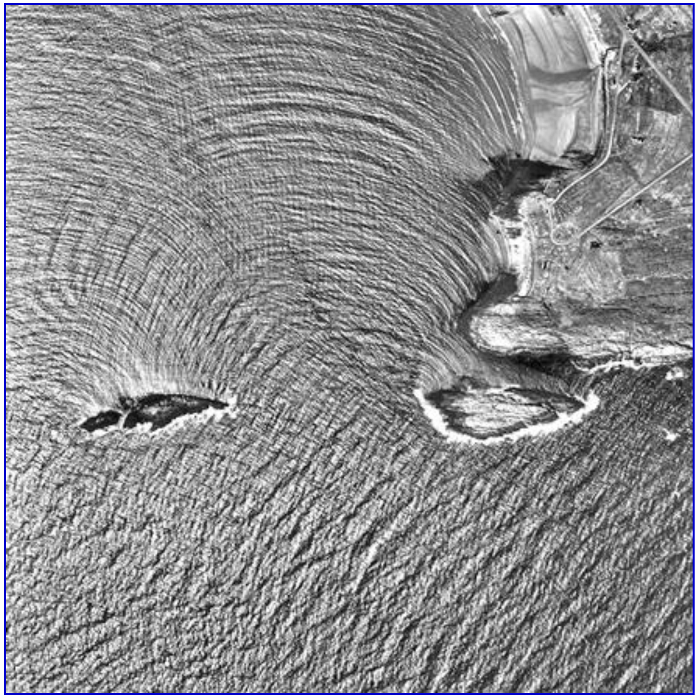
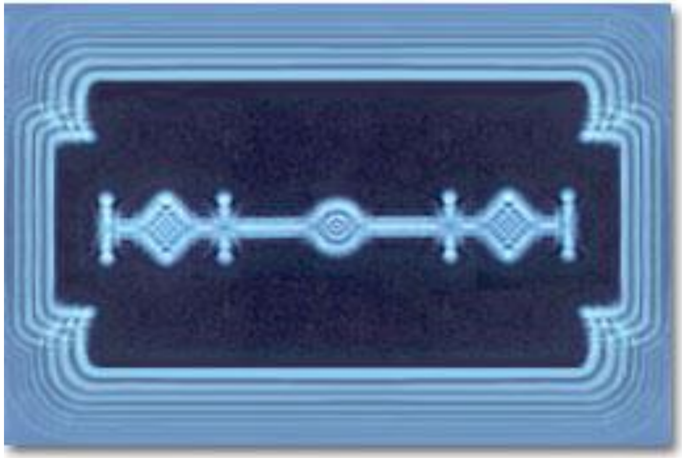
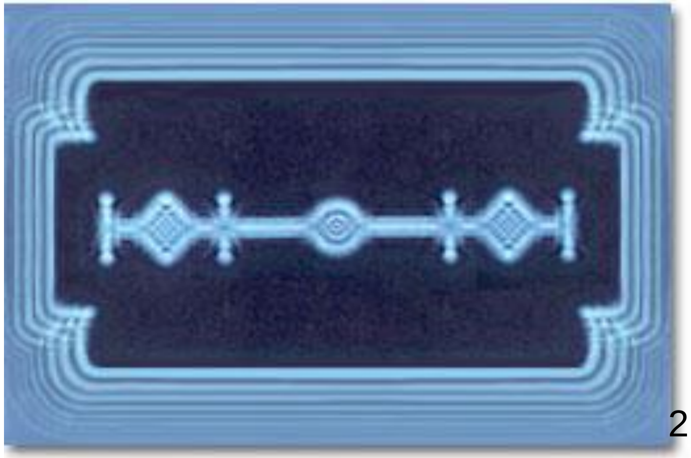


Aula-4
Difração



<u>Difração</u> = Desvio da propagação retilínea da luz

Trata-se de um efeito característico de fenômenos ondulatórios, que ocorre sempre que parte de uma frente de onda (sonora, de matéria, ou eletromagnética) é obstruída.

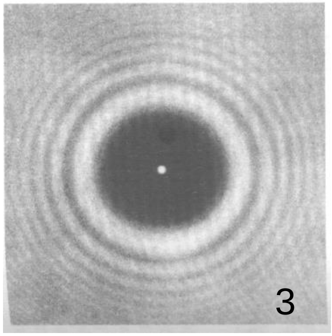


Augustin Fresnel (1788-1827)

- Dez anos mais novo que T. Young, A. Fresnel foi um engenheiro civil francês que se interessou por estudos de ótica.
- Ele não participava do círculo acadêmico de Paris e não conhecia o trabalho de Young.
- <u>Fresnel estudou o efeito da passagem de luz por uma fenda.</u>

• Em 1819 a Academia Francesa ofereceu um prêmio ao melhor trabalho experimental sobre difração, que apresentasse um modelo teórico explicando o efeito. Fresnel apresentou um trabalho de 135 páginas (modelo de ondas). O júri era composto por S.-D. Poisson, J. B. Biot, e P. S. Laplace, todos Newtonianos que apoiavam a teoria corpuscular da luz. Poisson calculou, usando a teoria de Fresnel, algo que parecia inconsistente.

Feito o experimento, Fresnel estava correto*!!!*



Difração por uma fenda

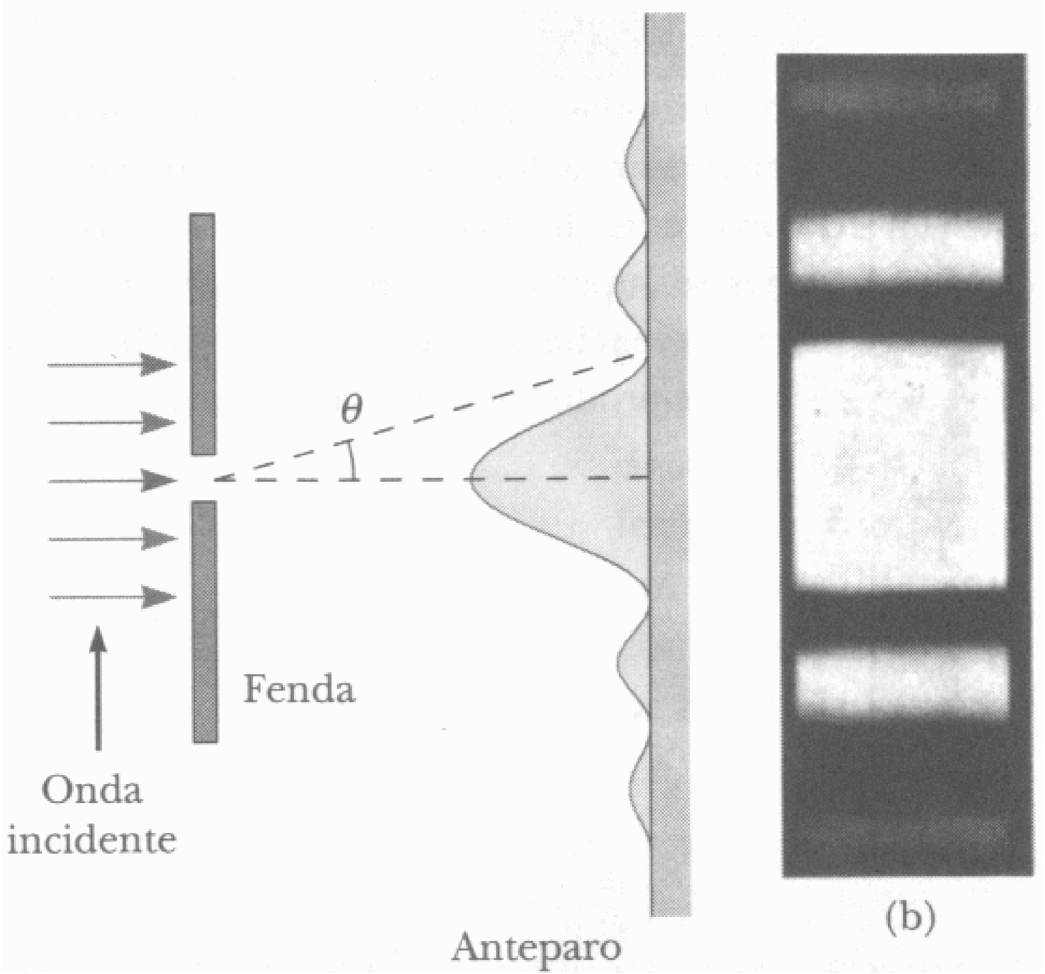
Em um anteparo, obtemos um padrão de difração

Franjas **escuras** ocorrem para:

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = m\frac{\lambda}{a}}$$

$m = 1, 2, ...$

a : largura da fenda



Determinação da Posição dos Máximos e Mínimos

(Desenhos fora de escala!!!)

Supondo: $D >> a$

A diferença de caminho óptico é:

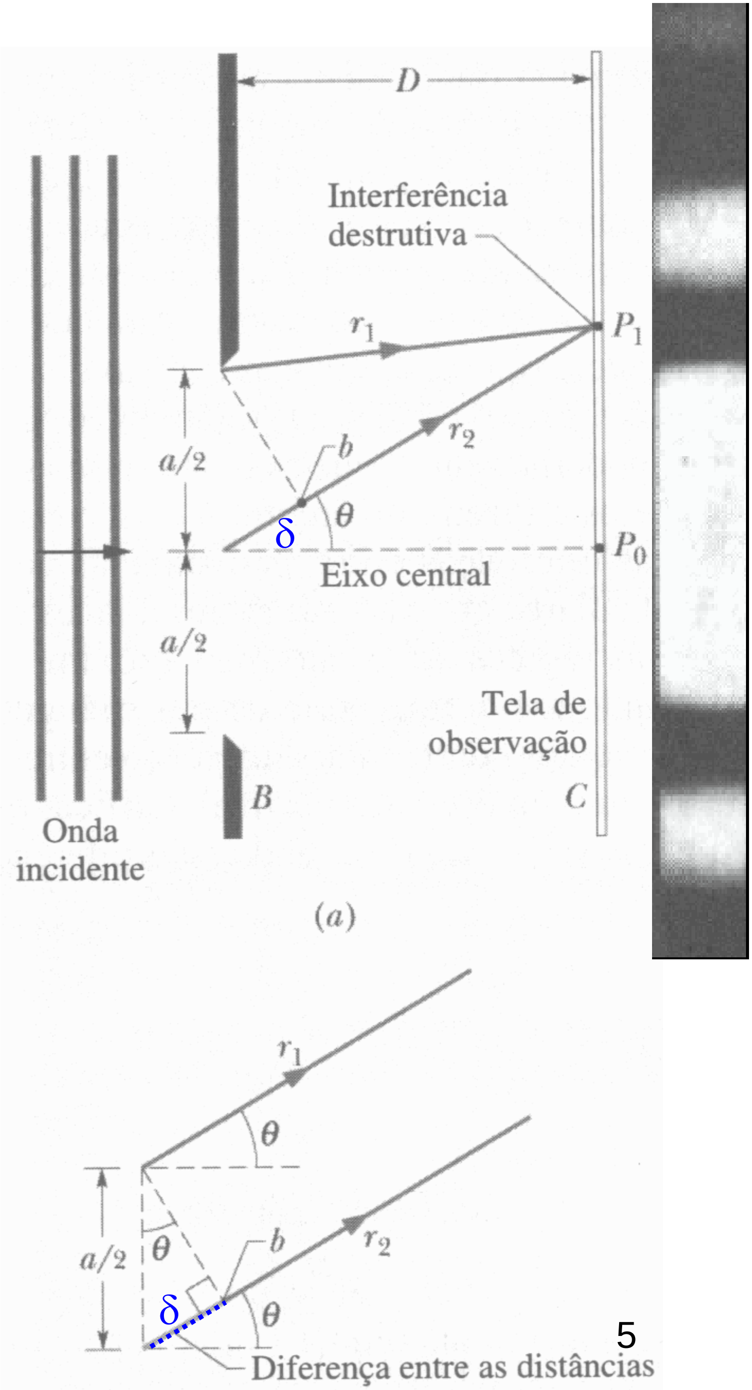
$$\delta = \frac{a}{2}\mathrm{sen}\theta$$

No anteparo as ondas devem estar fora de fase para formação da primeira franja escura:

$$\delta = \frac{\lambda}{2}$$

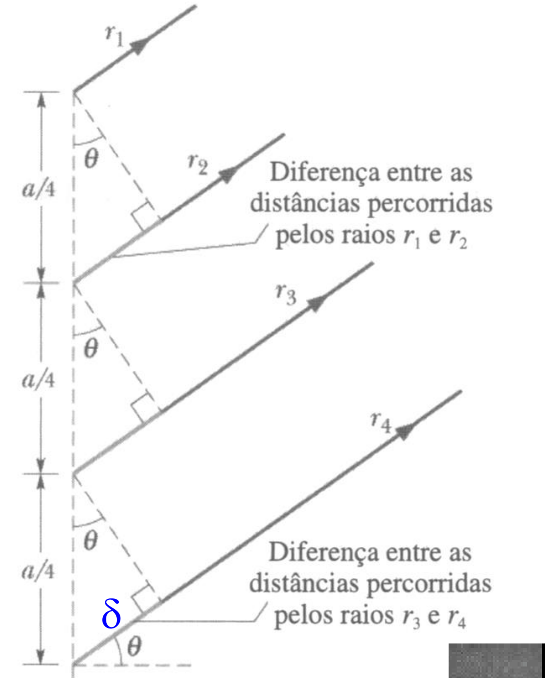
$$\boxed{\lambda = a\,\mathrm{sen}\theta}$$

$$\boxed{\mathrm{sen}\theta = \frac{\lambda}{a}}$$



A condição que determina a segunda franja escura é encontrada dividindo a fenda em 4 partes :

$$\delta = \frac{a}{4}\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{2}$$

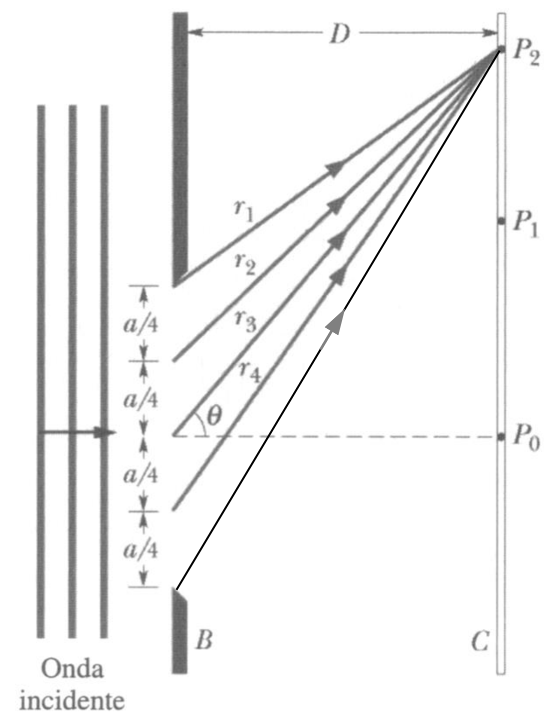


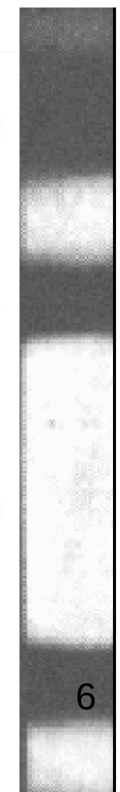
Teremos um mínimo quando:

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = 2\frac{\lambda}{a}}$$

Assim, para todos os mínimos :

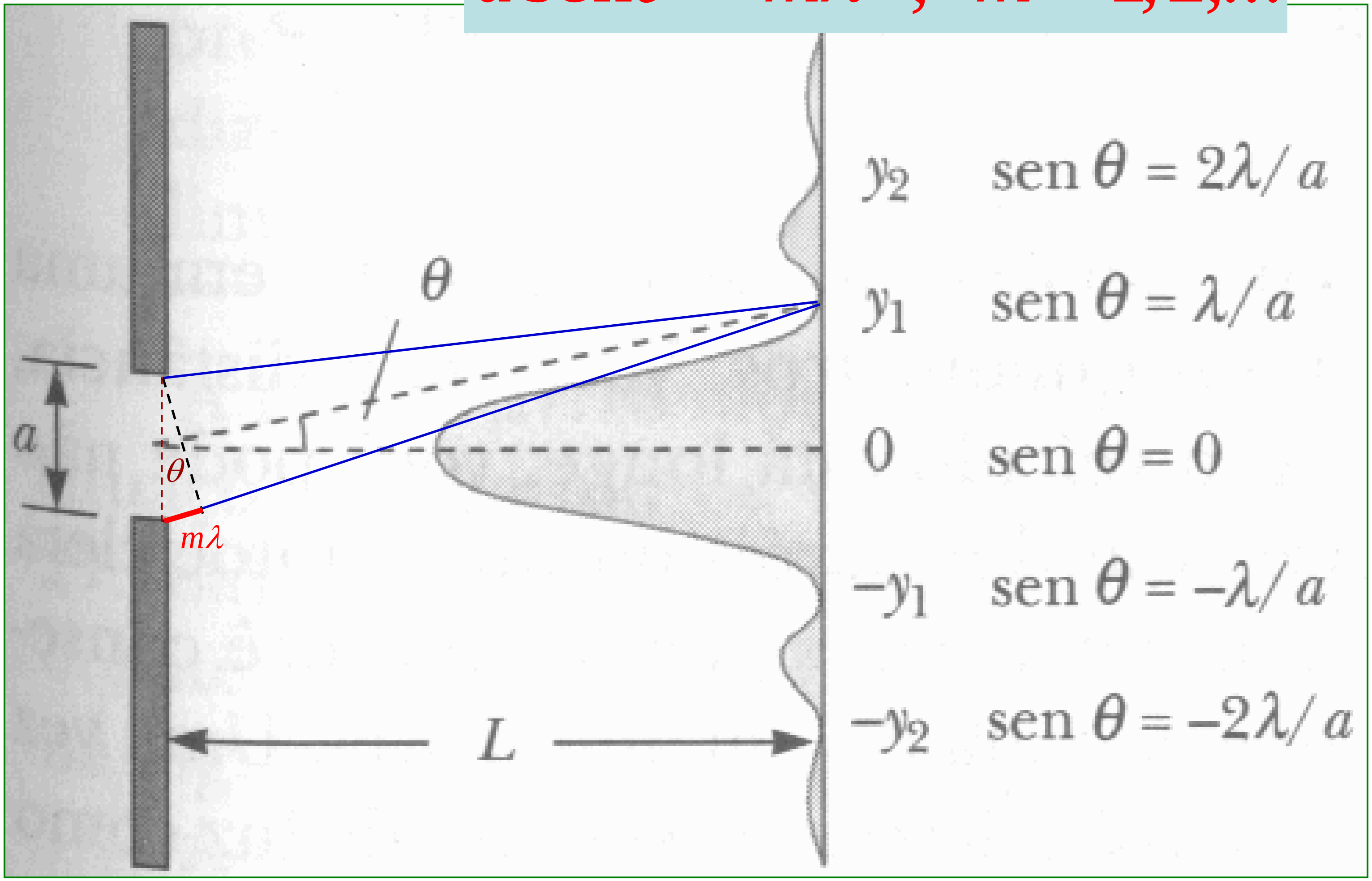
$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = m\frac{\lambda}{a}\ ;\ \ m = 1, 2, \ldots.}$$





A posição dos mínimos é dada pela condição de que a diferença de percurso entre o raio que sai da borda superior e o que sai da borda inferior seja múltiplo de λ:

$$a\,\mathrm{sen}\theta = m\lambda \;\;;\;\; m = 1,2,\ldots$$



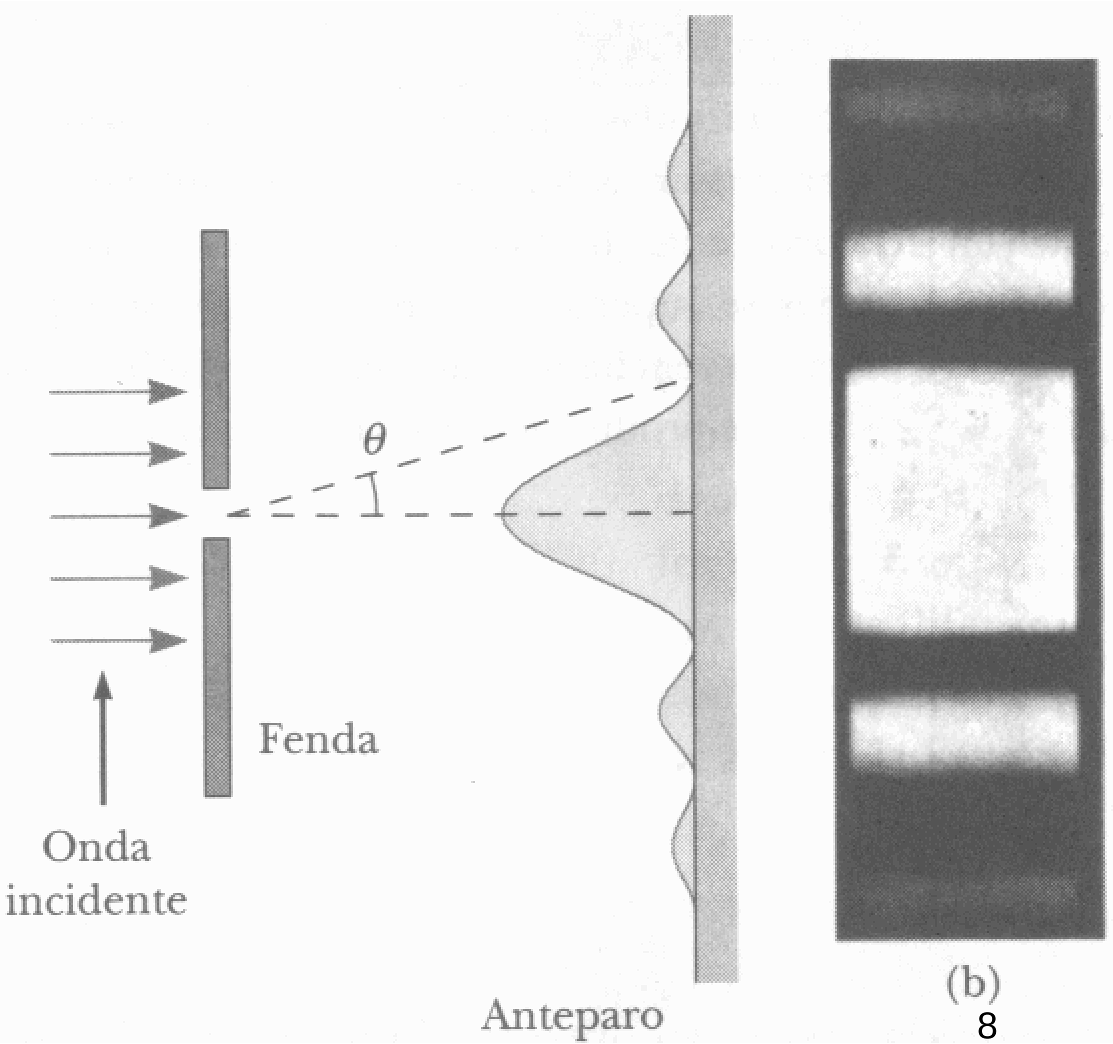
Determinação da Intensidade

Verificaremos que:

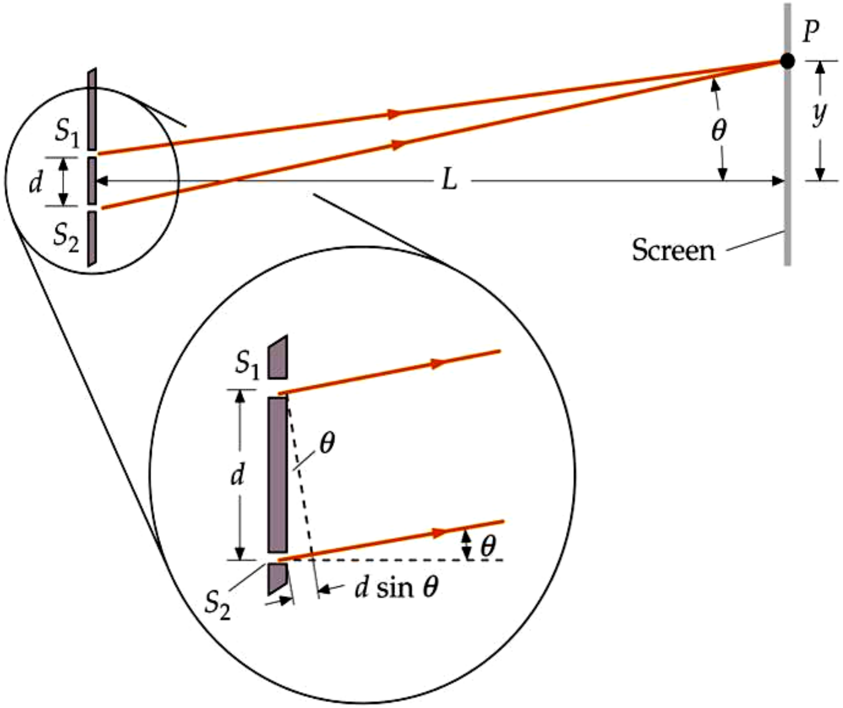
$$\boxed{I(\theta) = I_m \left(\frac{sen\,\alpha}{\alpha} \right)^2}$$

onde:

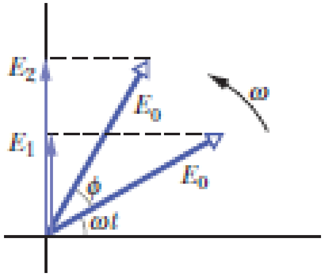
$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} sen\,\theta$$



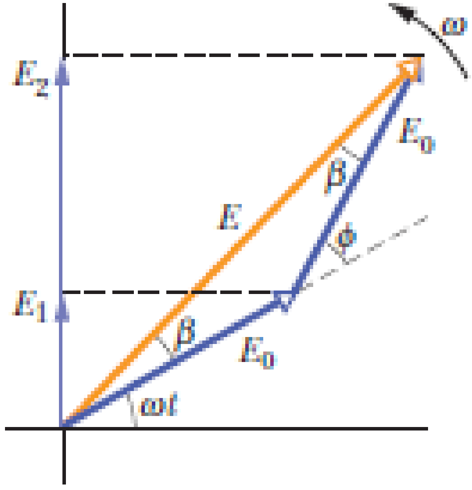
Fasores



$$E_1(t) = E_1 sin(\omega t)$$



$$E_2(t) = E_2 sin(\omega t + \phi)$$

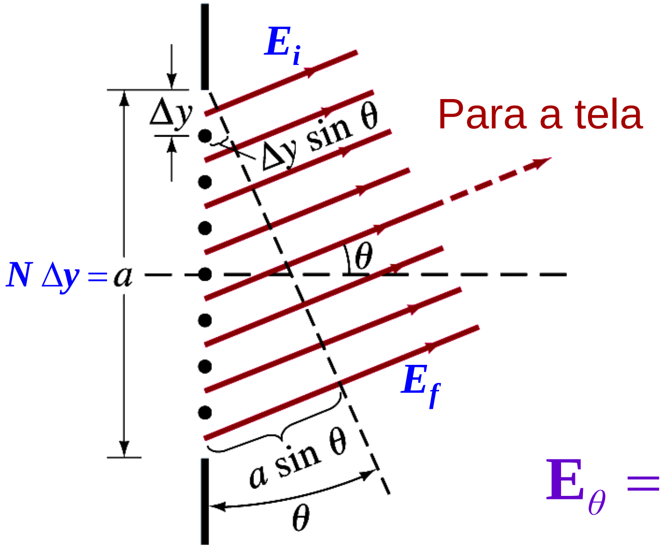


$$\Delta\phi = k\left(d\sin\theta\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(d\sin\theta\right)$$

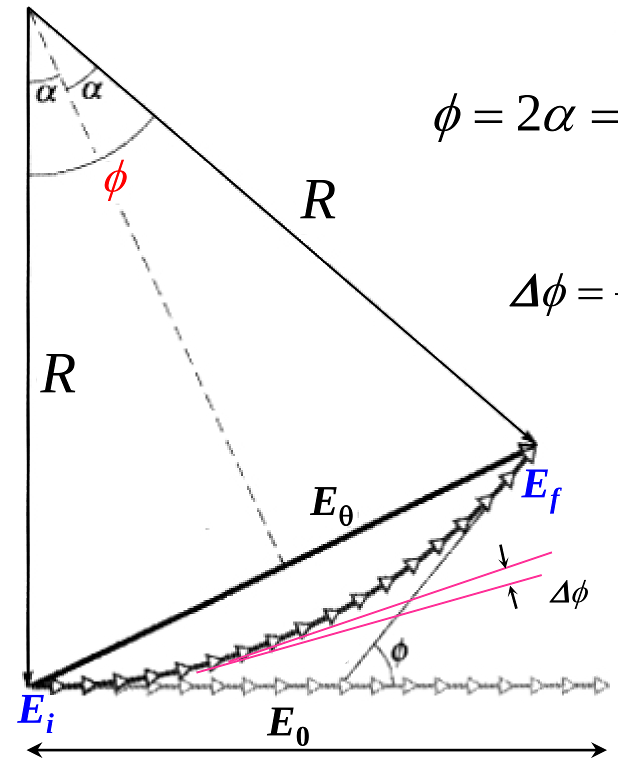
$$dif.fase = \frac{2\pi}{\lambda}(dif\,.caminho)$$

$$E = 2E_0 \cos\beta = 2E_0 \cos\tfrac{1}{2}\phi$$

Intensidade da Onda Difratada



$$\mathbf{E}_\theta = \sum_{n=i}^{f} \mathbf{E}_n$$

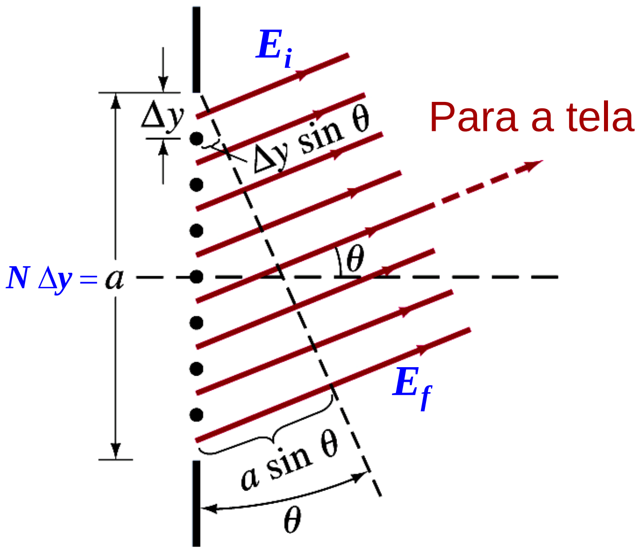


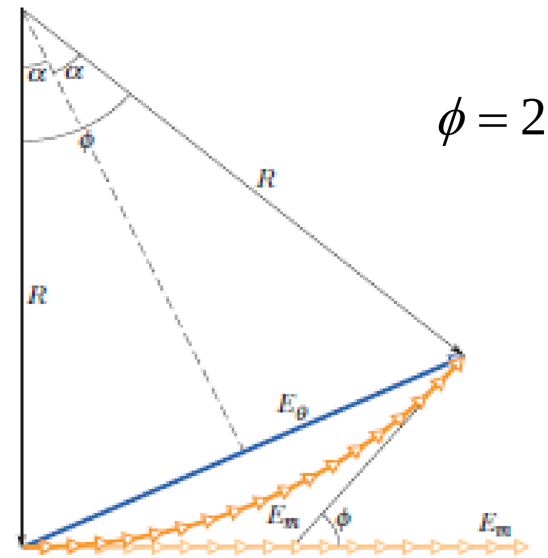
$$\phi = 2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta$$

ϕ é a diferença de fase total, ou seja, entre o primeiro e o último vetor da soma.
$\Delta\phi$ é a diferença de fase entre um vetor e o vetor seguinte na soma.

Intensidade da Onda Difratada





$$\phi = 2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

$$E_\theta / 2 = R\, sin\,(\phi / 2)$$

$$\alpha \equiv \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} sen\theta$$

$$\phi = E_0/R \ ; \quad R = E_0 / \phi$$

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \frac{E_\theta^2}{E_0^2} \rightarrow \boxed{I(\theta) = I_0 \left(\frac{sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

$$E_\theta = \frac{E_0}{\phi / 2} sin(\phi / 2) = E_0 \frac{sin\,\alpha}{\alpha}$$

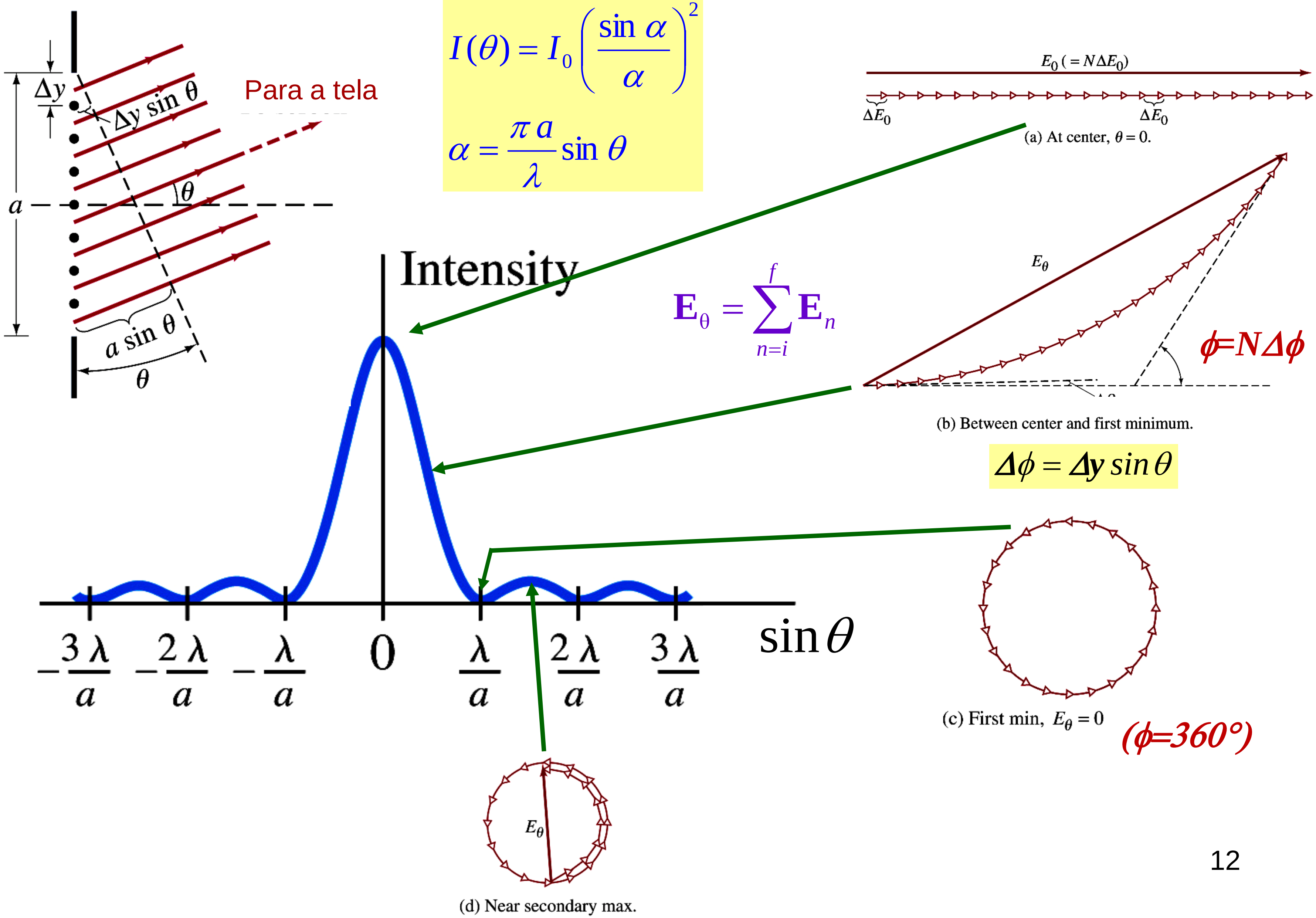
Difração por uma fenda e Fasores

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

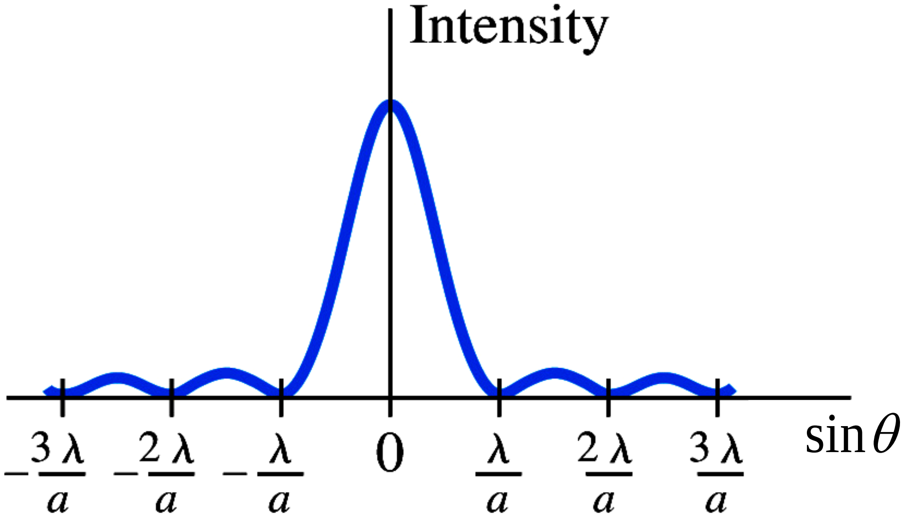
$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

$$\mathbf{E}_\theta = \sum_{n=i}^{f} \mathbf{E}_n$$

$$\Delta\phi = \Delta y \sin\theta$$



Difração por uma fenda: máximos e mínimos



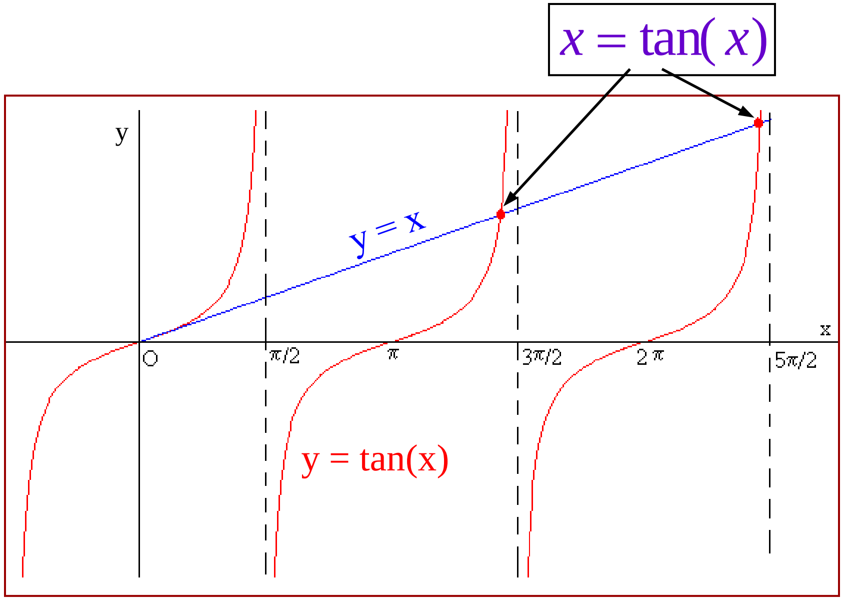
$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

Mínimos:

$$\alpha = \pm m\pi \leftrightarrow a\sin\theta = \pm m\lambda\,;\; m = 1, 2, \ldots$$

$$\sin\theta = \pm\frac{m\lambda}{a}$$



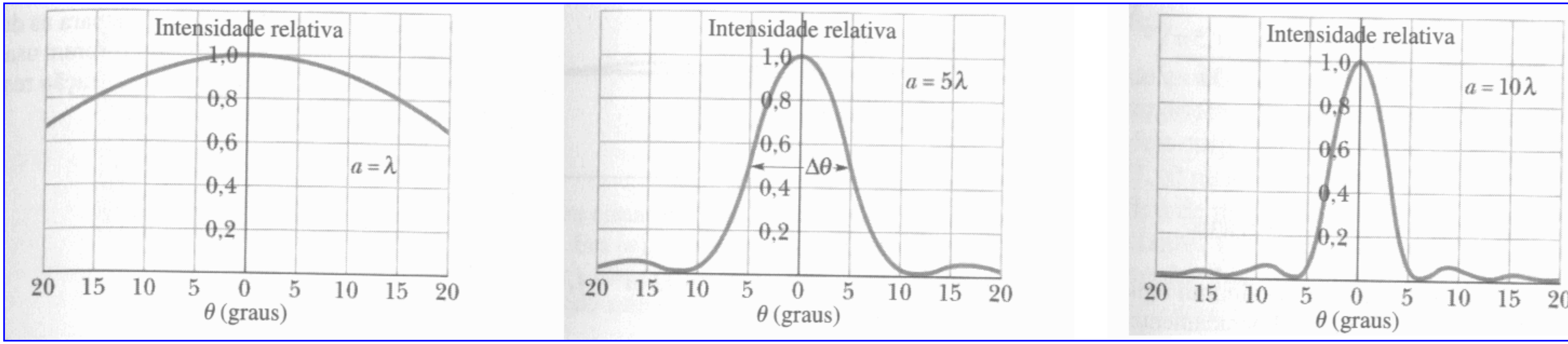
Máximos (central e secundários) :

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0 \quad\rightarrow\quad \alpha = \tan(\alpha)$$

$$\alpha = \tan\alpha = 0 \quad\rightarrow\quad \text{máximo central}$$

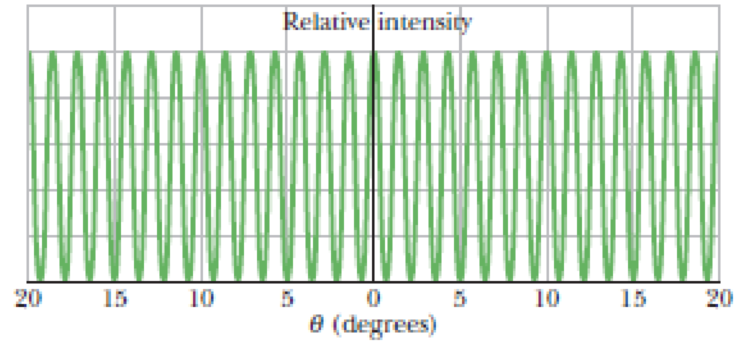
$$\alpha \approx \pm(2n+1)\frac{\pi}{2} \leftrightarrow a\sin\theta \approx \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}\,;\quad n = 1, 2, \ldots$$

Observe que aumentando a largura da fenda, diminui a largura do máximo central:



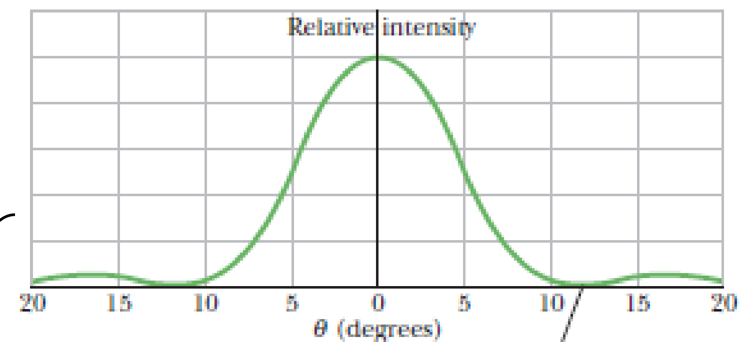
Difração por Duas Fendas

- No estudo da interferência no experimento de Young consi-deramos $a/\lambda \to 0$ e obtivemos a figura da direita acima.



(a)

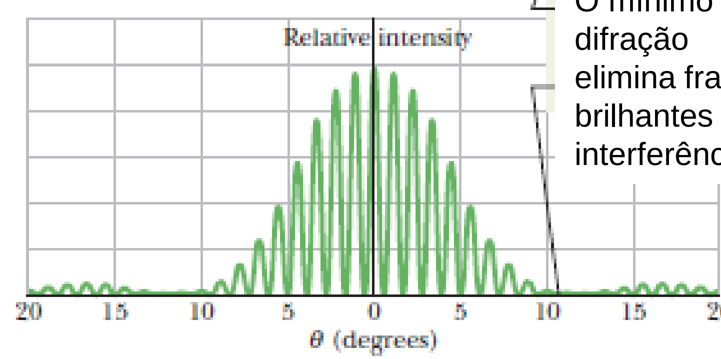
- Neste limite, as fontes S1 e S2 irradiam (I_0) de modo uniforme para todos os ângulos.



(b)

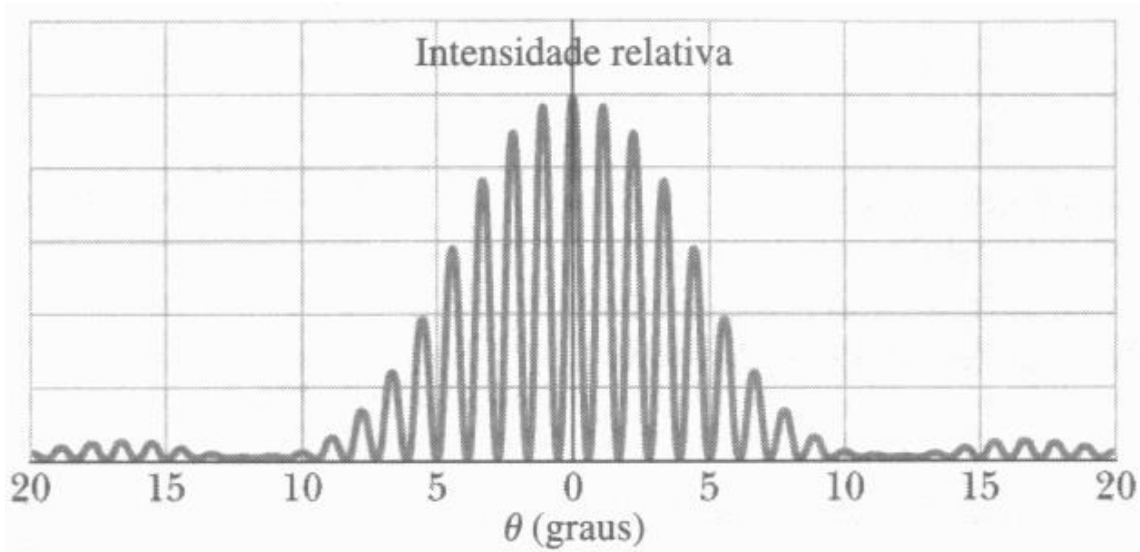
  - Mas, se considerarmos uma razão a/λ **finita**, cada fonte irradiará de modo semelhante à figura da direita.

O mínimo de difração elimina franjas brilhantes da interferência

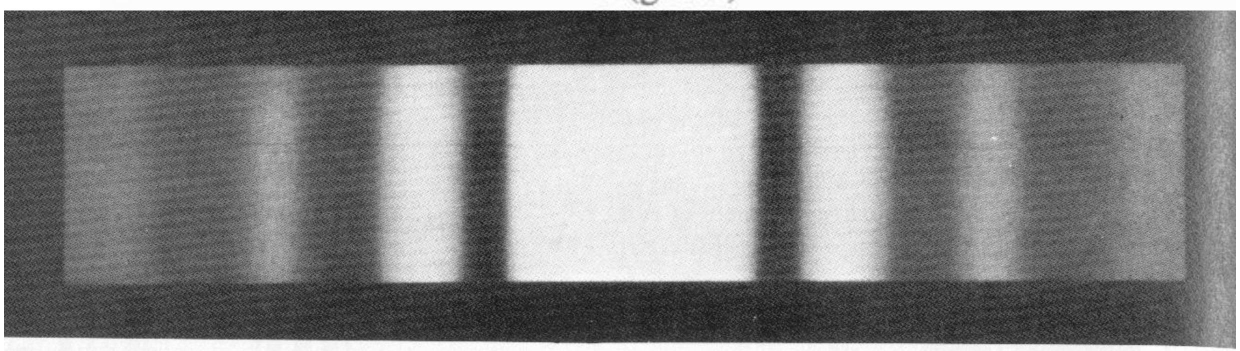


(c)

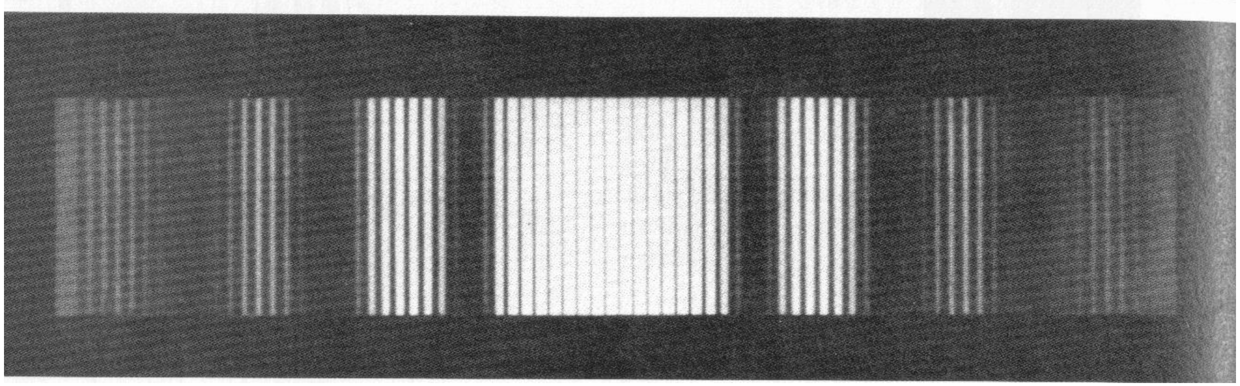
O gráfico geral da intensidade fica sendo:



uma fenda



duas fendas



Intensidade da figura de interferência de duas fendas:

$$\boxed{I(\theta) = I_m\left(\cos^2\beta\right)\left(\frac{sen\,\alpha}{\alpha}\right)^2 \;;\; I_m = 4I_0}$$

onde:

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} sen\,\theta \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} sen\,\theta$$

- No limite $a/\lambda \to 0$, obtemos a equação para a intensidade no experimento de Young:

$$I(\theta) = I_m \cos^2\beta$$

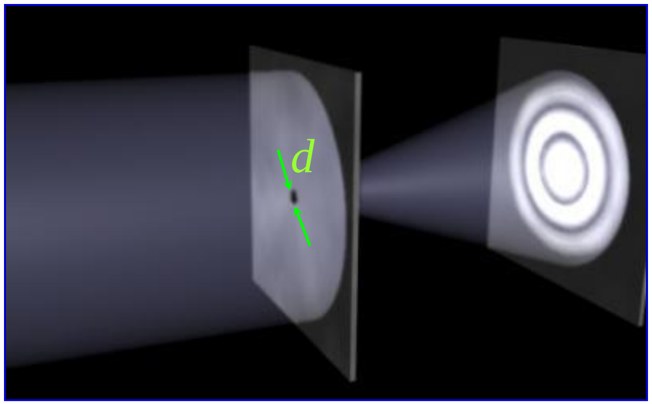
- No limite $d/\lambda \to 0$, obtemos a equação para a intensidade no caso de uma fenda única:

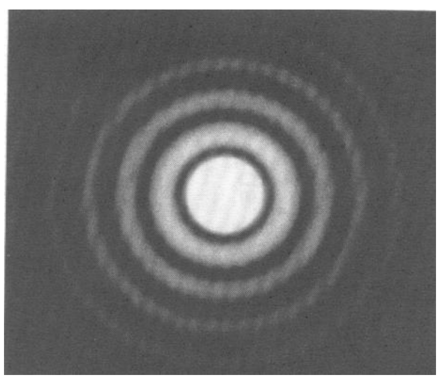
$$I(\theta) = I_m\left(\frac{sen\,\alpha}{\alpha}\right)^2$$

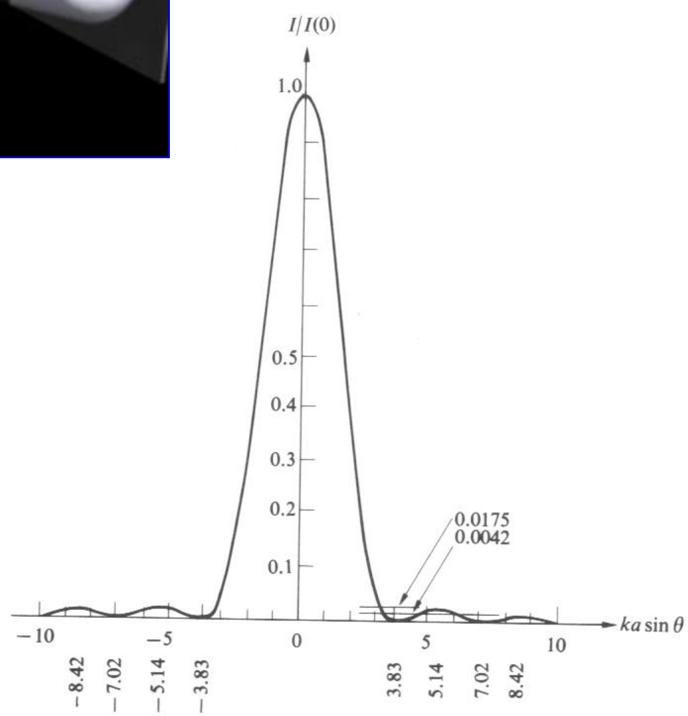
Difração por uma Abertura Circular

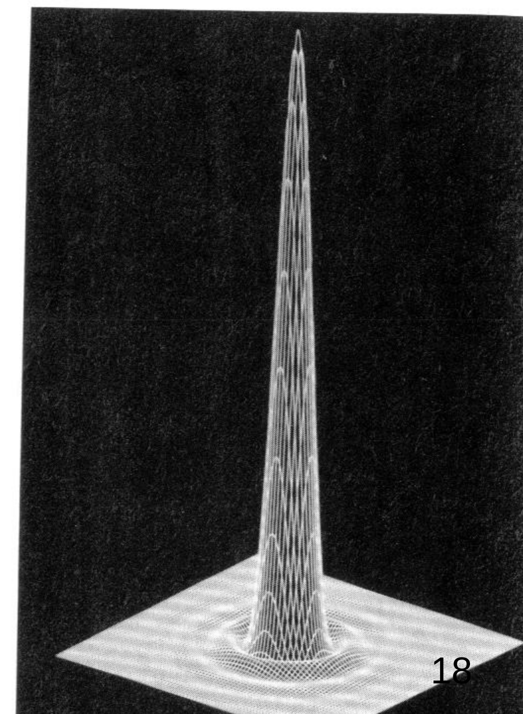
A posição do primeiro mínimo, para uma abertura circular de diâmetro d, é dada por:

$$\boxed{sen\,\theta \approx 1{,}22\,\frac{\lambda}{d}}$$





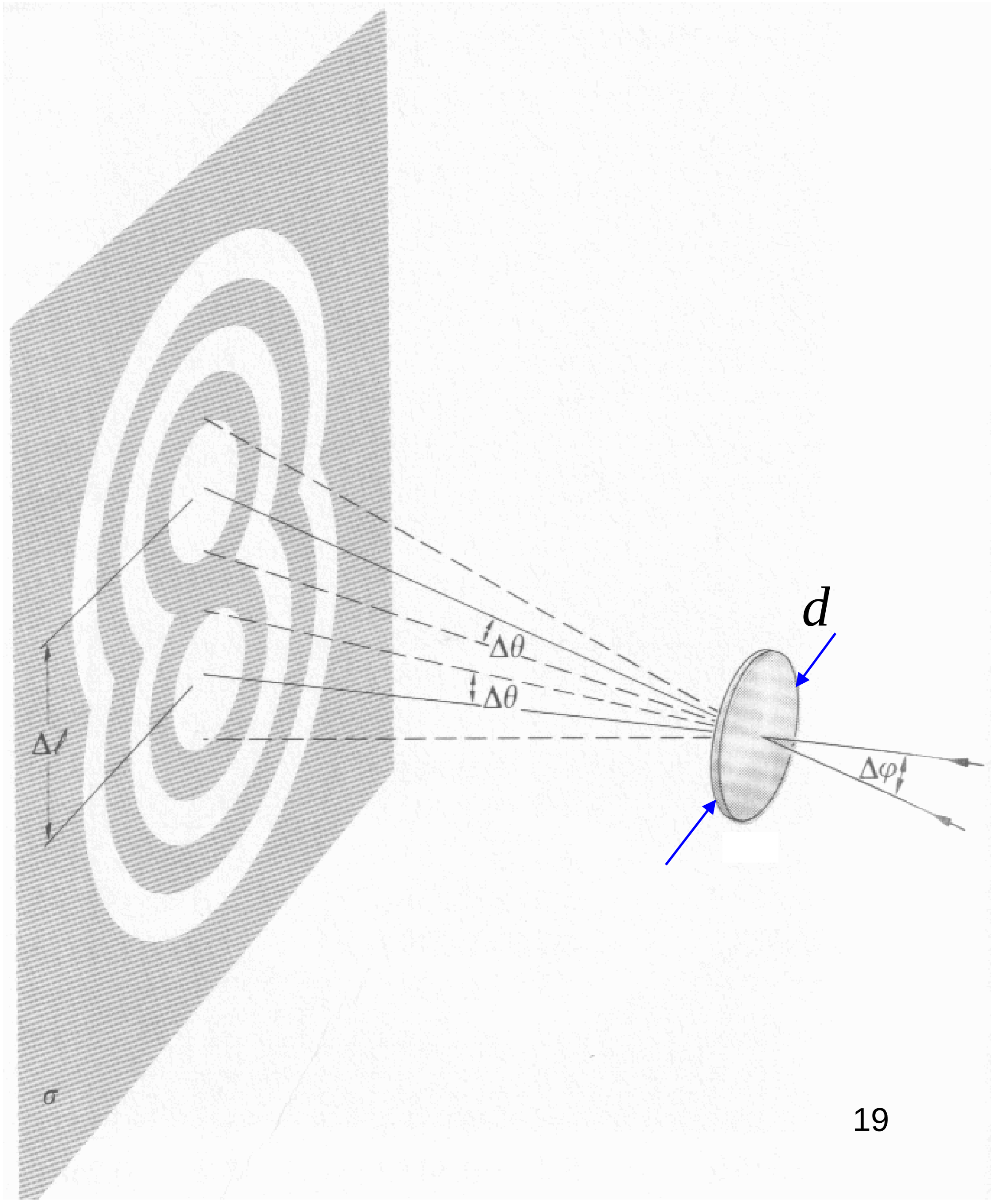




Resolução

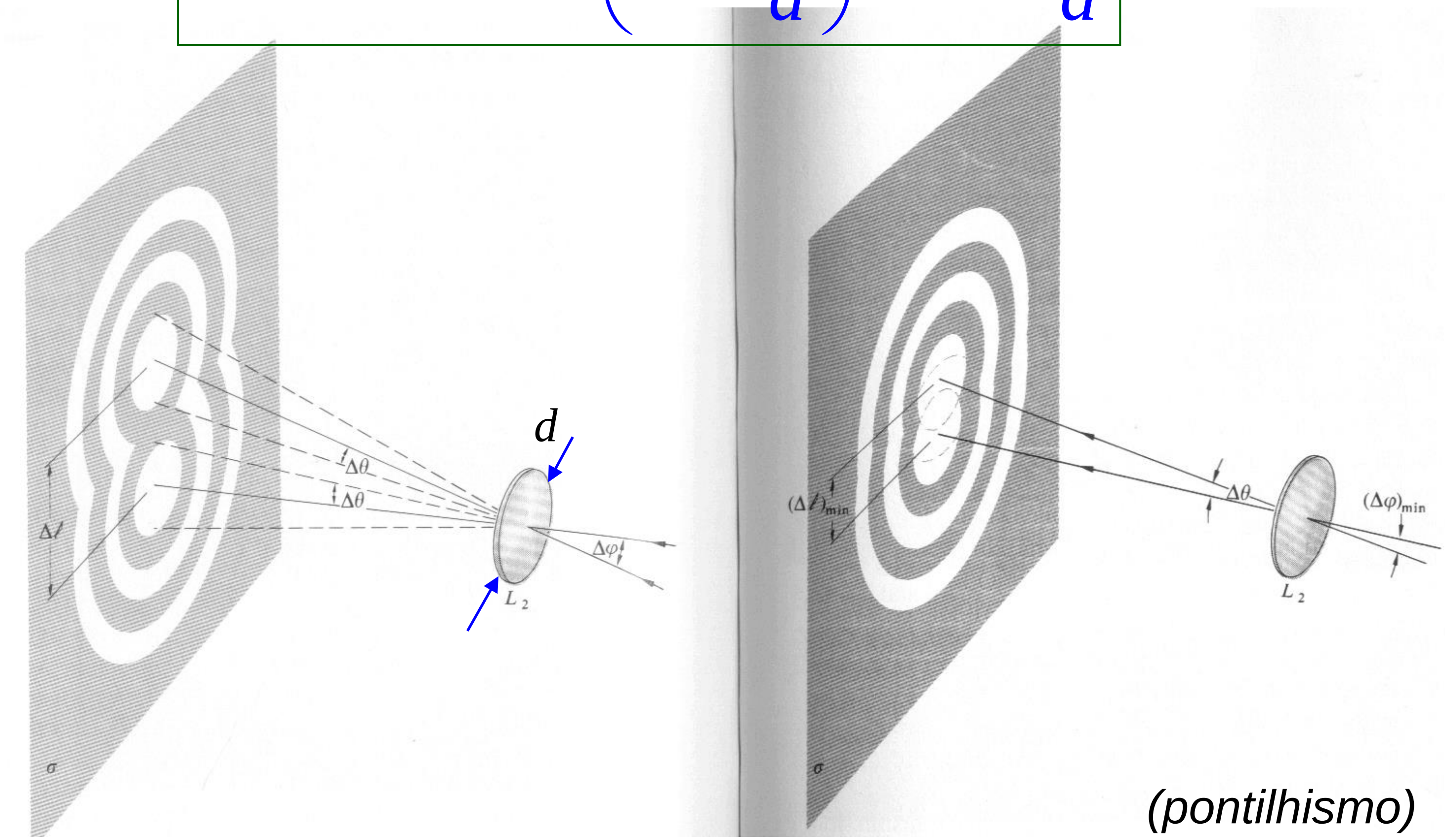
A imagem difratada de dois objetos pontuais, ao passar por um orifício de diâmetro d, adquire uma separação angular $\Delta\varphi$.

.



Critério de Rayleigh : A separação angular **mínima** para que duas fontes pontuais possam ser distinguidas (resolvidas) é aquela para a qual o máximo central de uma fonte coincide com o primeiro mínimo da figura de difração da outra fonte:

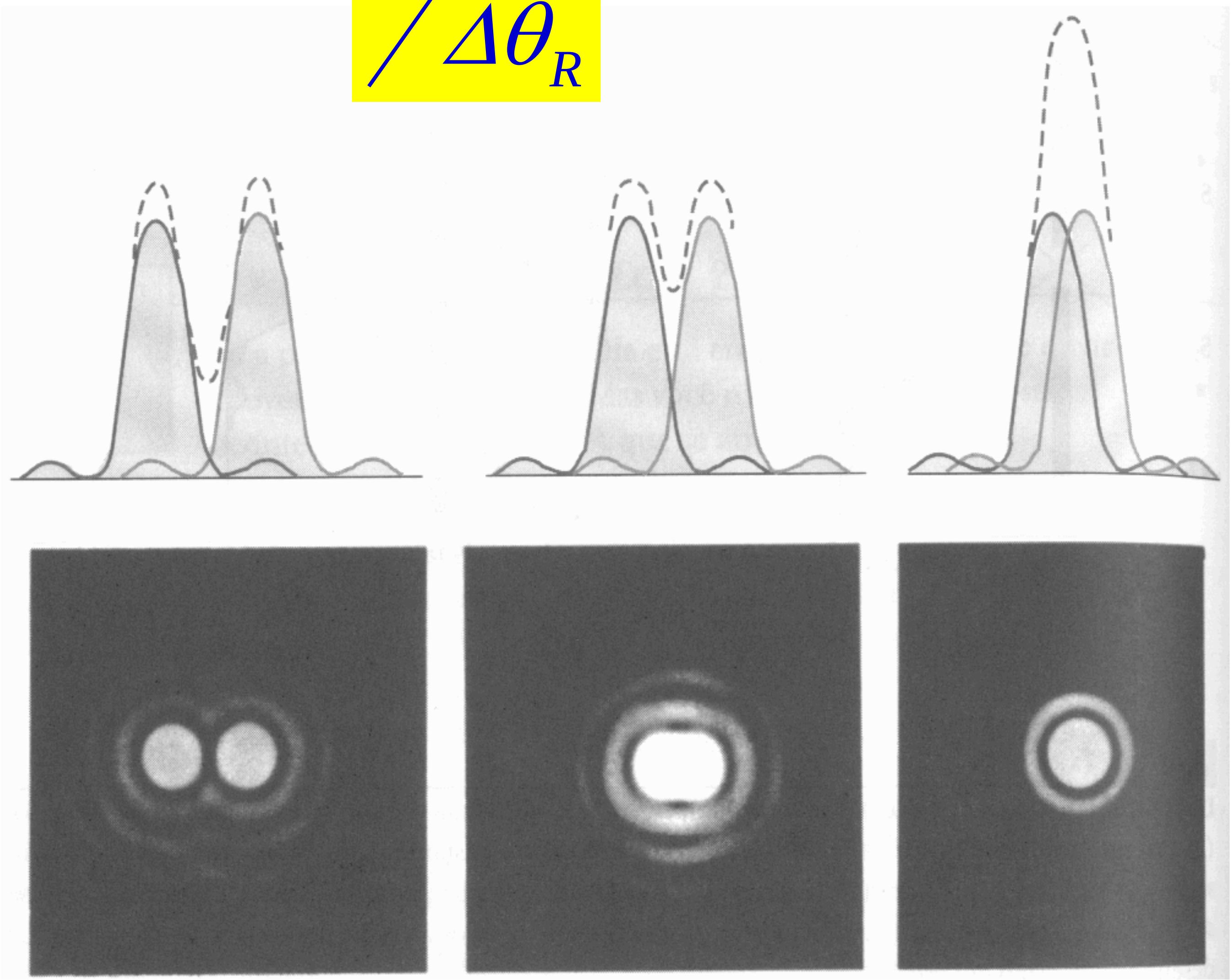
$$\Delta\theta_R = arc\,\mathrm{sen}\left(1{,}22\frac{\lambda}{d}\right) \approx 1{,}22\frac{\lambda}{d}$$



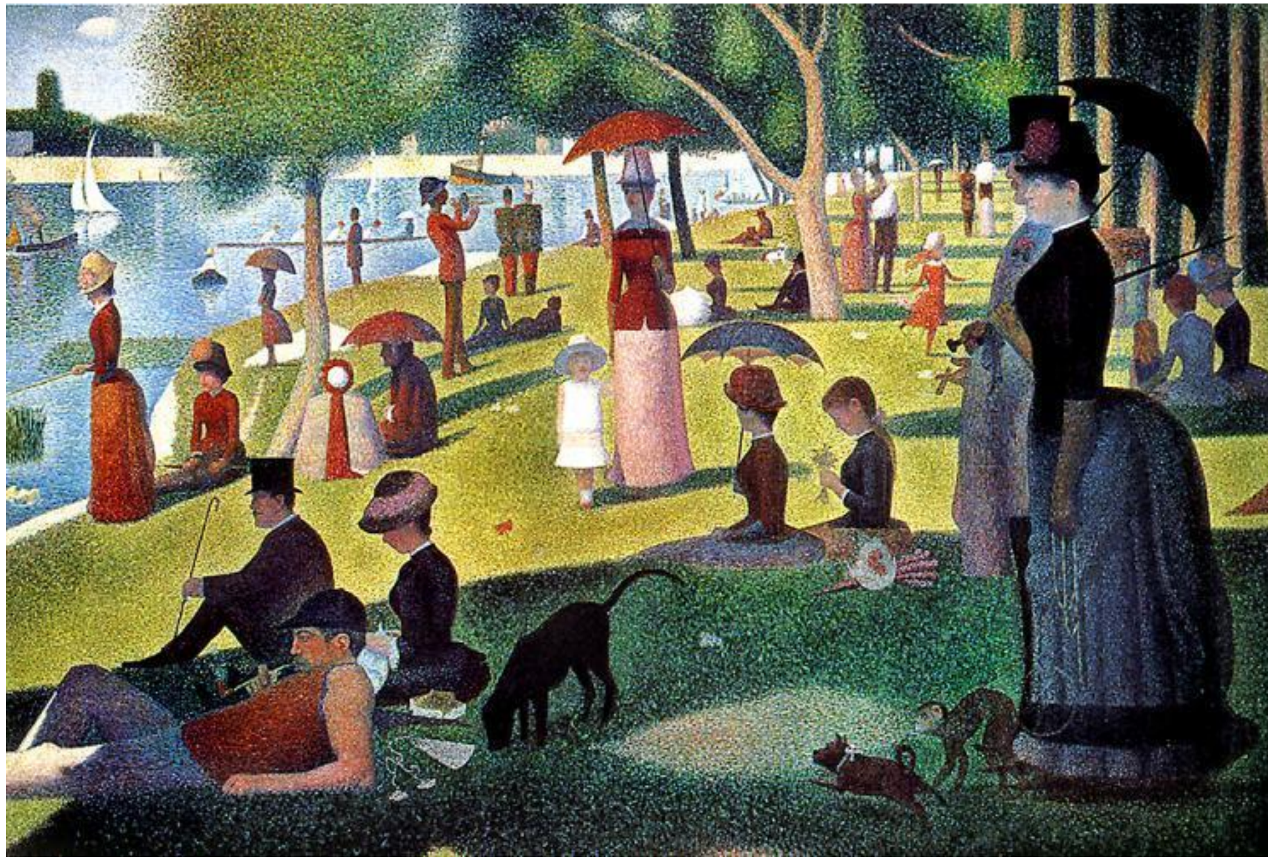
(pontilhismo)

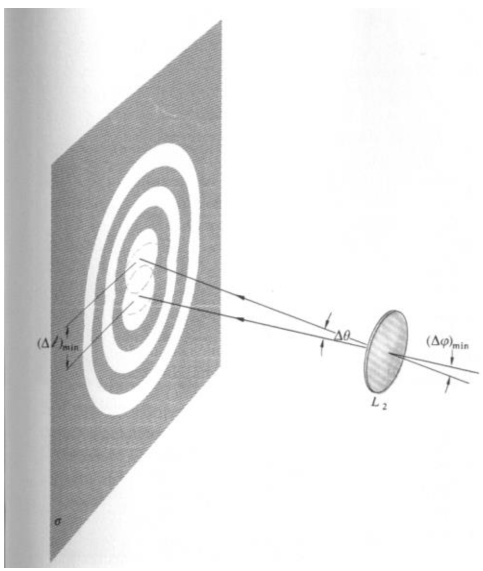
Os sistemas ópticos (microscópios, telescópios, olho humano) são caracterizados por um *poder de resolução*:

$$\frac{1}{\Delta\theta_R}$$



Un dimanche à la Grande Jatte



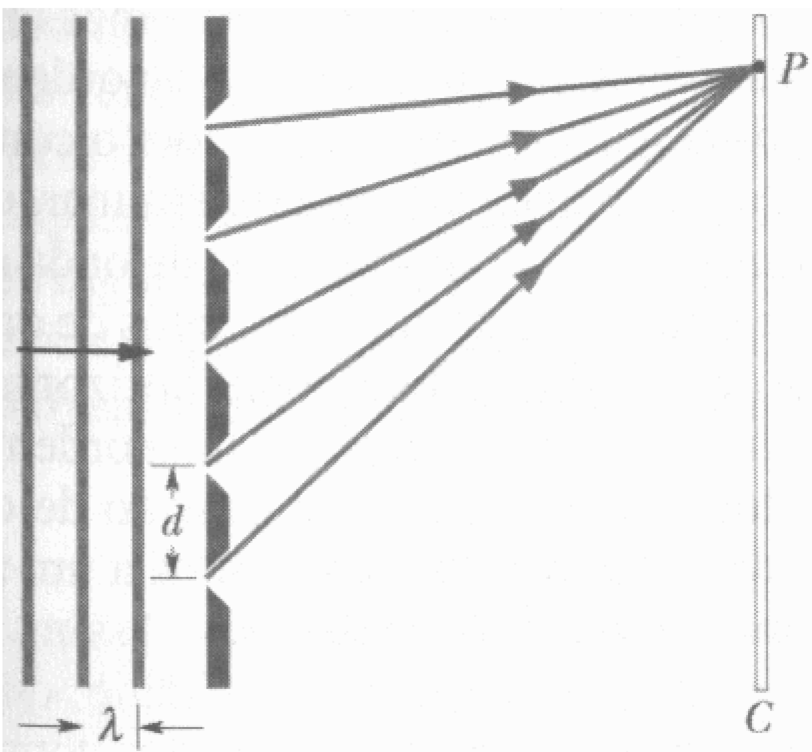


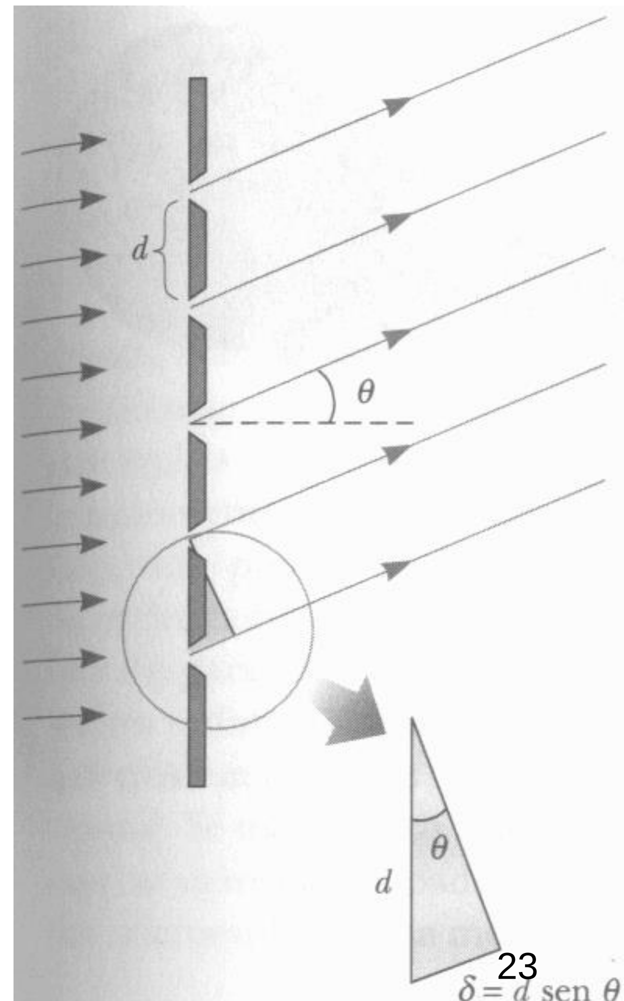
Georges Seurat (French, 1859-1891)
A Sunday on La Grande Jatte -- 1884, 1884-86
Oil on canvas, 81 3/4 x 121 1/4 in. (207.5 x 308.1 cm)

Rede de Difração:
muitas fendas (~milhares por mm!)

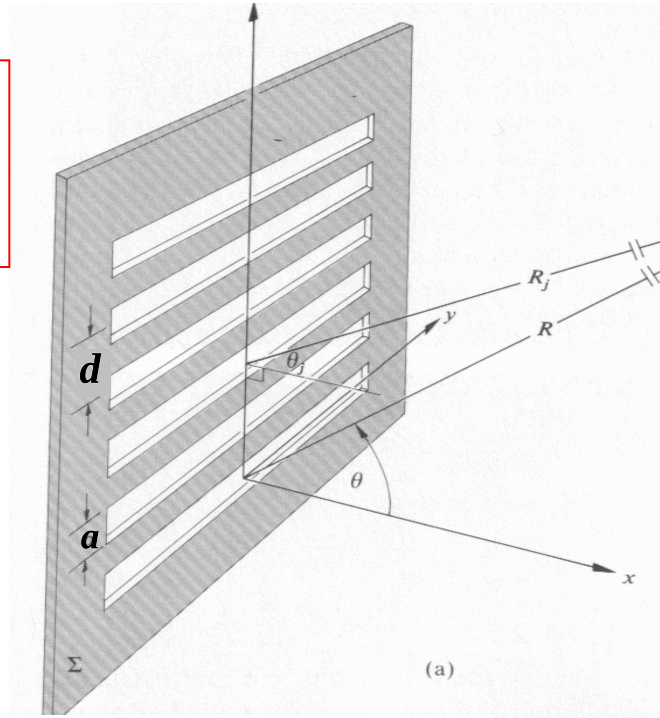
Somando os raios, dois a dois, teremos máximos (interferência construtiva) no anteparo quando:

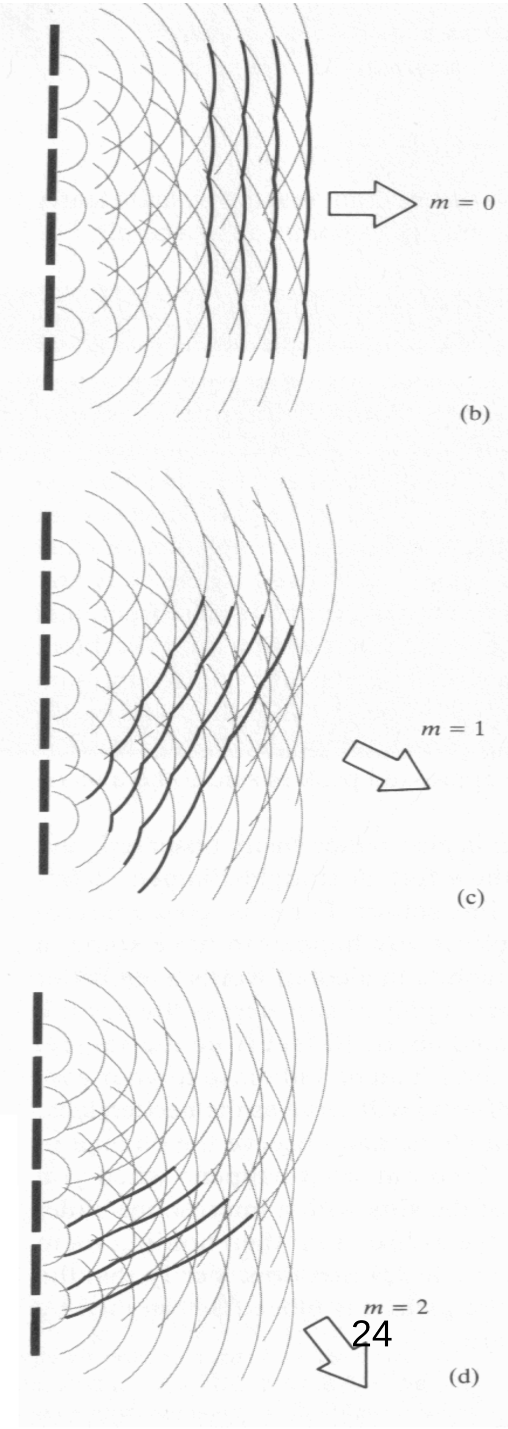
$$d\,sen\,\theta = m\lambda\,; \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

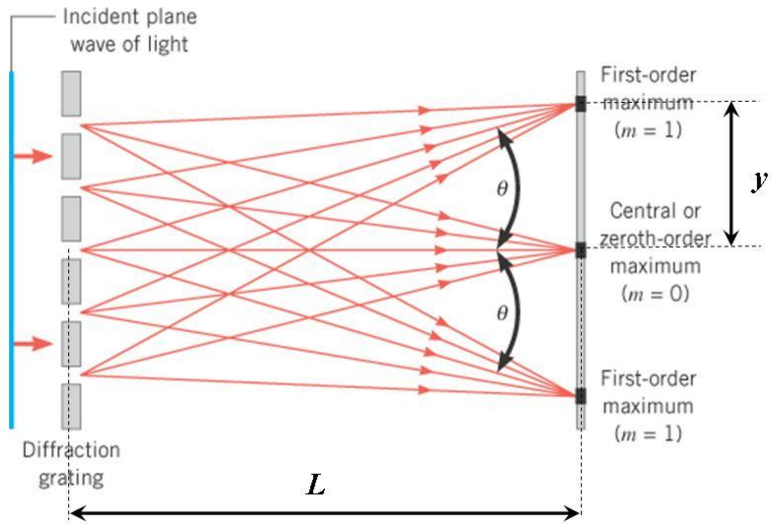




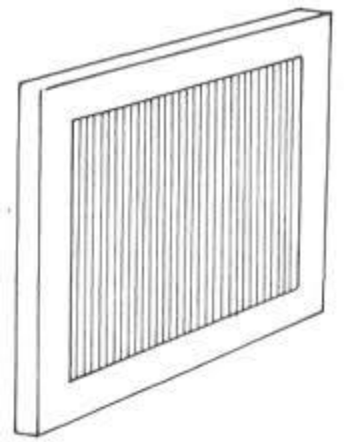
A ordem dos máximos *m* :



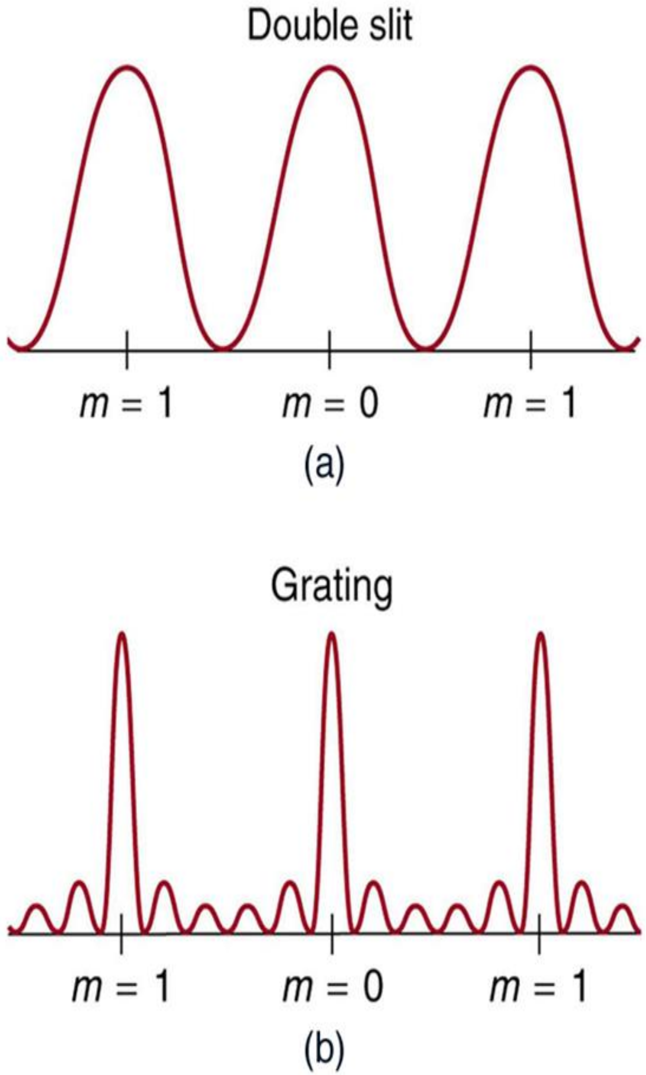




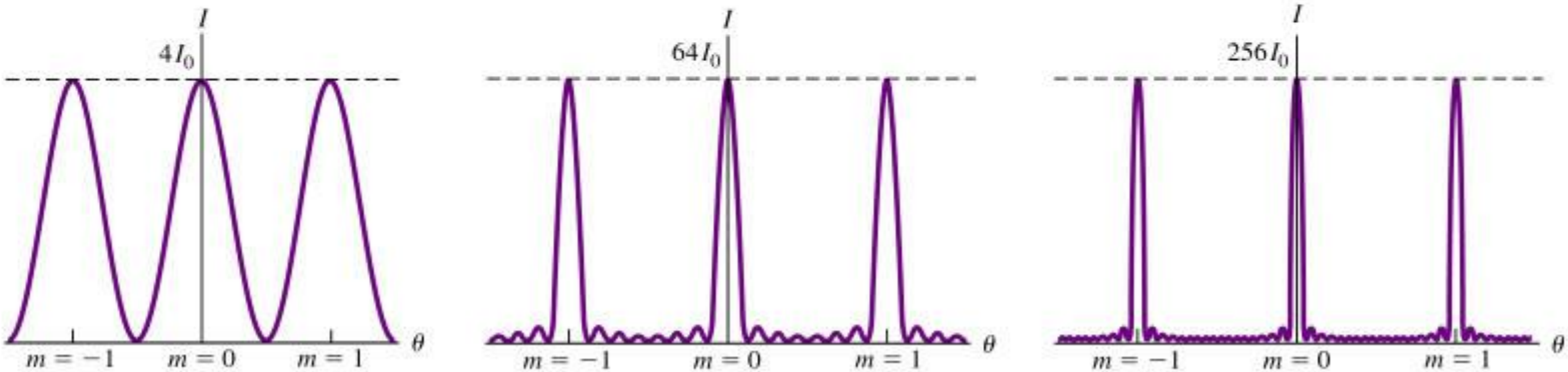
Quando aumentamos o número de fendas, ...



Rede de difração



Quando aumentamos o número de fendas, ...



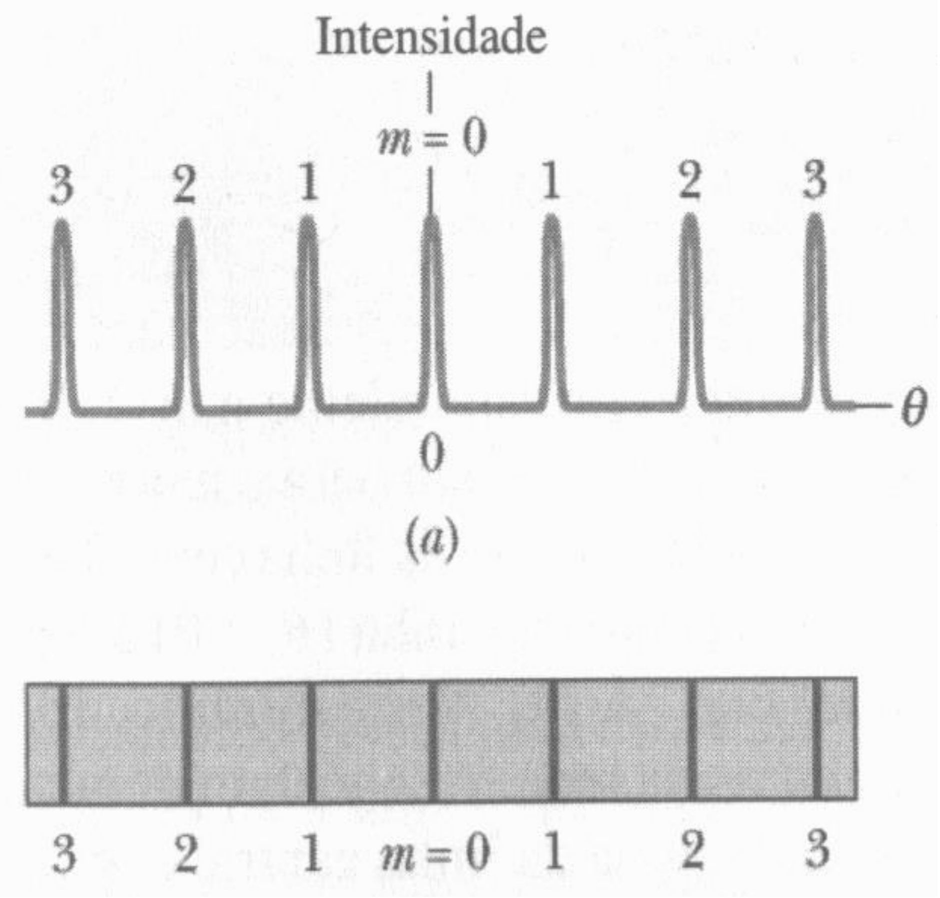
(a) $N = 2$ (b) $N = 8$ (c) $N = 16$

$\boldsymbol{N=2}$ $\boldsymbol{N=8}$ $\boldsymbol{N=16}$

A rede de difração tem uma resolução muito superior a uma fenda dupla, por exemplo:

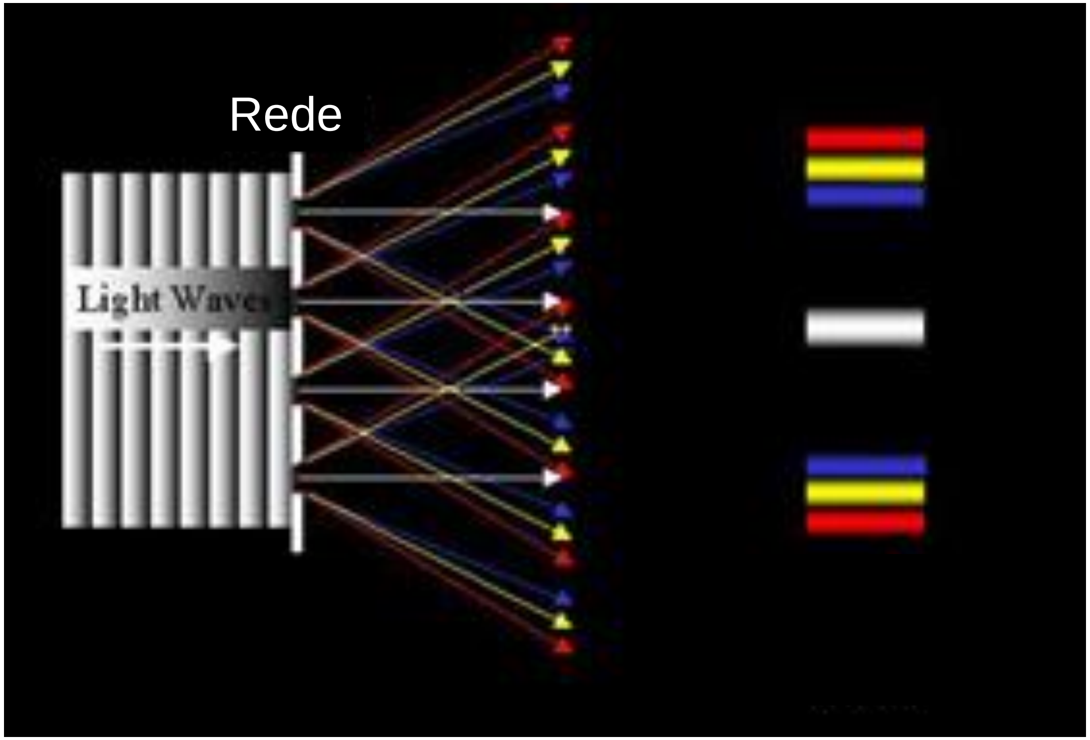
- picos estreitos rotulados pelos números m da ordem

- franjas "claras" => linhas



A rede pode ser utilizada para determinar um λ desconhecido a partir do θ medido: $\longrightarrow$ $d\,\mathrm{sen}\theta = m\lambda$

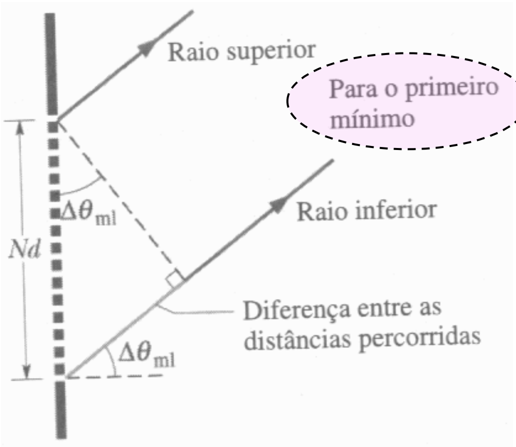
Para cada λ, a interferência construtiva ocorre para um θ:



Largura das Linhas numa rede de difração

Verificamos no estudo da difração por uma fenda "*a*" que a posição do primeiro **mínimo** é dada por:

$$\lambda = a\,\mathrm{sen}\theta$$



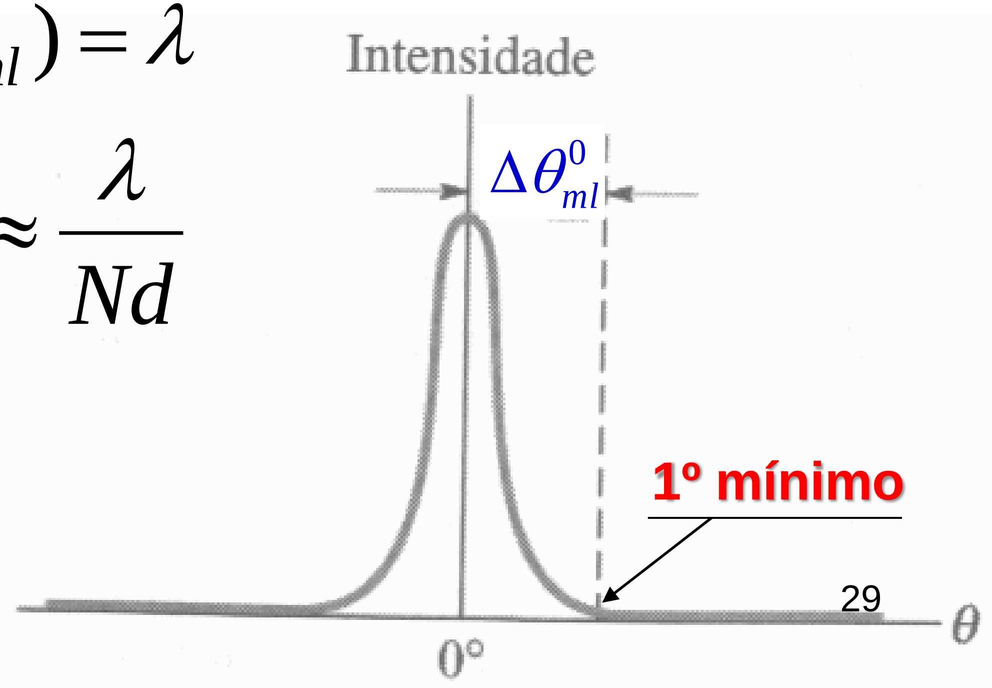
Para calcular a *meia largura* da **linha clara central** na rede, podemos fazer a analogia:

$$a \sim Nd \longrightarrow Nd\,\mathrm{sen}(\Delta\theta^0_{ml}) = \lambda$$

$$\Delta\theta^0_{ml} \approx 0 \longrightarrow \Delta\theta^0_{ml} \approx \frac{\lambda}{Nd}$$

Para um ângulo geral:

$$\Delta\theta^\theta_{ml} \approx \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$



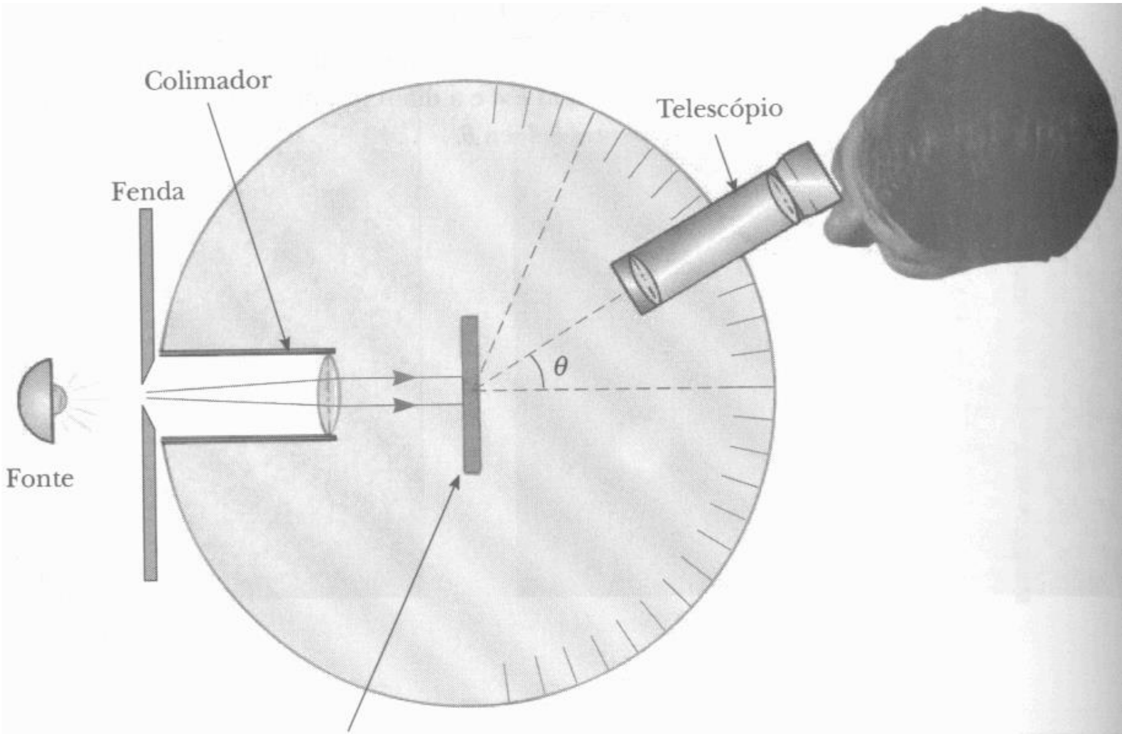
A rede de difração pode ser utilizada para determinar um λ desconhecido a partir do θ medido:

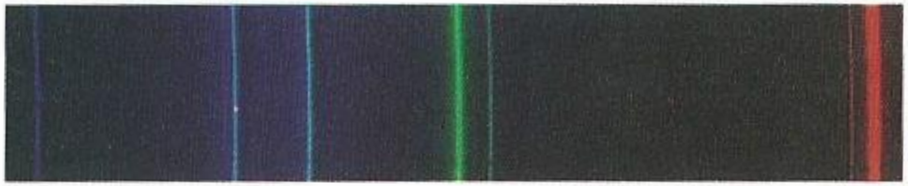
$$d \,\mathrm{sen}\theta = m\lambda$$

$$\Downarrow$$

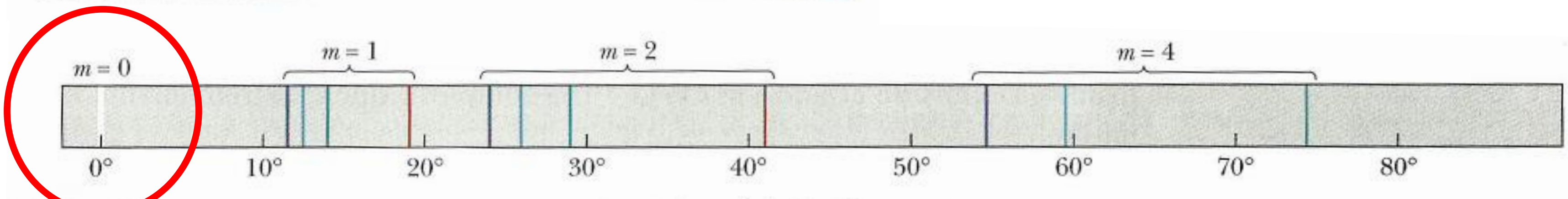
$$\boxed{\theta = arcsen\left(\frac{m\lambda}{d}\right)}$$

Espectrômetro de Rede de Difração



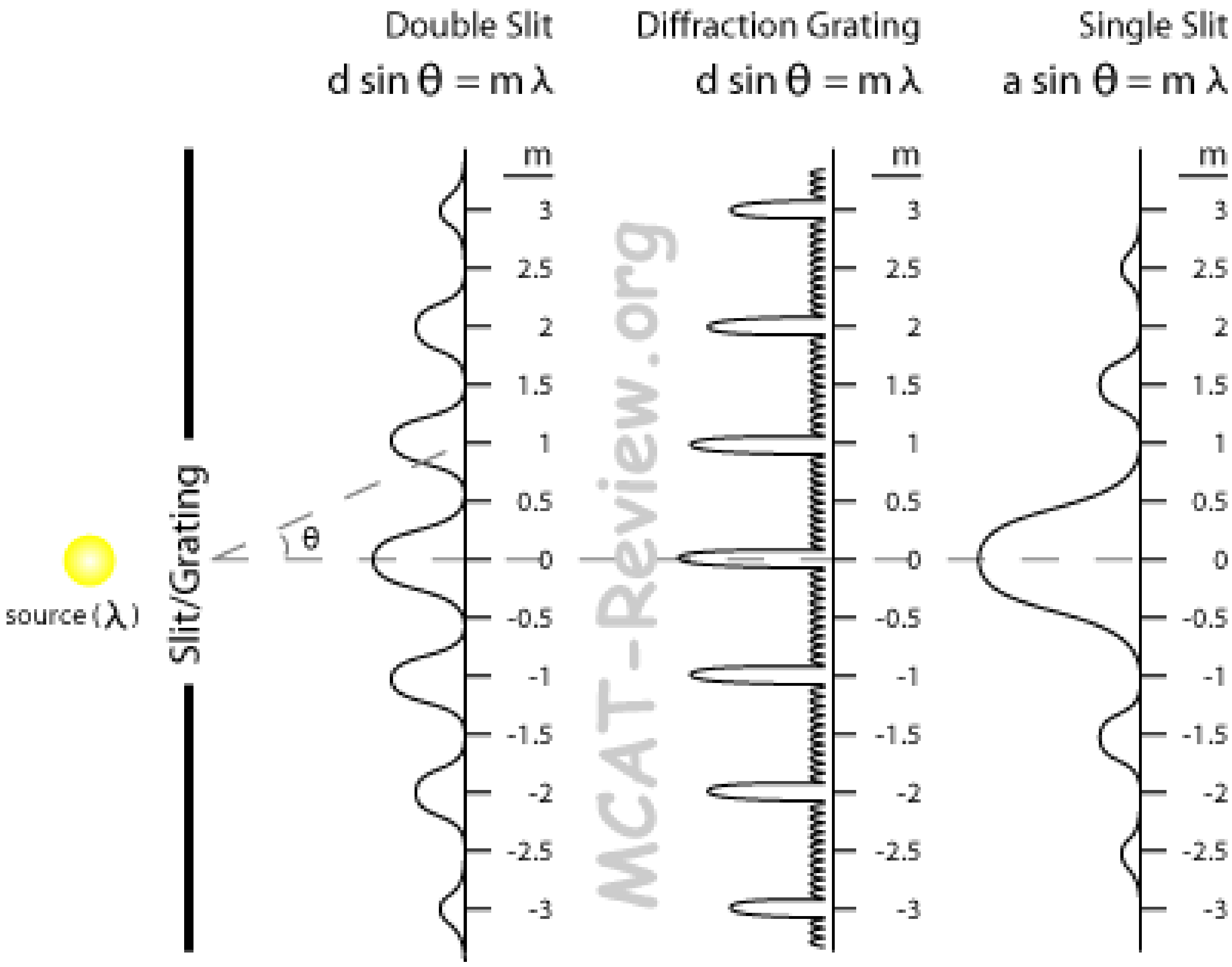


Linhas de emissão do Cd



36-24 Linhas de emissão do hidrogênio na faixa da luz visível, até a quarta ordem.

Para comparação : o que vemos na tela ???



Dispersão

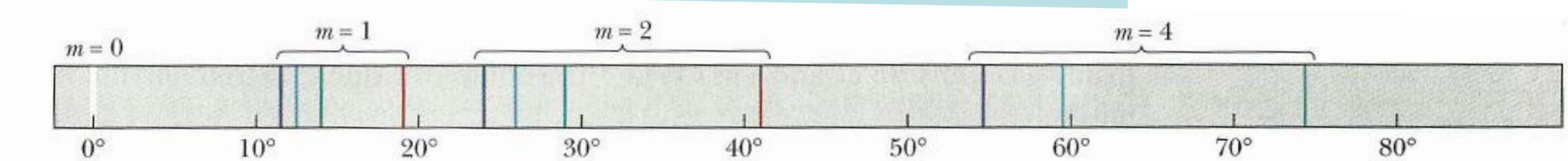
A dispersão numa rede de difração é definida por:

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$$

onde $\Delta\theta$ é separação angular entre duas linhas que diferem de $\Delta\lambda$.

Vimos que $\boxed{\lambda = \frac{d\,sen\,\theta}{m}}$ Portanto, derivando, $\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d}{m}\cos\theta$

Logo, temos: $\boxed{\uparrow D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{\uparrow m}{\downarrow d\cos\theta}}$



36-24 Linhas de emissão do hidrogênio na faixa da luz visível, até a quarta ordem.

Resolução

A resolução numa rede de difração é definida por: $R = \dfrac{\lambda_{med}}{\Delta\lambda}$

onde $\Delta\lambda$ é menor diferença de comprimento de onda que pode ser resolvido e λ_{med} é o comprimento de onda médio.

Vimos que o menor ângulo que pode ser resolvido é:

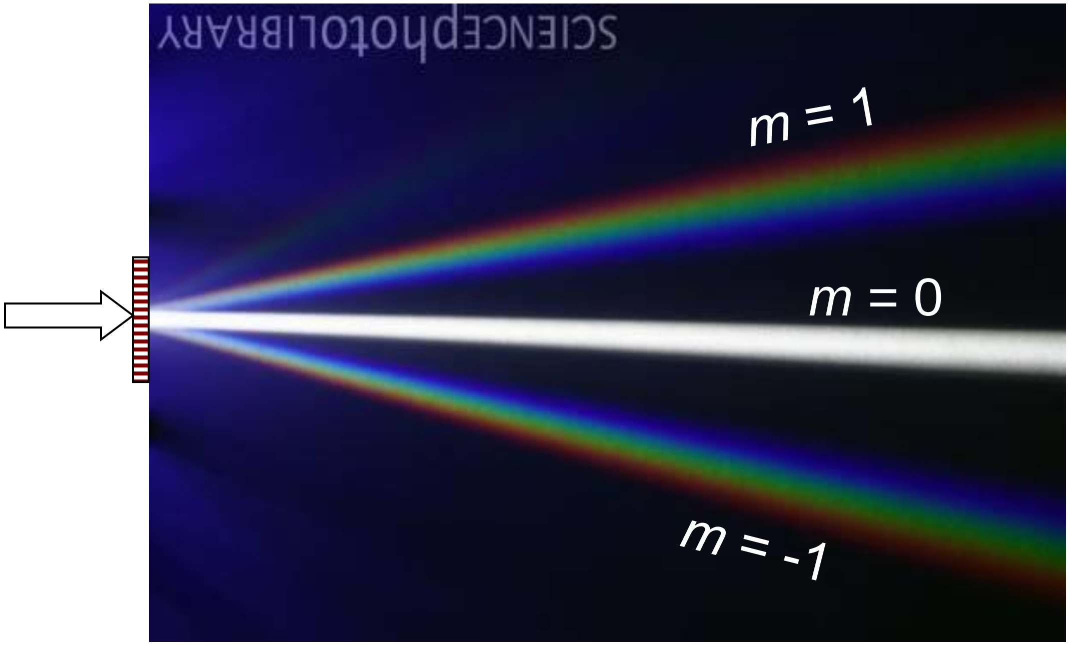
$$\Delta\theta_{ml}^{\theta} \approx \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

Substituindo este valor na eq. da dispersão: $D = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \dfrac{m}{d\cos\theta}$

$$\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}\frac{1}{\Delta\lambda} \approx \frac{m}{d\cos\theta}$$

Assim, temos: $\boxed{R = \dfrac{\lambda_{med}}{\Delta\lambda} \approx Nm}$

Redes de difração com diferentes resoluções:



A luz branca é difratada nos dois casos

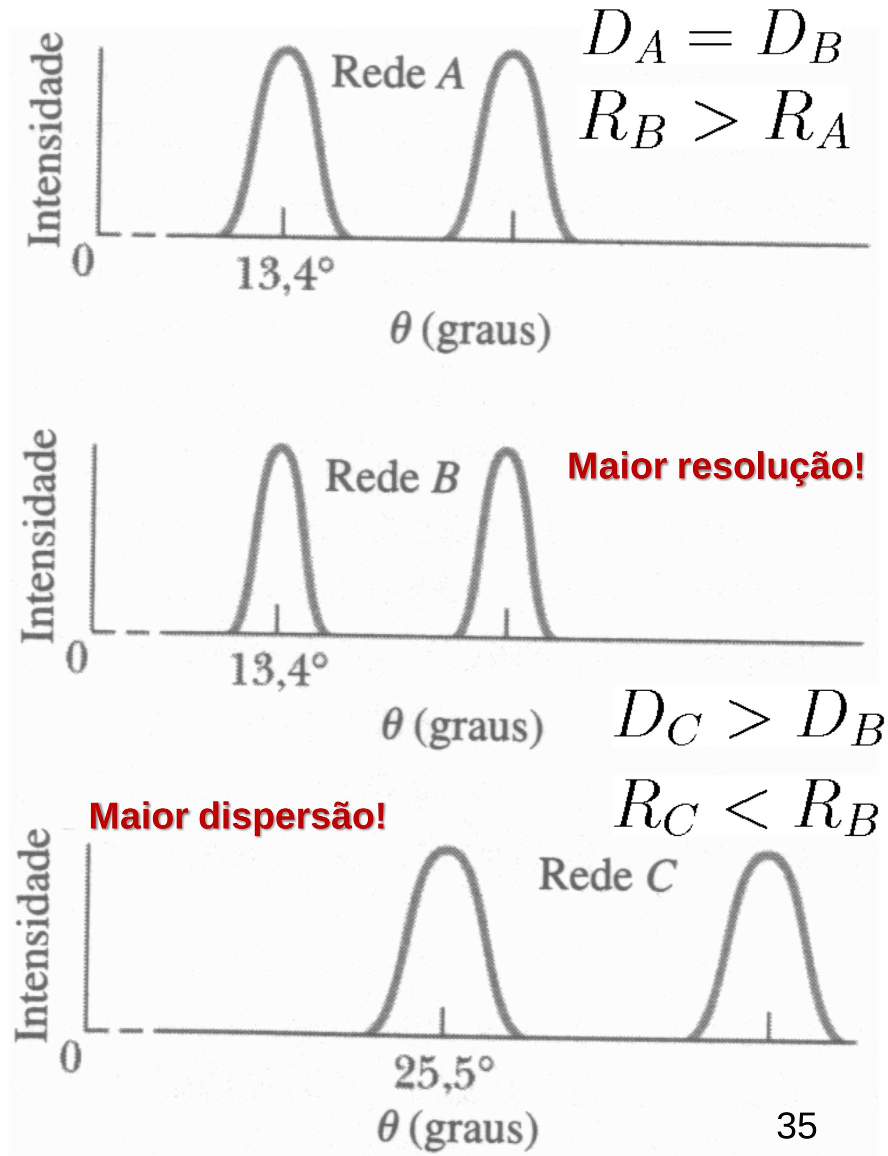
Dispersão x Resolução

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

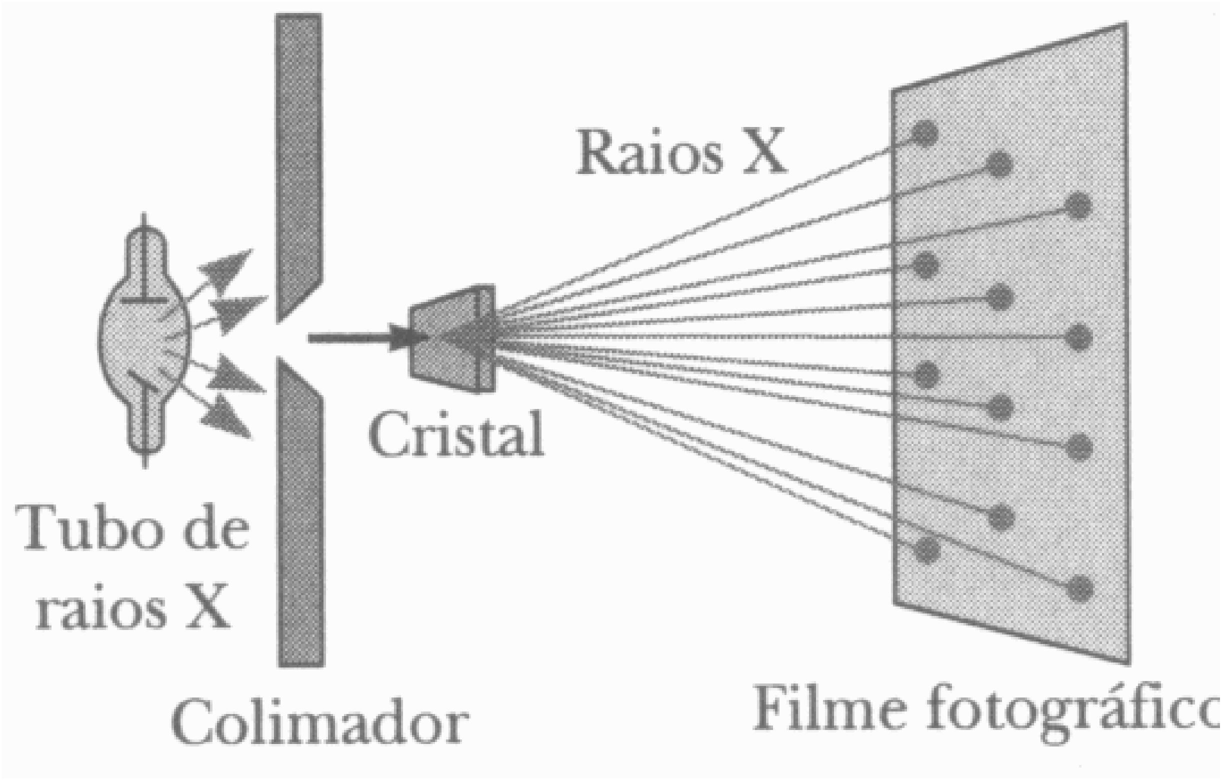
A dispersão melhora com a diminuição de d

$$R = \frac{\lambda_{med}}{\Delta\lambda} = Nm$$

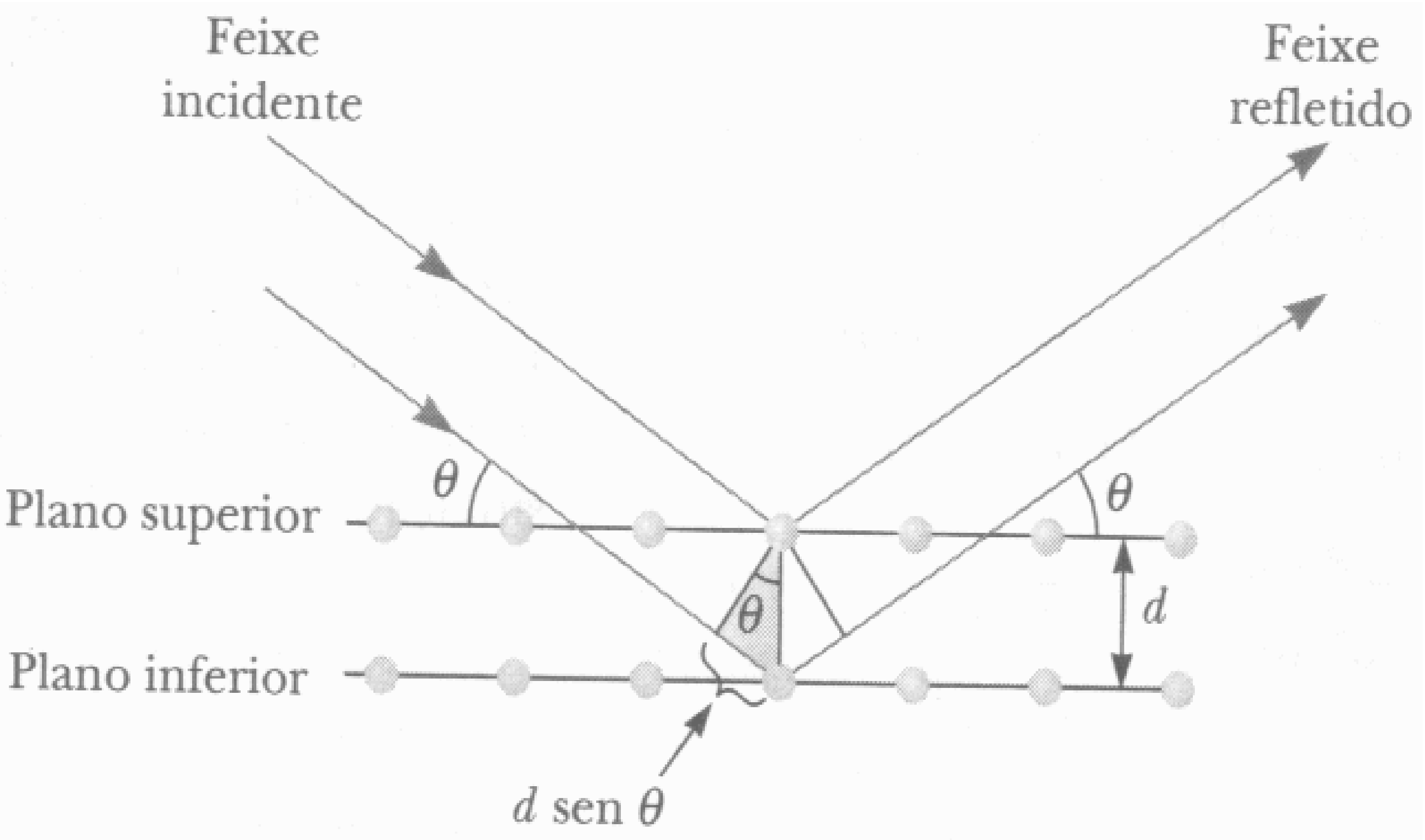
Resolução aumenta com N, número de ranhuras



Difração de raios-X por cristais



O comprimento de onda dos raios X é da ordem do espaçamento atômico em cristais: 10^{-10} m = 1 Å.



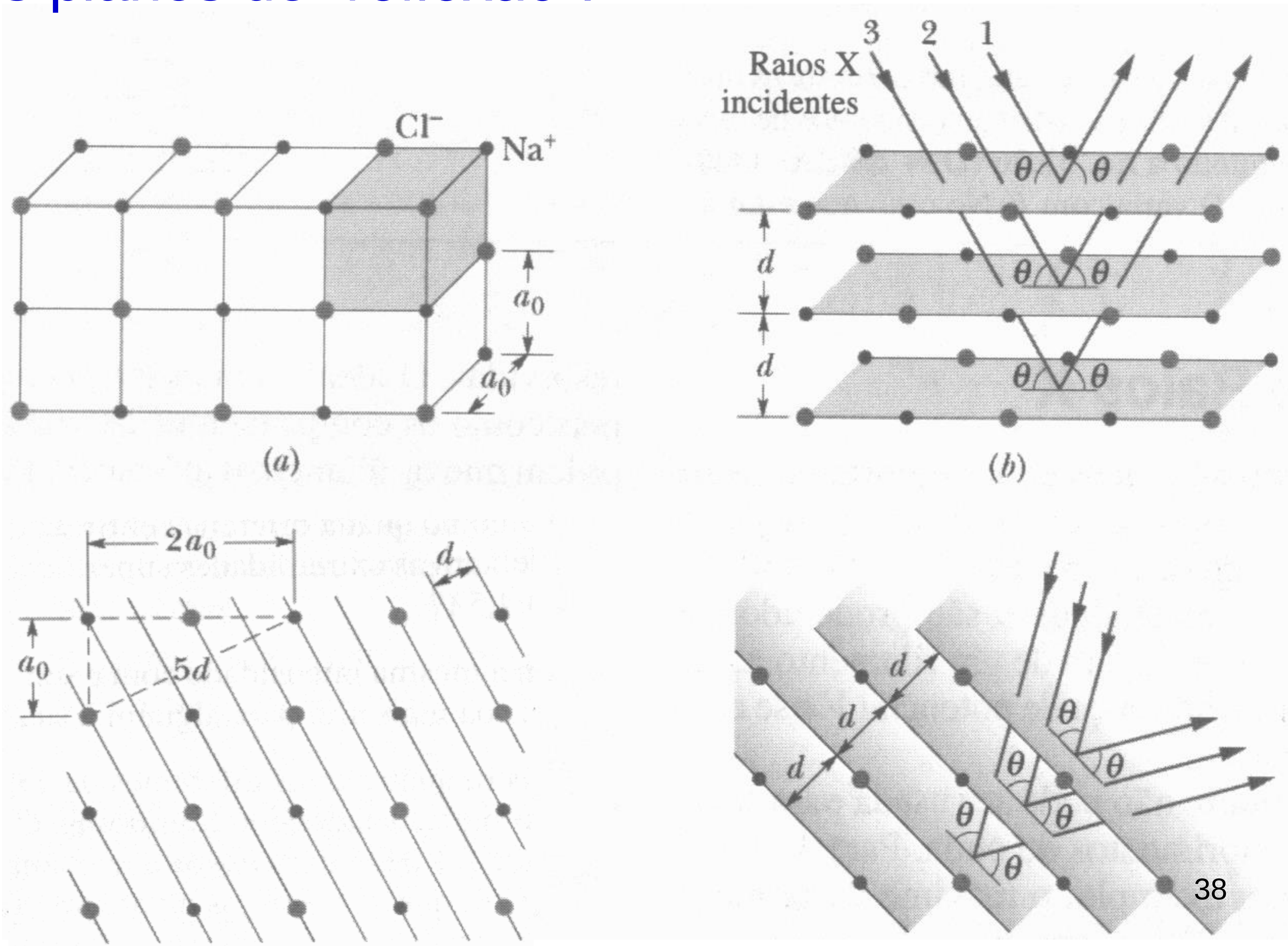
Temos interferências construtivas quando:

$$\boxed{2d\,\mathrm{sen}\theta = m\lambda}$$

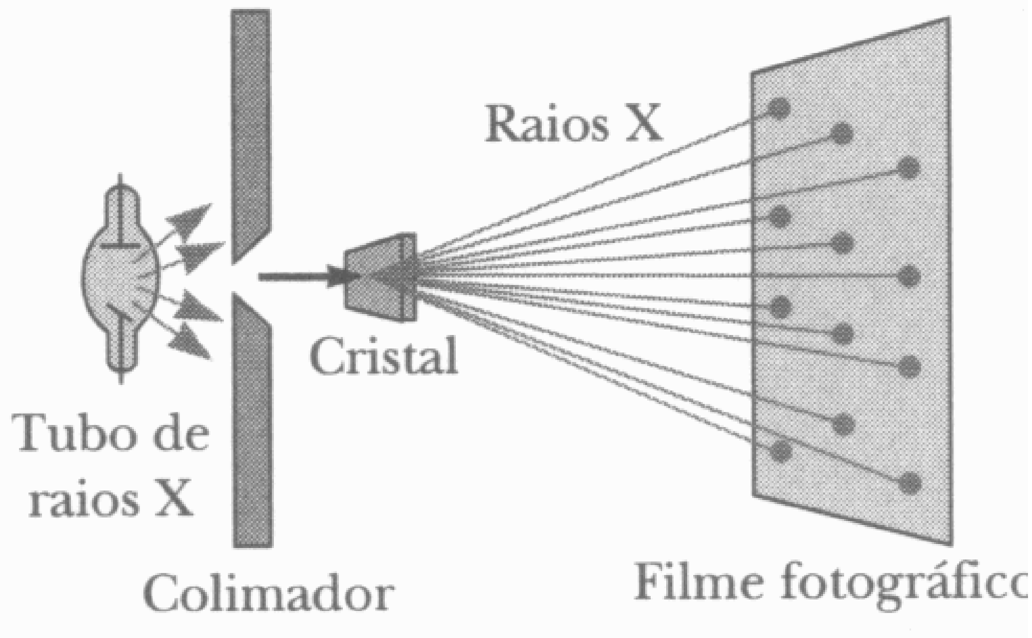
$$(m = 1, 2, 3...)$$

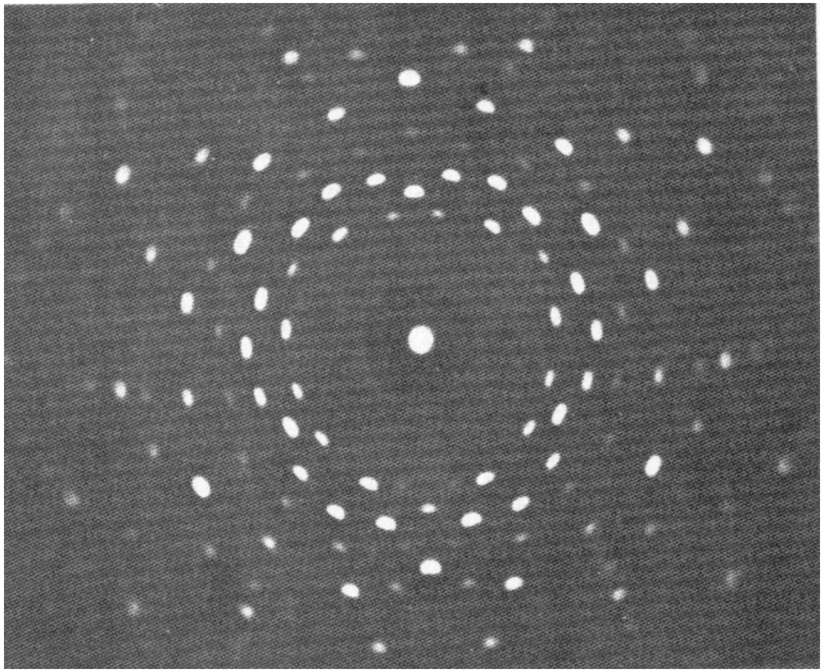
Lei de Bragg

Porém, para qualquer ângulo de incidência, temos vários planos de “reflexão”.



Assim, temos uma figura de difração complexa:





Resumo da aula:

- Difração por uma fenda única
- Difração por uma abertura circular
- Critério de Rayleigh para resolução
- Difração por duas fendas
- Rede de difração (muitas fendas!)
  e sua resolução e dispersão
- Difração de raios X em cristais

Sistema de Lentes para a Difração: com ele, os raios que saem da fenda são paralelos.