperbolic Cosine 函數，亦無振盪產生，稱為「**過阻尼 (Over Damping)**」。電容電壓將以阻尼方式振盪。
3. 當 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ ，則 ω 為實數，電容電壓將以阻尼方式振盪，其振幅隨時間增加而遞減，稱為「**次阻尼 (Under Damping)**」。

在此條件中，若 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}$ ，電路振盪頻率 $\omega \sim \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$ ，稱為自然頻率。

圖四為上述各條件下電容電壓對時間關係圖(阻尼振盪)。



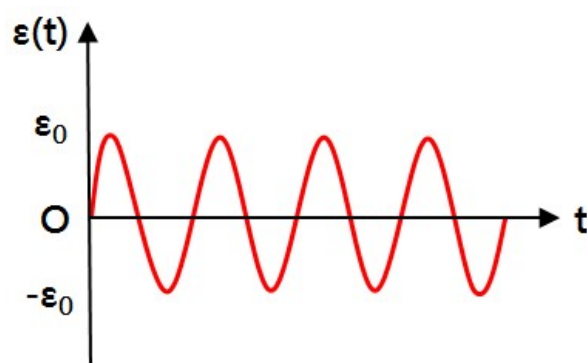
圖四 電容電壓對時間關係圖。

5. 共振與濾波

在 RLC 串聯電路 I 實驗中，可推得電容電壓 \$V_C(t)\$ 有關的二次微分方程式，如下所示：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = -\frac{1}{LC} \varepsilon(t) \quad (6)$$

在本實驗是以訊號產生器提供電動勢為 \$\varepsilon(t)\$ 的交流(弦波)訊號，其電動勢 \$\varepsilon(t)\$ 隨時間變化的關係圖，如圖五所示。



圖五 \$\varepsilon(t)\$ 對時間 \$t\$ 變化關係圖 <弦波>。

承上，將電動勢 \$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)\$ 代入公式(6)，可得二次微分方程式如下所示：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = -\frac{\varepsilon_0}{LC} \cos(\omega t) \quad (7)$$

則可由公式(7)解得電阻電壓訊號 $V_R(t)$ ，如下所示：

$$V_R(t) = \frac{\varepsilon_0 R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad (8)$$

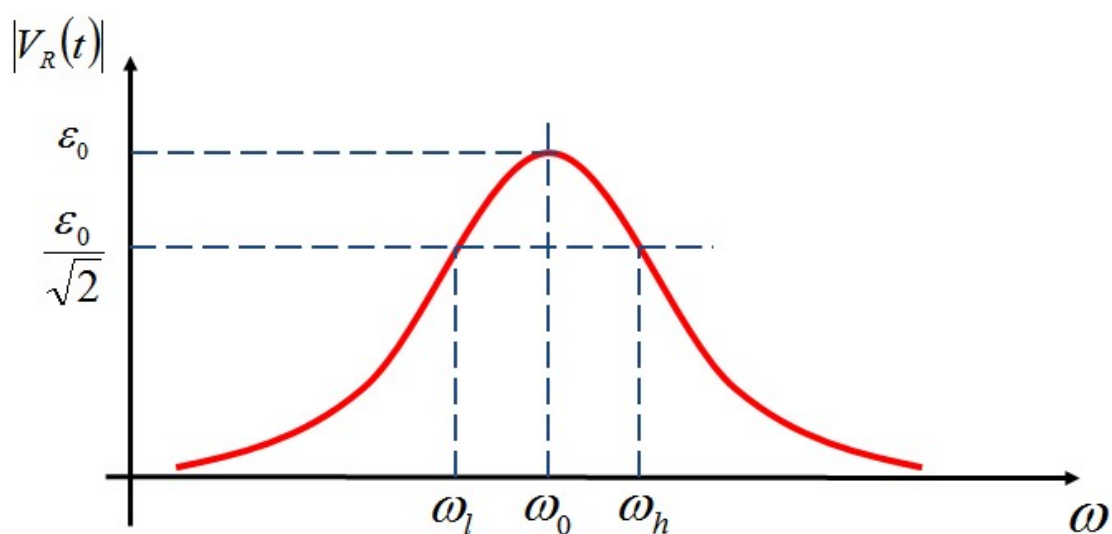
其中相位差 $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$

振幅項 $|V_R(t)| = \frac{\varepsilon_0 R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

由公式(8)可知，當角頻率 $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ 時，電阻電壓振幅 $|V_R(t)|$ 會有最大值 ε_0 ，此頻率稱為共振角頻率 ω_0 ，同時將此現象稱為共振(Resonance)。

圖六為電阻電壓振幅 $|V_R(t)|$ 隨角頻率 ω 變化關係圖。當電阻電壓振幅 $|V_R(t)| = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$ 時，稱為半功率點電壓，其所對應頻率稱為截止頻率 ω_l 與 ω_h ，半高頻寬為 $\Delta\omega = \omega_h - \omega_l$ 。

在RLC電路中半高頻寬 $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ ，其值與電容 C 無關。在電子電路應用上可藉由調整電阻 R 與電感 L 值，製成不同的濾波元件，進而達到不同的應用。

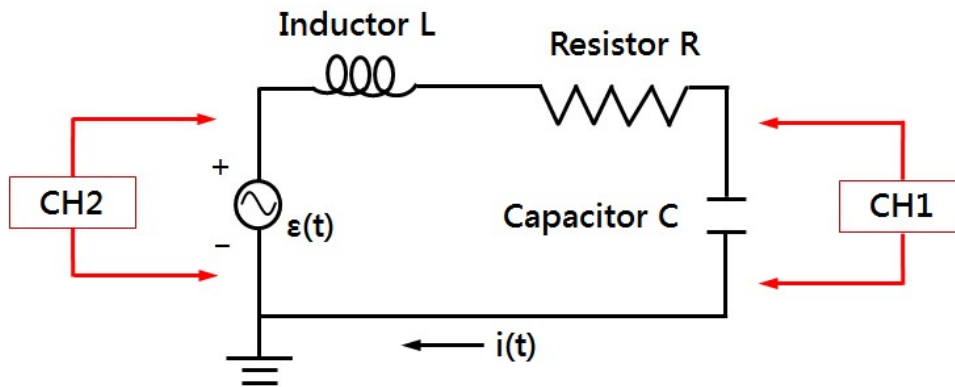


圖六 電阻振幅 $|V_R(t)|$ 隨角頻率 ω 變化關係圖。

注意事項：

1. 打開儀器電源前，請先檢查電路是否正確或短路。
2. 確認電阻器、電容器與電感器開關皆在 OUT 位置。

實驗步驟：(以 CH1 讀取電容電壓訊號；以 CH2 讀取原始方波訊號)



圖七 RLC 串聯電路實驗架設圖(阻尼振盪)。

A. 次阻尼振盪 I-電容電壓振幅與時間關係

1. 實驗裝置如圖七所示。
2. 設定電阻 $R = 800 \Omega$ 、電感 $L = 10 \text{ mH}$ 與電容 $C = 100 \text{ pF}$ 。
3. 將上述條件代入公式計算 β 計算值。
4. 開啟訊號產生器，設定輸出波形為 500.0 Hz 且電壓振幅 $\varepsilon_0 (=V_{max})$ 為 1.00 V 方波。

[註] 即 CH2 峰對峰訊號 $V_{p,p} = 2.00 \text{ V}$ 。

5. 調整「電壓/格 VOLT/DIV」與「時間/格 TIME/DIV」旋鈕，使螢幕上大約可看到 2-3 個週期的方波(CH2)與次阻尼振盪波形(CH1)。

[註] 若無次阻尼振盪波形，請檢查線路或儀器各項設定是否有誤。

6. 再次調整「電壓/格 VOLT/DIV」與「時間/格 TIME/DIV」旋鈕，使螢幕顯示一個完整次阻尼振盪波形，再利用游標夾擊法記錄各峰值電容電壓 $V_C(t)$ 與時間 t 。
7. 作 $|V_C(t)| - t$ 關係圖，再以指數迴歸分析，計算 β 測量值及其誤差。

B. 次阻尼振盪 II-角頻率與電容關係

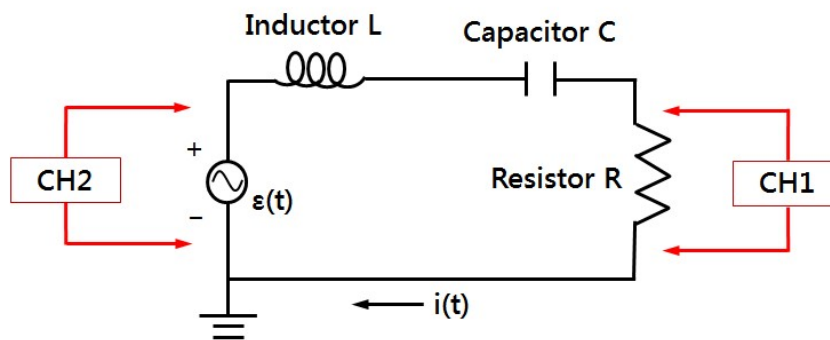
1. 設定電阻 $R = 100 \Omega$ 、電感 $L = 10 \text{ mH}$ ，再於電容器 0.002 uF 至 0.04 uF 區間內選取 7 個不同電容 C 。
2. 承如步驟 A，再次觀察次阻尼振盪波形。
3. 計算不同電容 C 所產生的次阻尼振盪角頻率 ω 計算值。

4. 以游標夾擊法記錄不同電容 C 下所產生的次阻尼振盪週期 T 測量值，再由公式計算角頻率 ω 測量值。
5. 作 $\omega^2 - \frac{1}{C}$ 關係圖，再以線性迴歸分析，計算 $\frac{1}{L}$ 測量值及其誤差。

C. 阻尼振盪觀察

1. 固定電感 L 與電容 C ，僅調整電阻 R ，觀察次阻尼、臨界阻尼與過阻尼振盪現象。

D. 共振頻率觀察



圖八 RLC 串聯電路實驗架設圖 (強迫振盪)。

1. 實驗裝置如圖八所示。
2. 設定電阻 $R = 1\text{ k}\Omega$ 、電感 $L = 10\text{ mH}$ 與電容 $C = 0.001\text{ }\mu\text{F}$ 。
3. 將上述條件代入公式計算此 RLC 串聯電路共振角頻率 ω_0 與共振頻率 f_0 理論值。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \& \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

4. 由原理公式判斷當 RLC 串聯電路達共振時，電阻電壓振幅 $|V_R(t)|$ 與相位差 ϕ 理論值。
5. 開啟訊號產生器，設定輸出電壓振幅 $\varepsilon_0 (=V_{max})$ 為 1.00 V 的弦波。
[註] 即 CH2 峰對峰訊號 $V_{p,p} = 2.00\text{ V}$ 。(peak to peak: 波峰到波峰)
6. 先將訊號產生器輸出頻率設定為共振頻率理論值。
[註] 因共振頻率極大，故先計算共振角頻率理論值，而後再於共振角頻率理論值附近找共振角頻率實驗值。
7. 將示波器切換至利薩如(XY)模式。
8. 微調訊號產生器輸出頻率，同時觀察示波器上的利薩如圖形。當螢幕上顯示的圖形為頻率比 1:1 且相位差 ϕ 為 0 的利薩如圖形後，停止微調。
[註] 當 RLC 電路達共振時，電阻電壓 $V_R(t)$ 與原始訊號相位差 ϕ 為零。

9. 承上，記錄此時訊號產生器輸出頻率(即共振頻率實驗值)，再將示波器切換至一般模式，記錄電阻電壓振幅 $|V_R(t)|$ 值。
[註] 即 CH1 電壓訊號。
10. 以共振頻率實驗值為基準，分別記錄當訊號產生器輸出頻率增加或減小時，各頻率所對應電阻電壓振幅 $|V_R(t)|$ 值。
[註] 頻率選取範圍應跨越截止頻率 ω_l 與 ω_h 。
11. 作 $|V_R(t) - \omega_1|$ 關係圖。
[註] 關係圖應包含共振頻率與截止頻率。
12. 以內差法計算截止頻率 ω_l 與 ω_h 實驗值。
13. 計算半高頻寬 $\Delta\omega$ 測量值及其誤差。
14. 將電阻 R 更換為 $2k\omega$ ，其他條件不變，重覆上述步驟。

實驗問題：

1. 當訊號產生器接上 RLC 串聯電路後，示波器所顯示方波並不完美，為何會有這種現象產生？試說明之。
2. 在電感 $L = 10 \text{ mH}$ 、電容 $C = 0.01 \text{ }\mu\text{F}$ 及電感 $L = 10 \text{ mH}$ 、電容 $C = 100 \text{ pF}$ 兩種條件下，若要於示波器看到阻尼振盪訊號，電阻 R 應如何設定？試說明之。
3. 阻尼振盪在生活中有那些應用？試說明之。
4. 試由公式證明 RLC 電路的半高頻寬為 $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ 。
5. 當電阻 R 改變時，電阻電壓振幅 $|V_R|$ 與角頻率 ω 關係圖有何不同？試說明之。
6. 若此實驗設計為固定電阻 R 及電容 C ，僅改變電感 L ，共振頻率與半高頻寬會如何變化？試說明之。