

DIPLOMARBEIT

**Berechnung von
turbulenten Plattengrenzschichten
mittels algebraischem Turbulenzmodell**

ausgeführt am Institut für
Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. H. HASELBACHER
und
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. R. WILLINGER

durch
Franz BUCHNER
Hasnerstrasse 100/11
A-1160 Wien

Wien, 30. März 2001

Vorwort

Besonderer Dank gebührt dem Institutsvorstand Herrn *o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing.Dr.techn. Hermann Haselbacher* für die Vergabe der Diplomarbeit und die Mühe der Korrektur.

Dankbar bin ich vor allem auch Herrn *Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr. techn. Reinhard Willinger*. Trotz vieler anderer Aufgaben hat er stets Zeit gefunden, meine Fragen, die sich bei der Erstellung der Arbeit ergaben, umfassend zu beantworten. Auch seine Unterweisungen bezüglich der elektronischen Datenverarbeitung waren unumgänglich notwendig und äußerst informativ für mich.

Ebenfalls dankbar bin ich den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts für die ausgezeichnete Zusammenarbeit. Vor allem Herr *Ing. Kanzler* ist mir in organisatorischen Belangen immer hilfreich zur Seite gestanden. Auch bei den ebenfalls während dieses Zeitraums am Institut tätigen Diplomanden möchte ich mich für ihre oft wertvollen Hinweise bedanken.

Diese Arbeit ist in Dankbarkeit meinen Eltern gewidmet.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Nachrechnung der ebenen inkompressiblen Plattengrenzschicht bei konstantem Außendruck. Ziel ist dabei, näheren Aufschluß über das Verhalten des Baldwin - Lomax - Modells zu gewinnen. Zum Zwecke des Vergleiches werden mit weiteren Turbulenzmodellen Berechnungen angestellt und theoretisch hergeleitete Beziehungen herangezogen. Für die numerische Simulation wurde das Programmpaket FIDAP (Fluid Dynamics Analysis Package) verwendet. Dieses ist standardmäßig nicht mit dem Baldwin - Lomax - Modell ausgestattet. Die rechen-technische Umsetzung dieses Modells wurde mit Hilfe einer Subroutine bewältigt.

Zu Beginn der Arbeit wird eine kurze Darstellung über die Vorgänge in turbulenten Strömungen, speziell über jene in der turbulenten Plattengrenzschicht gegeben. Nach Aufzeigen der strömungsmechanischen Grundlagen werden einige typische experimentelle Befunde der turbulenten Plattengrenzschicht vorgestellt. Den grenzschichtbeschreibenden Größen wird, um einen kurzen Einblick in die Theorie der turbulenten Plattengrenzschicht zu geben, mehr Aufmerksamkeit zugewandt. Bei der Beschreibung der Turbulenzmodelle wurden die algebraischen ausführlicher behandelt als die Mehrgleichungsmodelle. Bezüglich der algebraischen Turbulenzmodelle werden die wichtigsten Entwicklungsschritte, die zum Baldwin - Lomax - Modell geführt haben, dargelegt.

Die auf das Finite - Element - Verfahren aufbauende Lösungsmethodik in FIDAP wird kurz erläutert. Anschließend wird die Wahl der Rand- und Anfangsbedingungen und der Netzparameter begründet.

Bei Vorstellung der Berechnungsergebnisse wird hauptsächlich auf Geschwindigkeitsprofile, Reibungs- und Widerstandsbeiwerte, turbulente Zähigkeiten und auf den Schubspannungsverlauf über der Platte Wert gelegt. Eingegangen wird auch auf spezielle Größen des Baldwin - Lomax - Modells. Die Ergebnisse bezüglich des Baldwin - Lomax - Modells, aber auch hinsichtlich des $k - \omega$ - und $k - \varepsilon$ - Modells sind zufriedenstellend. Eine erwartete Verkürzung der Rechenzeit bei Heranziehung des algebraischen Baldwin - Lomax - Modells konnte gegenüber den Mehrgleichungsmodellen nicht erreicht werden. Der Grund sind die in FIDAP restriktiven Vorgaben zur Implementierung von Unterprogrammen.

Durch die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse eröffnen sich für weiterführende Arbeiten etliche interessante Aspekte, sie werden ebenfalls kurz diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Grundsätzliches zu Grenzschicht und Turbulenz	2
2	Strömungsmechanische Grundlagen	8
3	Experimentelle Befunde zur turbulenten Plattengrenzschicht	13
4	Grenzschichtbeschreibende Größen	20
4.1	Vorbemerkungen	20
4.2	Grenzschichtgleichungen	20
4.3	Geschwindigkeitsprofil	21
4.4	Grenzschichtdicke, Verdrängungsdicke, Impulsverlustdicke	28
4.4.1	Allgemeines	28
4.4.2	Berechnungen mit dem 1/7 - Potenzgesetz	29
4.4.3	Berechnungen mit dem Defektansatz	30
4.4.4	Kennzahlen	38
4.4.5	Vergleiche	39
5	Turbulenzmodelle	43
5.1	Grundsätzliches	43
5.2	Algebraische Turbulenzmodelle	44
5.2.1	Einleitende Bemerkungen	44
5.2.2	Das Prandtl'sche Mischungsweglängenmodell	44
5.2.3	Die Dämpfungsfunktion nach Van Driest	46
5.2.4	Die Modellannahmen nach Clauser und Escudier	47
5.2.5	Die Modifikationen von Corrsin - Kistler und Klebanoff	48
5.2.6	Das Cebeci - Smith Modell	48
5.2.7	Das Baldwin - Lomax Modell	49
5.3	Mehrgleichungsmodelle	51
5.3.1	Das $k - \varepsilon$ - Modell	53
5.3.2	Das $k - \omega$ - Modell	54
6	Programmtechnische Umsetzung des Baldwin - Lomax - Modells	56
6.1	Allgemeines	56
6.2	Erläuterungen zu FIDAP	56
6.3	Erstellung der Subroutine	60

6.4	Wahl der Eingabeparameter - bezogene Größen	61
6.5	Wahl der Rand- und Anfangsbedingungen	63
6.6	Wahl der Netzparameter	64
6.7	Weitere Parameter	66
7	Berechnungsergebnisse	68
7.1	Zusammenfassung der Angaben	68
7.2	Allgemeine Bemerkungen zur Auswertung	68
7.3	Geschwindigkeitsprofile	69
7.4	Grenzschicht- und Verdrängungsdicken	73
7.5	Reibungs- und Widerstandsbeiwerte	77
7.6	Turbulente Zähigkeit, turbulente kinetische Energie, Dissipation und turbulente Frequenz	79
7.7	Größen des Baldwin - Lomax Modells	83
7.8	Schubspannungen	87
7.9	Weitere Diagramme - Vergleiche	92
8	Folgerungen und Hinweise für weitere Arbeiten	97
8.1	Abschließende Kommentierung der Ergebnisse	97
8.2	Hinweise für weitere Arbeiten	99

Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

A	[-]	Konstante (Defektansatz)
A_0	[-]	Konstante (Cebeci - Smith - Modell)
A_0^+	[-]	Konstante (Van - Driest - Ansatz)
b	[m]	Plattenbreite
B	[-]	Konstante (Defektansatz)
c_f	[-]	Reibungsbeiwert
c_w	[-]	Widerstandsbeiwert
C^+	[-]	Konstante (logarithmisches Überlappungsgesetz)
C_{cp}	[-]	Modellkonstante (Baldwin - Lomax - Modell)
C_{Kleb}	[-]	Modellkonstante (Baldwin - Lomax - Modell)
C_{wk}	[-]	Modellkonstante (Baldwin - Lomax - Modell)
$C_{\epsilon 1}$	[-]	Modellkonstante ($k - \epsilon$ - Modell)
$C_{\epsilon 2}$	[-]	Modellkonstante ($k - \epsilon$ - Modell)
C_μ	[-]	Modellparameter (Zweigliedungsmodelle)
D		allgemeiner Operator
D	[-]	Konstante im Widerstandsgesetz (Defektansatz)
E	[-]	Konstante (logarithmisches Überlappungsgesetz)
f		allgemeine Funktion
F		Ansatzfunktion (Defektansatz)
F'		Ansatzfunktion (Defektansatz; Geschwindigkeitsdefekt)
\underline{F}		Lastvektor
F_{Kleb}		Intermittenzfunktion nach Klebanoff
F_{max}		Hilfsfunktion (Baldwin - Lomax - Modell)
F_{wake}		Hilfsfunktion (Baldwin - Lomax - Modell)
Fe	[-]	Endwert von F (Defektansatz)
f	[-]	allgemeine Funktion
G	[-]	Formparameter
G		allgemeine Funktion (Dimensionsanalyse)
G		Hilfsfunktion zur Berechnung von c_w - und c_f - Werten
k	[m ² /s ³]	kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegungen
k	[m]	Durchmesser des Stolperdrahtes
k_{tech}	[m]	Rauheitshöhe einer technischen Rauheit
K_x	[N/m ³]	Komponente von \vec{K} in x - Richtung
K_y	[N/m ³]	Komponente von \vec{K} in y - Richtung
\underline{K}		Systemmatrix

\vec{K}	[N/m ³]	Körperkraft je Volumseinheit
l	[m]	Plattenlänge
l_T	[m]	Turbulentes Längenmaß
l_{mix}	[m]	Mischungsweglänge
M	[-]	Konstante (Defektansatz)
\vec{n}	[m]	Normalenvektor
p	[Pa]	Druck
\underline{P}		Koeffizientenvektor für den Druck
p_e	[Pa]	Druck am Grenzschichttrand
p_W	[Pa]	Druck an der Wand
\vec{P}	[N/m ³]	Vektor der Oberflächenkräfte je Volumseinheit
R		Restwert
Re_x	[-]	Reynoldszahl an der Stelle x
Re_l	[-]	Reynoldszahl am Plattenende
S	[-]	Ansatzfunktion für die Schubspannung
t	[K]	Temperatur
\underline{T}		Koeffizientenvektor für die Temperatur
T_u	[-]	Turbulenzgrad
u	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in x - Richtung
u^+	[-]	dimensionslose Geschwindigkeit in der Wandschicht
u_{max}^+	[-]	größter Wert von u^+
u_τ	[m/s]	Schubspannungsgeschwindigkeit
\vec{u}	[m/s]	Geschwindigkeitsvektor
U	[m/s]	Anströmgeschwindigkeit
U_e	[m/s]	Geschwindigkeit am Grenzschichttrand
U_{dif}	[m/s]	charakteristische Geschwindigkeitsdifferenz
\underline{U}_i		Koeffizientenvektor für Geschwindigkeiten
v	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in y - Richtung
\vec{v}	[m/s]	Geschwindigkeitsvektor
V		Bereich
w	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in z - Richtung
W	[N]	Widerstandskraft
x	[m]	kartesische Koordinate
\mathbf{x}	[m]	allgemeine Lagekoordinate
x_{ausw}	[m]	x - Koordinate der Auswertestelle
y	[m]	kartesische Koordinate
y^+	[-]	dimensionslose Koordinate in der Wandschicht
y_{max}^+	[-]	größter Wert von y^+
y_{max}	[m]	y - Koordinate beim Maximalwert von l_{mix}
y_m	[m]	y - Koordinate zur Fallunterscheidung ($\mu_{Ti} - \mu_{To}$)
z	[m]	kartesische Koordinate

Griechische Formelzeichen

α	[-]	Modellkonstante (Cebeci - Smith u. Baldwin - Lomax - Modell)
α	[-]	Modellkonstante ($k - \omega$ - Modell)
β	[-]	Modellkonstante ($k - \omega$ - Modell)

β^*	[-]	Modellkonstante ($k - \omega$ - Modell)
γ	[-]	Intermittenzfaktor
γ	[-]	dimensionslose Schubspannungsgeschwindigkeit
δ	[m]	Grenzschichtdicke
δ_R	[m]	mittlere Lage des Grenzschichtendes
δ_{vel}	[m]	velocity thickness
δ_I	[m]	Impulsverlustdicke
δ_V	[m]	Verdrängungsdicke
δ_{Vlam}	[m]	Verdrängungsdicke bei laminarer Grenzschicht
ε	[m ² /s ³]	Dissipation pro Einheit der Masse
η	[-]	dimensionsloser Wandabstand ($\eta = y/\delta$)
κ	[-]	Karman - Konstante
κ_1	[-]	Konstante im Ansatz für freie Turbulenz
Λ		Hilfsfunktion im Defektansatz
μ	[kg/ms]	dynamische Viskosität
μ_T	[kg/ms]	Wirbelviskosität
μ_{Ti}	[kg/ms]	Wirbelviskosität im inneren Grenzschichtbereich
μ_{To}	[kg/ms]	Wirbelviskosität im äußeren Grenzschichtbereich
ν	[m ² /s]	kinematische Viskosität
ν_T	[m ² /s]	kinematische Wirbelviskosität
ξ	[-]	Koordinate
Π		Produkt
Π	[-]	Nachlaufparameter nach Coles
Π_D	[-]	Nachlaufparameter im Defektansatz
ρ	[kg/m ³]	Dichte
$\underline{\vartheta}$		Vektor der Ansatzfunktionen für die Temperatur
σ	[-]	Modellkonstante ($k - \omega$ - Modell)
σ^*	[-]	Modellkonstante ($k - \omega$ - Modell)
σ_{ij}	[N/m ²]	Komponente des Spannungstensors
σ_ε	[-]	Modellkonstante ($k - \varepsilon$ - Modell)
τ	[N/m ²]	Schubspannung
τ_{ij}	[N/m ²]	Komponente des viskosen Spannungstensors
τ_L	[N/m ²]	Schubspannung zufolge der Zähigkeit
τ_T	[N/m ²]	Schubspannung zufolge der Schwankungsbewegungen
τ_W	[N/m ²]	Wandschubspannung
$\vec{\sigma}$	[N/m ²]	Spannungsvektor
$\underline{\varphi}$		Vektor der Ansatzfunktionen für Geschwindigkeiten
$\underline{\Psi}$		Stromfunktion (Defektansatz)
$\underline{\Psi}$		Vektor der Ansatzfunktionen für den Druck
ω	[1/s]	turbulente Frequenz

Tiefgestellte Indizes

e Rand der turbulenten Grenzschicht

Hochgestellte Indizes

- $(.)^F$ zufolge FIDAP
- $(.)^*$ dimensionslose Grösse
- $(.)'$ turbulente Schwankungsgrösse
- $(.)'$ Ableitung nach η
- $(.)$ zeitlich gemittelte Grösse

Kapitel 1

Einführung

1.1 Problemstellung

So gut wie in allen Bereichen der Technik wird stets an Neu- und Weiterentwicklungen gearbeitet. Dies trifft natürlich auch auf die Turbomaschinen zu. Ein wichtiger Aspekt bei Verbesserung dieser ist dabei die Absenkung der Verluste. Ein Gutteil der Verluste in Turbomaschinen entsteht durch die Reibung des strömenden Mediums an den festen Wänden der Maschinenteile. Für die Strömung um Profile sei dazu das Stichwort "Grundverlustbeiwert" genannt. Die Effekte der Reibung sind nun auf eine eher dünne Schicht, die "Grenzschicht", beschränkt. Es genügt daher für eine mathematische Behandlung für die Reibungseffekte die Betrachtung dieser Grenzschicht. Es kann innerhalb der Grenzschicht entweder Strömung in nebeneinander herlaufenden Schichten vorliegen, oder es kann zu regellosen Querbewegungen der Fluidpartikel kommen. Im ersten Fall spricht man von laminarer, im zweiten von turbulenter Grenzschicht. Bei den üblichen Verhältnissen im Turbomaschinenbau sind beide Strömungsformen in der Grenzschicht anzutreffen. Die Tatsache, daß die Strömung in der Grenzschicht laminar oder turbulent sein kann, ist wesentlich für deren Berechnung. Die Laminarströmung ist rechnerisch gut erfaßbar. Turbulente Strömung ist jedoch aufgrund ihrer Natur (eine nähere Beschreibung dieser Strömungsform wird später noch gegeben) eher schwierig zu berechnen, man ist dabei auf empirische Aussagen und für viele Berechnungen auf Turbulenzmodelle angewiesen. Auch CFD - Programme kommen – von Berechnungen reiner Laminarströmungen abgesehen – nicht ohne Turbulenzmodelle aus.

Es wurden nun etliche Turbulenzmodelle entwickelt, wobei zwischen algebraischen (auch Nullgleichungsmodelle genannt) und Mehrgleichungsmodellen unterschieden wird. Das Unterscheidungskriterium dabei ist die Anzahl der zu den Grundgleichungen der Strömung zusätzlich hinzukommenden (partiellen) Differentialgleichungen, die bei Anwendung des jeweiligen Turbulenzmodells nötig werden. Ohne solche zusätzlichen Differentialgleichungen kommen die algebraischen Turbulenzmodelle aus. Ein gut bekanntes algebraisches Turbulenzmodell ist neben dem Prandtl'schen Mischungswegansatz jenes von Baldwin - Lomax. Letzteres ist gut zur Berechnung von im Turbomaschinenbau anzutreffenden Strömungen geeignet. Da das Modell keine Differentialgleichungen benützt, ist eine Verkürzung der Rechenzeit anzunehmen. Auch werden die Simulationsergebnisse bei Anwendung dieses Modells bei CFD - Anwendern allgemein als qualitativ gut bewertet.

Um nun konkrete Anhaltspunkte über die Qualität der Ergebnisse und die Rechenzeit bei Anwendung des Baldwin - Lomax - Modells zu haben, wird es in dieser Arbeit dazu verwendet, die ebene Plattenströmung zu berechnen. Das Ziel dabei ist, qualitativ gute Rechenergebnisse bei gleichzeitig kurzer Rechenzeit zu erreichen. Um Vergleichsmöglichkeiten zu haben, wird diese Strömung aber auch mittels weiterer Turbulenzmodelle simuliert. Herangezogen wird dazu das kommerzielle Programmpaket FIDAP, in dem einige Turbulenzmodelle bereits fertig verfügbar sind. Nicht aber das Baldwin - Lomax - Modell. Jedoch gestattet FIDAP einen beschränkten Eingriff in das Programmgeschehen durch Subroutinen, und mittels dieser Option wird auch das Baldwin - Lomax - Modell implementiert. Speziell die Strömung an der ebenen Platte als Testfall heranzuziehen hat zwei gute Gründe. Erstens liegt über die Plattenströmung mit $U = \text{konst.}$ einiges an Meßdaten vor, wodurch auch an diesen die Rechenergebnisse bewertet werden können. Zweitens wird diese Strömung oftmals in der Literatur theoretisch behandelt. Zu den theoretischen Herleitungen eine Bemerkung: Im turbulenten Fall kommen sie trotz teilweise weitschweifig hergeleiteter Formeln nicht ohne Näherungen aus. Es muß weiters auf experimentelle Daten zurückgegriffen werden. Es wird immer noch an der theoretischen Behandlung der turbulenten Plattengrenzschicht gearbeitet, wobei auch der Einfluß der Plattenrauigkeit ein wichtiges Thema darstellt. Aber auch speziell dem Übergang von laminarer zu turbulenter Grenzschicht wird zur Zeit große Aufmerksamkeit zugewandt. Der Grund der stets neu hinzukommenden theoretischen Beiträge ist die Komplexität der turbulenten Strömungen, somit auch der turbulenten Plattengrenzschicht. Eine Vorstellung über die komplizierten Vorgänge der Turbulenzentwicklung über der Platte und in turbulenten Grenzschichten soll die nachfolgende Beschreibung (Pkt. 1.2) geben.

Zuvor soll noch darauf hingewiesen werden, daß nicht nur den turbulenten Plattengrenzschichten, sondern natürlich dem ganzen Gebiet turbulenter Strömungen viele Forschungsaktivitäten gewidmet sind. Von Verbesserungen und Neuheiten von Turbulenzmodellen wird immer wieder berichtet. Wegen des damit verbundenen umfangreichen literarischen Materials kann in dieser Arbeit bei Vorstellung der Theorie unmöglich auf alle Details eingegangen werden, es werden etliche Literaturhinweise gegeben. Es wird hier eher versucht, einige wichtig erscheinende Zusammenhänge aufzuzeigen, weshalb ein paar wenige ausführlicher dargestellt werden.

1.2 Grundsätzliches zu Grenzschicht und Turbulenz

Die Strömung an der längsangeströmten ebenen Platte ist ausgehend von der Plattenvorderkante zunächst laminar (Schichtenströmung). Ab einer gewissen Lauflänge geht sie dann in eine turbulente Strömungsform über. Dieser Übergang geht nicht schlagartig vor sich, sondern innerhalb eines gewissen Bereiches, vergleiche Abb. 1.1. Ursache der Turbulenzentstehung ist, wie rechnerisch untermauert wird (Orr - Sommerfeld - Gleichung), ein Instabilwerden der Hauptströmung.

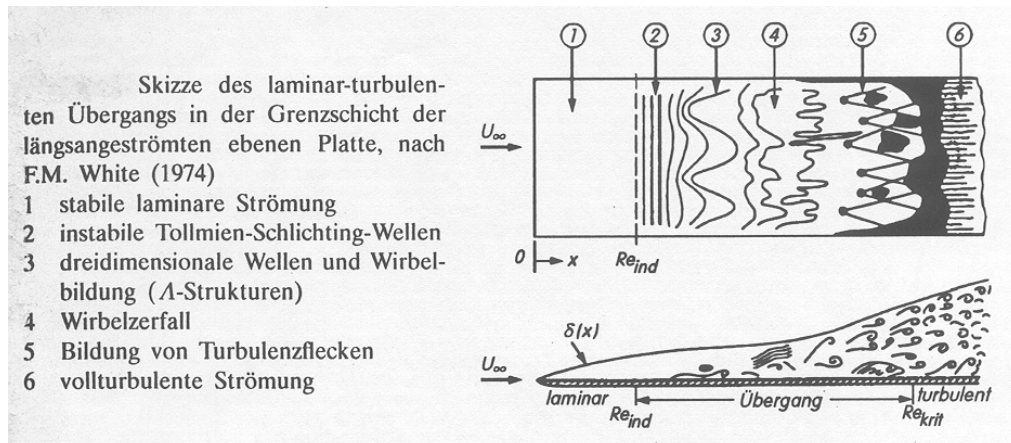


Abbildung 1.1: laminar - turbulent Übergang (aus [12])

In Abb. 1.1 ist U_∞ die Anströmgeschwindigkeit, die in dieser Arbeit mit U bezeichnet wird. Re_{ind} und Re_{krit} werden in der Folge erläutert, wobei Re_{krit} hier mit Re_{xkrit} bezeichnet wird. Bei welcher Lauflänge x über der Platte die Strömung turbulent wird, wird von mehreren Faktoren beeinflusst. Die wichtigsten sind der Druckverlauf der Außenströmung, die Oberflächenbeschaffenheit der Wand (Rauigkeit) und die Störungsfreiheit der Außenströmung (Turbulenzgrad). Wird die Lauflänge mit U und ν dimensionslos gemacht, so gibt es für die dimensionslose Umschlagstelle $\frac{Ux_{krit}}{\nu}$ keinen festen Wert. Es kann jedoch ein Wertebereich angegeben werden. Es gilt, von Sonderfällen abgesehen

$$\frac{Ux_{krit}}{\nu} = Re_{xkrit} (= Re_{krit}) = 3.5 \times 10^5 \quad \text{bis} \quad 10^6. \quad (1.1)$$

Durch den Übergang von der laminaren auf die turbulente Grenzschichtform kommt es zu einem plötzlichen starken Anwachsen der Schichtdicke, und auch der Reibungswiderstand nimmt zu. Es wird daher auch versucht, bei der Profilgestaltung Lösungen mit möglichst großem laminaren Schichtanteil (sogenannte Laminarprofile) zu erreichen. Dabei wird die Transition von laminar auf turbulent möglichst weit stromabwärts verschoben.

Die Vorgänge in der Strömung beim Transitionsvorgang können folgendermaßen beschrieben werden: Ab einer gewissen Lauflänge wird die laminare Strömung von zweidimensionalen, instabilen Wellen (Tollmien - Schlichting - Wellen) überlagert. Der sogenannte Indifferenzpunkt Re_{ind} kennzeichnet die Stelle, ab welcher diese erstmalig auftreten können. Weiter stromabwärts kommt es zur Überlagerung von dreidimensionalen Störungen, die charakteristische Wirbelstrukturen bedingen (Λ - Strukturen, bzw. -wirbel, vergleiche [12]). Nach einem Bereich des Wirbelzerfalls entstehen auf Stellen der Platte plötzlich kleine, turbulente Gebiete (turbulent spots), welche in weiterer Folge stromabwärts wandern, wobei sie sich dabei keilförmig erweitern, vergleiche Abb. 1.2. Solche Turbulenzflecken erscheinen an verschiedenen, unregelmäßig verteilten Stellen der Platte und auch die zeitliche Folge ihres Auftretens ist rein zufällig. Im Inneren dieser Gebiete ist die Strömung turbulent, in den Randgebieten findet ein dauernder Wechsel zwischen laminarer und turbulenter Strömung

statt. Die Entstehung des Turbulenzfleckens beruht, wie rechnerisch belegt wird, zunächst auf einer zweidimensionalen Störung. Diese wird dann durch die laminare Strömung angefacht.

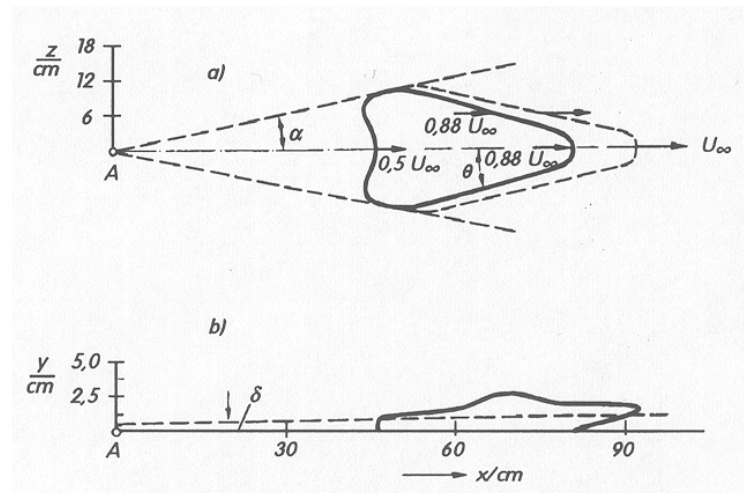


Abbildung 1.2: Turbulenzfleck, Entwicklung der dreidimensionalen Störung (aus [11])

Die Turbulenzballen führen in weiterer Folge zu ausgesprochen dreidimensionalen Störungen und durch Erweiterung dieser kommt es zum Übergang zur vollturbulenten Grenzschicht. Der Transitionsprozess ist dann bei $Re_x = Re_{xkrit}$ abgeschlossen. Experimente weisen auf Abmessungen des gesamten Transitionsbereiches auf der Platte hin, die in der Größenordnung des gesamten laminaren Anlaufstückes liegen. Da die Störungen stromabgeschwemmt werden und sich dabei weiterentwickeln, wird die Strömung auch als eine konvektiv instabile bezeichnet (im Gegensatz zu einer absolut instabilen, wo die Instabilität im Strömungsfeld schlagartig einsetzt und einen absolut instabilen Strömungsbereich bedingt).

Bei der rechnerischen Behandlung der Turbulenzentstehung kann man so vorgehen, daß man in die Navier - Stokes'schen Gleichungen Störungsbewegungen einführt, einfacherweise harmonische Schwingungen (es genügt hier eine zweidimensionale Betrachtung, da, wie auch rechnerisch nachgewiesen wird, zweidimensionale Störungen bereits bei kleineren Reynoldszahlen instabil werden als dreidimensionale). Die Berechnung zeigt, daß es neben der Reynoldszahl auch von der Wellenlänge der Störung abhängt, ob die Strömung stabil bleibt oder instabil wird. Es gibt jedoch eine untere Reynoldszahl, für die die Strömung für alle Störwellenlängen stabil bleibt. Diese wird Indifferenzpunkt Re_{ind} genannt. Der Wert von Re_{ind} beträgt 520. Beim Indifferenzpunkt wird bei entsprechend passenden Störwellenlängen die Strömung instabil. Die Instabilitäten werden durch die Strömung in deren Verlauf angefacht. Dadurch erst kommt es zur Entstehung der eigentlichen Turbulenzen, das heißt des Umschlages von laminarer auf turbulente Strömung, vergleiche Abb. 1.1. Beobachtbar ist dieser Umschlag erst bei größeren Reynoldszahlen als Re_{ind} .

Wichtige Einflüsse auf die Stabilität und damit auf die Lage von Re_{xkrit} sind unter anderem der Druckgradient, die Rauigkeit und der Wärmeübergang. Zur Berechnung von

Wärmeübergangseffekten ist auch die Energiegleichung vonnöten. Letztere wird hier weiters nicht in Anspruch genommen, weshalb bezüglich ihrer Formulierung z. Bsp. auf [12] verwiesen sei.

- Druckabfall wirkt stabilisierend, Druckanstieg stark destabilisierend.
- Der Rauigkeitseinfluß auf den laminar - turbulent - Umschlag ist einer theoretischen Behandlung kaum zugänglich. Man ist daher auf experimentelle Daten angewiesen. Allgemein gilt, daß bei rauherer Wand der Umschlag bereits bei kleineren Reynoldszahlen erfolgt. Bei Versuchen werden Rauigkeiten oftmals durch sogenannte Stolperdrähte realisiert. Die Experimente zeigen zwei charakteristische Größen des Drahtdurchmessers k in Hinblick auf die Turbulenzentstehung. Liegt einerseits k unter einem gewissen Wert, so wird die Entwicklung der Turbulenz von den Stolperdrähten gar nicht beeinflusst. Überschreitet andererseits k eine gewisse Größe, so findet der Umschlag bereits unmittelbar am Rauigkeitselement statt. Die beiden charakteristischen Durchmesser hängen von der auf die Wand wirkenden Schubspannung τ_w , der Dichte ρ und der Zähigkeit ν ab. Mit Hilfe der drei letztgenannten Größen und k gelingt es, eine dimensionslose Beziehung anzugeben, mit welcher die beiden charakteristischen Durchmesser je einer Kennzahl zugeführt werden. Für Näheres siehe [11].
- Wärmeübertragung vom strömenden Medium auf die Platte erhöht die Stabilitätsgrenze, Wärmeübertragung von der Platte in die Strömung erniedrigt sie.

Die Vorgänge in der Strömung des turbulenten Abschnittes der Plattengrenzschicht sind auch bei allen anderen turbulenten Strömungen anzutreffen. Es sind der Hauptbewegung regellose Schwankungsbewegungen und somit auch eine Querbewegung überlagert. Die Fluidpartikel behalten bei der Querbewegung den der Hauptbewegung zugehörigen Impuls im wesentlichen bei. Es kommt zu einer starken Verwirbelung und Durchmischung der Fluidpartikel (dies zeigt bereits der Farbfadenversuch von Reynolds). Die Folge davon ist ein gegenüber der laminaren Strömung stark abweichendes Geschwindigkeitsprofil. Im Strömungsbild werden Wirbel geortet, welche mit der Hauptströmung mitschwimmen und weiter stromabwärts zerfallen. Nebenbei werden stets auch neue gebildet. Diese Wirbel können z. Bsp. durch Mitbewegen von Bildaufzeichnungsgeräten festgestellt werden, vergleiche [11]. Die großen Turbulenzballen tragen den Hauptteil der kinetischen Energie der Schwankungsbewegung. Sie beziehen Energie von der mittleren Bewegung und geben diese durch einen Zerfallsprozeß auf kleinere Turbulenzballen weiter. Auch diese zerfallen unter Energieweitergabe. Bei Auflösung der kleinsten Turbulenzballen erfolgt schließlich die Dissipation, das heißt die Umwandlung von kinetischer in innere Energie.

Bezüglich der Plattengrenzschicht kann durch Messungen auf folgendes geschlossen werden: Es ist der wandnahe turbulente Strömungsbereich gut von dem übrigen, nicht zur Grenzschicht gehörigem drehungsfreien Strömungsgebiet abgegrenzt. Der Abstand der fast zusammenhängenden Trennfläche von der Platte schwankt jedoch stark, siehe Abb. 1.3.

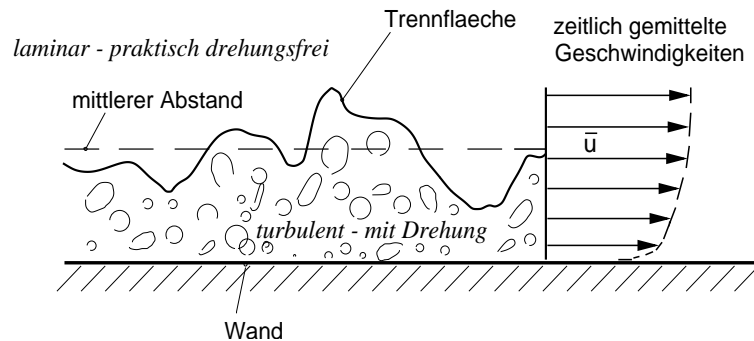


Abbildung 1.3: Schnittbild der turbulenten Grenzschicht (schematisch)

Es wird angenommen, daß sich die Trennfläche mit der Strömung mitbewegt. An einer Stelle des Grenzschichtendes wechseln sich laminare und turbulente Strömung in zeitlicher Reihenfolge ab (Intermittenz). Da die örtliche Grenze zwischen turbulenter Grenzschicht und drehungsfreiem Strömungsgebiet dauernd zeitlich schwankt, ist auch die Festlegung der Grenzschichtdicke δ nicht einwandfrei möglich. δ wird jedoch in der Literatur in Diagrammen und Formeln immer wieder verwendet, eine genaue Definition der Grenzschichtdicke wird dabei jedoch vermieden.

Da die Zusammenhänge zwischen Grenzschicht und Strömungsablösung für praktische Anwendungen eine bedeutende Rolle spielen, und auch für über diese Aufgabe hinausgehende Strömungsberechnungen wichtig sind, sollen sie nachfolgend kurz erläutert werden. Unter Strömungsablösung versteht man zunächst die Tatsache, daß die um die Grenzschicht erweiterte Körperkontur nicht von der drehungsfreien Außenströmung völlig umschlossen wird. Zwischen letzterer und der Körperkontur bilden sich sogenannte Ablöseblasen oder ganze -bereiche. Innerhalb dieser kommt es zu Rückströmungen und großflächigen Wirbelbildungen. Ablöseeffekte sind nicht an eine bestimmte Grenzschichtform gebunden, sie sind sowohl bei laminarer als auch bei turbulenter Grenzschicht möglich. Die Existenz von Ablösegebieten hat nun erhebliche Folgen, da bei den an sie angrenzenden Körperoberflächen nicht mehr die Drücke wie bei ablösungsfreier Strömung erreicht werden. Damit wird durch die Ablösung in der Regel die Widerstandskraft erheblich erhöht und die Auftriebskraft stark vermindert. Nun widersteht die turbulente Grenzschicht einem größeren Druckanstieg als die laminare. Der Ablösebeginn ist z. Bsp. bei Kugeln oder Zylindern bei turbulenter Grenzschicht gegenüber laminarer nach hinten verschoben (vergleiche dazu auch [12] oder [13]), wodurch das ganze Ablösegebiet, und damit auch die Widerstandskraft stark verkleinert sind. Einerseits bedingen turbulente Grenzschichten höhere Reibungsbeiwerte als laminare. Andererseits sind sie äußerst wichtig, um Ablöseerscheinungen hintanzuhalten, und somit größere Auftriebs- und kleinere Widerstandskräfte zu erzielen. Ablöseerscheinungen können nicht mit der für Grenzschichten hergeleiteten Näherungstheorie berechnet werden. In der Grenzschichttheorie ist z. Bsp. eine kleine Grenzschichtdicke eine wichtige Voraussetzung, in Ablösegebieten kann die Grenzschichtdicke erheblich anwachsen (beziehungsweise ist eine scharfe Trennung zwischen Grenzschicht und Ablösebereich nach dem Schema von Abb. 1.3 nicht möglich).

Für die Berechnung von turbulenten Strömungen werden oft strömungscharakterisierende Größen wie Geschwindigkeiten und Druck in mittlere und Schwankungsgrößen aufgespalten. Letztere sind dabei eben durch die Regellosigkeit der Turbulenz bedingt. Mit Hilfe der Schwankungsgrößen sind weitergehende Aussagen über das turbulente Strömungsbild möglich. So ist es durch eine Autokorrelation möglich festzustellen, daß sich bei der Platte die großen Turbulenzballen mit einer Geschwindigkeit von $0.8 \times U$ mit der Strömung mitbewegen und dabei allmählich zerfallen. Auch mittels Frequenzanalyse wird an das Turbulenzproblem herangegangen, und man kann kontinuierliche Frequenzspektren angeben (Frequenzspektren und Autokorrelationsfunktion können mathematisch ineinander übergeführt werden). Es gibt daher in einem mehrere Größenordnungen umfassenden Frequenzbereich zu jeder Frequenz zuordenbare Turbulenzballen. Dabei zeigt sich im Falle der ebenen Platte, daß die größten Geschwindigkeitsschwankungen durch die kleinsten Frequenzen verursacht werden, vergleiche [11].

Kapitel 2

Strömungsmechanische Grundlagen

Den Grundgleichungen der Strömungsmechanik liegen die Grundgesetze der Physik (Massenerhaltung, Impulserhaltung ...) zugrunde. Anschauliche Anwendungen auf Körper und Volumina mit nicht verschwindend kleinen Abmessungen liefern die Grundgleichungen in integraler Form. Von diesen ausgehend können dann die Grundgleichungen in differentieller Form rein mathematisch hergeleitet werden. Da sich diese Arbeit auf ebene Probleme beschränkt, werden, der Übersichtlichkeit halber, die nachfolgend angeführten Grundgleichungen in differentieller Form in den meisten Fällen auch nur in zwei Koordinaten angegeben.

Man erhält aus dem Massenerhaltungssatz die Massenbilanz zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \quad (2.1)$$

Unter Verwendung der Vektorgrößen \vec{v} , \vec{K} und \vec{P} mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \vec{K} = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix}, \vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$$

lautet die aus der Impulsbilanz resultierende Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{K} + \vec{P}. \quad (2.2)$$

\vec{K} ist die Massenkraft je Volumseinheit und \vec{P} die Oberflächenkraft je Volumseinheit. $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ ist die substantielle Beschleunigung, welche aus dem lokalen und dem konvektiven Anteil besteht:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.3)$$

Die Oberflächenkräfte sind für den Druck maßgeblich, weshalb auf sie näher eingegangen wird. Für \vec{P} gilt:

$$\vec{P} = \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Diese Formel wird durch Betrachtung des allgemeinen Spannungszustandes hergeleitet. $\vec{\sigma}_x$ ist der Spannungsvektor der Fläche mit dem Normalenvektor \vec{n}_x , $\vec{\sigma}_y$ der Spannungsvektor

mit dem Normalenvektor \vec{n}_y .

Durch Zerlegung von $\vec{\sigma}_x$ und $\vec{\sigma}_y$ in ihre Komponenten und Zusammenfassung dieser erhält man den Spannungstensor:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Das negative arithmetische Mittel der Hauptnormalspannungen (1. Invariante) wird als Druck bezeichnet:

$$p = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.5)$$

beziehungsweise bei dreidimensionaler Betrachtungsweise:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (2.6)$$

Sinnvoll ist die Bezeichnung von p als Druck aus folgendem Grund: bei einem reibungslosen Fluid sind die Tangentialspannungen gleich null, und die Normalspannungen unter sich gleich. σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} stimmen auch mit dem Druck überein. Damit stellt p nach Glg. 2.6 tatsächlich den im Fluid vorherrschenden Druck dar.

Mittels Glg. 2.5 erhält man aus Glg. 2.2 die Bewegungsgleichungen zu

$$\rho \frac{Du}{Dt} = K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.7)$$

und

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = K_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2.8)$$

mit $\tau_{yx} = \sigma_{yx}$ und $\tau_{xy} = \sigma_{xy}$

Die Größen τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{yx} , und τ_{yy} , können ebenfalls zu einem Tensor, dem viskosen Spannungstensor zusammengefaßt werden:

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix}$$

Die Kräfte (also der Spannungszustand) in den Fluiden hängen von den Formänderungsgeschwindigkeiten ab. Auch letztere besitzen Tensoreigenschaften.

Mittels der Formänderungsgeschwindigkeiten und dem Ansatz, daß die Komponenten des viskosen Spannungstensors nur abhängig von den Formänderungsgeschwindigkeiten sind und diese Beziehungen nur linear sind, kann man mit Hilfe der Tensorrechnung

$$\tau_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.11)$$

herleiten. Vergleiche dazu [12]. Für $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ folgt aus 2.11 $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, das heißt μ ist die dynamische Zähigkeit. Für λ gilt:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{Stokes'sche Hypothese}) \quad (2.12)$$

Aus den Bewegungsgleichungen können nun mit den Glgn. 2.9 bis 2.11 und der Stokes'schen Hypothese die Navier - Stokes'schen Gleichungen hergeleitet werden. Da sie hier nicht in ihrem vollen Umfang benötigt werden, werden sie auch nicht in allgemeiner Gültigkeit angeschrieben. Für eine vollständige Darstellung siehe [11]. Die Vereinfachung der Navier - Stokes'schen Gleichungen für die inkompressible, ebene Strömung ergibt:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.13)$$

und

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = K_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (2.14)$$

Nun soll noch eine Anwendung der Grundgleichungen auf turbulente Strömungen diskutiert werden. Ein markantes Merkmal letzterer sind die Schwankungsbewegungen, die der mittleren Bewegung überlagert sind. Diese Schwankungsbewegungen bewirken für die mittlere Bewegung eine Erhöhung des Strömungswiderstandes. Für diese Widerstandserhöhung können rein virtuell zusätzliche Spannungen verantwortlich gemacht werden. Sie werden die scheinbaren turbulenten Spannungen genannt. Für die Berechnung dieser ist es zweckmäßig, die Geschwindigkeit in eine mittlere Geschwindigkeit und eine Schwankungsgeschwindigkeit aufzuteilen:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (2.15)$$

Das Überstrich - Symbol ($\bar{\quad}$) soll dabei auf zeitlich gemittelte Größen hinweisen, das Symbol $'$ wird zur Kennzeichnung von Schwankungsgrößen verwendet. Es gilt für \bar{u} , \bar{v} , \bar{p} usw.:

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u(t) dt \quad \dots \quad (2.16)$$

Damit gilt $\bar{u}' = 0$, $\bar{v}' = 0$, Folgende Rechenregeln sind einsichtig:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}} &= \bar{f}; & \overline{\bar{f} + \bar{g}} &= \overline{\bar{f}} + \overline{\bar{g}}; & \overline{\bar{f} \cdot \bar{g}} &= \bar{f} \cdot \bar{g}; \\ \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}; & \overline{\int f ds} &= \int \bar{f} ds. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mittels der Glgn. 2.15 bis 2.17 ist es möglich, die Navier - Stokes'schen Gleichungen so umzuformen, daß auch in ihnen die mittleren Größen von den Schwankungsgrößen getrennt aufscheinen. Diese Rechnung wird Reynoldsmittelung genannt. Dazu werden zunächst die Glgn. 2.13 und 2.14 mit Hilfe der Massenbilanz 2.1 umgeformt, und zwar so, daß jeweils die

2. Strömungsmechanische Grundlagen

rechte Seite durch 2.1 erweitert wird und dann Glieder passend zusammengefaßt werden. Es folgt:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.18)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.19)$$

Werden nun in 2.18 und 2.19 die Glgn. 2.15 eingesetzt, so folgt mit Beachtung von den Glgn. 2.17:

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \quad (2.20)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} \right) \quad (2.21)$$

Diese Gleichungen (2.20 und 2.21) werden Reynoldsgleichungen genannt. Die Ausdrücke $\rho \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x}$, $\rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$... können nun als Komponenten eines Spannungstensors aufgefaßt werden, sodaß man 2.20 und 2.21 folgendermaßen schreiben kann:

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} \quad (2.22)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y} \quad (2.23)$$

wobei

$$\tau'_{xx} = -\rho \overline{u'u'}, \quad \tau'_{xy} = -\rho \overline{u'v'} \quad \dots \quad (2.24)$$

die scheinbaren Spannungen sind. Das heißt, daß die zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten denselben Gleichungen wie für eine laminare Strömung genügen, wenn man zu den Spannungen zufolge der Reibungskräfte der laminaren Strömung die scheinbaren Spannungen der turbulenten Strömung addiert. Es ist also gelungen, die scheinbaren Spannungen σ'_{xx} usw., die auch Reynoldsspannungen genannt werden, auf gemittelte Beziehungen von Schwankungsgrößen zurückzuführen. Daher der Name Reynoldsmittelung.

Ein Maß für die Intensität der turbulenten Schwankungsbewegungen hat man durch Einführung des Turbulenzgrades Tu zur Verfügung. Mittels u' , v' und w' wird er zu

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{U} \quad (2.25)$$

definiert. Für isotrope Turbulenz, $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$, folgt

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U} \quad (2.26)$$

Wegen der Haftbedingung verschwinden an der Wand sämtliche Geschwindigkeiten, und somit auch die turbulenten Schwankungsbewegungen. Letztere sind, wie einsichtig ist, auch in allernächster Wandnähe sehr klein. Somit werden in diesem Bereich die Spannungen zufolge der Schwankungsbewegungen (vgl. Gln. 2.22 und 2.23) vernachlässigbar klein gegenüber jenen, die aus der laminaren Zähigkeit resultieren. Es verhält sich dadurch die Strömung in allernächster Wandnähe wie eine Laminarströmung. In Bezugnahme auf Grenzschichten wird dieser Strömungsbereich als die laminare Unterschicht bezeichnet.

Bekanntermaßen werden zur Lösung von Strömungsproblemen auch gerne dimensionsanalytische Betrachtungen angestellt. Näher auf sie eingegangen wird hier erst bei gegebenem Anlaß.

Kapitel 3

Experimentelle Befunde zur turbulenten Plattengrenzschicht

Die Messung der zeitlichen Abhängigkeit der Schwankungsgrößen ist durch Hitzdrahtanemometer möglich. Durch die Meßergebnisse gewinnt man eine tiefere Einsicht der Vorgänge bei turbulenten Strömungen. Klebanoff hat, vergleiche [7], solche Messungen bei der längsangeströmten ebenen Platte durchgeführt. Ergebnisse davon sind in Bild 3.1 zusammengefaßt. Die Versuche wurden unter den Bedingungen $Re_x = 4.2 \times 10^6$ und einem Turbulenzgrad der Außenströmung $Tu = 0.02\%$ durchgeführt.

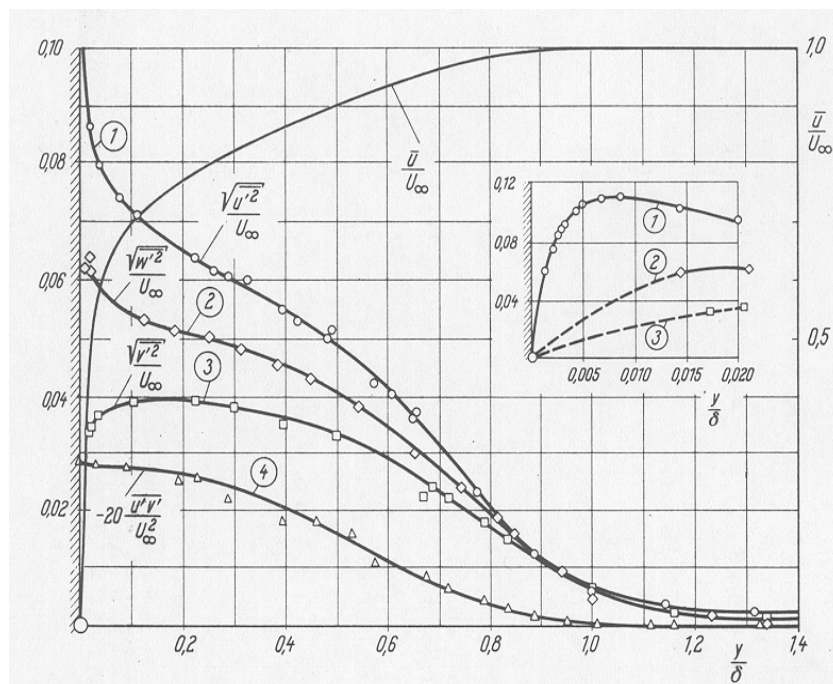


Abbildung 3.1: Turbulente Schwankungsgeschwindigkeiten in der Grenzschicht (aus [11])

Ein paar Bemerkungen zu Bild 3.1: Es symbolisiert darin U_∞ die Anströmgeschwindigkeit U . \bar{u} sind Geschwindigkeiten in Plattenlängsrichtung, \bar{v} jene normal zur Platte und \bar{w} solche in Querrichtung parallel zur Wand. Der Wandabstand y wird auf δ , die Grenzschichtdicke, bezogen. Die Problematik bei der Festlegung der Grenzschichtdicke wurde bereits anhand von Abb. 1.3 erwähnt. Sie wird häufig analog wie bei laminaren Grenzschichten festgelegt. Das heißt so, daß am Grenzschichttrand das Verhältnis $\frac{\bar{u}}{U}$ einen bestimmten Wert, z. Bsp. 0.99, annimmt. Im konkreten Fall, Abb. 3.1, aber auch bezüglich Abb. 3.2, 3.4 und 3.5 konnten in der Literatur keine genauen Spezifikationen betreffend der Grenzschichtdicke gefunden werden. Die Kurve $\frac{\bar{u}}{U_\infty}$ stellt das Geschwindigkeitsprofil dar. Die Schwankungen in Strömungsrichtung ($\sqrt{\overline{u'^2}}$) sind am stärksten, und haben an der Wand ein ausgeprägtes Maximum. Auch die Schwankungen normal auf die Platte und in Querrichtung sind groß. Durch Kurve ④ ($-20\frac{\overline{u'v'}}{U_\infty^2}$) kann man für $y/\delta \rightarrow 0$ auf die Schubspannung an der Wand τ_w schließen. Es sind Größen der Gestalt $\overline{\rho u'v'}$ in ihren Auswirkungen Schubspannungsgrößen, siehe Glg. 2.15. Zuzufolge der Abb. 3.1 erhält man bei $y/\delta \rightarrow 0$ für $\left(\frac{\overline{u'v'}}{U_\infty^2}\right)$ einen Wert von ≈ 0.0014 , der also $\frac{\tau_w}{U_\infty^2}$ entspricht. Dieser Wert wird durch später gezeigte Versuchsergebnisse gut bestätigt. Auch sieht man, daß die Schubspannung in Wandnähe nahezu konstant ist, ab $y/\delta > 0.2$ jedoch kontinuierlich abnimmt.

Daran, daß $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, und $\overline{w'^2}$ doch stark voneinander abweichen, erkennt man, daß die Annahme isotroper Turbulenz, die vielen Turbulenzmodellen zugrunde liegt, im Falle der längsangeströmten Platte problematisch ist.

Bezüglich des äußeren Teiles der Grenzschicht schließt man aus Messungen, daß hier die Strömung stark intermittierenden Charakter hat, d. h. laminare und turbulente Strömung sich einander in zeitlicher Reihenfolge abwechseln. Es können aber, wie bereits ausgeführt wurde (vergleiche Abb. 1.3), die beiden Strömungsformen gut voneinander abgegrenzt werden. Bei Einführung eines Intermittenzfaktors γ mit $\gamma = 1$ für dauernd turbulente Strömung und $\gamma = 0$ für dauernd laminare, resultiert eine Abhängigkeit wie nach Abb. 3.2.

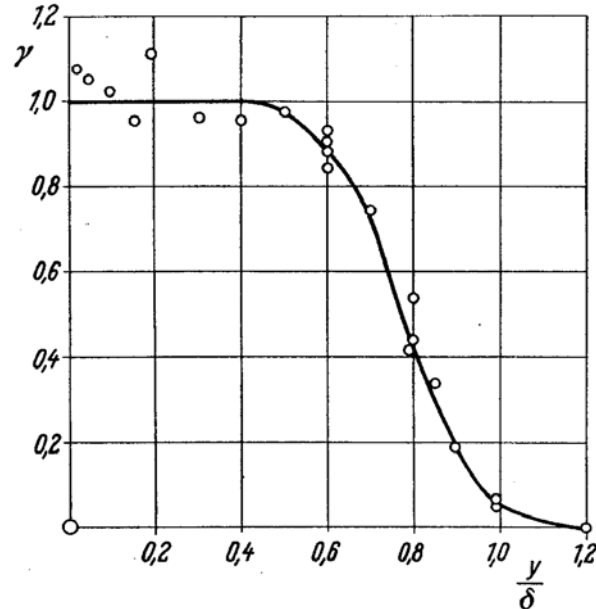


Abbildung 3.2: Verteilung des Intermittenzfaktors (aus [11])

Nach Abb. 3.2 ist bereits ab der Hälfte der Grenzschichtdicke zeitweise Laminarströmung zu beobachten. Diese experimentellen Ergebnisse lassen sich durch eine Kurve, die durch

$$\gamma(\delta(x), y) = F_{Klebanoff}(\delta, y) = \left(1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^6 \right)^{-1} \quad (3.1)$$

gegeben ist, annähern. Glg. 3.1 wird Klebanoff'sche Intermittenzfunktion genannt. Die bezüglich des Zeitablaufes mittlere Lage δ_R des Grenzschichttrandes (Trennfläche) kann mit

$$\delta_R(x) = \int_0^{\infty} \gamma(\delta(x), y) dy \quad (3.2)$$

ermittelt werden. Für δ_R und δ folgt dann der Zusammenhang $\delta_R = 0.78\delta$. Auch beim turbulenten Freistrah und beim Nachlauf zeigen sich entsprechende Intermittenzverteilungen.

In Bild 3.3 sind Ergebnisse von experimentellen Bestimmungen des Widerstandsbeiwertes c_w dargestellt. Definiert ist er durch

$$c_w = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U^2 b l}, \quad (3.3)$$

wobei W die Widerstandskraft, b die Breite und l die Länge der Platte ist. Es wird zur Bestimmung von c_w die Widerstandskraft der gesamten Platte herangezogen, wodurch auch der Beitrag des laminaren Anlaufstückes inkludiert ist. Von c_w zu unterscheiden ist der

3. Experimentelle Befunde zur turbulenten Plattengrenzschicht

Reibungsbeiwert c_f (örtlicher Widerstandsbeiwert) dessen Festlegung

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2}U^2} \quad (3.4)$$

lautet. Ist τ_w über die Plattenbreite b konstant, gilt $W = b \int_0^l \tau_w dx$, wodurch mit 3.3

$$c_w = \frac{1}{l} \int_0^l c_f(x) dx \quad (3.5)$$

folgt. Für die Gegebenheiten bei der ebenen Platte wird später (siehe Glg. 4.83) aufgezeigt werden, daß zwischen c_w und c_f die Näherungsbeziehung

$$\sqrt{\frac{2}{c_w}} \approx \sqrt{\frac{2}{c_f}} - \frac{1}{\kappa} \quad (3.6)$$

gilt. Dabei ist κ die sogenannte Kármán - Konstante, siehe Glg. 4.20. Durch Umformung von 3.6 folgt

$$c_f \approx \frac{c_w}{\left(1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{c_w}{2}}\right)^2}. \quad (3.7)$$

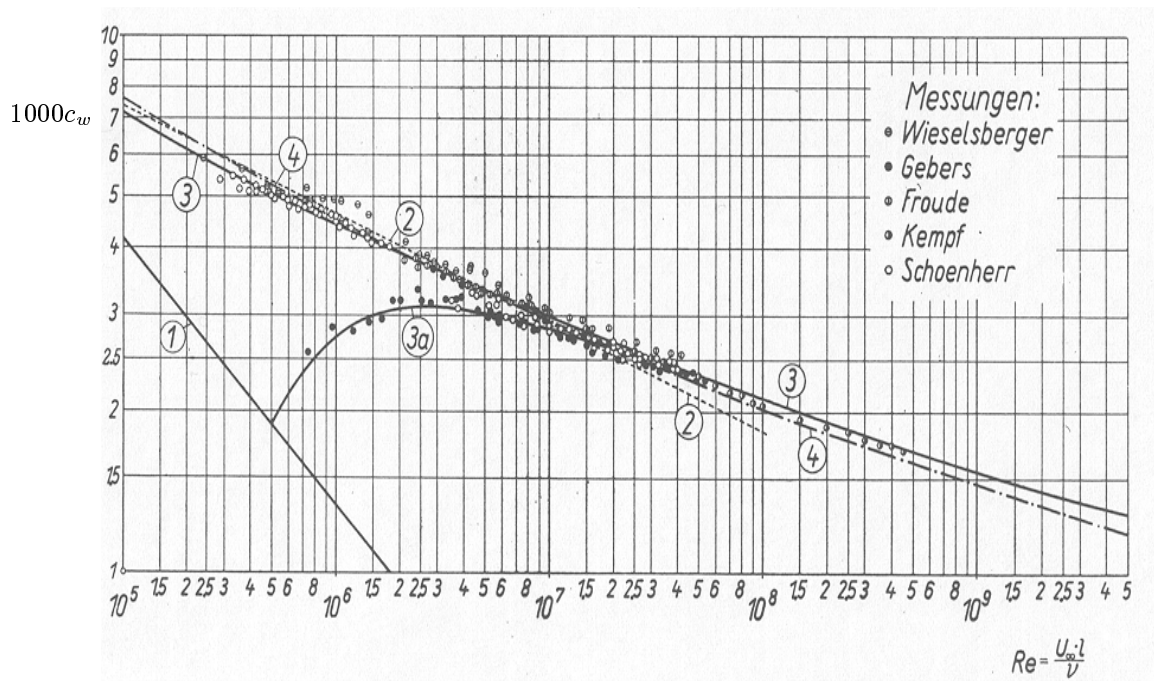


Abbildung 3.3: Widerstandsgesetz der längsangeströmten ebenen Platte (aus [11])

Die in Abb. 3.3 eingezeichneten Kurven ergeben sich durch Berechnung des Widerstandsbeiwertes mit verschiedenen Formeln. So gilt zum Beispiel für ②

$$c_w = 0.074(Re_l)^{-1/5}. \quad (3.8)$$

Re_l ist die mit der Plattenlänge gebildete Reynoldszahl. Kurve ③ errechnet sich durch

$$c_w = \frac{0.455}{(\log Re_l)^{2.58}}. \quad (3.9)$$

Aus Glg. 3.9 kann man bei Berücksichtigung eines laminaren Anlaufstückes eine Formel zur Berechnung von ③a herleiten. Diese Beziehung wird dann Prandtl - Schlichting'sches Widerstandsgesetz genannt und lautet:

$$c_w = \frac{0.455}{(\log Re_l)^{2.58}} - \frac{A}{Re_l}. \quad (3.10)$$

Die Konstante A hängt von der Lage des Umschlagpunktes ab. Für die nach Glg. 3.10 in Abb. 3.3 eingetragene Kurve gilt $A = 1700$, was einem Umschlagpunkt von Re_{xkrit} von 5×10^5 entspricht. Zur Begründung dieses Zusammenhanges siehe [11]. Auch Glgn. 3.8, 3.9 und 3.10 sowie Abb. 3.3 sind dieser Quelle entnommen.

Durch Differentiation von Glg. 3.5 kann $c_f = c_w + l \frac{dc_w}{dx}$ (siehe auch Glg. 4.79) hergeleitet werden. Mit dieser Beziehung ist es möglich – als Alternative zu Glg. 3.6 – c_f - Werte mit Hilfe von Abb. 3.3 zu gewinnen. Dazu zur Erinnerung wie man $\frac{df}{dx}$ bei Darstellung der Funktion f in einem doppeltlogarithmischen Diagramm ermitteln kann: Wird in einem solchen Diagramm an die Kurve $f(x)$ eine Tangente gelegt und bezeichnet Δh eine Horizontalprojektion eines Tangentenabschnittes, Δv die dazugehörige Vertikalprojektion, dann gilt für die Ableitung $f'(x) = \frac{df}{dx}$: $f'(x) = \frac{f(x)}{x} \frac{\Delta v}{\Delta h}$. Man achte dabei darauf, daß unverzerrte Diagramme verwendet werden, das heißt solche wo die Abstände von einer Zehnerpotenz zur nächsten auf Abszisse und Ordinate gleich groß sind. Bestimmt man mit dieser Vorgangsweise c_f - Werte mit Hilfe von Abb. 3.3 für die turbulente Plattenströmung, wird offenkundig, daß im interessierenden Bereich ($10^5 < Re_x < 10^7$) der Unterschied zu mit Glg. 3.5 bestimmten Reynoldszahlen nicht einmal zwei Prozent beträgt. Für $Re = 4.2 \times 10^6$ entnimmt man aus Abb. 3.3 $c_w \approx 0.033$. Mit Glg. 3.6 erhält man $c_f \approx 0.002732$, somit $\frac{c_f}{2} = 0.001366$. Zuzugle Glg. 3.4 gilt $\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$. Im Vergleich dazu wurde durch Abb. 3.1 $\frac{\tau_w}{\rho U^2}$ mit 0.0014 ermittelt.

Abb. 3.4 zeigt die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsdefektes $(U - \bar{u})$ vom Wandabstand y . Dabei wird y mit δ und weiters $(U - \bar{u})$ durch u_τ dimensionslos gemacht. u_τ ist eine mit Hilfe von τ_w und der Dichte ρ ermittelte Bezugsgröße. Die Definition wird später noch vorgestellt (siehe Glg. 4.12). Durch den besonders gewählten Eintragungsmodus der Werte auf der Ordinate ist diese Darstellung praktisch die eines Geschwindigkeitsprofils.

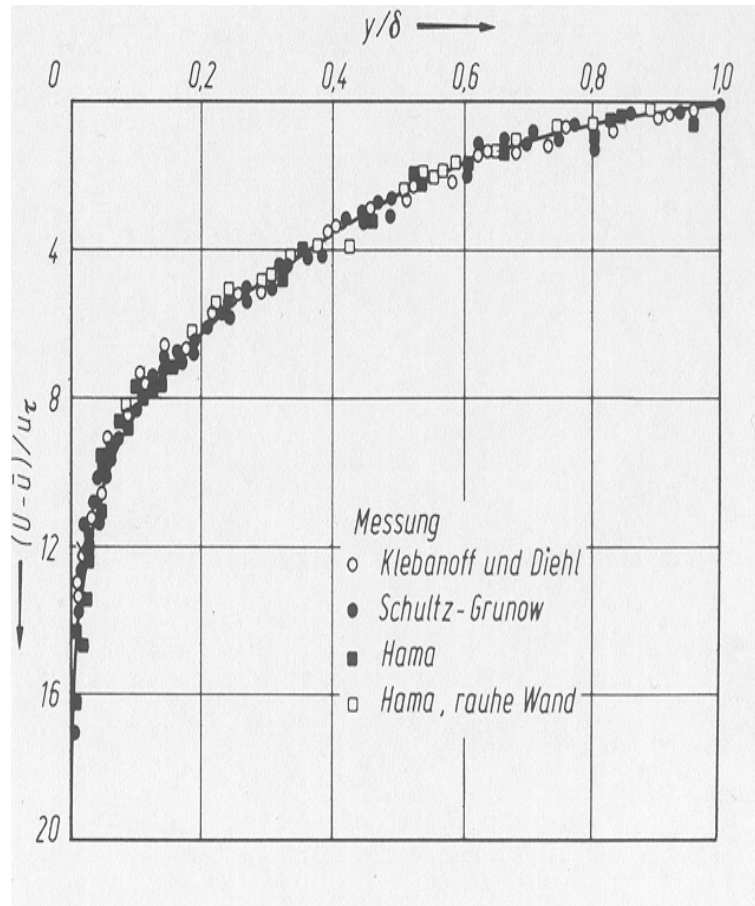


Abbildung 3.4: Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht (aus [13])

Auch in Abb. 3.5 (Seite 19) wird der Geschwindigkeitsdefekt dargestellt, v_* ist wieder die Bezugsgröße, $v_* \hat{=} u_\tau$.

3. Experimentelle Befunde zur turbulenten Plattengrenzschicht

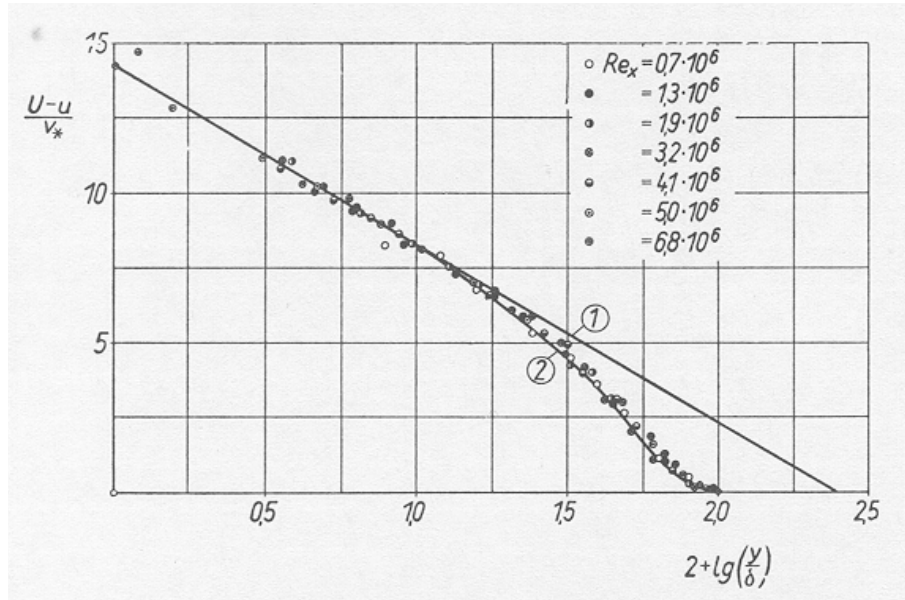


Abbildung 3.5: logarithmische Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht (aus [11])

Es wird in Abb. 3.5 eine logarithmisch skalierte Abszisse verwendet. Dadurch erkennt man, daß sich im wandnahen Bereich der Grenzschicht der Zusammenhang zwischen $\frac{U-\bar{u}}{u_\tau}$ und $\lg\left(\frac{y}{\delta}\right)$ als linear herausstellt. Die entsprechenden experimentellen Daten liegen in guter Nähe um eine Gerade. Anzumerken ist, daß die laminare Unterschicht, also der Strömungsbereich in allernächster Wandnähe, von den Messungen nicht erfaßt wurde. In dem dem freien Strömungsfeld benachbarten Grenzschichtteil weichen die Versuchsergebnisse von diesem linearen Zusammenhang ab. Diese Abweichungen sind typisch für alle turbulenten Grenzschichten.

Kapitel 4

Grenzschichtbeschreibende Größen

4.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel werden nahezu ausschließlich turbulente Grenzschichten behandelt. Nur bezüglich der Grenzschichtgleichungen, Abschnitt 4.2, und in Abschnitt 4.4.5 wird kurz auf die laminare Grenzschicht eingegangen. Die Gleichungen laminarer Grenzschichten dienen auch zur Berechnung der laminaren Unterschicht von turbulenten Grenzschichten. So wie in der Literatur üblich, werden auch hier die Berechnungsansätze allgemein, das heißt für alle turbulenten Grenzschichten gültig, gehalten. Die Beziehungen für die Grenzschicht- und Verdrängungsdicke jedoch werden in dieser Arbeit auf die Verhältnisse in der ebenen inkompressiblen Plattengrenzschicht spezifiziert.

4.2 Grenzschichtgleichungen

Zur Berechnung von Grenzschichtdicke, Verdrängungsdicke, Reibungsbeiwert usw. müssen die die Grenzschicht beschreibenden Gleichungen bekannt sein. Um auf solche zu kommen, werden die Massenbilanz und die Navier - Stokes'schen Gleichungen auf die Verhältnisse in der Grenzschicht spezialisiert. Dazu werden die Terme, welche für das Grenzschichtproblem vernachlässigbar sind, aus den Gleichungen herausgenommen.

Im laminaren Fall wird von den Gln. 2.13 und 2.14 ausgegangen. Sie müssen nach [12] zunächst einer Grenzschichttransformation unterworfen werden, um vernachlässigbare Terme auffinden zu können. Nach Streichung dieser erhält man nach Rücktransformation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.1)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.2)$$

Die Gln. 4.1 und 4.2 werden Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen genannt. Sie gelten für laminare Grenzschichten von inkompressiblen Strömungen.

Für den turbulenten Fall sind die Glgn. 2.20 und 2.21 die Ausgangsbasis für die Grenzschichtgleichungen. Aus 2.21 folgt mit der Näherung $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$ zunächst

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{\rho v'^2})}{\partial y}. \quad (4.3)$$

Aus Glg. 4.3 folgt durch Integration, daß $\bar{p} + \overline{\rho v'^2}$ über der Grenzschichthöhe konstant ist. An der Wand und am Grenzschichtrand zu der übrigen Strömung verschwindet die Schwankungsbewegung, daher gilt

$$\bar{p} + \overline{\rho v'^2} = p_W = p_e, \quad (4.4)$$

wobei p_W der Wanddruck und p_e der Druck am Grenzschichtrand ist.

Mit den Glgn. 4.4 und 2.20 kann man nun unter der Annahme $\overline{u'^2} = \overline{v'^2}$ die Grenzschichtgleichungen herleiten. Es resultiert

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} \right] = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_L + \tau_T). \quad (4.5)$$

Zufolge der Massenbilanz gilt

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (4.6)$$

4.3 Geschwindigkeitsprofil

Wie bereits angedeutet wurde, kann die Grenzschicht an einer glatten Wand in charakteristische Bereiche aufgeteilt werden. Unmittelbar an die Wand schließt die dünne laminare (viskose) Unterschicht an. In dieser sind die Einflüsse der turbulenten Schwankungsbewegungen vernachlässigbar, wodurch diese Schicht bei der Berechnung wie eine Laminarströmung behandelt werden kann. Weiter von der Wand entfernt befindet man sich im vollturbulenten Abschnitt der Grenzschicht, Abb. 3.5 zeigt Meßergebnisse von diesem. Die laminare Unterschicht geht nicht abrupt in die vollturbulente Schicht über, zwischen beiden befindet sich ein Übergangsgebiet („buffer layer“). Siehe auch Abb. 4.1 für die Bereichseinteilung von turbulenten Grenzschichten. Mit Hilfe der Grenzschichtgleichungen kann für die laminare Unterschicht die Beziehung $u = f(y)$ hergeleitet werden. Auch für den in Abb. 3.5 linearen Zusammenhang zwischen $\frac{U-\bar{u}}{u_\tau}$ und $\log\left(\frac{y}{\delta}\right)$ des turbulenten Grenzschichtbereiches kann unter vereinfachenden Annahmen eine Beschreibung des Geschwindigkeitsprofils gefunden werden. Diese wird logarithmisches Wandgesetz genannt.

Hingewiesen werden soll noch auf sogenannte indirekte Turbulenzmodelle. Bei diesen wird nur auf rein formalem Weg eine möglichst gute Anpassung des Geschwindigkeitsprofils $u = f(y)$ an experimentelle Daten gesucht.

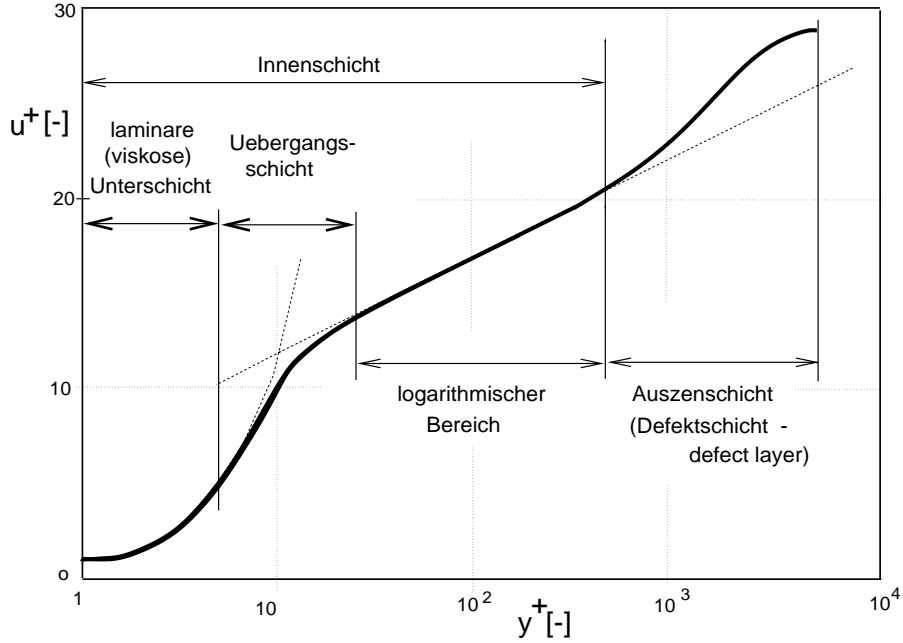


Abbildung 4.1: Bereichseinteilung turbulenter Grenzschichten

Für die stationäre laminare Unterschicht gilt $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und $v = 0$. Damit folgt für den stationären Fall aus 4.1

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.7)$$

Daraus erhält man mit der Annahme $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ und Multiplikation mit ρ

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (4.8)$$

das heißt $\frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0$. Wegen $\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau$ gilt damit

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0. \quad (4.9)$$

Das bedeutet, daß die Schubspannung τ in nächster Wandnähe konstant ist. Sie muß, da sie ja durch die Wand in das Fluid eingebracht wird, gleich der auf die Wand wirkenden Beanspruchung τ_W sein. τ_W wird Wandschubspannung genannt. Es gilt daher

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_W. \quad (4.10)$$

Dadurch folgt mit der Bedingung, daß bei $y = 0$ auch $u = 0$ ist, durch Integration

$$u = \frac{\tau_W}{\mu} y = y \frac{1}{\nu} \frac{\tau_W}{\rho}. \quad (4.11)$$

4. Grenzschichtbeschreibende Größen

Die Kombination $\frac{\tau_W}{\rho}$ hat die Dimension $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. Dividiert man daher Glg. 4.11 durch $\sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}$ erhält man eine dimensionslose Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Wandabstand. Zur Angabe dieser werden die Definitionen

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}, \quad (4.12)$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad (4.13)$$

und

$$y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu} \quad (4.14)$$

herangezogen. Da diese auch zur Darstellung des turbulenten Grenzschichtteiles verwendet werden, wird Glg. 4.13 mit der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit \bar{u} formuliert. Für die laminare Unterschicht gilt $\bar{u} = u$. Mit den Glgn. 4.12, 4.13 und 4.14 folgt aus 4.11

$$u^+ = y^+. \quad (4.15)$$

Diese Beziehung ist neben weiteren in Abb. 4.2 eingetragen.

Die Herleitung des logarithmischen Wandgesetzes gelingt mit Hilfe der Dimensionsanalyse. Die Vorgangsweise dazu soll im folgenden kurz dargestellt werden. Ein erster wichtiger Schritt bei der Dimensionsanalyse ist, daß man sich überlegt, welche Größen das Geschwindigkeitsprofil beeinflussen. Das können hier der Wandabstand y , die Wandschubspannung τ_W , die Dichte ρ , die Zähigkeit, die Grenzschichtdicke usw. sein. Wenn wir nur die ersten drei der genannten Größen als für unser Problem relevant annehmen (auch den Abstand vom Umschlagpunkt klammern wir aus, da wir an einer von der x - Koordinate unabhängigen Lösung interessiert sind) so können wir folgendes ansetzen:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = F(y, \tau_W, \rho) \quad \rightarrow \quad G\left(\frac{d\bar{u}}{dy}, y, \tau_W, \rho\right) = 0 \quad (4.16)$$

Dabei sind F und G beliebige Funktionen. Wie in [16] gezeigt wird, existiert für unser Problem nur ein dimensionsloses Produkt Π der Argumente von G . Dieses kann zu

$$\Pi = \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{y}{u_\tau} \quad (4.17)$$

formuliert werden. Da $G(\Pi) = 0$ gelten muß, muß auch $\Pi = \text{konst.}$, das heißt

$$\frac{d\bar{u}}{dy} \frac{y}{u_\tau} = \text{konst.} = \frac{1}{\kappa} \quad (4.18)$$

gelten. Nachfolgende Integration liefert unter Zuhilfenahme der Definitionen von u^+ und y^+ das logarithmische Wandgesetz.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+). \quad (4.19)$$

4. Grenzschichtbeschreibende Größen

In Diagrammen u^+ über $\ln y^+$ oder $\log y^+$ erscheint die Beziehung nach 4.19 als Gerade. Bei Anpassung dieser an den durch die Versuche sich ergebenden linearen Bereich (vergleiche dazu Abb. 3.5) erhält man für die Konstanten

$$\kappa = 0.41 \dots \text{Karman - Konstante} \quad (4.20)$$

und

$$E = 9.0. \quad (4.21)$$

Warum die Beziehung nach Glg. 4.19 nur für einen Teil der Grenzschicht gilt, liegt daran, daß für andere Grenzschichtbereiche zusätzliche Größen bestimmend werden. Man muß bedenken, daß wir eine Beziehung der physikalischen Größen u und y in der Schicht mit Hilfe von τ_W hergeleitet haben (Glg. 4.18), und eigentlich gar keinen physikalischen Beweis erbracht haben, inwiefern \bar{u} und y tatsächlich von der Schubspannung an der Wand, also τ_W abhängen. Wir wissen daher nicht, für welche Bereiche der Grenzschicht die Wandschubspannung eine wirklich relevante Rolle spielt, und auch nicht, welche Grenzschichtbereiche von anderen Faktoren (z. Bsp. der Grenzschichtdicke) dominant beeinflusst werden. Daher ist es auch nicht verwunderlich, daß auch Größen, die wir nicht in die Dimensionsanalyse aufgenommen haben, für das Geschwindigkeitsprofil von Bedeutung sind, wenn auch ein unmittelbarer physikalischer Zusammenhang zu solchen nicht sofort ersichtlich ist.

In der laminaren Unterschicht ist $\tau = \tau(y) = \text{konst.}$, siehe Glg. 4.9. Für den restlichen, erheblich größeren Teil der Innenschicht (turbulenter Innenschichtteil) gilt, siehe Abb. 3.1, daß τ_T ungefähr konstant und annähernd τ_W ist. Für die Außenschicht, wo auch weitere Größen als jene, die zu Glg. 4.19 geführt haben, für das Geschwindigkeitsprofil relevant werden, ist es nicht überraschend, daß diese Bedingung ($\tau_T \approx \text{konst.}$) nicht mehr gegeben sein muß. Warum trotzdem die Annahme $\tau_T = \tau_W = \text{konst.}$ sehr gerne in theoretische Überlegungen aufgenommen wird und auch für die Innenschicht plausibel gemacht werden kann, kann wie folgt erklärt werden: In der Theorie wird für erste Aussagen über Strömungsbilder unter anderem auch die sogenannte Couette - Strömung behandelt. Diese entsteht in einem Fluid zwischen zwei Platten mit konstantem Abstand, wobei eine Platte parallel über die andere gezogen wird. Im Medium dazwischen ist aus Symmetriegründen die Schubspannung $\tau (= \tau_L + \tau_T)$ konstant, und es gilt $\tau = \tau_W$ sowohl für die Innen- als auch für die Außenschicht. Wegen konstantem τ ist diese Strömungsform mathematisch nicht so aufwendig wie die turbulente Plattengrenzschicht (Es werden auch in [12] Ergebnisse der Couette - Strömung zur Berechnung turbulenter Grenzschichten herangezogen). Der Grund, warum $\tau_W \approx \text{konst.}$ im turbulenten Innenschichtteil nicht nur bei der Couette - Strömung, sondern für Grenzschichten bei beliebigen Strömungsgeometrien vorstellbar ist, ist die Art der Wirbelbildung. Abgesehen von der viskosen Unterschicht sind in der Innenschicht überwiegend kleine Wirbel vorliegend, die großen – und mit ihnen die Energieaufnahme aus der Hauptströmung – sind in der Außenschicht anzutreffen. Da also das äußere Strömungsfeld dem turbulenten Innenschichtteil nahezu keine Energie zusätzlich zuführt, kann dies als Hinweis angesehen werden, daß dort die Schubspannung ungefähr konstant ist. Die Wirbelbildung im turbulenten Innenschichtteil gestaltet sich so, daß der Zustand $\tau \approx \text{konst.}$ erreicht wird. Interessant ist auch, wie bei der Plattengrenzschicht die Energieeinbringung von der Hauptströmung in die Außenschicht eine stetig anwachsende Schubspannung zur Platte hin bedingt, siehe Abb. 3.1.

Die Geschwindigkeit $\bar{u} = u_\tau u^+$ in der Grenzschicht wächst nicht über die Außengeschwindigkeit und somit über die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand U_e an, daher ist auch u^+ nach oben hin begrenzt. Diese Grenze kann bei Kenntnis des Reibungsbeiwertes c_f angegeben werden. Zunächst folgt mit $U_e = U$ und den Gln. 3.4 und 4.12 $c_f = 2 \frac{\tau_w}{\rho} \frac{1}{U_e^2} = 2 \frac{u_\tau^2}{U_e^2}$, also

$$\frac{u_\tau}{U_e} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}. \quad (4.22)$$

Wird desweiteren analog zu Glg. 4.13 ($u^+ = \frac{u}{u_\tau}$) für $\frac{U_e}{u_\tau} = u_{max}^+$ gesetzt, so folgt mit Glg. 4.22

$$u_{max}^+ = \sqrt{\frac{2}{c_f}}. \quad (4.23)$$

Zur Ermittlung von u_{max}^+ kann man für ein gewähltes Re_x der Abb. 3.3 einen dazugehörigen Wert für c_w entnehmen, z. Bsp. für $Re_x = 1 \times 10^7$ folgt $c_w = 0.0029$. Dieser Wert in Glg. 3.7 eingesetzt liefert den Reibungsbeiwert zu $c_f = 0.00243$. Aus Glg. 4.23 folgt damit u_{max}^+ , und es resultiert $u_{max}^+(Re_x = 10^7) = 28.70$. Das gleiche Vorgehen liefert für $Re_x = 2 \times 10^6$ ein u_{max}^+ von 25.2, und für $Re_x = 5 \times 10^7$ (als eine bereits eher große Reynoldszahl) erhält man $u_{max}^+(Re_x = 2 \times 10^7) = 32.4$. Diese Werte sind auch in Diagramm Abb. 4.2 aufgenommen. Die Begrenzung von u^+ nach oben hin ist also von der Reynoldszahl abhängig.

Aus den experimentellen Daten geht hervor, daß das Geschwindigkeitsprofil im äußeren Teil der Grenzschicht von der Beziehung nach Glg. 4.19 nach oben hin abweicht (vergleiche Abb. 3.5). Eine erste Möglichkeit, diese Abweichung mathematisch zu erfassen, besteht darin, das Geschwindigkeitsprofil $\bar{u} = \bar{u}(y)$ in Form eines Potenzgesetzes anzusetzen. Dazu kann eine für Rohre gefundene Beziehung übernommen werden, vergleiche [11]. Zuzufolge dieser ist eine gute Beschreibung des Geschwindigkeitsprofils bei mäßigen Reynoldszahlen durch

$$\frac{\bar{u}}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (4.24)$$

möglich. U_e ist die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand. Glg. 4.24 ist das bekannte 1/7 - Potenzgesetz. Es wird auch von Ansätzen mit anderen Exponenten berichtet (verallgemeinerte Potenzdarstellung).

Eine zweite Vorgangsweise wäre, das Geschwindigkeitsprofil mit Hilfe eines Defektansatzes zu berechnen. Er wird später bei der Berechnung der Grenzschichtdicke kurz behandelt. Die Ermittlung von $\bar{u} = \bar{u}(y)$ ist mathematisch jedoch aufwendig, außerdem ist die Verwendung eines Turbulenzmodells nötig, und die Ergebnisse sind unter anderem auch von diesem abhängig. Es wird daher von diesem Verfahren das Geschwindigkeitsprofil zu ermitteln hier nicht Gebrauch gemacht.

Eine dritte Möglichkeit, das Geschwindigkeitsprofil auch im äußeren Teil der Grenzschicht möglichst gut durch mathematische Beziehungen zu beschreiben, wurde von Coles [4] begründet. Durch das Studium experimenteller Daten kam er zum Schluß, daß eine Beschreibung des Geschwindigkeitsprofils durch die Formel

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) + \frac{\Pi}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (4.25)$$

4. Grenzschichtbeschreibende Größen

möglich ist. Glg. 4.25 gilt für turbulente Grenzschichten allgemein, ihre Anwendbarkeit ist nicht auf die Plattengrenzschicht beschränkt. Der Term $\frac{\Pi}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right)$ dient zur Beschreibung der Außenschicht. Die Funktion $w\left(\frac{y}{\delta}\right)$ wird „law of the wake“, in der deutschsprachigen Literatur „Nachlauffunktion“ genannt (der Name Nachlauf rührt von Geschwindigkeitsprofilen hinter festen Körpern her, die man des öfteren mit in die Betrachtungen einschließt). Sie ist von x unabhängig. Π wird als der Nachlaufparameter bezeichnet, er ist im allgemeinen abhängig von x , oder genauer, vom Druckgefälle. Die Form des Geschwindigkeitsprofils in der Außenschicht ist, da sie durch die Nachlauffunktion bestimmt wird, bei $\Pi = \text{konst.}$ von der Reynoldszahl unabhängig (siehe auch Abb. 3.5).

Aufbauend auf die Arbeiten von Coles werden in [13] zur Berechnung des Geschwindigkeitsprofils die Gln.

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right) + B + \frac{\Pi(x)}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (0 \leq y \leq \delta) \quad (4.26)$$

und

$$w\left(\frac{y}{\delta}\right) = 1 - \cos\left(\pi \frac{y}{\delta}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \quad (4.27)$$

angegeben. Es gilt dabei $B \approx 5.24$. Durch die Glg. 4.27 wird eine gute Annäherung an die von Coles angegebene Nachlauffunktion erreicht. Wie man leicht nachrechnet, kann man $\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right) + B$ in Glg. 4.26 mit guter Näherung durch $\frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$ ersetzen, sodaß aus Glg. 4.26

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} (\ln Ey^+) + \frac{\Pi(x)}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (0 \leq y \leq \delta) \quad (4.28)$$

folgt. Bei der Anwendung von Glg. 4.28 besteht die Schwierigkeit darin, daß y^+ und $\frac{y}{\delta}$ nicht direkt ineinander übergeführt werden können, obwohl beides Parameter für den dimensionslosen Wandabstand sind. Um trotzdem die Beziehung nach 4.28 (in Diagrammen) darzustellen, kann $\frac{y}{\delta}$ mit Hilfe von y^+ und u_{max}^+ ausgedrückt werden. Dazu wird y_{max}^+ als der kleinste Wert von y^+ bezeichnet, bei dem $u^+ = u_{max}^+$ gilt. y_{max}^+ kennzeichnet somit die Grenzschichtdicke, für $y^+ < y_{max}^+$ gilt $u^+ < u_{max}^+$, und für $y^+ \geq y_{max}^+$ gilt $u^+ = u_{max}^+$. Der Zusammenhang zwischen y_{max}^+ und δ resultiert mit Glg. 4.14 zu $y_{max}^+ = \delta \frac{u_\tau}{\nu}$. Für das Verhältnis $\frac{y}{\delta}$ folgt

$$\frac{y}{\delta} = \frac{y^+}{y_{max}^+} . \quad (4.29)$$

Bei bekanntem u_{max}^+ folgt das zugehörige y_{max}^+ aus den Gln. 4.27 und 4.28.

Der Nachlaufparameter Π ist, wie erwähnt, vom Druckgefälle abhängig, für $\frac{d\bar{p}_e}{dx} = 0$ gilt $\Pi \approx 0.5$. Bei starkem Druckanstieg kann Π Werte bis $\Pi \approx 4$ annehmen. Zu seiner Berechnung wird der sogenannte Clauser - Parameter β_1 (Druck - Formparameter) verwendet. Für ihn gilt

$$\beta_1 = \frac{\delta_V}{\tau_W} \frac{d\bar{p}_e}{dx} . \quad (4.30)$$

4. Grenzschichtbeschreibende Größen

δ_V ist die Verdrängungsdicke, siehe dazu Glg. 4.33. Bei Kenntnis von β_1 kann für Gleichgewichtsgrenzschichten (sie bedingen ähnliche Geschwindigkeitsprofile) zur Ermittlung von Π die Beziehung

$$\Pi \approx 0.8(\beta_1 + 0.5)^{0.75} \quad (\beta_1 = \text{konst.}) \quad (4.31)$$

verwendet werden.

Für eine Grenzschicht mit $\frac{d\bar{p}_e}{dx} = 0$, $\Pi = 0.5$ ergibt sich z. Bsp. für $Re_x = 10^7$ zunächst aus Abb. 3.3 $c_w = 0.0029$. Damit folgt mit den Glgn. 3.6 und 4.23 $u_{max}^+ = 28.83$. Die Nachlauf-funktion w ergibt sich nach Formel 4.27 für $y = \delta$ ($y^+ = y_{max}^+$) mit $w = 2$. Mit diesen Werten erhält man mit Beziehung 4.28 $y_{max}^+ = 5559$. Damit kann $u^+ = f(y^+)$ zufolge Glg. 4.28, wenn man darin $\frac{y}{\delta}$ durch $\frac{y^+}{y_{max}^+}$ ersetzt, dargestellt werden. Für das Ergebnis siehe Abb. 4.2. Zum Vergleich ist in dieser Abbildung auch ein dimensionsloses Geschwindigkeitsprofil mit $\Pi = 2$ eingetragen.

Die Reynoldszahl ist zur Erstellung von Abb. 4.2 nur insofern von Bedeutung, als daß durch sie nur die zugehörigen c_f - Werte der Strömung an der ebenen Platte vorliegen. Ansonsten, auch nicht zur Darstellung des Geschwindigkeitsprofils bei Druckzunahme, wird keine Reynoldszahl benötigt.

Anzumerken ist, daß, so wie beim 1/7 - Potenzgesetz, bei Anwendung von Glg. 4.26 und 4.27 der Geschwindigkeitsgradient am Grenzschichtaußenrand nicht verschwindet. Aus diesem Grunde werden Modifikationen von Glg. 4.27, beziehungsweise ein Potenzansatz vorgeschlagen, siehe [6].

Festgehalten werden soll noch, daß es sich bei der Coles'schen Beziehung und auch beim 1/7 - Potenzgesetz um indirekte Turbulenzmodelle handelt.

Ein weiteres indirektes Turbulenzmodell ist die Reichardt'sche Gleichung. Durch sie wird im Übergangsgebiet eine gute Anpassung an experimentelle Daten erreicht. Nach ihr gilt

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left[1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33y^+} \right]. \quad (4.32)$$

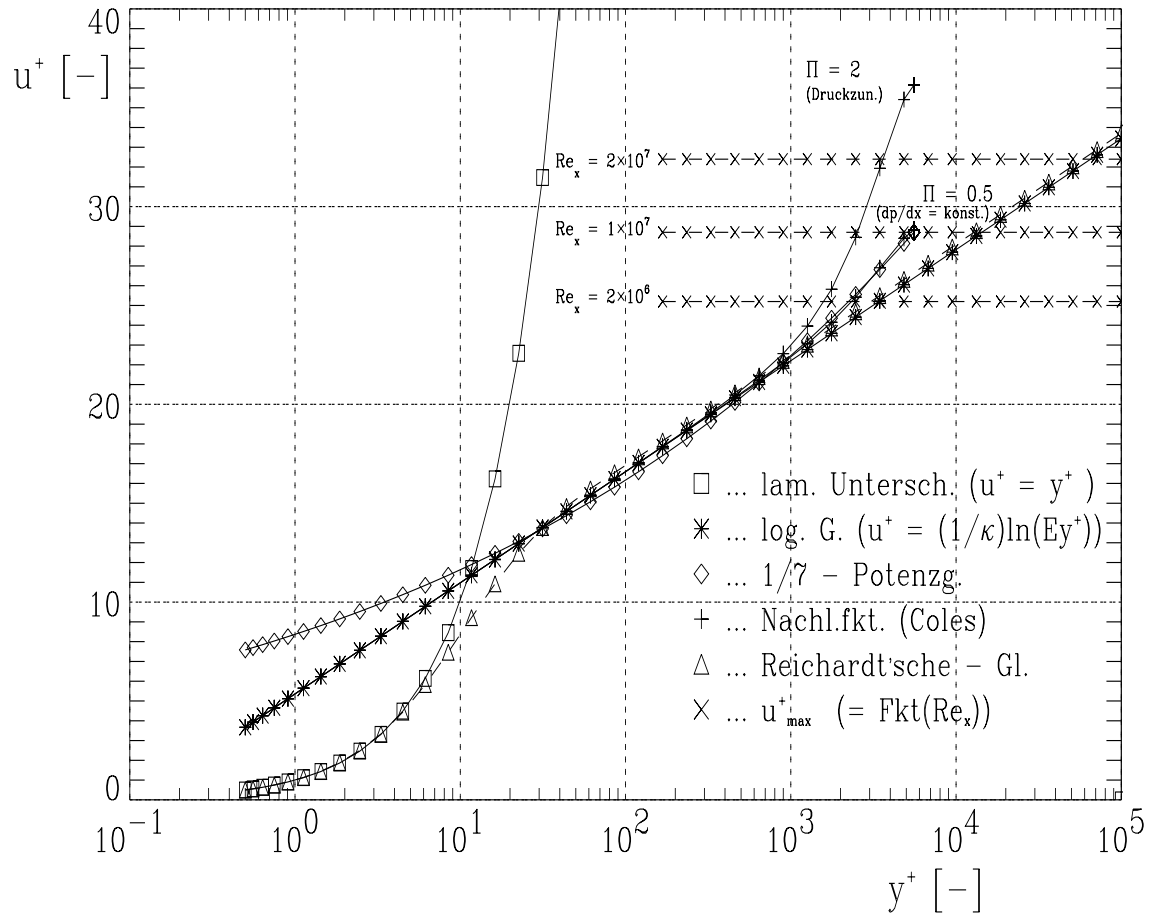


Abbildung 4.2: Dimensionslose Geschwindigkeitsprofile zufolge formaler Beziehungen

Zur Darstellung des $1/7$ -Potenzgesetzes in Abb. 4.2 wurde zur Berechnung mittels Glg. 4.24 $\frac{y}{\delta}$ ebenfalls durch $\frac{y^+}{y_{max}^+}$ mit $y_{max}^+ = 5559$ ersetzt (siehe Glg. 4.29).

4.4 Grenzschichtdicke, Verdrängungsdicke, Impulsverlustdicke

4.4.1 Allgemeines

Bei Grenzschichtbetrachtungen drängt sich die Frage nach der Schichtdicke unmittelbar auf. Da nun bei der turbulenten Grenzschicht die Grenze zwischen ihr und der von Grenzschichteffekten unbeeinflussten Außenströmung dauernd zeitlich schwankt, kann die aufgeworfene Frage nicht unmittelbar beantwortet werden. Andererseits steht man bei Strömungssimulationen mit FIDAP vor folgender Tatsache: Es wird als hauptsächliche Lösung das Geschwindigkeitsfeld bereitgestellt, und bei Verwendung dieser Ergebnisse ist es einfach, eine von der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht abgeleitete Grenzschichtdicke anzugeben. Daher soll die Frage nach der Grenzschichtdicke und deren Berechnung näher erläu-

tert werden. Da Verdrängungs- und Impulsverlustdicke ebenfalls charakteristische Größen der Grenzschichtdicke sind, werden auch sie hier kurz behandelt. Berechnungen mit dem Defektansatz (Unterkapitel 4.4.3) werden dabei mehr Aufmerksamkeit zugewandt.

Für die Verdrängungsdicke gilt

$$\delta_V = \frac{1}{U_e} \int_{y=0}^{\infty} (U_e - \bar{u}) dy, \quad (4.33)$$

und für die Impulsverlustdicke

$$\delta_I = \frac{1}{U_e^2} \int_{y=0}^{\infty} U_e (U_e - \bar{u}) dy. \quad (4.34)$$

Es soll hier auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Impulsverlustdicke und dem Widerstandsbeiwert hingewiesen werden, der sich aus dem Impulssatz der Grenzschichttheorie ergibt. Der Impulssatz (für dessen Herleitung siehe z. Bsp. [12]) lautet zunächst

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \delta_I) + \delta_V U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_W}{\rho}. \quad (4.35)$$

Mit $U_e = \text{konst.} = U$ folgt mit Glg. 3.4 $\frac{d\delta_I}{dx} = \frac{1}{2} c_f$. Durch Integration erhält man wegen $\int_0^l c_f(x) dx = l c_w$ (vergleiche Glg. 3.5)

$$c_w = 2 \frac{\delta_I}{l}. \quad (4.36)$$

Bei bekanntem c_w ist die Impulsverlustdicke aus obiger Gleichung leicht ermittelbar. Andererseits kann bei Vorliegen von Meßdaten eines Geschwindigkeitsprofils auch folgendes gemacht werden: Mittels Glgn. 4.33 beziehungsweise 4.34 kann man zunächst Verdrängungsdicke und Impulsverlustdicke berechnen, und dann mittels den der Glg. 4.35 zugrundeliegenden Beziehungen auf den Reibungsbeiwert schließen. Auch in [4] wird diese Vorgangsweise zur Auswertung von Versuchsdaten angewandt.

4.4.2 Berechnungen mit dem 1/7 - Potenzgesetz

Widerstandsbeiwert und Impulsverlustdicke stehen in Abhängigkeit zueinander, siehe Glg. 4.35. Dadurch kann man mit Hilfe des 1/7 - Potenzgesetzes, Glg. 4.24, und einem Gesetz für die Wandschubspannung auf die Grenzschichtdicke δ schließen. Für eine ausführlichere Herleitung vergleiche [11]. Es folgt für die inkompressible Plattengrenzschicht:

$$\delta(x) = 0.37x \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/5}. \quad (4.37)$$

Für die Verdrängungsdicke δ_V resultiert zunächst aus den Glgn. 4.33 und 4.24 $\delta_V = \delta/8$, womit man mit 4.37

$$\delta_V = 0.0463x \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/5} \quad (4.38)$$

erhält. Das $1/7$ - Potenzgesetz gilt gut nur bei Reynoldszahlen $< 10^6$. Weiters weicht das Geschwindigkeitsprofil am äußeren Grenzschichttrand stark von der Beschreibung nach 4.24 ab. Trotzdem liefert es, vor allem was die Berechnung des Widerstandsbeiwertes betrifft, gute Ergebnisse, [11].

4.4.3 Berechnungen mit dem Defektansatz

Dieser stellt eine theoretisch besser fundierte Möglichkeit zur Ermittlung von Grenzschichtdicken und dem Geschwindigkeitsprofil über der Platte dar. Er eignet sich vor allem für den äußeren Teil der Grenzschicht gut, weshalb diese Schicht auch Defektschicht (defect - layer) genannt wird.

Für $\bar{u}(x, y)$ lautet der Defektansatz:

$$\bar{u}(x, y) = U_e(x) - u_\tau(x)F'(x, \eta) \quad (4.39)$$

mit

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (4.40)$$

Der Geschwindigkeitsdefekt $U_e(x) - \bar{u}(x, y)$ wird also durch die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ und F' , einer Funktion für den dimensionslosen Defekt, ausgedrückt. Der Grund, weshalb für F' die Variable η verwendet wird, wird durch die weiteren Ausführungen ersichtlich werden. \bar{u} und \bar{v} müssen die Massenbilanz erfüllen. Die Ermittlung von \bar{v} kann so erfolgen, daß man durch Integration von 4.39 zunächst auf eine Stromfunktion $\Psi(x, y)$ schließt. Demzufolge stellt die Funktion

$$\Psi(x, y) = U_e y - u_\tau \delta F = U_e \eta \delta - u_\tau \delta F \quad (4.41)$$

eine solche dar. \bar{v} folgt durch partielle Differentiation von 4.41 nach x , da $\bar{v} = -\Psi_x$ gilt. Beachtet werden muß dabei, daß der Übergang von dem Ψ und Glg. 4.6 zugrundeliegenden Koordinatensystem auf die Koordinaten x und η eine Koordinatentransformation darstellt (Wegen $\xi = x$ folgt $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$). Man erhält für \bar{v}

$$\bar{v} = u_\tau \left[\frac{d\delta}{dx} (F - \eta F') + \frac{\delta}{u_\tau} \frac{du_\tau}{dx} F - \frac{\delta}{u_\tau} \frac{dU_e}{dx} \eta + \delta \frac{\partial F}{\partial x} \right], \quad (4.42)$$

wobei Striche hier und in den weiteren Ausführungen zum Defektansatz Ableitungen nach der Variablen η bedeuten.

Für τ_T kann man

$$\tau_T = \rho u_\tau^2(x) S(x, \eta) = \rho U_e^2(x) \gamma^2(x) S(x, \eta) \quad (4.43)$$

ansetzen. Dabei stellt $S(x, \eta)$ die dimensionslose turbulente Schubspannung dar. Für $\frac{u_\tau(x)}{U_e(x)}$ wird in der Literatur auch

$$\gamma(x) = \frac{u_\tau(x)}{U_e(x)} \quad (4.44)$$

geschrieben.

Durch Einsetzen von 4.39, 4.42 und 4.43 in die Glg. 4.5 erhält man eine Differentialgleichung in den Variablen x und η . Werden darin die Terme, die wenig Einfluß auf die Lösung haben, vernachlässigt, so folgt (siehe [12]):

$$A(x)\eta F'' + B(x)F' - S' = \frac{\partial F'}{\partial x} \frac{U_e \delta}{u_\tau}. \quad (4.45)$$

$A(x)$ steht für

$$A(x) = \frac{1}{u_\tau} \frac{d(U_e \delta)}{dx}, \quad (4.46)$$

$B(x)$ für

$$B(x) = -\frac{\delta}{u_\tau^2} \frac{d(U_e u_\tau)}{dx}. \quad (4.47)$$

Durch Eigenschaften der Grenzschicht (kleiner Wert für dc_f/dx und damit $\frac{d(u_\tau/U_e)}{dx}$) können für $A(x)$ und $B(x)$ die Näherungen

$$A(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{U_e \delta}{u_\tau} \right) + \frac{\delta}{u_\tau} \frac{dU_e}{dx}, \quad (4.48)$$

beziehungsweise

$$B(x) = -2 \frac{\delta}{u_\tau} \frac{dU_e}{dx} \quad (4.49)$$

hergeleitet werden.

Um die Glg. 4.45 lösen zu können, ist noch eine Beziehung zwischen F' und S notwendig. Für eine solche ist die Inanspruchnahme eines Turbulenzmodells erforderlich. Mit den Lösungen von 4.45 können dann weitere Kenngrößen der Grenzschicht ermittelt werden. Andererseits werden diese Kenngrößen auch experimentellen Daten entnommen, womit durch Vergleich mit den berechneten eine erste Bewertung des Turbulenzmodells möglich ist, siehe [12].

Der Geschwindigkeitsdefekt F' ist im allgemeinen Fall eine Funktion von x und η . Für ähnliche Geschwindigkeitsprofile wird F' nur von η abhängig. η wird aus diesem Grund Ähnlichkeitsvariable genannt. Ähnliche Lösungen sind eine Eigenschaft der sogenannten Gleichgewichtsgrenzschichten. Für eine genaue Definition dieses Begriffes siehe z. Bsp. [13]. Im Falle der ebenen Platte mit $U_e = \text{konst.}$ ist die Voraussetzung ähnlicher Geschwindigkeitsprofile ohne weiteres zulässig, siehe Abb. 3.5. Können ähnliche Geschwindigkeitsprofile als Lösungen vorausgesetzt werden, wird die Differentialgleichung für den Geschwindigkeitsdefekt, Glg. 4.45, von x unabhängig. Es gilt dann

$$A\eta F'' + BF' - S' = 0, \quad (4.50)$$

4. Grenzschichtbeschreibende Größen

wobei die Koeffizienten A und B jetzt Konstanten sein müssen. Aus Formel 4.48 folgt im Falle ähnlicher Geschwindigkeitsprofile

$$\frac{u\delta}{u_\tau} = xA, \quad (4.51)$$

wobei für $x = 0$ die Randbedingung $\frac{u\delta}{u_\tau} = 0$ angenommen wurde.

In den Glgn. 4.50 und 4.51 scheint A als Konstante auf. Sie soll nun durch Integration von 4.50 näher spezifiziert werden. Dazu ist Kenntnis über die Randbedingungen von F und S erforderlich. Es gilt:

$$(a) \lim_{\eta \rightarrow 0} F = 0 \quad (b) \lim_{\eta \rightarrow 0} S = 1 \quad (c) \lim_{\eta \rightarrow 1} F' = 0 \quad (d) \lim_{\eta \rightarrow 1} S = 0. \quad (4.52)$$

Mit Bedingung (a) gilt $\bar{v} = 0$ an der Wand (vergleiche Glg. 4.42), was der Voraussetzung einer undurchlässigen Wand entspricht. Mit (b) wird erreicht, daß in Wandnähe die Schubspannung τ_T mit der Wandschubspannung übereinstimmt (Glg. 4.43), (d) bedeutet, daß τ_T in der freien Strömung null wird. Bedingung (c) und Glg. 4.39 führen für $y \rightarrow 1$ zu $\bar{u} \rightarrow U_e$, das heißt es geht damit die Annäherung von \bar{u} zu U_e am äußeren Grenzschichttrand in die Berechnung ein. Im Falle konstanter Außengeschwindigkeit U_e gilt weiters, daß die Konstante B null ist, siehe Glg. 4.47. Damit folgt aus Glg. 4.50 $A\eta F'' = S'$ als die zu integrierende Beziehung. Werden obige Randbedingungen bei der Integration berücksichtigt, folgt $-AF|_{\eta=0}^{\eta=1} = -1$. Wenn man $F(\eta = 1)$ mit Fe bezeichnet gilt damit

$$A = \frac{1}{Fe}. \quad (4.53)$$

Nebst Berechnung wird der Parameter Fe auch Experimenten entnommen.

Es soll an dieser Stelle auf eine wichtige Beziehung zwischen Grenzschicht- und Verdrängungsdicke hingewiesen werden, da bei dieser Fe ebenfalls eine wichtige Rolle spielt. Durch Beachtung von Randbedingungen nach 4.52 kann man sich mit den Glgn. 4.39 und 4.33 nämlich

$$F(\eta = 1) = Fe = \frac{\delta_V}{\delta \frac{u_\tau}{U_e}} = \frac{\delta_V}{\delta \sqrt{c_f/2}} \quad (4.54)$$

herleiten. Durch diese Beziehung und den Formeln 4.51 und 4.53 ist es möglich, für die Verdrängungsdicke δ_V die Glg.

$$\delta_V = \frac{u_\tau^2}{U_e^2} x \quad (4.55)$$

herzuleiten.

Für δ folgt aus den Glgn. 4.51 und 4.53 nun

$$\delta = \frac{x}{Fe} \frac{u_\tau}{U_e}. \quad (4.56)$$

Um mit Glg. 4.56 die Grenzschichtdicke zu ermitteln, muß u_τ/U_e oder wegen Glg. 4.22 der Reibungsbeiwert c_f bekannt sein. c_f kann mit dem sogenannten Widerstandsgesetz, das die Beziehung $c_f = c_f(x)$ darstellt, errechnet werden. Die Herleitung des Widerstandsgesetzes beruht auf der Anpassung des Geschwindigkeitsprofils zufolge des logarithmischen Wandgesetzes an jenes zufolge des Defektansatzes. Angepaßt wird in jenem Bereich, wo der logarithmische Bereich und die Außenschicht der Grenzschicht – siehe Abb. 4.1 – aneinandergrenzen. Der Wandabstand y des Anpassungsbereiches ist bezüglich des Defektansatzes ein sehr kleiner, bezüglich des logarithmischen Wandgesetzes ist er jedoch als sehr groß zu bezeichnen. Der Ansatz für das Widerstandsgesetz kann daher, siehe [12], zu

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\bar{u}(x, y)}{u_\tau(x)} = \lim_{y^+ \rightarrow \infty} u^+(y^+). \quad (4.57)$$

angeschrieben werden. Aus ihm folgt mit den Glgn. 4.39 und 4.19

$$\frac{U_e}{u_\tau} - \lim_{\eta \rightarrow 0} F' = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + C^+. \quad (4.58)$$

Wegen $y = \eta \delta$ läßt sich diese Beziehung zunächst auf die Form

$$\frac{U_e}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} + \frac{2}{\kappa} \left[\frac{\kappa}{2} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(F' + \frac{1}{\kappa} \ln \eta \right) \right] + C^+ \quad (4.59)$$

bringen. Der Term in der eckigen Klammer wird als Nachlaufparameter Π_D definiert,

$$\Pi_D = \frac{\kappa}{2} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(F' + \frac{1}{\kappa} \ln \eta \right). \quad (4.60)$$

Π_D ist, so wie der zur Coles' schen Nachlauffunktion gehörige Parameter Π , ebenfalls eine den äußeren Grenzschichtteil stark beeinflussende Größe. Π_D ist bei Anwendung eines Turbulenzmodells von diesem abhängig. Der Zusammenhang zu dem Parameter nach Coles, Π , läßt sich ohne weiteres aufzeigen. Auch gilt, daß, wenn man zur Ermittlung von Π_D ein vernünftiges Turbulenzmodell voraussetzt, die Rechnungen zu ähnlichen Werten führen, wie sie für Π als experimentell bestimmte vorliegen. Da Π_D auf Grund der Definition Glg. 4.60 berechnet wird, Π jedoch von Experimenten abgeleitet, wird hier zwischen den Parametern unterschieden, wozu der Index D dient.

Der Ausdruck $\frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu}$ von Glg. 4.59 kann im Falle der inkompressiblen Plattengrenzschicht, auf nachfolgend gezeigte Weise zerlegt beziehungsweise erweitert werden. Mit $U_e = \text{konst.} = U$ folgt:

$$\frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{u_\tau^2}{U \nu} x + \ln \frac{U \delta}{u_\tau x} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\left(\frac{u_\tau}{U} \right)^2 Re_x \right) + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U \delta}{u_\tau x}. \quad (4.61)$$

$\ln \frac{U \delta}{u_\tau x}$ kann durch die Glgn. 4.54 und 4.55 zunächst auf die Form $\ln \frac{1}{F_e} = -\ln(F_e)$ gebracht werden, wodurch die Glg. 4.61 leicht modifiziert wird. Wird diese modifizierte Form in Glg. 4.59 eingesetzt, erhält man unter Beachtung von 4.60 mit Verwendung der Abkürzung

Glg. 4.44 $\left(\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\gamma}\right)$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\kappa} \ln(\gamma^2 Re_x) + C^+ + \frac{1}{\kappa}(2\Pi_D - \ln Fe) \quad (4.62)$$

(es gilt $\gamma = \frac{u_\tau}{U} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}$).

Dieses ist nun das sogenannte Widerstandsgesetz für die längsangeströmte ebene Platte. Um eine Darstellung zu erhalten, wo $\frac{u_\tau}{U}$ explizit aufscheint, kann man vorgehen, wie nachfolgend kurz aufgezeigt wird. Zunächst kann man sich aus Glg. 4.62 unter Verwendung der Abkürzung

$$\tilde{C} = \frac{1}{\kappa}(2\Pi_D - \ln Fe) \quad (4.63)$$

die Beziehung

$$\frac{\kappa}{\gamma} + 2 \ln \frac{\kappa}{\gamma} - 2 \ln \kappa - \kappa(C^+ + \tilde{C}) = \ln Re_x \quad (\gamma = u_\tau/U) \quad (4.64)$$

herleiten. Mit den Definitionen

$$\lambda = \ln Re_x \quad (4.65)$$

und

$$G = \frac{\gamma}{\kappa} \ln Re_x \quad (4.66)$$

folgt mit

$$D = 2 \ln \kappa + \kappa(C^+ + \tilde{C}) \quad (4.67)$$

aus Glg. 4.64

$$\frac{\lambda}{G} + 2 \ln \frac{\lambda}{G} - D = \lambda. \quad (4.68)$$

Hat man durch die Glg. 4.68 Werte von $G = G(\lambda, D)$ ermittelt, so steht durch die Glg. 4.66 eine explizite Formel zur Berechnung von $\frac{u_\tau}{U}$ (und damit des c_f - Wertes) zur Verfügung, da nach 4.66 mit $\gamma = \frac{u_\tau}{U}$

$$\frac{u_\tau}{U} = \frac{\kappa}{\ln Re_x} G(\lambda, D) \quad \left(\gamma = \frac{u_\tau}{U} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}\right) \quad (4.69)$$

gilt.

Die Grenzschichtdicke δ kann man nun durch Einsetzen von Glg. 4.69 in 4.56 ermitteln. Es folgt

$$\delta = M \frac{x}{\ln Re_x} G(\lambda, D) = M \frac{Re_x}{\ln Re_x} \frac{\nu}{U} G(\lambda, D) \quad (4.70)$$

mit

$$M = \frac{\kappa}{Fe}. \quad (4.71)$$

Zur Ermittlung konkreter Werte ist die Kenntnis der Parameter Fe und Π_D (zur Ermittlung der Funktion G) vonnöten. Nach [12] gilt zufolge Messungen für die inkompressible turbulente Plattengrenzschicht:

$$Fe = 3.78; \quad \Pi_D = 0.55 \quad (4.72)$$

Es muß angemerkt werden, daß diese Werte stark differieren können, und auch bei Berechnungen der Parameter je nach verwendetem Turbulenzmodell starke Abweichungen möglich sind. Mit den Werten nach Beziehung 4.72 folgt mit $\kappa = 0.41$:

$$M = 0.11 \text{ (Glg. 4.71); } \quad \tilde{C} = -0.560 \text{ (Glg. 4.63)}. \quad (4.73)$$

Zur Ermittlung von D mit Glg. 4.67 muß die Konstante C^+ bekannt sein. Diese ist von der Rauigkeit der Platte abhängig. Für die glatte Platte gilt: $C^+ = 5.0$. Mit diesem Wert ergibt sich D zu $D = 0.037$. Die damit berechenbare Funktion $G(\lambda; D)$ ist in Abb. 4.3 dargestellt. Bis auf den Faktor M wird in [12] für die Grenzschichtdicke die gleiche Formel wie 4.70 angegeben. Der dort verwendete Wert für M beträgt

$$M = 0.14. \quad (4.74)$$

Bezüglich dieser Diskrepanz von M folgende Erläuterungen: Erstens sind zur Herleitung von der der Glg. 4.70 zugrundeliegenden Glg. 4.45 bereits etliche Näherungen vonnöten. Zweitens ist die experimentelle Bestimmung der Grenzschichtdicke als eine Größe, für die $\bar{u} = U_e$, gilt sehr schwierig. Wegen des geringen Geschwindigkeitsgradienten $\frac{d\bar{u}}{dy}$ am Grenzschichtrand führen bereits kleine Abweichungen von gemessenem \bar{u} zu großen Änderungen von δ . Erschwerend dabei ist, daß in diesem Bereich der Grenzschicht die Strömung noch nicht zur Gänze drehungsfrei ist, siehe Abb. 3.2. Nach [6] wird δ experimentell z. Bsp. so festgelegt, daß dort je nach Reynoldszahl $\bar{u}/U_e = 0.99$ bis 0.995 gilt. Von diesem so experimentell bestimmten Wert für δ weicht ein nach Glg. 4.70 errechneter um höchstens $\pm 5\%$ ab, wenn $M = 0.14$ verwendet wird. Für eine möglichst exakte Bestimmung des Widerstandsbeiwertes (siehe Glgn. 4.86 und 4.87) sind die Angaben nach Glg. 4.72 heranzuziehen.

Bei bekannter Funktion $\frac{u_\tau}{U_e}$ (nach 4.69) kann mit Glg. 4.55 auch die Verdrängungsdicke δ_V leicht ermittelt werden. Es ergibt sich

$$\delta_V = x \left[\frac{\kappa}{\ln Re_x} G(\lambda, D) \right]^2. \quad (4.75)$$

Da der Widerstandsbeiwert c_w von praktischem Interesse ist (besonders auch von rauhen Wänden) und in engem Zusammenhang mit dem Reibungsbeiwert steht, soll auf die Ermittlung von c_w nachfolgend kurz eingegangen werden.

Eine einfache Möglichkeit c_w bei bekannter Funktion c_f zu ermitteln besteht darin, die

4. Grenzschichtbeschreibende Größen

Integration nach Glg. 3.5 näherungsweise rein numerisch durchzuführen. Danach gilt $c_w \approx \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(c_f(x_i) + c_f(x_i + \Delta x_i)) \Delta x_i$, wobei $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = l$ ist.

Eine zweite Vorgangsweise ist, sich für die Berechnung des Widerstandsbeiwertes ausgehend von Glg. 4.62 eine Beziehung herzuleiten, wozu aber, um die Herleitung praktisch zu ermöglichen, Näherungen nötig werden. Diese Möglichkeit zur Berechnung ist teilweise analog jener zur Ermittlung des Reibungsbeiwertes, und auch das Resultat ist ähnlich Glg. 4.69. Verwendet wird dazu eine Näherungsbeziehung zwischen c_f und c_w . Für die Herleitung dieser muß der Term $x \frac{dc_f}{dx}$ abgeschätzt werden, wozu Glg. 4.62 herangezogen werden kann. Durch Differentiation von 4.62 erhält man mit $\frac{u}{U} = \gamma$

$$x\gamma' = -\frac{1}{\kappa} \frac{\gamma^2}{1 + \frac{2\gamma}{\kappa}} \approx -\frac{1}{\kappa} \gamma^2. \quad (4.76)$$

Die Näherung in obiger Gleichung ist zulässig, da zufolge des kleinen Reibungsbeiwertes auch $\gamma \ll 1$ gilt. Mit $\gamma' = \frac{d\sqrt{c_f/2}}{dx} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{c_f}} \frac{dc_f}{dx}$ folgt aus Glg. 4.76

$$x \frac{dc_f}{dx} \approx -c_f \frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}}. \quad (4.77)$$

Den Zusammenhang zwischen c_f und c_w ermittelt man ausgehend von Glg. 3.5. Wird sie nach x differenziert erhält man

$$\frac{d}{dx}(c_w l) = c_f \quad (4.78)$$

und weiter

$$c_w = c_f - l \frac{dc_w}{dx}. \quad (4.79)$$

$\frac{dc_w}{dx}$ durch c_f näherungsweise zu ermitteln ist möglich durch Differentiation der Beziehung $c_w = c_f - \frac{1}{l} \int_0^l x c_f' dx$, wobei für $x c_f'$ der Näherungswert nach Glg. 4.77, also $-c_f \frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}}$ zu verwenden ist. Die Beziehung $c_w = c_f - \frac{1}{l} \int_0^l x c_f' dx$ kann durch Integration der Gleichung $(x c_f)' = c_f + x c_f'$ hergeleitet werden. $\frac{dc_w}{dx}$ ergibt sich zu $\frac{dc_w}{dx} = \frac{dc_f}{dx} - \frac{1}{x} O(c_f^2)$. Damit folgt mit Glg. 4.79 c_w zu

$$c_w = c_f - x \frac{dc_f}{dx} + O(c_f^2). \quad (4.80)$$

Mit den Glgn. 4.80 und 4.77 gilt

$$c_w \approx c_f \left(1 + \frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right). \quad (4.81)$$

Invertierung, Verdoppelung und Wurzelziehen angewandt auf Glg. 4.81 liefert

$$\sqrt{\frac{2}{c_w}} \approx \sqrt{\frac{2}{c_f}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}}}} \quad (4.82)$$

Wird darin der Term $\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{\kappa}\sqrt{\frac{c_f}{2}}}}$ mit Hilfe einer Taylorreihe berechnet, so folgt aus 4.78

$$\sqrt{\frac{2}{c_w}} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} - \frac{1}{\kappa} + O\left(\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right). \quad (4.83)$$

Die durch Glg. 4.83 ausgedrückte Beziehung ist auch die Begründung für Glg. 3.6. Wird nun erstens in Glg. 4.62 anstelle des linken Teiles $\left(\frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{c_f}}\right)$ der durch sich aus Glg. 4.83 ergebende Ausdruck für $\sqrt{\frac{2}{c_f}}$, also $\sqrt{\frac{2}{c_w}} + \frac{1}{\kappa}$ gesetzt, und zweitens $\ln \gamma^2 Re_x$ durch $\ln \frac{c_w}{2} Re_l$ approximiert erhält man den Zusammenhang

$$\sqrt{\frac{2}{c_w}} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{c_w}{2} Re_l\right) + C^+ + \frac{1}{\kappa}(2\Pi_D - \ln Fe) - \frac{1}{\kappa}. \quad (4.84)$$

Mit den Werten nach Glg. 4.72 und $\kappa = 0.41$ folgt

$$\sqrt{\frac{2}{c_w}} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{c_w}{2} Re_l\right) + C^+ - 3.0 \quad (4.85)$$

Die Umformung dieser Beziehung auf eine Formel mit der c_w - Werte explizit ermittelt werden können, ist gleich jener, wie sie auch bei den c_f - Werten vorgestellt wurde. Diese führt auf

$$c_w = 2 \left[\frac{\kappa}{\ln Re_l} G(\lambda, D) \right]^2, \quad (4.86)$$

wobei λ und D wie folgt zu bestimmen sind:

$$\lambda = \ln Re_l; \quad D = 2 \ln \kappa + \kappa(C^+ - 3.0) \quad (4.87)$$

D erhält man mit den Werten nach Glg. 4.72, $\kappa = 0.41$ und $C^+ = 5.0$ zu $D = -0.96$. Für die damit resultierende Funktion $G(\lambda, D)$ vergleiche Abb. 4.3.

c_w - Werte von rauhen Wänden können mit den Glgn. 4.85 und 4.86 einfach durch die Anpassung der Konstanten C^+ berechnet werden. Dazu wird in [12] die Beziehung

$$C^+(k_{tech}^+) = 5.0 - \frac{1}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{k_{tech}^+}{3.4}\right) \quad (4.88)$$

mit

$$k_{tech}^+ = k_{tech} \frac{u_\tau}{\nu} \quad (4.89)$$

angegeben. k_{tech} ist die Rauigkeitshöhe einer technischen Rauheit.

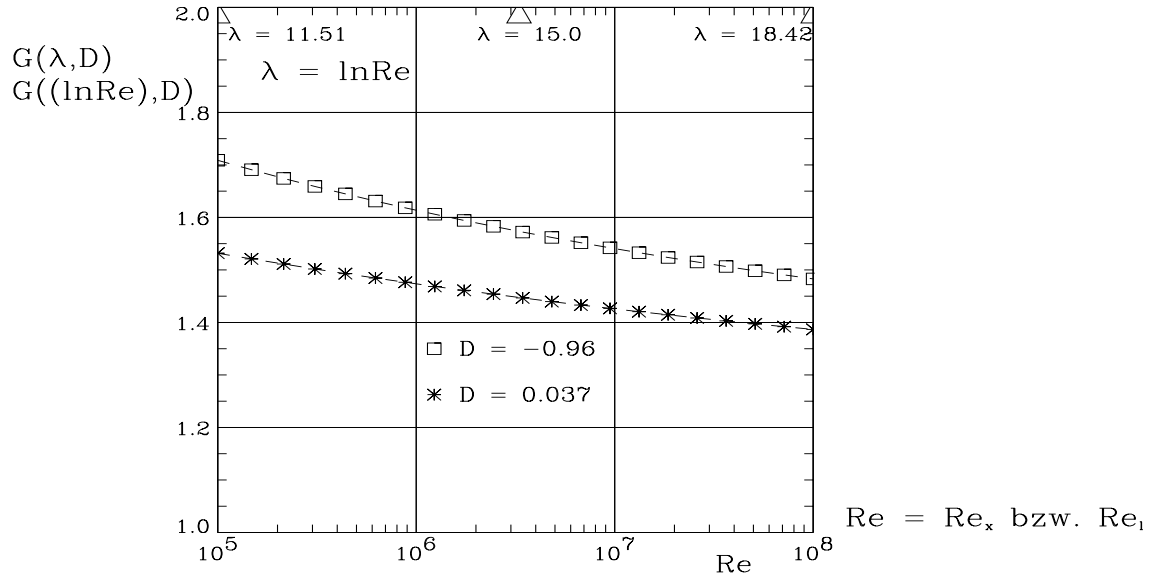


Abbildung 4.3: Die Funktion $G(\lambda, D)$ zur Berechnung von Reibungs- und Widerstandsbeiwerten

4.4.4 Kennzahlen

Zur Charakterisierung von Grenzschichten werden oftmals Verhältniszahlen zwischen δ , δ_V und δ_I herangezogen, üblicherweise werden sie als Kennzahlen bezeichnet. Da sie häufig anzutreffen sind, soll auf sie kurz eingegangen werden.

Zufolge des Defektansatzes werden $\frac{\delta_V}{\delta}$, $\frac{\delta_I}{\delta}$ und $\frac{\delta_I}{\delta_V} = H_{21}$ von $\sqrt{\frac{c_f}{2}}$ abhängig. Wird zur Ermittlung dieser drei Kennzahlen von der Lösungsfunktion $F'(x, \eta)$ ausgegangen, so gilt mit dem Parameter G (nicht zu verwechseln mit der Funktion $G(\lambda, D)$), siehe [12]:

$$\frac{\delta_V}{\delta} = \gamma Fe, \quad (4.90)$$

$$\frac{\delta_I}{\delta} = \delta_I(1 - G) \quad (4.91)$$

und

$$H_{21} = \frac{\delta_I}{\delta_V} = 1 - \gamma G. \quad (4.92)$$

G wird Formparameter genannt. Er kann analog wie Fe über das Turbulenzmodell berechnet oder auch über Versuche bestimmt werden. Ein experimenteller Wert ist $G \approx 6.8$. $\frac{\delta_I}{\delta_V}$ zu ermitteln ist auch folgendermaßen möglich: man kann die Impulsverlustdicke mit Gln. 4.36 und 4.86, weiters die Verdrängungsdicke mit Glg. 4.75 berechnen, woraus dann $\frac{\delta_I}{\delta_V}$ folgt. Wird so vorgegangen, ist das Ergebnis üblicherweise gegenüber Glg. 4.92 gering

abweichend. Bedingt ist dies durch die zahlreichen Näherungen des Defektansatzes, beziehungsweise dadurch, daß eine experimentelle Bestimmung von Fe , Π_D und G stets mit versuchstechnischen Ungenauigkeiten verbunden ist.

Wird zur Ermittlung von δ , δ_V und δ_I das $1/7$ - Potenzgesetz herangezogen, so gilt, siehe [13], für die Kennzahlen folgendes:

$$\frac{\delta_V}{\delta} = 0.125, \quad (4.93)$$

$$\frac{\delta_I}{\delta} = 0.0972 \quad (4.94)$$

und

$$H_{21} = \frac{1}{1.286} \quad (4.95)$$

Weitere Werte zufolge verfeinerter Theorien sind, siehe ebenfalls [13]

$$\frac{\delta_V}{\delta} = 0.129, \quad \frac{\delta_I}{\delta} = 0.101 \quad \text{bzw.} \quad H_{21} = \frac{1}{1.268} \quad (4.96)$$

4.4.5 Vergleiche

Zunächst soll neben den Gln. 4.56 und 4.70 eine weitere Formel zur Ermittlung der Grenzschichtdicke aufgezeigt werden. In [13] wird die für die glatte Platte gültige Beziehung

$$\delta(x) = 0.14x \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/7} \quad (4.97)$$

angegeben. Ihre Herleitung beruht auf verfeinerten Theorien.

Zur Darstellung der aus den Gln. 4.37, 4.38, 4.70, 4.75 und 4.97 resultierenden Beziehungen in Diagrammen werden Grenzschicht- beziehungsweise Verdrängungsdicken auf den Faktor $\frac{\nu}{U}$ bezogen. Dies deswegen, da $\frac{\delta}{\nu/U}$ und $\frac{\delta_V}{\nu/U}$ allein nur von der Plattenreynoldszahl abhängig sind. Dadurch ergibt sich die Grenzschichtdicken betreffend nach Glg. 4.37

$$\frac{\delta}{\nu/U} = \frac{U}{\nu} \left(0.37x \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/5} \right) = 0.37 Re_x (Re_x)^{-1/5}, \quad (4.98)$$

nach 4.70

$$\frac{\delta}{\nu/U} = M \frac{Re_x}{\ln Re_x} G(\lambda, D), \quad (4.99)$$

und nach 4.97

$$\frac{\delta}{\nu/U} = 0.14 Re_x (Re_x)^{-1/7} . \quad (4.100)$$

Werden die Verdrängungsdicken auf ν/U bezogen, gilt nach Glg. 4.38

$$\frac{\delta_V}{\nu/U} = 0.0463 Re_x (Re_x)^{-1/5} , \quad (4.101)$$

beziehungsweise nach 4.75:

$$\frac{\delta_V}{\nu/U} = Re_x \left[\frac{\kappa}{\ln Re_x} G(\lambda, D) \right]^2 . \quad (4.102)$$

Die Gln. 4.98 bis 4.102 werden zur Erstellung der Diagramme in Abbn. 4.4 und 4.5 verwendet. Wie bekannt, setzt an der Plattenvorderkante nur Laminarströmung ein, der Umschlag auf turbulente Strömung erfolgt erst weiter stromabwärts. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, wird die Plattenreynoldszahl Re_P verwendet. Mit x_P als Abstand von der Plattenvorderkante gilt

$$Re_P = \frac{U x_P}{\nu} \quad (4.103)$$

Als maximale Plattenreynoldszahl Re_{Pmax} wird für Abb. 4.4 $Re_{Pmax} = 2.5 \times 10^6$, für Abb. 4.5 $Re_{Pmax} = 10^8$ gewählt. In den Diagrammen wurde der Umschlag von laminar auf turbulent bei $Re_P \approx 10^6$ angenommen, siehe Abb. 4.4. Aus diesem Grund ist der hypothetische Beginn der Beziehungen für $\frac{\delta}{\nu/U}$ beziehungsweise $\frac{\delta_V}{\nu/U}$ bei $Re_P = 0.75 \times 10^6$ festgesetzt worden. Bei den zur Diagrammerstellung erforderlichen Berechnungen mit Gln. 4.98 bis 4.101 wurde deshalb für Re_x der sich durch $Re_x = Re_P - 0.75 \times 10^6$ ergebende Wert verwendet.

Die Berechnungsformeln für Grenzschicht- und Verdrängungsdicke bei laminarer Plattenströmung wurden [12] entnommen. Werden die 99% - Schichtdicke δ_{99} beziehungsweise die Verdrängungsdicke δ_{Vlam} auf ν/U bezogen, so gilt

$$\frac{\delta_{99}}{\nu/U} = 5 \sqrt{Re_P} , \quad (4.104)$$

beziehungsweise

$$\frac{\delta_{Vlam}}{\nu/U} = 1.721 \sqrt{Re_P} . \quad (4.105)$$

4. Grenzschichtbeschreibende Größen

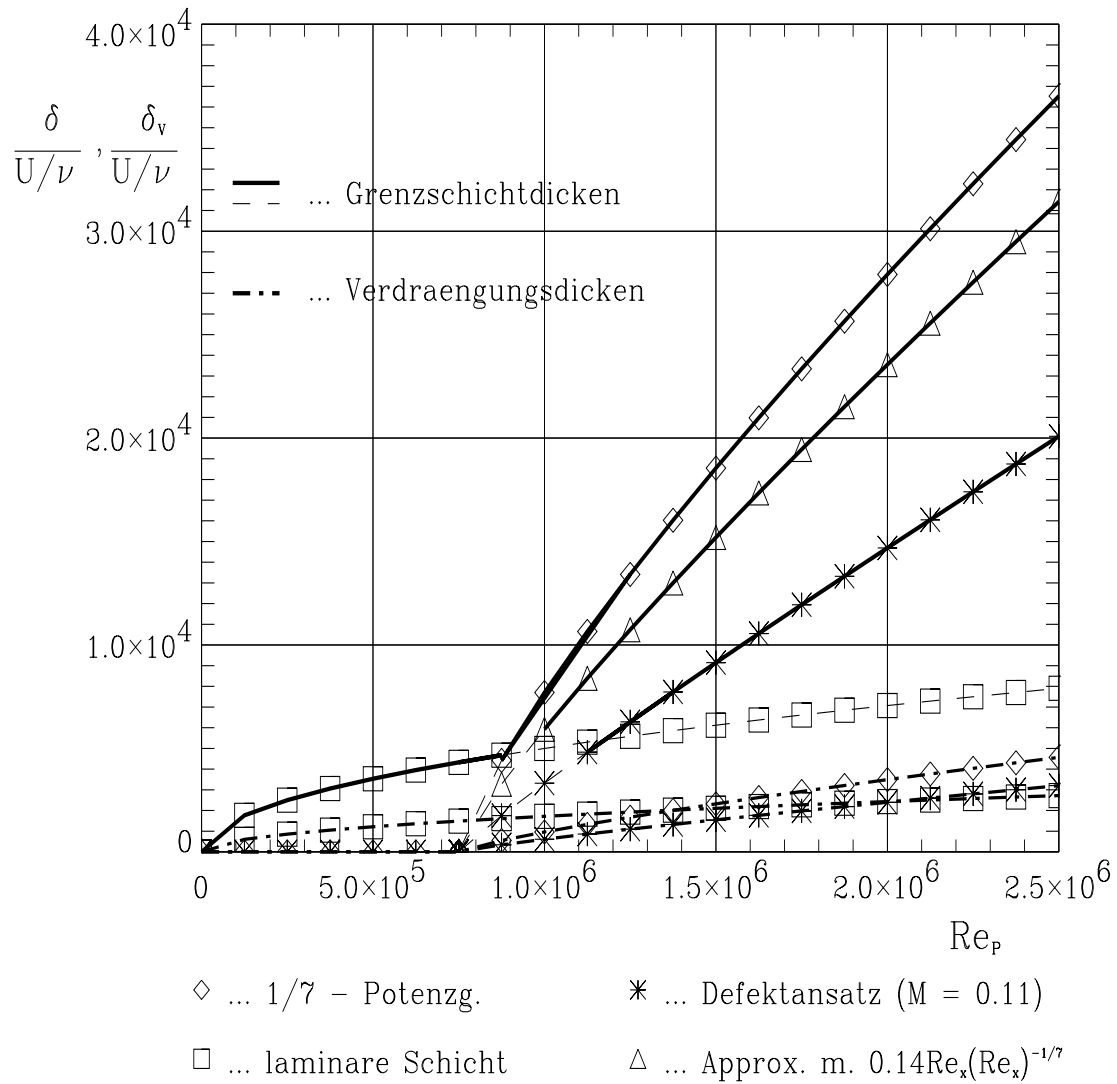


Abbildung 4.4: Grenzschicht- und Verdrängungsdicken zufolge theoretischer Beziehungen bei mäßigen Reynoldszahlen

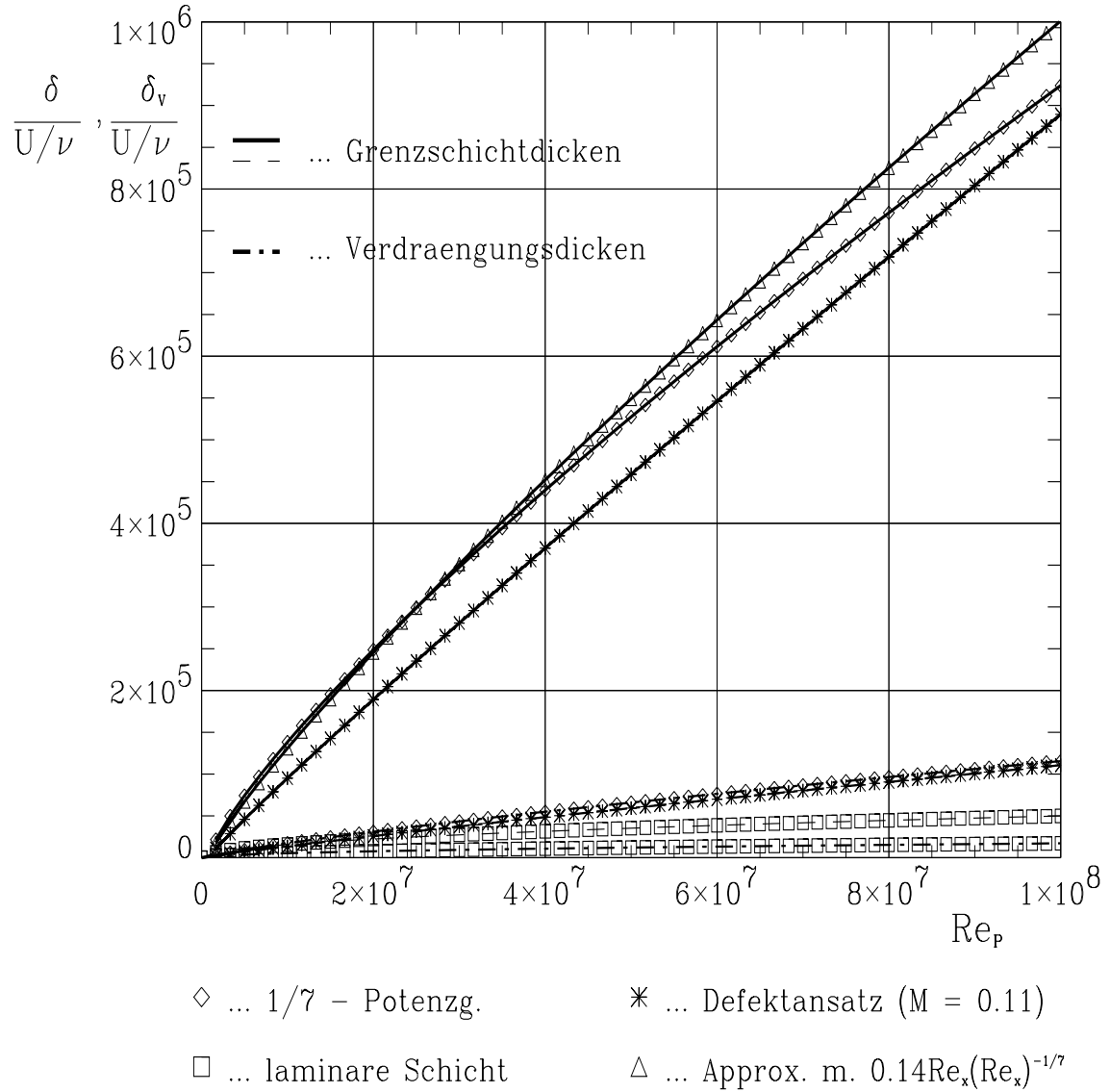


Abbildung 4.5: Grenzschicht- und Verdrängungsdicken zufolge theoretischer Beziehungen bei hohen Reynoldszahlen

Wie man durch die Abbn. 4.4 und 4.5 erkennen kann, wachsen die Grenzschichtdicken bei turbulenter Strömung wesentlich rascher gegenüber jenen bei laminarer Plattenströmung. Hingegen sind die Unterschiede der Verdrängungsdicken sind zwischen laminarem und turbulentem Fall nicht so stark ausgeprägt.

Kapitel 5

Turbulenzmodelle

5.1 Grundsätzliches

Durch den komplexen Bewegungsablauf innerhalb turbulenter Gebiete sind die Geschwindigkeiten der einzelnen Fluidteilchen nicht berechenbar. Der Rechenaufwand dafür ist zu groß. Zur Berechnung von turbulenten Strömungen ist man auf Turbulenzmodelle angewiesen. Diese treffen Aussagen über die zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsschwankungen $\overline{u'u'}$ usw., in der Regel werden sie mit den zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten in Zusammenhang gebracht.

Von Boussinesq wurde vorgeschlagen den Ansatz

$$\tau'_{xy} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad \text{gilt für} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

zu verwenden. Stellt man Glg. 5.1 dem Newtonschen Reibungsansatz $\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$ gegenüber, so erkennt man, dass μ_T das Pendant zu μ ist. μ_T wird daher turbulente Zähigkeit genannt. Bestimmend für μ_T ist (siehe Glgn. 2.24 und 5.1) der Impulsaustausch zufolge der turbulenten Schwankungsbewegungen. Der Ansatz Glg. 5.1 wird Wirbelviskositätsansatz von Boussinesq genannt. Er ist ein linearer Ansatz, er liegt allen hier in weiterer Folge vorgestellten Turbulenzmodellen zugrunde. Neben ihm werden auch weitere Ansätze für die scheinbaren Spannungen angegeben. Für $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \neq 0$ gilt analog zu der Gleichung 2.11

$$\tau'_{xy} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right). \quad (5.2)$$

Nützlich wird die Beziehung Glg. 5.1 beziehungsweise 5.2 erst, wenn es gelingt, für μ_T weitergehende Aussagen zu treffen. Dazu sind Modellannahmen erforderlich.

Zur Formulierung der Modellannahmen sind zusätzliche Gleichungen, sogenannte Modellgleichungen notwendig. Mit diesen ist es möglich, das Gleichungssystem bestehend aus den Glgn. 2.22 und 2.23 plus Massenbilanz zu lösen. Die Modellgleichungen sind in vielen Fällen partielle Differentialgleichungen. Diese müssen bei der Strömungsberechnung zusätzlich zu der Massenbilanz und den Glgn. 2.22 und 2.23 gelöst werden. Wird im Turbulenzmodell nur eine partielle Differentialgleichung verwendet, spricht man von einem Eingleichungsmodell,

bei Verwendung zweier partieller Differentialgleichungen von einem Zweigleichungsmodell usw. Wird nur eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Formulierung des Turbulenzmodells herangezogen, wird dieses als Einhalbgleichungsmodell bezeichnet. Algebraische Turbulenzmodelle werden ohne Differentialgleichungen aufgestellt, sie werden auch Nullgleichungsmodelle genannt.

5.2 Algebraische Turbulenzmodelle

5.2.1 Einleitende Bemerkungen

Das einfachste dieser Modelle geht auf Prandtl zurück und wird deshalb auch Prandtl'sches Mischungsweglängenmodell genannt. Wegen seiner Einfachheit ist es nur mit eingeschränkter Genauigkeit möglich, die komplexen Verhältnisse bei turbulenten Strömungen wiederzugeben. Es wurden daher etliche Verbesserungen vorgeschlagen, welche auch angewandt werden. Einige dieser Änderungen führten zum Baldwin - Lomax - Modell. Letzteres ist ein gängiges Modell, welches sich gut zur Berechnung von im Turbomaschinenbau anzutreffenden Strömungen eignet. Es werden nun vor der Beschreibung des Baldwin - Lomax - Modelles das Prandtl'sche Mischungsweglängenmodell und dessen wichtigste Weiterentwicklungen in den Grundzügen diskutiert. Für eine ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge siehe z. Bsp. [15].

5.2.2 Das Prandtl'sche Mischungsweglängenmodell

Prandtl geht bei seinen Überlegungen von einem stark vereinfachten Bild von der Schwankungsbewegung aus. Danach sollen die einzelnen Fluidballen im Mittel um die Mischungsweglänge l_{mix} quer zur Hauptströmungsrichtung ausgelenkt werden, siehe Abb. 5.1, jedoch ihren Impuls beibehalten.

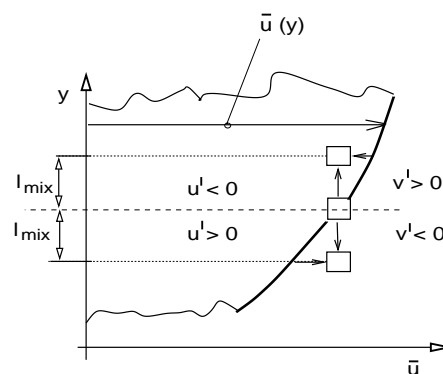


Abbildung 5.1: zur Erklärung der Mischungsweglänge

Der ausgelenkte Fluidballen hat daher an seinem neuen Ort eine andere Geschwindigkeit als die Fluidballen gleicher Lage, die keine Auslenkung erfahren haben. Für die Geschwindigkeitsdifferenz gilt

$$\Delta u = \bar{u}(y + l_{mix}) - \bar{u}(y) \quad (5.3)$$

und nach Entwicklung in eine Taylorreihe und Abbruch nach dem linearen Glied:

$$\Delta u = l_{mix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (5.4)$$

Bei der Modellbildung wird nun Δu für die Schwankungsgeschwindigkeit u' verwendet. Weiters wird für u' und v' die gleiche Größenordnung angenommen. Es folgt also:

$$-\overline{u'v'} = \left(l_{mix} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (5.5)$$

Da der Ausdruck $-\rho(\overline{u'v'})$ die scheinbare Spannung darstellt, siehe Glgn. 2.24, gilt

$$\tau_T = \rho l_{mix}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (5.6)$$

Um zu berücksichtigen, daß, wenn $\partial u / \partial y$ das Vorzeichen wechselt, auch jenes von τ_T wechselt, wird

$$\tau_T = \rho l_{mix}^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.7)$$

gesetzt. 5.7 ist das Prandtl'sche Mischungsweglängenmodell.

Die bei den Turbulenzmodellen verwendeten Grundgleichungen sind üblicherweise mit Hilfe der turbulenten Zähigkeit μ_T formuliert. Durch Vergleich von Glg. 5.7 mit dem Boussinesq - Ansatz 5.1 erhält man für die turbulente Zähigkeit die Beziehung

$$\mu_T = \rho l_{mix}^2 \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.8)$$

Solange l_{mix} nicht bekannt ist, bringt 5.7 gegenüber dem Boussinesq - Ansatz $\tau_T = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$ keine Weiterentwicklung. Jedoch kann man oft mit Hilfe experimenteller Daten die Länge l_{mix} in eine einfache Beziehung bringen zu charakteristischen Längen der betreffenden Strömung. Speziell für ebene Wände kann man, wieder nach einem Vorschlag von Prandtl, die Modellannahme machen, daß l_{mix} proportional dem Wandabstand sei. Erst durch diesen Modellvorschlag steht mit Glg. 5.8 eine Formel zur Ermittlung von μ_T zur Verfügung. Der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Normalabstand zur Wand und l_{mix} ist, wie unten begründet, durch die Kármán - Konstante gegeben, sodaß

$$l_{mix} = \kappa y \quad (5.9)$$

gilt.

Mit Glg. 5.6 folgt:

$$\frac{\tau_T}{\rho} = \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (5.10)$$

Wird die auch den dimensionsanalytischen Betrachtungen, siehe Seite 23, zugrundeliegende Annahme getroffen, daß die Schubspannung konstant und gleich der Wandschubspannung τ_W sei, so folgt mit der Definition der Schubspannungsgeschwindigkeit ($u_\tau = \sqrt{\tau_W/\rho}$)

$$u_\tau = \kappa y \frac{du}{dy}. \quad (5.11)$$

Dies ist die gleiche Beziehung wie Glg. 4.18, die wir schon in Kapitel 4 aus der Dimensionsanalyse für den inneren Teil des turbulenten Grenzschichtbereiches gewonnen haben. Damit Glgn. 5.11 und 4.18 den gleichen Sachverhalt beschreiben, muß die Konstante κ in beiden Fällen von gleicher Größe sein. Damit ist die Festsetzung des Proportionalitätsfaktors mit κ in Glg. 5.9 begründet.

Auch andere Modellansätze (Wirbeltransporttheorie von Taylor, von Kármán'sche Ähnlichkeitshypothese) gelangen zu dem gleichen Ergebnis wie die Prandtl'sche Mischungswegformel.

5.2.3 Die Dämpfungsfunktion nach Van Driest

Durch sie wird die wandnächste Schicht realitätsgetreuer modelliert, siehe dazu [15]. Um eine gute Anpassung an experimentelle Daten zu erreichen und einigen theoretischen Überlegungen folgend schlug Van Driest zur Berechnung von l_{mix} folgende Formel vor:

$$l_{mix} = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A_0^+}} \right) \quad (5.12)$$

Der Dämpfungsterm $1 - e^{-\frac{y^+}{A_0^+}}$ wird in Abhängigkeit von y^+ in Abb. 5.2 dargestellt. Die experimentelle Konstante hat den Wert

$$A_0^+ = 26. \quad (5.13)$$

Wie man aus der Abbildung ersieht, kommt der Dämpfungsterm nur für $y^+ < 100$ zum tragen. Für größere Werte gilt praktisch $l_{mix} = \kappa y$.

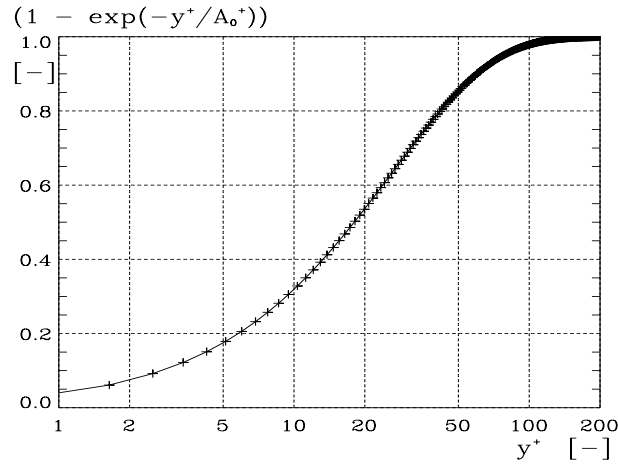


Abbildung 5.2: Dämpfungsfunktion nach Van Driest

5.2.4 Die Modellannahmen nach Clauser und Escudier

Ihre Modellvorschläge dienen dazu, um für die äußere Schicht besser an die physikalischen Gegebenheiten angepasste Resultate zu erreichen. Clauser lehnt sich bei seinen Überlegungen an eine von Prandtl angegebene Beziehung an, welche eigentlich nur für freie Turbulenz Gültigkeit hat. Angeregt wurde diese Modellannahme durch Versuchsmaterial von Reichardt über freie turbulente Strömungen. Prandtl's Vorstellung ist nun, daß die Fluidballen, die quer zur Strömungsrichtung wandern, von der Größenordnung der Vermischungszone sind. Die dadurch eruierte Formel zur Modellbeschreibung lautet, siehe [11],

$$\nu_T = \kappa_1 b (\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}). \quad (5.14)$$

ν_T bezeichnet die turbulente kinematische Viskosität, es gilt $\nu_T = \frac{\mu_T}{\rho}$. κ_1 ist eine durch Versuche zu bestimmende Konstante. Für b , \bar{u}_{max} , \bar{u}_{min} siehe z. Bsp. Abb. 5.3. ν_T ist innerhalb des von der freien turbulenten Strömung betroffenen Bereiches konstant. Im Gegensatz dazu liefert die Anwendung von Glg. 5.8 eine Abhängigkeit der turbulenten Zähigkeit von einer Ortskoordinate, die je nach Strömungsverhältnissen zu spezifizieren ist.

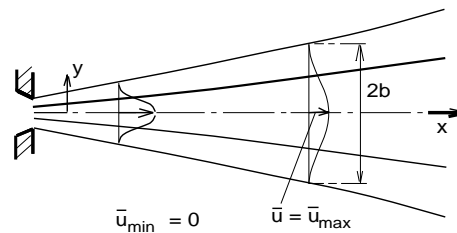


Abbildung 5.3: Freistrahle als Beispiel einer freien turbulenten Strömung

Glg. 5.14 fußt lediglich auf Versuchsergebnissen und theoretischen Überlegungen bezüglich freier Turbulenz. Clauser gibt nach dem Vorbild dieser Gleichung für Grenzschichten zur Berechnung der äußeren Schicht eine ähnlich aufgebaute Beziehung an:

$$\mu_{To} = \alpha \rho U_e \delta_V. \quad (5.15)$$

μ_{To} ist darin die Zähigkeit der äußeren Schicht und α eine Modellkonstante.

Escudier erkannte, daß bessere Ergebnisse erreicht werden können, wenn man die Mischungsweglänge l_{mix} begrenzt. Demnach soll deren größter Wert

$$(l_{mix})_{max} = 0.09\delta \quad (5.16)$$

nicht überschreiten. Diese Beschränkung wird in FIDAP auch verwendet.

5.2.5 Die Modifikationen von Corrsin - Kistler und Klebanoff

Danach ist zur genauen Ermittlung der Wirbelviskosität die Klebanoff'sche Intermittenzfunktion, Glg. 3.1, zu berücksichtigen. Ihre Formulierung kann je nach Anwendungsfall entsprechend abgeändert werden, siehe [1] beziehungsweise Glg. 5.29. Durch Multiplikation dieser Funktion mit Glg. 5.15 wird eine bessere Übereinstimmung von Rechenergebnissen mit Versuchsergebnissen erreicht, [15].

5.2.6 Das Cebeci - Smith Modell

Bei diesem Modell wird die turbulente Zähigkeit für die innere Schicht μ_{Ti} getrennt von jener für die äußere μ_{To} ermittelt (Zweischichtenmodell).

μ_{Ti} wird in Anlehnung an die Prandtl'sche Mischungswegformel durch

$$\mu_{Ti} = \rho l_{mix}^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

ermittelt. Dabei wird l_{mix} mit Hilfe der Van Driest Dämpfungsfunktion eruiert, wobei anstelle von A_0^+ die Modellkonstante A_0 verwendet wird. A_0 geht aus A_0^+ mittels einer Korrekturfunktion hervor (näheres siehe [15]).

Für die äußere Schicht gilt mit Formel 5.15 und mit den Ausführungen des vorigen Punktes

$$\mu_{To} = \alpha \rho U_e \delta_{vel} F_{Kleb}(y, \delta) \quad (5.18)$$

wobei α eine Modellkonstante mit

$$\alpha = 0.0168 \quad (5.19)$$

ist. δ_{vel} ist die sogenannte „velocity thickness“, vergleiche [15]. Es gilt

$$\text{im inkompressiblen Fall: } \delta_{vel} = \delta_V. \quad (5.20)$$

Zur Ermittlung der Wirbelviskosität μ_T insgesamt ist folgende Regel anzuwenden:

$$\mu_T = \begin{cases} \mu_{Ti} & \text{für } y \leq y_m \\ \mu_{To} & \text{für } y > y_m . \end{cases} \quad (5.21)$$

mit y_m als kleinstem Wert, für den gilt: $\mu_{Ti} = \mu_{To}$

Zum Sinn dieser Modellvorschrift folgendes: Bei $y \rightarrow 0$ gilt $\mu_{Ti} \rightarrow 0$, während μ_{To} endlich groß bleibt, wie aus den Gln. 5.17 und 5.18 gefolgert werden kann. Umgekehrt nimmt μ_{Ti} mit von null beginnendem wachsendem Wandabstand rasch zu, μ_{To} bleibt nahezu konstant, siehe dazu die entsprechenden Resultate des Baldwin - Lomax - Modells (z. Bsp. Seite 86). Jener Wandabstand, wo erstmalig $\mu_{Ti} = \mu_{To}$ wird, wird als y_m bezeichnet. In der Außenschicht nimmt μ_{Ti} zufolge der kleinen Geschwindigkeitsgradienten, Glg. 5.18, wiederum sehr kleine Werte an, die unter jene von μ_{To} sinken können. Damit sind neben y_m weitere Wandabstände möglich, für die $\mu_{Ti} = \mu_{To}$ gilt. Die untere Zeile rechts der geschwungenen Klammer in Glg. 5.21 stellt sicher, daß in der äußeren Schicht für die turbulente Zähigkeit μ_T immer der dazugehörige Wert μ_{To} herangezogen wird, unabhängig davon, wie groß μ_{Ti} ist.

Zur Anwendung dieses Modells muß die Grenzschichtdicke beziehungsweise Verdrängungsdicke bekannt sein.

5.2.7 Das Baldwin - Lomax Modell

Dieses Modell ist dem Cebeci - Smith Modell ähnlich, es ist ebenfalls ein Zweischichtenmodell. Baldwin und Lomax verwenden jedoch anstelle von Grenzschichtabmessungen die Wirbelstärke ω zur Ermittlung der Wirbelviskositäten, siehe [1]. Damit ist der Nachteil, daß man bereits vor Anwendung der Berechnung über die Grenzschicht einigermaßen Bescheid wissen muß, nicht mehr gegeben.

Für ω gilt im allgemeinen dreidimensionalen Fall:

$$\omega = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.22)$$

Gleichung 5.22 vereinfacht sich bei ebenen Problemen zu

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} . \quad (5.23)$$

μ_{Ti} wird jetzt mit

$$\mu_{Ti} = \rho l_{mix}^2 |\omega| \quad (5.24)$$

ermittelt, wobei l_{mix} mit der von Van Driest angegebenen Beziehung, Glg. 5.12, berechnet wird.

Für die Berechnung der Wirbelviskosität der äußeren Schicht geben Baldwin - Lomax eine Beziehung an, die sich an Formel 5.18 anlehnt, jedoch δ_{vel} nicht benötigt. Sie formulieren:

$$\mu_{To} = \rho\alpha C_{cp} F_{wake} F_{Kleb}(y; y_{max}/C_{Kleb}) \quad (5.25)$$

wobei C_{cp} und C_{Kleb} Modellkonstanten sind (für ihre Werte siehe Glg. 5.30). Die Funktion F_{wake} bestimmt im wesentlichen die Größe von μ_{To} in Strömungsrichtung, das ist im Falle der Platte in Richtung der x - Koordinate. Sie wird mit folgender Formel ermittelt:

$$F_{wake} = \min[y_{max} F_{max}; C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}] \quad (5.26)$$

y_{max} ist dabei jener Wert von y , bei dem $l_{mix}|\omega|$ das Maximum erreicht. Für F_{max} gilt

$$F_{max} = \max \left[y|\omega| \left(1 - e^{-\frac{y}{A_0^+}} \right) \right] = \frac{1}{\kappa} \max(l_{mix}|\omega|). \quad (5.27)$$

C_{wk} ist eine Modellkonstante (Glg. 5.30). U_{dif} ist durch

$$U_{dif} = \left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)_{max} - \left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)_{min} \quad (5.28)$$

zu berechnen. Bei Grenzschichten gilt $U_{dif} = U_e$.

Weswegen nun in 5.26 zwei Terme ($y_{max} F_{max}$; $C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}$) herangezogen werden, um F_{wake} zu bestimmen, ist darin begründet, daß das Baldwin - Lomax Modell ein als universell einsetzbares gedacht ist, also für Grenzschichten und freie turbulente Strömungen Gültigkeit haben soll. Wie die Anwendungsbeispiele zeigen, kommt der erste Term bei der Modellierung von Grenzschichten zum Tragen. Das Produkt $y_{max} F_{max}$ ersetzt den Ausdruck $\delta_V U_e$ nach der Clauser'schen Formel (5.15). Der zweite Term, also $C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}$, wird benötigt, um den Verhältnissen bei freien turbulenten Strömungen gerecht zu werden. Er dient dazu, um in Glg. 5.14 den Ausdruck $b(\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min})$ zu ersetzen.

Das Baldwin - Lomax Modell wurde aus dem Wunsch heraus erstellt, Berechnungen durchführen zu können, ohne Abmessungen der Grenzschicht zu kennen. Seine Rechtfertigung liegt auch darin, daß mit ihm etliche verschiedene Strömungsformen durchgerechnet und dabei gute Ergebnisse erzielt wurden. Eine theoretische Begründung, warum für F_{wake} der kleinere der beiden Terme herangezogen wird, konnte in der Literatur nicht gefunden werden. Auch der Ersatz von $\delta_V U_e$ bzw. $b(\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min})$ durch Glg. 5.26 wird theoretisch nicht gerechtfertigt. Im Falle der ebenen Platte kann man die Verwendung von $y_{max} F_{max}$ anstelle von $\delta_V U_e$ doch begründen, siehe das Kapitel "Berechnungsergebnisse" (Kap. 7), Seite 84. Weiters erkennt man durch die Berechnungen auch, daß bei dem in dieser Arbeit behandeltem Problem durch Verwendung des kleineren Terms in Glg. 5.26 tatsächlich die Strömung über der Platte (und keine frei turbulente Strömung) berechnet wird.

Da die Implementierung des Baldwin - Lomax Modells in das Strömungssimulationsprogramm FIDAP das Kernstück der Aufgabenstellung ist, werden die Formeln und Konstanten nachfolgend zusammengefaßt. Es sind dies

$$5.21 \quad \mu_T = \begin{cases} \mu_{Ti} & \text{für } y \leq y_m \\ \mu_{To} & \text{für } y > y_m \end{cases}$$

mit y_m als dem kleinsten Wert, für den $\mu_{Ti} = \mu_{To}$ gilt ,

$$5.24 \quad \mu_{Ti} = \rho l_{mix}^2 |\omega|,$$

$$5.12 \quad l_{mix} = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A_0^+}} \right),$$

$$5.25 \quad \mu_{To} = \rho \alpha C_{cp} F_{wake} F_{Kleb}(y; y_{max}/C_{Kleb}),$$

$$5.26 \quad F_{wake} = \min[y_{max} F_{max}; C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}]$$

mit y_{max} als jenem Wert, wo $l_{mix} |\omega|$ das Maximum hat,

$$5.27 \quad F_{max} = \max \left[y |\omega| \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) \right] = \frac{1}{\kappa} \max(l_{mix} |\omega|)$$

und weiters

$$F_{Kleb}(y; y_{max}/C_{Kleb}) = \left[1 + \left(\frac{y}{(y_{max}/C_{Kleb})} \right)^6 \right]^{-1}. \quad (5.29)$$

Modellkonstanten sind:

$$\alpha = 0.0168, A_0^+ = 26, C_{cp} = 1.6, C_{Kleb} = 0.3, C_{wk} = 1 \quad (5.30)$$

Zu C_{wk} : In [15] und auch hier werden einige Modellkonstanten gegenüber der ursprünglichen Angabe nach Baldwin - Lomax abgeändert, um Konsistenz mit anderen Modellen herzustellen. C_{wk} ist ebenfalls davon betroffen. Obwohl sich durch die Änderungen $C_{wk} = 1$ ergibt, wird die Konstante in den Modellgleichungen beibehalten.

5.3 Mehrgleichungsmodelle

Diese Modelle bauen auf der kinetische Energie k der turbulenten Schwankungsbewegung auf. Die Schwankungsbewegungen werden bereits in den reynoldsgemittelten Gleichungen in Form der Produkte der Geschwindigkeitsschwankungen ($\overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$, usw.) verwendet, und ihre zentrale Rolle bei turbulenten Strömungen ist daher offensichtlich. Definiert ist k folgendermaßen:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (5.31)$$

Die Mehrgleichungsmodelle verwenden eine Bilanzgleichung für die kinetische Energie k der turbulenten Schwankungsbewegung, die sogenannte k - Gleichung. Sie lautet, siehe [15]

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} - \overline{p' u'_j} \right] \quad (5.32)$$

In Glg. 5.32 ist $\rho \frac{\partial k}{\partial t}$ der instationäre, $\rho \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}$ der konvektive Anteil der kinetischen Energie der turbulenten Schwankungsbewegung. Der Ausdruck $\tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$ stellt die Produktionsrate von k dar, ε wird als die Dissipation bezeichnet. Bezüglich der Terme innerhalb der Klammer gilt: $\mu \frac{\partial k}{\partial x_j}$ und $\overline{p' u'_j}$ geben über die Diffusion Auskunft, $\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j}$ beschreibt den turbulenten

Transport von k . Für weitere Darstellungen der k - Gleichung siehe [16] oder [12].

Der Zusammenhang von k zum Turbulenzgrad Tu läßt sich mit Glg. 2.25 zu

$$k = \frac{3}{2}(UTu)^2 \quad (5.33)$$

herstellen.

Über die Verteilung von k , aber auch von $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ und $\overline{w'^2}$ in inneren Grenzschichtbereichen zufolge theoretischer Überlegungen vergleiche Abb. 5.4. Für k^+ gilt dabei

$$k^+ = \frac{k}{u_\tau^2}. \quad (5.34)$$

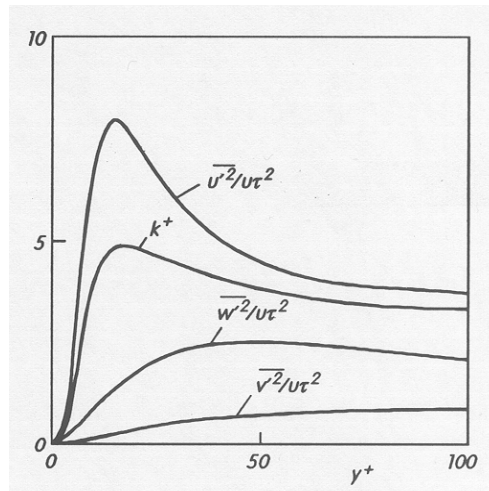


Abbildung 5.4: theoretische Verteilung charakteristischer Größen in wandnahen Bereichen (aus [12])

Zur Dissipation: Zuzolge ihrer Dimension $\frac{m^2}{s^3} \hat{=} \frac{J}{kg \cdot s}$ ist sie auf Massen- und Zeiteinheit bezogene Energie. Sie wird daher in der Literatur auch als (spezifische) Dissipationsrate bezeichnet. Der Ausdruck Dissipationsrate wird hier aber vermieden, um Verwechslungen mit der später noch besprochenen Größe ω zu vermeiden (siehe Unterkapitel 5.3.2).

In den Transportgleichungen wird für ε üblicherweise die durch

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = \nu (\overline{u'_{i,j} u'_{i,j}}) \quad (5.35)$$

definierte Größe verwendet. Der Ausdruck nach Glg. 5.35 stellt nicht die tatsächliche thermodynamische Dissipation dar, sondern nur eine Pseudodissipation, siehe [12], [7].

Strömungsphysikalische Gegebenheiten erlauben für subsonische Strömungen ohne Ablöseerscheinungen in der k - Gleichung für $(-\frac{1}{2}\rho\overline{u'_i u'_i u'_j} - \overline{p' u'_j})$ den Ausdruck $\frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$ zu setzen. σ_k ist eine Modellkonstante. Dadurch erhält man die sogenannte modellierte k - Gleichung:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]. \quad (5.36)$$

Die kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung hat die Dimension $[\frac{m}{sec}]^2$, dadurch ist es möglich \sqrt{k} als Ersatzgröße für Δu in Glg. 5.4 heranzuziehen. Diese Überlegung wird Prandtl zugeschrieben. Er wollte damit die relativ starre Bindung der auf dem Mischungsweglängenansatz beruhenden Turbulenzmodelle an die Strömungsgeometrie lockern. Wird k proportional zu Δu gesetzt, kann mit den Glgn. 5.4 und 5.8

$$\mu_T = \text{konst.} \rho k^{1/2} l_T \quad (5.37)$$

angegeben werden. Bei der Formulierung von Glg. 5.37 wird von l_{mix} auf l_T übergegangen, da Glg. 5.37 auch mit ε und ω (siehe Unterkapitel 5.3.2) in Zusammenhang gebracht wird. l_T wird turbulentes Längenmaß genannt, es charakterisiert den turbulenten Strömungsbereich. l_{mix} und l_T sind nicht ident.

Wenn angenommen wird, daß ε und l_T alleine über die kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung in Beziehung zu setzen sind, so gilt, damit diese Abhängigkeit dimensionsrichtig ist,

$$\varepsilon \sim k^{3/2} / l_T \quad (\sim \dots \text{ proportional}). \quad (5.38)$$

Mit den Glgn. 5.38 und 5.37 läßt sich für die kinematische Wirbelviskosität ν_T die Beziehung

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{für den Parameter } C_\mu \text{ gilt: } C_\mu \approx 0.09) \quad (5.39)$$

herleiten. Aufgrund der Dimensionsrichtigkeit von Glg. 5.38 und 5.39 darf nicht auf ihre Allgemeingültigkeit geschlossen werden. Ihre Herleitung ist mit ähnlichen Unsicherheiten verbunden, wie jene des logarithmischen Wandgesetzes.

Massenbilanz, Impulsbilanz und die k - Gleichung stellen noch kein geschlossenes Gleichungssystem dar. Um es zu schließen, kann erstens das turbulente Längenmaß l_T (Eingleichungsmodelle) oder zweitens die Dissipation ε ($k - \varepsilon$ - Modell) modelliert werden. Eine dritte Möglichkeit besteht in der Einführung neuer Größen.

5.3.1 Das $k - \varepsilon$ - Modell

Bei diesem Modell wird, um das Gleichungssystem zu schließen, eine Transportgleichung für ε hergeleitet. Als Ergebnis folgt, siehe [15]

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right], \quad (5.40)$$

wobei $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ und σ_ε Modellkonstanten sind.

Die turbulente Zähigkeit wird durch die aus Glg. 5.39 folgenden Beziehung

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.41)$$

ermittelt.

Mit dem $k - \varepsilon$ - Modell können weder die laminare Unterschicht noch die Übergangsschicht berechnet werden. Es können jedoch ein Teil des logarithmischen Bereiches und der Defektbereich modelliert werden, sodaß für y^+ folgende Bedingung eingehalten werden soll:

$$30 < y^+ < 300 \quad (5.42)$$

Trotz dieser Einschränkungen ist das $k - \varepsilon$ - Modell als robustes Modell bekannt, mit dem zuverlässige Ergebnisse erzielt werden können. Dies hängt auch damit zusammen, daß wegen 5.42 allzu feine Wandelemente mit großem Seitenverhältniss, welche zu Instabilitäten neigen, vermieden werden. Um bei der Anwendung des $k - \varepsilon$ - Modells auf praxisnahe Strömungen gut mit Meßdaten übereinstimmende Ergebnisse zu erhalten, werden etliche Modifikationen vorgeschlagen. Auch in FIDAP sind solche verfügbar.

5.3.2 Das $k - \omega$ - Modell

Zur Modellbildung wird hier die Größe ω verwendet, welche von Kolmogorov eingeführt wurde. Er deutete ω als die Dissipationsrate von Energie bezüglich Volums- und Zeiteinheit. Der Ausdruck Dissipationsrate ist jedoch mißverständlich, da auch ε gelegentlich als solche bezeichnet wird. Deshalb soll hier, nach dem Vorbild verschiedener Literatur, siehe z. Bsp. [5], ω als turbulente Frequenz bezeichnet werden.

Kolmogorov hat dargelegt, daß es sinnvoll ist,

$$\omega \sim \frac{k^{1/2}}{l_T} \quad (5.43)$$

zu setzen. Zur Begründung dieses Ansatzes folgendes: Physikalisch betrachtet erfolgt die Dissipation durch die Zerreibung der kleinen Wirbel. Für diesen Vorgang können die großen Wirbel verantwortlich gemacht werden. Für letztere sind l_T und k charakteristische Größen.

Aus Beziehung 5.43 und Glg. 5.37 erhält man, wenn l_T eliminiert wird,

$$\mu_T = \rho \frac{k}{\omega}. \quad (5.44)$$

Zufolge dieser Gleichung muß, um dimensionskonform zu sein, ω die Einheit $\frac{1}{s}$ haben.

Für ω stellte Kolmogorov durch dimensionsanalytische und physikalische Überlegungen folgende Gleichung auf:

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -\beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma \mu_T \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]. \quad (5.45)$$

Bei der Weiterentwicklung des Modells wurde Glg. 5.45 von verschiedenen Anwendern modifiziert. Für das $k - \omega$ - Modell nach [15] werden neben Glg. 5.44 die Beziehungen

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (5.46)$$

(5.46 stellt die k - Gleichung dar) und

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (5.47)$$

(als Transportgleichung für ω) verwendet. Zusätzlich gilt noch:

$$\varepsilon = \beta^* \omega k \quad \text{und} \quad l_T = \frac{k^{1/2}}{\omega}. \quad (5.48)$$

α , β , β^* , σ , und σ^* sind Modellkonstanten, siehe [15]. Die Glgn. 5.48 stehen in Übereinstimmung mit den Beziehungen 5.37, 5.38 und 5.43.

Kapitel 6

Programmtechnische Umsetzung des Baldwin - Lomax - Modells

6.1 Allgemeines

Die Umsetzung des Baldwin - Lomax - Modells erfolgte durch das Programmpaket FIDAP [5]. Standardmäßig stellt es einige Turbulenzmodelle zur Verfügung, nicht jedoch daß hier zu behandelnde. FIDAP erlaubt etliche Größen, so auch die Viskosität, über Subroutinen festzulegen. Man kann dadurch weitere Turbulenzmodelle für Berechnungen heranziehen. Von dieser Möglichkeit wurde Gebrauch gemacht.

6.2 Erläuterungen zu FIDAP

Allgemeines Ziel von Strömungsberechnungen ist die Ermittlung eines Strömungsfeldes. Dazu wird bei den numerischen Lösungsverfahren das zu untersuchende Gebiet zunächst diskretisiert. Bei den Finite - Element - und Finite - Volumen - Verfahren erfolgt dabei die Aufteilung des Gesamtbereiches in kleine Teilbereiche. Die weitere Vorgangsweise besteht bei den Finite - Element - Verfahren – und damit auch in FIDAP – darin, daß innerhalb der einzelnen kleinen Bereiche rein virtuell Strömungsfelder angesetzt werden. In die dazu erforderlichen Ansatzfunktionen werden zunächst unbestimmte Koeffizienten aufgenommen. Durch Anpassung der virtuellen Strömungsfelder an die exakte Lösung des betrachteten Strömungsproblems können die Koeffizienten bestimmt werden. Dadurch hat man eine Näherungslösung gewonnen. In der Folge soll dieses Verfahren näher erläutert werden.

Zunächst wird das Strömungsfeld in ein Geschwindigkeits-, Druck-, und Temperaturfeld aufgespalten. Der Ansatz für eine Feldgröße wird aus den stetigen Ansatzfunktionen und den zugehörigen Koeffizienten zusammengesetzt. Wird z. Bsp. der Druck betrachtet, so gilt $p(\mathbf{x}, t) = \Psi_1(\mathbf{x})P_1(t) + \Psi_2(\mathbf{x})P_2(t) + \dots = \underline{\Psi}^T \underline{P}(t)$. \mathbf{x} symbolisiert die allgemeine Lagekoordinate, sie wird durch die kartesischen Koordinaten $x, y (z)$ festgelegt. $\underline{\Psi}$ ist der Vektor der stetigen Ansatzfunktionen, \underline{P} jener der Koeffizienten. Die Koeffizienten werden in FIDAP als zu diskreten Punkten, den Knotenpunkten zugehörig gesetzt. Durch die Ermittlung der Koeffizienten liegen die Lösungen in den Knotenpunkten vor. Werden die Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeiten mit $\underline{\varphi}_x, \underline{\varphi}_y (\underline{\varphi}_z)$ und für die Temperatur mit $\underline{\vartheta}$, weiters die zugehörigen Koeffizientenvektoren jeweils mit $\underline{U}_x, \underline{U}_y (\underline{U}_z)$ und \underline{T} bezeichnet, so lauten die

Ansätze

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \underline{\varphi}_i^T \underline{U}_i(t) \quad \text{mit } i = x, y, (z), \quad (6.1)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \underline{\Psi}^T \underline{P}(t), \quad (6.2)$$

und

$$t(\mathbf{x}, t) = \underline{\vartheta}^T \underline{T}(t). \quad (6.3)$$

Bei Verwendung des $k - \varepsilon$ - Modells oder des $k - \omega$ - Modells kommen noch zwei Transportgleichungen (je eine für k und für ε bzw. ω) hinzu. Gleichung 6.2 kann umgangen werden (Penaltyformulierung, siehe Seite 59). Glg. 6.3 fällt bei isothermen Problemen weg.

Im folgenden soll davon ausgegangen werden, daß die Grundgleichungen unter Verwendung des Operators D in der Form

$$D(u_i, \rho, p, t) = 0 \quad (6.4)$$

angegeben sind. Die exakte Lösung muß Glg. 6.4 erfüllen. Werden die Ansätze Gln. 6.1 bis 6.3 in die Glg. 6.4 eingesetzt, erhält man im allgemeinen von null verschiedene Werte. Sie werden Restwerte genannt. Die Restwerte hängen auch von den Koeffizientenvektoren und somit von den einzelnen Koeffizienten ab. Zuzufolge der Galerkin'schen Methode kann man, um eine mehr oder weniger gute Annäherung der Ansätze an die exakte Lösung zu erreichen, die Koeffizienten folgendermaßen bestimmen: Man bildet zunächst das innere Produkt von Restwert und Ansatzfunktion über den ganzen Bereich V (Volumen) und setzt dieses null:

$$\int_V (\underline{R}_i \underline{\varphi}_i) dV = 0. \quad (6.5)$$

Durch Ausführung dieser Integrationen (siehe Glg. 6.8) erreicht man ein von den Koeffizienten abhängiges algebraisches Gleichungssystem. Ohne Berücksichtigung zeitlicher Abhängigkeiten kann man dafür

$$\underline{\underline{K}}^e \underline{U}^e = \underline{F}^e \quad (6.6)$$

schreiben, wobei der hochgestellte Index e den Bezug zum einzelnen Teilelement andeuten soll. \underline{F}^e ist der Lastvektor. \underline{U}^e , der Koeffizientenvektor, geht aus \underline{U}_i , \underline{P} und \underline{T} hervor. Es werden für alle Elemente die Beziehungen nach Glg. 6.6 gebildet. Anschließend wird durch sie ein globales, das heißt ein den gesamten Strömungsbereich umfassendes Gleichungssystem aufgebaut. Für diesen Gleichungsaufbau wird das Faktum verwendet, daß die Knoten an den Rändern des Elementes gleichzeitig Knoten der Nachbarelemente sind. Damit müssen die Lösungen der Randknoten auch Lösungen der Nachbarelemente sein. Man formuliert das globale Gleichungssystem zu

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{F}. \quad (6.7)$$

$\underline{\underline{K}}$ wird globale Systemmatrix und \underline{F} der globale Lastvektor genannt. Der Vektor \underline{u} enthält die durch die Rechnung aufzufindenden Koeffizienten der Lösung, er stellt also den globalen

mathematischen Vektor der Unbekannten dar. Die Startbedingungen des Geschwindigkeitsfeldes werden über den Vektor \underline{u} berücksichtigt. Der Vektor \underline{F} enthält die Randbedingungen für den Druck, und auch die Randbedingungen für die Geschwindigkeiten werden über ihn in das Gleichungssystem eingebracht. Die Elemente von \underline{K} gehen aus jenen der \underline{K}^e - Matrizen hervor. Sie sind wegen der konvektiven Terme in den Grundgleichungen vom globalen Vektor \underline{u} abhängig und müssen daher in jedem Iterationsschritt neu berechnet werden.

Die durch die Diskretisierung erhaltenen Elemente haben im allgemeinen verschiedene Formen. Da es rechentechnisch vorteilhaft ist, mit gleichen Elementen zu arbeiten, werden die verschieden geformten Elemente auf Einheits-elemente transformiert. Dazu wird der zur Strömungsbeschreibung verwendete $x-y-(z-)$ - Raum in einen $r-s-(t-)$ - Raum übergeführt (Interpolation der Geometrie). Dafür werden Interpolationsfunktionen herangezogen. Sind sie von gleicher Ordnung wie die Ansatzfunktionen, so spricht man von isoparametrischen Elementen. Die Durchführung der Integrationen erfolgt im $r-s-(t-)$ - Raum durch ein numerisches Näherungsverfahren (Gauß'sche Integration). Dabei wird das allgemeine Integral $I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s, t) dr ds dt$ angenähert durch

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n F(r_i, s_j, t_k) H_k H_j H_i. \tag{6.8}$$

n ist dabei die Integrationsordnung. H_k, H_j und H_i stellen die Integrationsgewichte dar. r_i, s_j und t_k sind die Integrationsstützstellen oder Integrationspunkte. Deren Lage, vergleiche Abb. 6.1, ist dahingehend optimiert, daß durch die Summation größtmögliche Annäherung an das Integral erreicht wird.

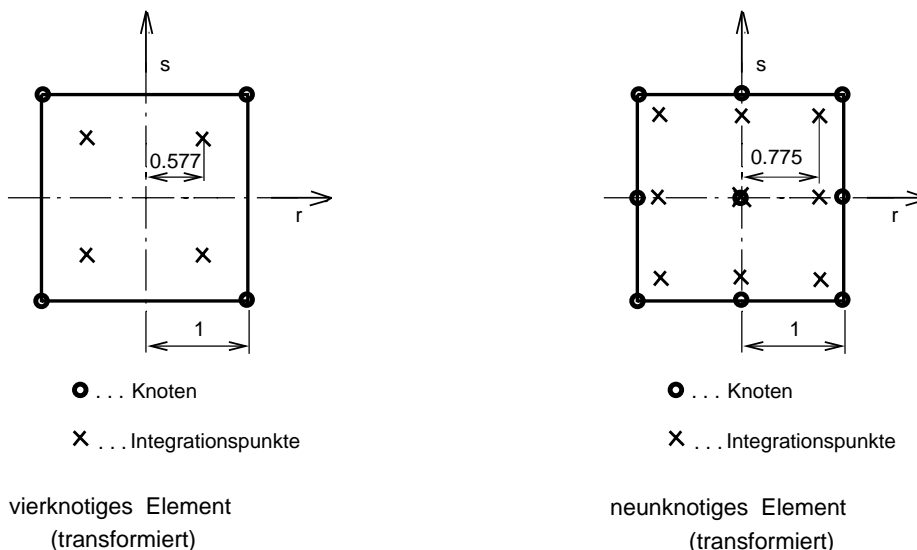


Abbildung 6.1: vier- und neunknotiges Element, jeweils transformiert

Obwohl also die Lösungen von $\underline{K} \underline{u} = \underline{F}$ in den Knotenpunkten ermittelt werden (die Geschwindigkeitsvektoren sind in den Knotenpunkten lokalisiert), erfolgt ein wesentlicher Teil

der Berechnung des Strömungsfeldes mit Hilfe der Integrationstützstellen. So muß auch die Zähigkeit in den Integrationspunkten bekannt sein oder ermittelt werden. (Hinweis: FIDAP stellt die Integrationspunkte wieder in den rücktransformierten Koordinaten, also den Koordinaten des Strömungsfeldes zur Verfügung).

Um ein schwankungsfreies Druckfeld zu erhalten, ist es vorteilhaft, den Druck überhaupt um eine Ordnung niedriger zu interpolieren (Brezzi - Babuska - Formulierung). Zur Ermittlung des Druckes besteht auch die Möglichkeit, ihn nicht direkt in den Ansatz einzubringen, sondern die Penalty - Formulierung zu verwenden. Dazu wird die Massenbilanz herangezogen, und

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\varepsilon p \quad (6.9)$$

gesetzt. ε ist der Penalty - Parameter. Durch die Penalty - Formulierung verkleinert sich der Ansatz Gln. 6.1 bis 6.3 und damit das gesamte zu lösende Gleichungssystem, da Glg. 6.2 wegfällt. Es müssen jedoch Penalty - Matrizen ermittelt werden. Nach durchgeführter Berechnung wird der Druck aus

$$p = \frac{1}{-\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.10)$$

ermittelt.

Da die Matrix \underline{K} wegen der konvektiven Terme in den Grundgleichungen von \underline{u} abhängig ist, handelt es sich bei 6.7 um ein nichtlineares Gleichungssystem. Dieses muß iterativ gelöst werden, wozu man es zu

$$\underline{K}(\underline{u}_i)\underline{u}_{i+1} = \underline{F} \quad (6.11)$$

formuliert. Zur Lösung der allgemeinen Glg. 6.11 sind in FIDAP mehrere Lösungsverfahren verfügbar, wobei zwischen vollgekoppelten und segregierten unterschieden wird. Bei ersteren wird das gesamte Gleichungssystem gelöst, ein besonders einfaches ist die sogenannte Picard - Iteration (sukzessive Substitution). Bei den segregierten Verfahren wird das Gleichungssystem aufgespalten und die einzelnen Teile sequentiell gelöst. Sie benötigen gegenüber den vollgekoppelten Verfahren zwar weniger Rechenspeicher, es sind jedoch mehr Iterationen zur Erreichung der Konvergenz vonnöten. Welches Verfahren das günstigere ist, ist problemspezifisch.

Probleme bei der Lösung von 6.11 können dadurch entstehen, daß es zu Schwankungen im Geschwindigkeitsfeld (sogenannten 'wiggles'), aber auch in der Druck- und Temperaturverteilung kommen kann, wodurch die Lösung unbrauchbar wird. Zur Unterbindung dieser Oszillationen sind in FIDAP etliche Maßnahmen vorgesehen, wobei es dem Benutzer mehr oder weniger freigestellt ist, diese auch einzusetzen. Die wichtigsten sind Relaxation und Upwinding, wobei beide in FIDAP in mehreren Varianten angeboten werden. Nachfolgend werden nur die Grundsätze beider Maßnahmen aufgezeigt.

Zur Erörterung der Relaxation sei in 6.11 anstelle des Vektors \underline{u}_{i+1} der Vektor \underline{u}^* verwendet, \underline{u}^* soll also der Lösungsvektor nach der i - ten Iteration sein. Zur Ermittlung der \underline{K}

- Matrix für die $i+1$ -te Iteration (also $\underline{K}(u_{i+1})$) wird nun nicht der Vektor \underline{u}^* verwendet, sondern einer mit Hilfe von \underline{u}_i ermittelter. Dazu wird die Formel

$$\underline{u}_{i+1} = \alpha \underline{u}_i + (1 - \alpha) \underline{u}^*; \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.12)$$

verwendet, wobei α als Relaxationsfaktor bezeichnet wird. Damit erreicht man, daß die Lösung weniger forciert dem Ergebnis zugeführt wird (d.h. ein „entspanntes“ Lösungsverfahren). α kann für jede einzelne Variable festgelegt werden.

Beim Upwinding wird über die Ansatzfunktionen in das Gleichungssystem 6.11 eingegriffen. Die einfach aufgebauten Ansatzfunktionen besitzen zunächst eine gewisse Symmetrie. Für das Upwinding werden sie nun verzerrt in die Berechnung eingebracht, sodaß die Elemente in der \underline{K} -Matrix mit anderer Gewichtung als ohne Upwinding berechnet werden. So wird z. Bsp. beim einfachen Streamline - Upwinding die Ansatzfunktion bei stromaufliegenden Bereichen der Elemente erhöht und bei stromabliegenden erniedrigt, wodurch ein Stabilisierungseffekt für das ganze Strömungsfeld erfolgt.

Da die Berechnung iterativ erfolgt, müssen entweder Abbruchsschranken und/oder die maximale Anzahl der Iterationen festgelegt werden. Beides ist in FIDAP gleichzeitig vorgesehen. Wird die Abbruchsschranke vor Erreichen der vorgegebenen maximalen Iterationszahl unterschritten, wird abgebrochen. Abbruchsschranken werden mit Hilfe von Normen des Lösungsvektors (umfaßt alle Variablen, also außer den Geschwindigkeiten gegebenenfalls auch die Temperatur, den Druck, k und ε bzw. ω) definiert.

6.3 Erstellung der Subroutine

Zur Programmierung von Subroutinen wird von FIDAP die Programmiersprache FORTRAN 77 vorgesehen. Das vom Benutzer zu erstellende Unterprogramm für die turbulente Viskosität wird für jedes Element angewendet. Zur Programmerstellung werden vom Hauptprogramm etliche Größen, aber immer nur für das augenblicklich in Berechnung befindliche Element übergeben. Diese Übergabeparameter können verwendet werden, um durch das Unterprogramm die Viskosität zu ermitteln. Liegt sie dann nach Programmdurchlauf vor, wird sie vom übergeordneten Programm, also dem FIDAP - Solver, übernommen. Wie man an den Gleichungen des Baldwin - Lomax Modelles sieht, sind für seine Programmierung auch Größen erforderlich, die nicht durch die Übergabeparameter bereitgestellt werden (z. Bsp. die Wandschubspannung). Da sie nicht durch das Hauptprogramm übergeben werden, ist es notwendig sie innerhalb der Subroutine von Files einzulesen. Diese Files werden so angelegt, daß sie auch vom Unterprogramm aktualisiert, und somit immer wieder neu überschrieben werden. Zusätzlich zu diesen unbedingt erforderlichen Datenfiles werden auch Files zum Protokollieren der Ergebnisse eingerichtet. Damit sie handhabbar sind, müssen sie klein gehalten werden. Dazu werden im Laufe der Rechnung ihre nicht mehr aktuellen Inhalte gelöscht. Dabei wird so vorgegangen, daß abwechselnd in zwei Files geschrieben wird. Ist in einem die maximale Anzahl der einzutragenden Werte erreicht (festgelegt durch die Anzahl der Aufrufe), so wird im anderen begonnen mitzuschreiben. Bei Eintragung der ersten Daten wird es rückgesetzt. Für dieses Protokollierungsverfahren wird zusätzlich ein Kontrollfile eingerichtet. Die mitgeschriebenen Daten werden unter anderem zur Auswertung herangezogen. Weiters ist durch die Datenprotokollierung eine Kontrolle über die Subroutine und

das Zusammenwirken dieser mit dem Hauptprogramm gegeben. Während der Erstellung des Programmes und auch zur Fehlersuche ist es immer wieder notwendig einzelne Daten (z. Bsp. Zwischenergebnisse) zu kontrollieren. Dies ist ebenfalls durch Datenausgabe in Files leicht möglich.

6.4 Wahl der Eingabeparameter - bezogene Größen

Vorausgeschickt sei, daß für die Berechnungen eine Platte endlicher Länge l herangezogen wird. Die Eingabeparameter sollen zunächst, um der Rechnung eine gewisse Allgemeingültigkeit zu verleihen, als bezogene Größen eingeführt werden. Die Abmessungen werden dabei auf die Plattenlänge l , Geschwindigkeiten auf die Anströmgeschwindigkeit U und die Dichte auf eine Bezugsdichte ρ_B bezogen,

$$\frac{x}{l} = x^*; \quad \frac{y}{l} = y^*; \quad \frac{u}{U} = u^*; \quad \frac{v}{U} = v^*; \quad \frac{\rho}{\rho_B} = \rho^*. \quad (6.13)$$

Man kann die Einführung der neuen, mit "*" gekennzeichneten Größen mathematisch auch rein nur als Übergang auf neue Zahlenwerte formulieren, wobei dann l , U und ρ_B die Einheiten für x^* bzw. u^* bzw. ρ^* sind. Bei einer derartigen Sicht können x^* , u^* und ρ^* doch wieder als dimensionsbehaftete Größen interpretiert werden.

Es ergibt sich für die Zähigkeit μ^* wegen

$$Re_l^* = \rho^* \frac{U^* l^*}{\mu^*}, \quad (6.14)$$

daß bei $\rho = \rho_B$

$$\mu^* = \frac{1}{Re_l^*} \quad (6.15)$$

gilt.

Bei gleichen Reynoldszahlen liegt strömungsmechanische Ähnlichkeit vor. Die Ergebnisse der dimensionslosen Rechnung können daher auf gewünschte, praxisnahe Werte übertragen werden. Dazu ermittelt man z. Bsp. zunächst Re_x und weist dem Strömungsfeld die zugehörigen Lösungen der dimensionslosen Darstellung zu, indem man $Re_x^* = Re_x$ setzt. Mit Hilfe der Gln. 6.13 rechnet man dann auf die tatsächlichen Gegebenheiten zurück.

Als Reynoldszahl am Plattenende wird

$$Re_l = Re_l^* = 2 \times 10^7, \quad (6.16)$$

d.h. $\mu^* = 0.5 \times 10^{-7}$ gewählt. Für Anwendungen des Baldwin Lomax - Modells im Turbomaschinenbau ist die so gewählte Reynoldszahl ausreichend hoch, siehe z. Bsp. [9]. Zum Zwecke des Vergleiches der Resultate mit Versuchsergebnissen wäre es in einigen Fällen interessant, Reibungs- und Widerstandsbeiwerte auch bei größeren Reynoldszahlen zu ermitteln. Es wird jedoch darauf verzichtet. Der Grund dafür ist, daß zur Modellierung größerer Plattenlängen wesentlich mehr Elemente erforderlich wären und damit die Datenfiles unhandlich groß und

die Datenauswertung sehr erschwert werden würde.

Um netzunabhängige Ergebnisse zu erhalten, müssen für Berechnungen mit dem Baldwin - Lomax - Modell Netzgeometrien gewählt werden, deren wandnächste Elemente Abmessungen in der Nähe von $y^+ = 1$ oder sogar noch kleiner haben. Wird FIDAP zur Netzgenerierung als Plattenlänge $l = 1$ vorgeschrieben, so ist es mit seinem Netzerstellungsprogramm nicht möglich dermaßen feine Netze zu generieren (Fehlermeldungen bei der Netzerstellung). Um doch Verhältnisse für kleinere y^+ - Werte zustande zu bringen, muß daher von Eingabewerten, die sich durch die dimensionslose Darstellung ergeben, Abstand genommen werden.

Die erforderlichen Eingabeparameter sind die geometrischen Abmessungen, die laminare dynamische Zähigkeit μ_l und zumindest an einer Grenze des Rechengebietes die Geschwindigkeiten. Zu ihrer Festlegung werden sie in der Folge als dimensionsbehaftet interpretiert, da dadurch die Herleitung der erforderlichen Umrechnungen anschaulicher wird. Das Rechenprogramm FIDAP operiert nicht mit Dimensionen. Es ist daher möglich den Eingabeparametern andere als die Basiseinheiten (das sind m, kg und s) zuzuordnen. Von dieser Option wird Gebrauch gemacht, da die nötige Netzfeinheit bei der Wahl der Plattenlänge zu $l = 10$ erreicht werden kann. Um den Zusammenhang zur dimensionslosen Darstellung einfacher zu gestalten, werden die einzugebenden Größen nun durch nachfolgend vorgestellte Maßnahme ermittelt. Es werden geometrische Abmessungen in der Einheit dm eingegeben. Die Basiseinheiten s und kg werden aufrecht gehalten. Damit nun einheitenkonform gerechnet wird, ist folgendes zu beachten: Die meisten Größen (z. Bsp. die Kraft) werden in abgeleiteten Einheiten angegeben. Für diese Größen müssen nun Einheiten verwendet werden, die von dm, s und kg hergeleitet werden. Konkret bedeutet dies z. Bsp. für die Geschwindigkeit, daß sie nun in dm/s anzugeben ist. Werden daher als Bezugsgrößen $l = 1\text{m}$, $v = 1\text{m/s}$, $\rho = 1\text{kg/m}^3$ gewählt (die Zahlenwerte werden auch bei der dimensionslosen Darstellung verwendet), so resultieren dafür bei Wahl der Längeneinheit zu 1dm für das Eingabefile die folgenden Zahlenwerte:

$$l = 10, \quad v = 10; \quad \rho = 0.001; \quad \mu = 0.05 \times 10^{-7} \quad (6.17)$$

Den ausgegebenen Werten, die in der Folge mit dem hochgestellten Index F versehen werden, liegen nun auch die Einheiten dm, kg, und s zugrunde. Zahlenwerte für eine dimensionslose Rechnung folgen, indem man die Größen wieder auf die Einheiten m, kg und s umrechnet. Konkret gilt z. Bsp. für die Schubspannungen wegen $1\text{N/m}^2 = 1\text{kg}/(\text{s}^2\text{m}) = 0.1\text{kg}/(\text{s}^2\text{dm})$, daß man die in FIDAP erhaltenen Zahlenwerte mit dem Faktor zehn multiplizieren muß, um Zahlenwerte für die dimensionslose Darstellung zu erhalten. Die zur Datenauswertung notwendigen Beziehungen erhält man so zu

$$\begin{aligned} ZW(\tau^*) &= 10 \times ZW(\tau^F); & ZW(\mu^*) &= 10 \times ZW(\mu^F); \\ ZW(k^*) &= 0.01 \times ZW(k^F); & ZW(\varepsilon^*) &= 0.01 \times ZW(\varepsilon^F); \\ ZW(\omega^*) &= 1 \times ZW(\omega^F) \\ & & (ZW \quad \dots \quad \text{Zahlenwert}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

6.5 Wahl der Rand- und Anfangsbedingungen

Zunächst soll festgehalten werden, daß ein rechteckiges Rechengebiet festgelegt wird, wobei vor Plattenbeginn ein Anlaufgebiet vorgesehen wird, siehe Abb. 6.2. Zur Auswertung werden in den meisten Fällen die Strömungsverhältnisse über ungefähr der Plattenmitte herangezogen. Ungefähr deswegen, da eine Stelle gewählt wird, über der elementmittige Knoten liegen. Die x - Koordinaten von den in Elementmitte liegenden Knoten fallen mit den x - Koordinaten dreier Integrationsstützstellen des Elementes zusammen. Somit hat man bei einer solchermaßen gewählten Auswertestelle die genauen Lösungen des Geschwindigkeitsfeldes (zugänglich durch das FDOUT - File) und auch der Viskositäten und anderer Größen (zugänglich über die Datenfiles) vorliegen. Es ist bei Auswertung an dieser Stelle keine Interpolation der Größen erforderlich.

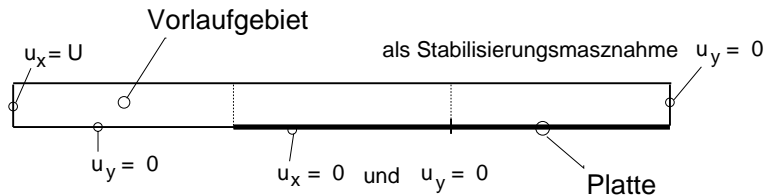


Abbildung 6.2: Randbedingungen

Als Anfangsbedingung wurde $u_x = U$ gesetzt. Weiters sind auf Grund der zu untersuchenden Strömung folgende Randbedingungen einsichtig: am Strömungseintritt (linker Rand) $u_x = U$, am unteren Rand des Vorlaufgebietes aus Symmetriegründen $u_y = 0$ und an der Platte $u_x = u_y = 0$. Bei den übrigen Rändern sind bezüglich der Geschwindigkeiten keine Vorgaben zu setzen (Zur Lösung des Differentialgleichungssystems wird für diese Berandungen von FIDAP dann die sogenannte "Traction Free Condition" herangezogen). Das heißt, auch am Abströmrand rechts ist eine Festlegung von u_y eigentlich nicht vorzusehen.

Nun ist es mit diesen Randbedingungen nicht möglich, mittels $k - \omega$ - oder Baldwin - Lomax - Modells konvergente Lösungen zu erreichen. Es kommt am Plattenende zu Oszillationen (sogenannten "Wiggles"), sowohl bei vier- als auch bei neunknotigen Elementen. Ursache dafür sind aller Wahrscheinlichkeit nach die extrem langgezogenen Elemente in Plattennähe. Als einfachste Maßnahme, solche Oszillationen zu vermeiden und damit gut konvergierende Lösungen zu erhalten, stellt sich die Einführung der Randbedingung $u_y = 0$ am Abströmrand heraus. Dies ist zunächst unbefriedigend, da man ja erwarten muß, daß die Berechnungsergebnisse verfälscht werden. Es werden daher durch Netzänderung bzw. -erweiterung andere Maßnahmen gefunden (siehe Seite 65 beziehungsweise Abbn. 6.3 u. 6.4) um Oszillationen zu vermeiden. Rechnungen mit dem $k - \omega$ - Modell und Verwendung der geänderten bzw. erweiterten Netze zeigen, daß die Lösungen an der Auswertestelle x_{ausw}^* nur marginal von jenen abweichen, die sich bei Anwendung des einfachen Netzes mit der Randbedingung $u_y = 0$ am Abströmrand ergeben. Daher wurde für alle Rechnungen am Austrittsrand als Randbedingung $u_y = 0$ gesetzt.

6.6 Wahl der Netzparameter

Zunächst sollte man meinen, daß man bei der Netzerstellung bei dieser besonders einfachen Geometrie große Freiräume hat. Einschränkungen ergeben sich jedoch sofort, wenn man ein extrem feines Netz am Plattenrand fordert, um y^+ klein zu halten. Damit die Netzerstellung durch den FIDAP - Preprozessor auch gewährleistet ist, wird die Plattenlänge mit 10, das Rechengebiet über der Platte mit 1 festgelegt. Literaturberichte von Berechnungen der turbulenten Grenzschicht über der Platte zeigen ähnlich aufgebaute Netze, siehe [2] oder [14]. Es ist daher die hier gewählte Höhe (y^*) in Relation zur Plattenlänge ausreichend. Auch wird in den in der Literatur aufgezeigten Berechnungen üblicherweise ein Vorlaufgebiet modelliert.

Da die in der Subroutine nötigen Datenein- und ausgaben und die Erstellung der Datenfiles lange Rechenzeiten bedingen, und auch die mitprotokollierte Datenmenge bearbeitbar bleibt, wird man weiters versuchen, die Elementanzahl so gering wie möglich zu halten. Die Subroutine ist nicht auf kurze Rechenzeit optimiert, da zunächst Zugänglichkeit zu den Daten und Übersichtlichkeit der Routine im Vordergrund stehen. Weiters werden netzunabhängige Lösungen angestrebt. Das heißt, daß eine gewisse Intervallanzahl sowohl über der Platte als auch über der Plattenlänge unbedingt nötig ist, wenn man die durch die Modellannahmen resultierenden Ergebnisse einigermaßen gut durch das Finite - Elemente - Verfahren erreichen will.

Um die Netzparameter sinnvoll festzulegen, werden hauptsächlich mit dem $k - \omega$ - Modell einige verschiedene Netze durchgerechnet, teilweise sowohl mit vier- als auch mit neunknotigen Elementen. Dabei stellt sich heraus, daß vierknotige Elemente nicht brauchbar sind, da sie die Verhältnisse an der Platte (d.h. bei $y \rightarrow 0$) nicht richtig berechnen. Es werden an den wandnächsten Knoten die Geschwindigkeiten als zu groß ausgewiesen. Damit nehmen auch die Geschwindigkeitsgradienten an der Wand, und mit ihnen die Wandschubspannung zu hohe Werte an. Auch das Konvergenzverhalten wird ungünstig beeinflusst. Es müssen daher neunknotige Elemente verwendet werden.

Die zuvor gestellten Anforderungen werden durch das in Abb. 6.3 dargestellte Netz einigermaßen gut erfüllt, sodaß dieses für die Berechnungen herangezogen wird.

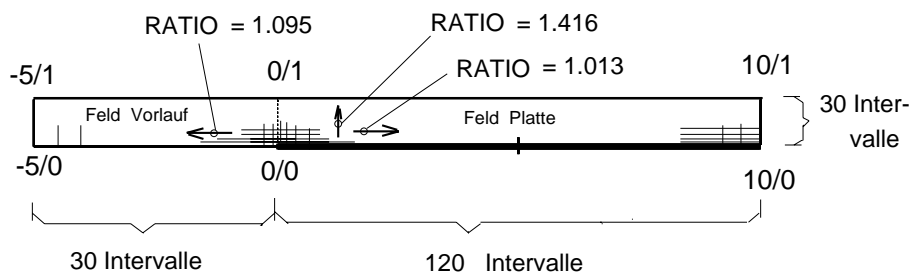


Abbildung 6.3: Netzparameter

In Abb. 6.3 ist $RATIO$ der geometrische Stufungsfaktor des Netzes. Kleinste Intervalle sowohl in x - Richtung als auch in y - Richtung sind bei Punkt $0/0$. Wie bereits erwähnt wurde, wurden, um die Randbedingung $u_y(l) = 0$ als annehmbar zu begründen, Vergleichsrechnungen durchgeführt. Die einfachste Möglichkeit um ohne $u_y(l) = 0$ oszillationsfreie Ergebnisse zu erhalten ist, die langen Elemente am Plattenende zu verkürzen. Um die Elementanzahl klein zu halten, müssen dabei in der Plattenmitte längere Elemente gewählt werden als an den Rändern. Für eine solche Konfiguration sind in FIDAP entsprechende Befehle (PCEN, usw.) vorgesehen. Damit können rechts und auch links unten nahezu quadratische Elemente bei gleichzeitig geringer Elementanzahl generiert werden. Nun werden dabei jedoch die Elemente rechts und links oben sehr hoch. Die Folge davon ist, daß es bei der Berechnung rechts oben zu Oszillationen kommt. Man muß daher zu ihrer Vermeidung einerseits die unteren Elemente nicht zu lang, andererseits die oberen nicht zu hoch werden lassen, ist also im Endeffekt auf Probieren angewiesen. Und es ist natürlich äußerst ungewiß, ob es überhaupt gelingt, Netze zu bilden, mit denen bei der Berechnung keine Oszillationen auftreten. Im Falle der hier behandelten ebenen Platte gelingt es doch mit den in Abb. 6.4 aufgezeigten Parametern.

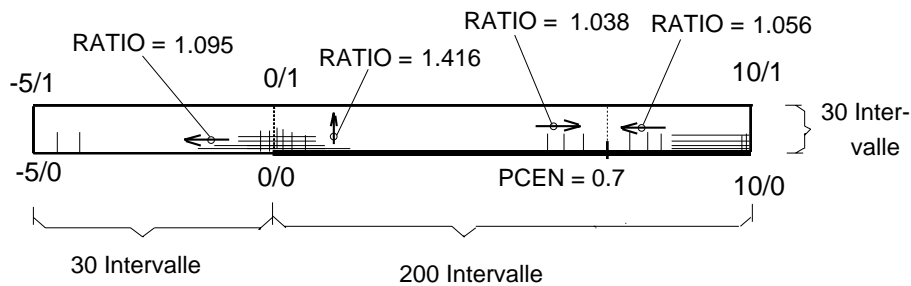


Abbildung 6.4: Netzmodifikation durch Intervalländerungen

Die über der Platte jeweils längsten Elemente links bzw. rechts von PCEN liegen an ihm an. PCEN wurde absichtlich leicht außermittig gewählt, um die Resultate bei der Auswertestelle x_{ausw}^* von unter Umständen möglichen charakteristischen Merkmalen der längsten Elemente freizuhalten.

Eine andere, auch theoretisch besser fundierte Methode, um stabile Lösungen zu erhalten ist die Strömung mit einem Nachlaufgebiet zu versehen. In diesem neu hinzukommenden Bereich wird ein Netz erstellt, dessen links liegende Elemente annähernd die gleiche geometrische Form wie die Elemente am Ende des Strömungsfeldes über der Platte haben. Von diesen Elementformen wird dann kontinuierlich auf annähernd quadratische Formen am rechten Rand des Nachlaufgebietes übergegangen, siehe Abb. 6.5

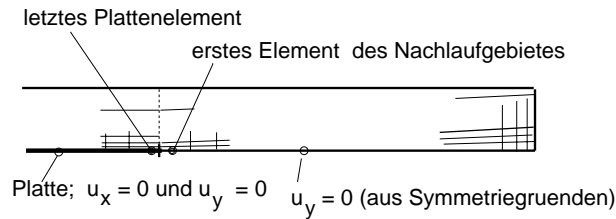


Abbildung 6.5: Netzzerweiterung mit Nachlaufgebiet

Wichtig dabei ist, daß das erste Element des Nachlaufgebietes ungefähr gleich lang wie das letzte Plattenelement ist (betreffs der Höhen muß bereits wegen des notwendigen kontinuierlichen Netzüberganges Übereinstimmung vorliegen). Dies ist deswegen vonnöten, da die Stelle $x = l$ eine Unstetigkeit im Strömungsfeld bezüglich der Randbedingungen ist. Werden letztes Plattenelement und das erste Element mit stark unterschiedlicher Länge gewählt, kommt es wieder zu Instabilitäten und Oszillationen.

6.7 Weitere Parameter

Diese sind im wesentlichen die bei Verwendung des $k - \varepsilon$ - bzw. $k - \omega$ - Modells notwendigen Vorgaben der kinetischen Energie k bzw. Dissipation ε . k folgt bei Annahme eines Turbulenzgrades aus Glg. 5.33. Für Tu wurde $Tu = 1\%$ gewählt ($\rightarrow k = 1.5 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$). Die Wahl von Werten für ε ist problematischer. Laut Glg. 5.35 ist ε abhängig von den Geschwindigkeitsschwankungen. Letztere sind jedoch im allgemeinen nicht bekannt. Ein allgemeingültiger Zusammenhang von ε zu erfaßbaren Größen kann nicht angegeben werden. Zum Beispiel wird Glg. 5.38 allein an Hand ihrer Dimensionsrichtigkeit begründet, ihre Allgemeingültigkeit ist damit nicht bewiesen. Es existieren zwei Vorschläge um ε zu bestimmen, nachfolgend wird auf sie kurz eingegangen.

Zum einem wird so vorgegangen, daß man ein turbulentes Längenmaß l_T aus den Gegebenheiten der Strömungsgeometrie ableitet und dann mittels einer Glg. wie 5.48 die Dissipation ermittelt. Eine Erklärung, warum globale Geometrieabmessungen für die Zähigkeit maßgeblich sind, kann in der Tatsache großflächiger Wirbel gefunden werden. Man muß damit rechnen, daß solche auch in der freien, nicht mehr zur Grenzschicht gehörigen Strömung vorliegen (nicht zuletzt deswegen werden in Windkanälen Turbulenzsiebe eingebaut, die zur Zerschlagung dieser großen Wirbel dienen). Diese Wirbelbildung in großem Maßstab – die über globale Abmessungen bestimmt wird – beeinflusst die turbulente Zähigkeit stark. Vergleiche dazu auch die Couette - Strömung, wo sich die Wirbelbildung in der Mitte der Platten so gestaltet, daß dort $\tau_T(y) = \tau_W = \text{konst.}$ ist.

Eine zweite Möglichkeit ist, ε über die turbulente Viskosität μ_T und die turbulente kinetische Energie zu bestimmen. Dabei kann man μ_T unter der Bedingung

$$10\mu_L < \mu_T < 1000\mu_L \quad (6.19)$$

mehr oder weniger frei wählen. ε folgt dann mit Hilfe von Glg. 5.41.

Von ersterer Variante wurde hier nicht Gebrauch gemacht, da man, um die Wahl der charakteristischen Länge relativ treffsicher zu gestalten, entweder auf Vorlagen oder weitere theoretische Überlegungen angewiesen ist. Es wurde daher μ_T mit $30 \times \mu_L$ festgelegt. Mit zuvor gewähltem Tu folgt für die Dissipation $\varepsilon = 1.350 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$. Der relativ kleine Wert von 30 wurde deshalb gewählt, damit die turbulente Zähigkeit in der Grenzschicht wesentlich höher wird als in der ungestörten Strömung, wodurch die Interpretation der Ergebnisse besser veranschaulicht wird und Vergleiche mit dem Baldwin - Lomax - Modell auch auf vernünftiger Basis stehen.

In der Praxis wird die Güte der Wahl von k und ε unter anderem danach beurteilt, wie sich beide Größen im Verlauf der ungestörten Strömung ändern. Ist dabei die Änderung von k und ε gering, soll man demnach gut passende Werte gewählt haben.

Kapitel 7

Berechnungsergebnisse

7.1 Zusammenfassung der Angaben

Neben dem Baldwin - Lomax - Modell sind Berechnungen auch mit dem $k - \omega$ -, $k - \varepsilon$ - und in einigen Fällen mit dem Modell des einfachen Prandtl'schen Mischungsweglängenansatzes durchgeführt worden. Für die in diesem Kapitel dargestellten und diskutierten Ergebnisse gilt bezüglich der Angaben: Es wurde für die Berechnungen das in Abb. 6.3 dargestellte Netz zugrundegelegt, wobei als Randbedingungen jene nach Abb. 6.2 verwendet worden sind. Im Falle des $k - \omega$ - und $k - \varepsilon$ - Modells wurden als Anfangsbedingungen für die Dissipation k und die turbulente Frequenz ω die in Unterkapitel 6.7 angeführten Werte herangezogen. Es sind dies $k = 1.5 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ und $\varepsilon = 1.350 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$. Zur Angabe in FIDAP mußten Netzgeometrie, Rand- und Anfangsbedingungen umgerechnet werden, um die Berechnung mit FIDAP zu ermöglichen. Die Resultate zufolge FIDAP wurden rückgerechnet, damit liegen die obigen Randbedingungen den hier in weiterer Folge dargestellten Ergebnissen zugrunde.

Es ist darauf aufmerksam zu machen, daß mit anderen als den hier angeführten Parametern Vergleichsrechnungen angestellt worden sind. Diese dienen hauptsächlich zur Validierung der hier erzielten Ergebnisse, siehe z. Bsp. Unterkapitel 6.5. Auch wird durch sie überprüft, ob das Netz nicht zu grob ist, um die Eigenheiten der jeweiligen Modelle in den Resultaten in angemessener Weise zum Ausdruck zu bringen. Die Vergleichsrechnungen bringen jedoch kaum weitere Informationen bezüglich des Verhaltens und des Zusammenhanges der in diesem Kapitel dargestellten Größen, als wie sie bereits durch die Berechnungen mit obigen Rand- und Anfangsbedingungen vorliegen. Es wurde daher auf die Darstellung von Ergebnissen der Vergleichsrechnungen verzichtet.

7.2 Allgemeine Bemerkungen zur Auswertung

Zur Auswertung und Darstellung der Berechnungsergebnisse wurde das Programmsystem IDL [10] herangezogen. Durch die Verwendung von IDL können auch die von FIDAP errechneten Werte den experimentellen Daten und den sich zufolge der theoretisch hergeleiteten Beziehungen ergebenden gegenübergestellt werden. Bei diesen Vergleichen treten in einigen Fällen überraschende Fakten zutage.

Zur Datengewinnung wird im wesentlichen auf das FDOUT - File, das FIOUT - File und

die zur Auswertung zusätzlich erstellten Datenfiles zugegriffen. Das FDOUT - File ist das Ergebnisfile des FIDAP - Solverlaufes, das FIOUT - File enthält die Datenprotokolle von Postprozessingläufen. Bei der Erstellung der einzelnen Diagramme hat es sich als zweckmäßig erwiesen nicht immer auf die angesprochenen, oft umfangreichen Datenfiles zuzugreifen. Die für das Diagramm erforderlichen Werte werden daher in den meisten Fällen aus den Datenfiles extrahiert, und in eigenen Files zwischengespeichert. Weiters müssen in einer Vielzahl der Fälle die extrahierten Daten zur Diagrammerstellung zusätzlich der Größe nach sortiert werden.

7.3 Geschwindigkeitsprofile

In Abb. 7.1 sind die dimensionslosen Geschwindigkeiten u^* über der ebenfalls dimensionslos gemachten Höhe über der Platte y^* aufgetragen (Die Verwendung des sog. Rotta - Clauser - Parameters $\delta^* \frac{U}{u_\tau}$ bietet hier keine Vorteile, da δ^* und u_τ bei den verschiedenen Turbulenzmodellen unterschiedlich sind).

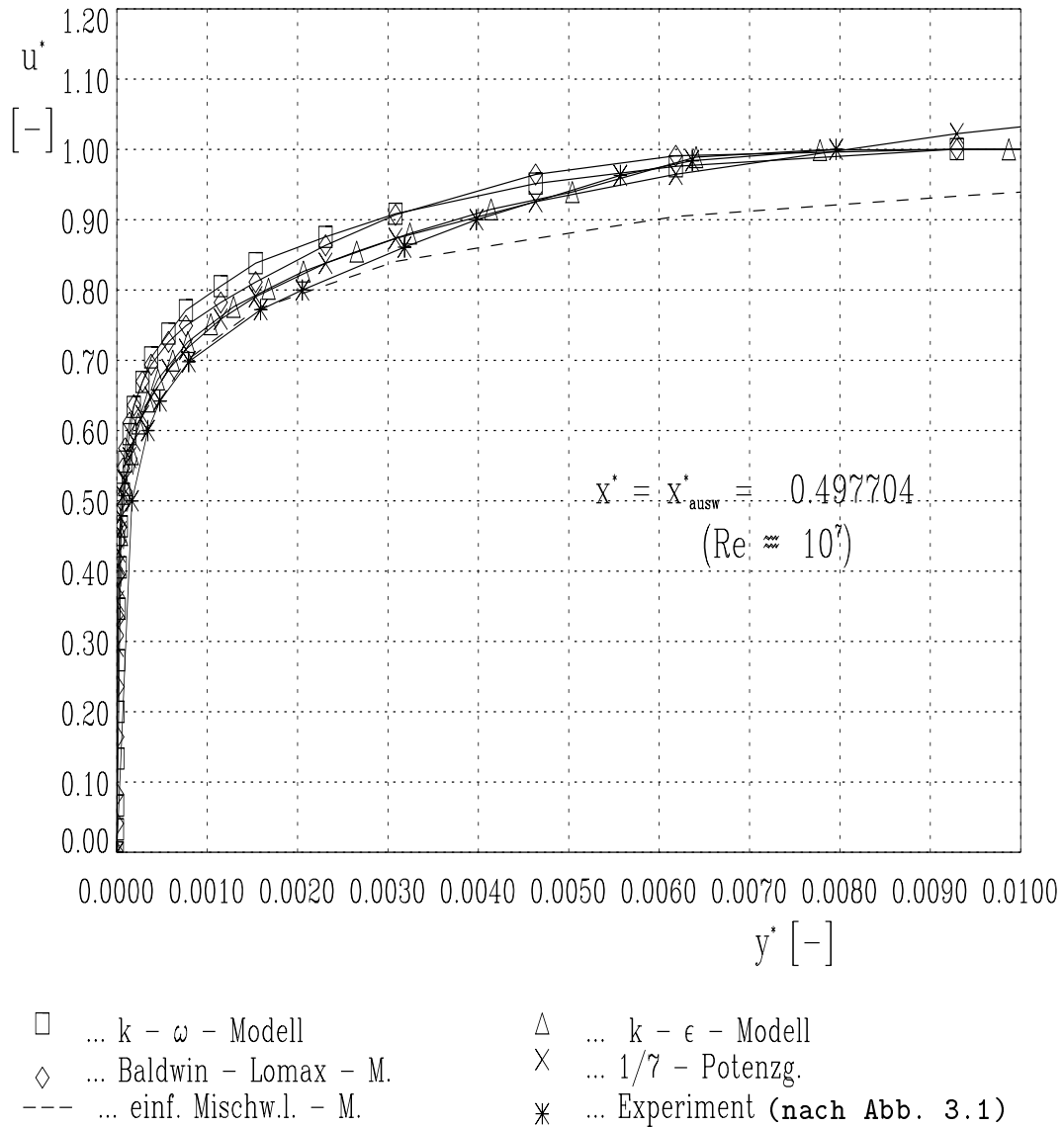


Abbildung 7.1: Geschwindigkeitsprofile

Die Berechnung der Werte nach dem $1/7$ - Potenzgesetz erfolgte mit Glg. 4.24, wobei für δ der sich durch Glg. 4.56 ergebende Wert verwendet wurde. Die experimentellen Daten wurden Abb. 3.1 entnommen. Ihre Eintragung in Abb. 7.1 erfordert ebenfalls die Kenntnis einer Grenzschichtdicke. Da in [11] keine näheren Aussagen zu δ nach Abb. 3.1 gefunden werden, wird für δ ebenfalls der aus Glg. 4.56 sich ergebende Wert verwendet. Nicht in das Diagramm eingetragen werden konnte das Geschwindigkeitsprofil zufolge des Defektansatzes, da es von nicht unmittelbar zugänglichen Daten abhängt. Jedoch gilt nach dem Defektansatz, daß für $y^* > \delta$ die Geschwindigkeit $u^* = 1$ ist.

Aus Abb. 7.1 erkennt man, daß die Ergebnisse des Baldwin - Lomax -Modells gut mit

den experimentellen Daten übereinstimmen. Aber auch das $1/7$ - Potenzgesetz liefert gut an das Experiment angepaßte Ergebnisse innerhalb der Grenzschicht. Keine Übereinstimmung ist natürlich außerhalb der Grenzschicht vorhanden. Gute Ergebnisse werden auch durch das $k - \epsilon$ - Modell erreicht. Das $k - \omega$ - Modell liefert im Grenzschichtinnenteil nicht so überzeugende Resultate, am Grenzschichttrand sind die Ergebnisse gut. Konträr dazu sind die Resultate zufolge des einfachen Mischungsweglängenansatzes. Durch diesen werden vor allem am Grenzschichttrand stärkere Abweichungen von den experimentellen Daten ausgewiesen.

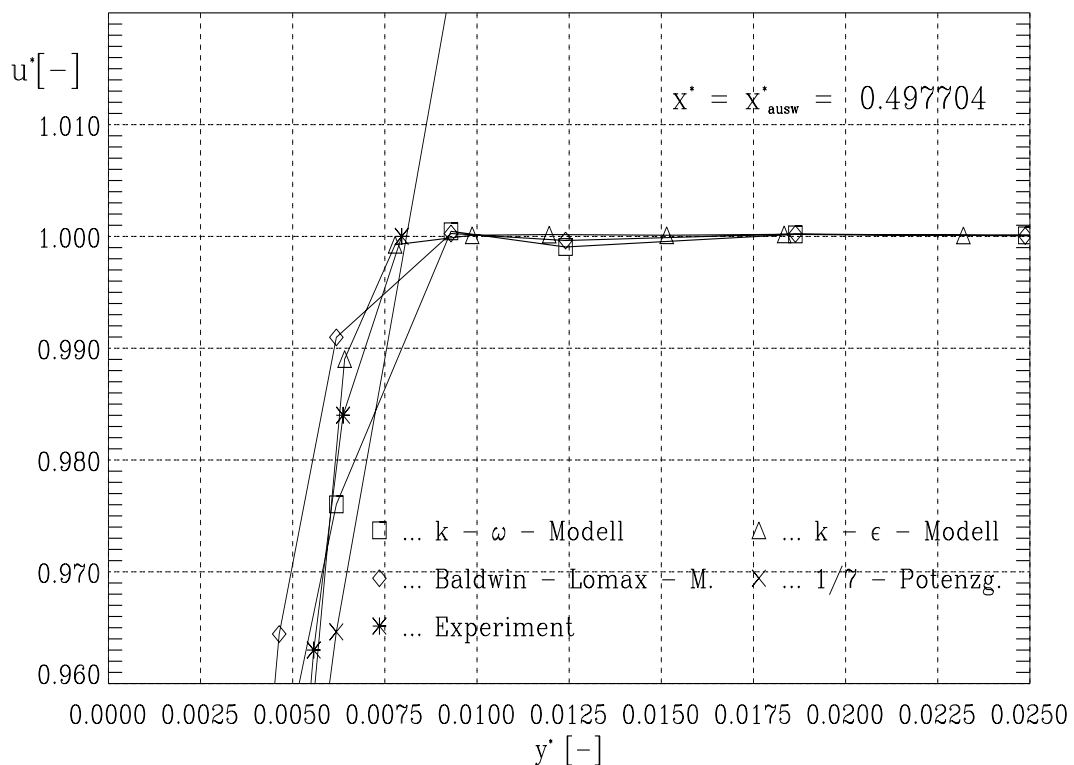


Abbildung 7.2: Geschwindigkeitslösungen am Grenzschichttrand

Aus Abb. 7.2 erkennt man, daß bei allen Modellen für $y^* \rightarrow \infty$ eine Annäherung von u^* gegen eins erfolgt, auch wenn diese nicht kontinuierlich ist, da außerhalb der Grenzschicht noch leichte Schwankungen im Geschwindigkeitsfeld feststellbar sind. Diese Schwankungen wurden hier nicht näher untersucht, sie sind aber insofern von Bedeutung, da durch sie die Angabe einer 99% - Grenzschichtdicke nicht ganz unproblematisch ist. Der Grenzschichttrand wird von allen Modellen ziemlich übereinstimmend zwischen $0.0075 < y^* < 0.010$ ausgewiesen. Bemerkenswert ist auch, daß die Geschwindigkeitslösungen ziemlich rasch von den in der Grenzschicht zunehmenden Werten auf die in der ungestörten Strömung konstanten Werte übergehen.

Für die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe ist die dimensionslose Darstellung u^+ über y^+ üblich, wobei die y^+ - Achse logarithmisch skaliert wird um wandnächste Bereiche gut

zu erfassen. Die wichtigsten Resultate sind in Abb. 7.3 dargestellt.

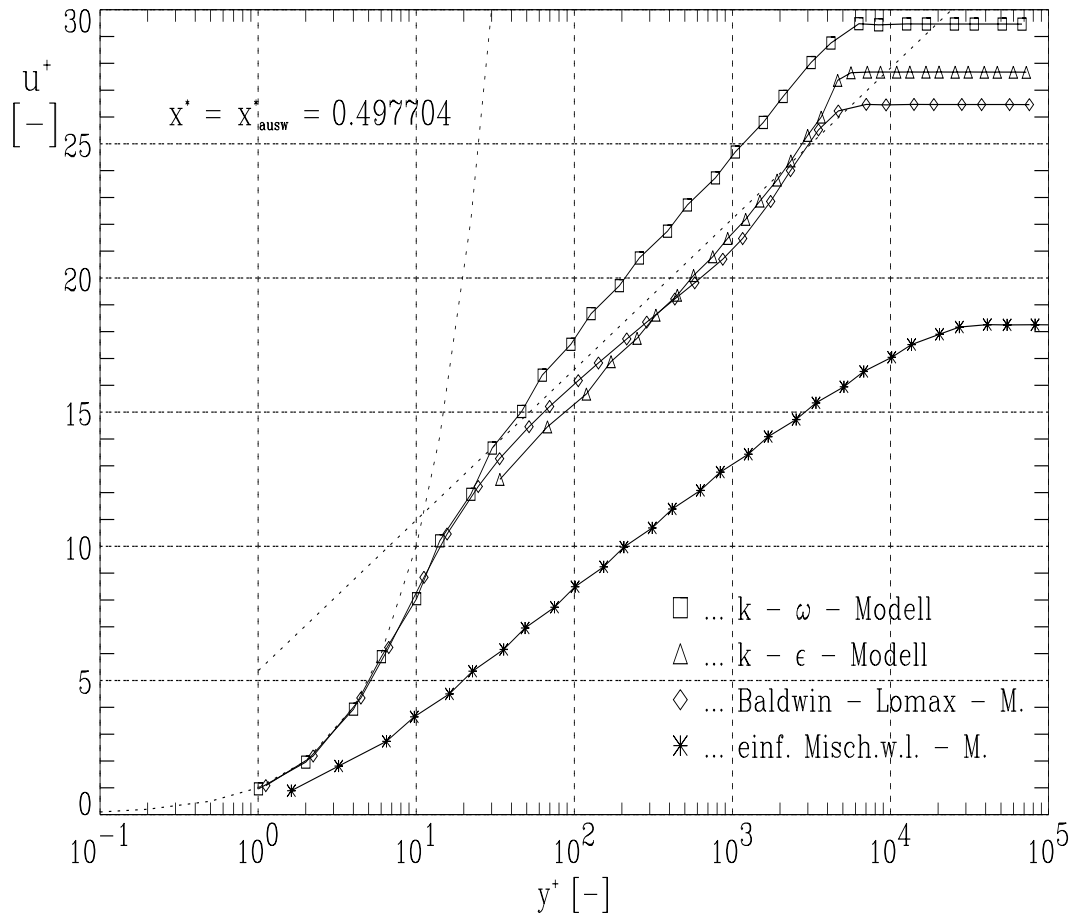


Abbildung 7.3: u^+ über y^+ - Darstellung

Die punktierten Linien in Abb. 7.3 stellen die in Kapitel 4 hergeleiteten Beziehungen Glg. 4.15 und 4.19 dar. Deutlich erkennbar ist, daß in Wandnähe sowohl das $k - \omega$ - Modell als auch das Baldwin - Lomax - Modell gute Übereinstimmung mit Glg. 4.15 zeigen. Beide Modelle liefern auch im Übergangsgebiet gute Ergebnisse. Mit dem $k - \epsilon$ - Modell können hier die laminare Unterschicht und der Übergangsbereich nicht dargestellt werden, da dort keine Daten auf Elementbasis vorliegen. Es muß bei seiner ordnungsgemäßen Anwendung das plattennächste Intervall so groß sein, daß die Bedingung $y^+ > 30$ eingehalten wird. Im äußeren Teil ist bei den Ergebnissen des $k - \epsilon$ - Modells und des Baldwin - Lomax - Modells ein deutlich ausgebildeter Defektbereich erkennbar. Die Darstellung dieses Bereiches gelingt mit dem $k - \omega$ - Modell nicht. Die Abweichung von u^+ am Grenzschichtaußenrand gegenüber dem $k - \epsilon$ - beziehungsweise Baldwin - Lomax - Modell ist dadurch begründet, daß beim $k - \omega$ - Modell die Wandschubspannung kleiner ausgewiesen wird. Mit dem einfachen Mischungswegansatz werden nicht so gute Resultate wie mit den anderen Turbulenzmodellen erreicht. Die große Abweichung am Grenzschichtaußenrand, aber auch die Abweichungen in der laminaren Unterschicht resultieren daher, daß der Mischungswegansatz die Wandschubspannung

τ_W als zu groß berechnet. τ_W hat ja zufolge Glgn. 4.12 und 4.14 bzw. 4.13 einen unmittelbaren Einfluß auf u^+ und y^+ . Da u^+ des waagrechten Teils der Kurven ($y^+ > 10000$) von der Reynoldszahl abhängig ist, wurde auf die Eintragung experimenteller Daten verzichtet.

In der Literatur werden bei Berichten von Berechnungen der turbulenten Plattengrenzschicht auch üblicherweise Diagramme u^+ über y^+ angegeben, vergleiche z. Bsp. [2]. Diesen Simulationen liegen verschiedenste, teilweise gegenüber den hier verwendeten, weiterentwickelte Turbulenzmodelle zugrunde. Auch in diesen Angaben wird u_{max}^+ durch die unterschiedlichen Modelle auch meist verschieden groß ausgewiesen. Weiters wird der Defektbereich in der Mehrzahl der Fälle nicht deutlich ausgewiesen, vor allem Finite - Volumen - Verfahren scheinen zu dessen Berechnung weniger gut geeignet zu sein. Hingewiesen werden soll darauf, daß die Gegenüberstellung der Resultate dieser Berechnungen zu Abb. 7.3 zeigt, daß die Abweichung der hier erreichten Ergebnisse von experimentell bestimmten Daten durchaus im üblichen Rahmen liegt.

7.4 Grenzschicht- und Verdrängungsdicken

Bei Diagrammen von Grenzschichtdicken treten die Schwierigkeiten bei der Festlegung der Grenzschichtdicke bei turbulenten Strömungen, aber auch die Problematik der doch endlich großen finiten Elemente deutlich zutage. Wie bereits aus Abb. 7.2 ersichtlich ist, liefern Simulationsergebnisse, von Schwankungen abgesehen, ein Konvergieren von $u^* \rightarrow 1$ für $y^+ \rightarrow \infty$. Da nun u^* im endlichen nicht erreicht wird, ist man, so wie im laminaren Fall, zur Grenzschichtcharakterisierung auf die Verwendung von sogenannten Prozentgrenzschichtdicken angewiesen (z. Bsp. einer 99% - Grenzschichtdicke δ_{99}). Bei der Herleitung des Defektansatzes und des 1/7 - Potenzgesetzes wird die Grenzschichtdicke δ jedoch so in die Ansätze aufgenommen, daß ihr die Bedeutung einer 100% - Schichtdicke zukommt. (vergleiche z. Bsp. die Ableitung des Defektansatzes, wo gilt, daß für $\delta^* = 1$ auch $\overline{u^*} = 1$ ist). Um nun doch eine gemeinsame Vergleichsbasis zwischen Theorie und Simulationen zu haben, wurde folgendes gemacht: Es wurde zunächst δ mit Glg. 4.37 berechnet. Damit konnte dann eine Grenzschichtdicke zufolge eines Geschwindigkeitsprofils nach dem 1/7 - Potenzgesetz mit $y^* = \delta(0.99)^7$ ermittelt werden. Sie wurde in das Diagramm zusätzlich zur Gesamtgrenzschichtdicke des 1/7 - Potenzgesetzes (in den Abb. hier als 100% - Schichtdicke bezeichnet) eingetragen. Bei der Ermittlung dieser beiden Schichtdicken wurde, anders als in den Abb. 4.4 und 4.5 kein laminares Anlaufstück berücksichtigt. Das heißt, es ist vorausgesetzt, daß von Plattenbeginn an turbulente Strömung vorliegt. Bis auf die letzte angesprochene Gesamtgrenzschichtdicke sind alle anderen in Abb. 7.4 eingetragenen Kurven 99% - Grenzschichtdicken. Da beim Defektansatz die Ermittlung des Geschwindigkeitsprofils aufwendig ist, wird eine Prozentgrenzschichtdicke zufolge diesem auch nicht in Abb. 7.4 aufgenommen.

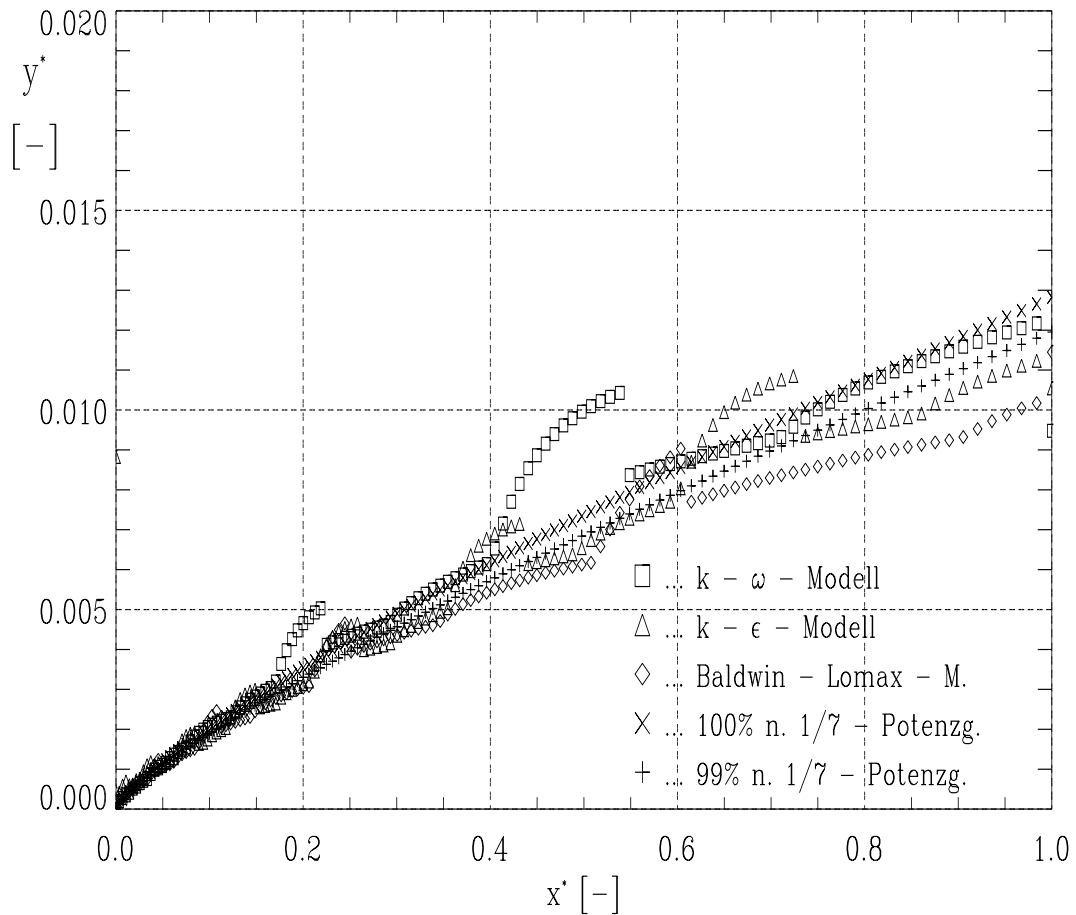


Abbildung 7.4: Grenzschichtdicken

Auffällig ist, daß die Grenzschichtentwicklungen zufolge der Berechnungsergebnisse über der Plattenlänge starken Schwankungen unterliegen. Die Ursachen dafür sind in zwei Faktoren zu suchen. Erstens ist das gewählte Finite - Element - Netz ein für die Aufgabenstellung fast zu grobes. Dadurch übt auch die Form der Ansatzfunktionen auf das Ergebnis bezüglich Abb. 7.4 starken Einfluß aus. Zweitens wurde die Auswertung nicht auf die spezifischen Gegebenheiten der Geschwindigkeitslösung angepaßt. Der 99% - Grenzschichtpunkt wurde mit dem Graphikprogramm IDL durch lineare Interpolation gewonnen. Bemerkenswert ist noch, daß der FIDAP - Postprozessor wesentlich "glattere" Konturlinien ermittelt. Diese Schwankungen der Grenzschichtentwicklungen zufolge der Simulationsergebnisse gehen bei Verwendung von kleineren als 99% - Grenzschichtdicken rasch zurück, vergleiche Abb. 7.5.

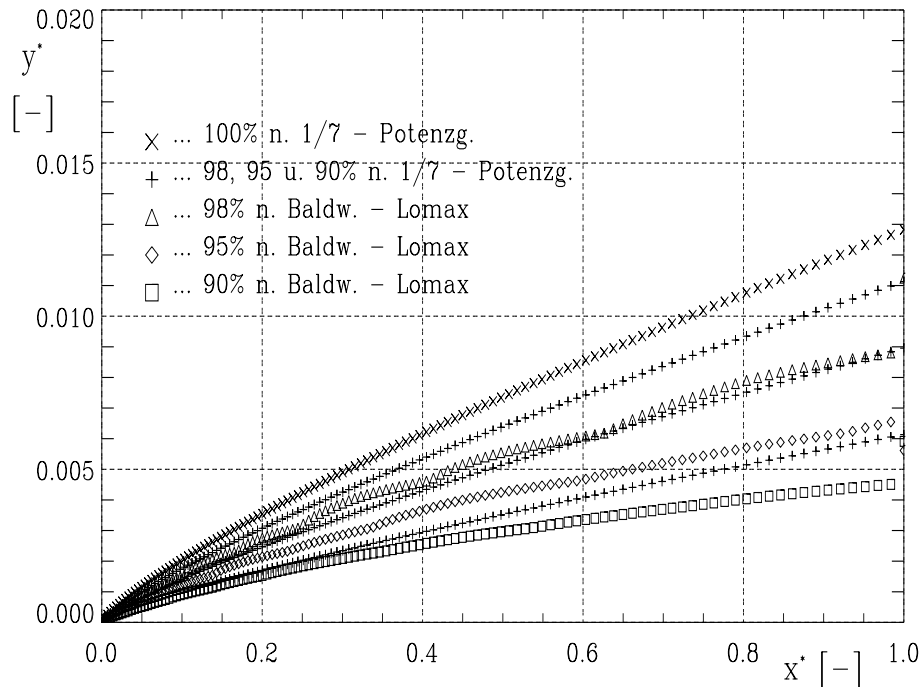


Abbildung 7.5: Prozentgrenschichtdicken - Gegenüberstellung

In Abb.7.5 werden die 98% -, 95% - und 90% - Grenzschichtdicken des Baldwin - Lomax Modells den entsprechenden des 1/7 - Potenzgesetzes gegenübergestellt.

Der Verlauf der Verdrängungsdicken über der Plattenlänge wird vom genauen Aussehen der Strömung an der Plattenvorderkante empfindlich beeinflusst. Problematisch wird dies insofern, da die in Kapitel 4 hergeleiteten Beziehungen für die turbulente Grenzschicht und auch FIDAP - Simulationen zur Strömungsberechnung an der Plattenvorderkante zufolge der Theorie nicht geeignet sind. Die mit den Gleichungen nach Kapitel 4 theoretisch ermittelte Verdrängungsdicke weicht von jenen, die sich auf Grund von Simulationen mit den verschiedenen Turbulenzmodellen ergeben, am Plattenbeginn stark ab, siehe Abb. 7.6.

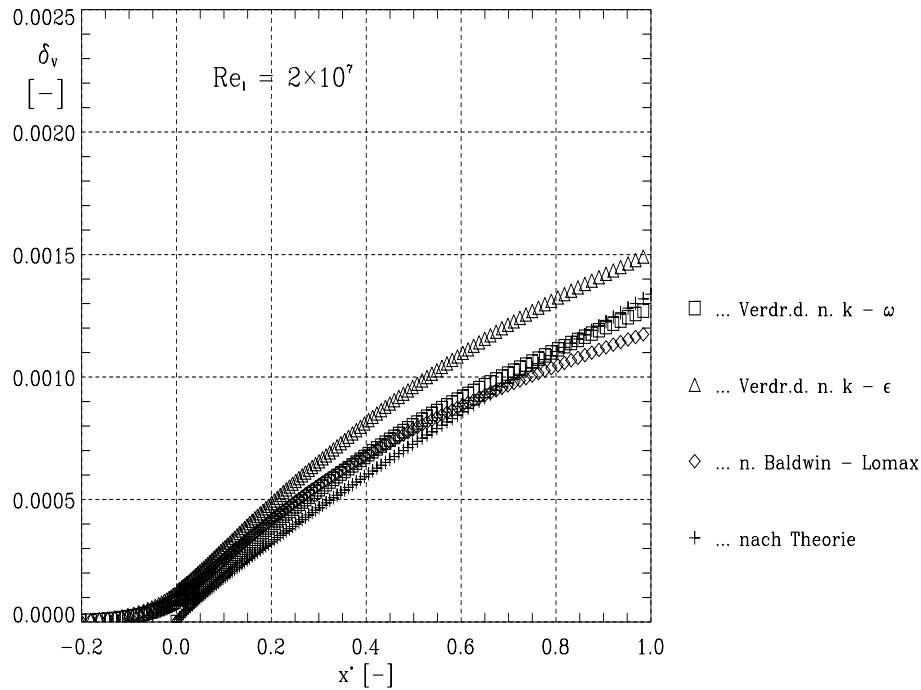


Abbildung 7.6: Verdrängungsdicken

δ_v zufolge der Theorie wurde mit Glg. 4.75 ermittelt. Bevor die Problematik der Ergebnisse bezüglich der Verdrängungsdicken kurz diskutiert wird, soll noch einmal darauf hingewiesen werden, daß sowohl die verwendeten Formeln, als auch die Simulationen von der Voraussetzung des Einsetzens der Turbulenz an der Plattenvorderkante ausgehen. Es sind die angegebenen theoretischen Beziehungen für Verdrängungsdicken eng an den Reibungsbeiwert gebunden, siehe z. Bsp. Glg. 4.38 oder 4.55. Durch sie werden Verdrängungsdicken nur bei Vorhandensein eines Plattenelementes – und somit beginnend erst über der Platte – berechnet. Die tatsächliche Strömung wird jedoch in kleinen Bereichen vor der Platte von der Existenz der Plattenkante beeinflusst. Diese Beeinflussung ist auch bei Laminarströmung gegeben. Durch die Simulationsergebnisse werden Verdrängungsdicken in einem relativ großen Gebiet vor der Platte auch ausgewiesen (es wird jedoch turbulent gerechnet). Bei Verwendung von finiten Elementen kommt es bei Strömungsberechnungen zu einem sogenannten Massendefekt, das heißt, daß die Massenbilanz nicht exakt erfüllt wird. Inwieweit dieser die Ergebnisse in Abb. 7.6 beeinflusst, wird hier nicht weiter untersucht.

Auf eine nähere Analyse der Strömung an der Plattenvorderkante wird verzichtet, da zum einen, um die Sprungstelle zu vermeiden, aller Voraussicht nach anders aussehende, die Problematik berücksichtigende Netze und/oder andere (Rand-)Bedingungen erforderlich werden. Zweitens ist, da zuerst Laminarströmung einsetzt, das Strömungsbild mit Beginn der Turbulenz bereits an der Plattenvorderkante nur ein fiktiv vorliegendes. Drittens wäre, um auch nach der Theorie genau zu sein, eine kleine Umgebung an der Vorderkante überhaupt mit den vollständigen Navier - Stokes 'schen Gleichungen, und nicht mit den Grenzschichtgleichungen (erster Ordnung) zu behandeln, vergleiche [12].

7.5 Reibungs- und Widerstandsbeiwerte

Reibungs- und Widerstandsbeiwerte interessieren vor allem in Bezugnahme auf praktische Anwendungen. Innerhalb FIDAP können beim Postprozessing die Beanspruchungen von Berandungen ermittelt werden. Die zur Reibungsbeiwertermittlung notwendigen Daten werden aus den FIOUT - Files extrahiert. Mit IDL werden sie dann zunächst für dimensionslose Darstellung aufbereitet und anschließend werden mit Hilfe von Glg. 3.4 die c_f - Werte ermittelt. In Abb. 7.7 werden die durch das $k - \omega$ bzw. Baldwin - Lomax - Modell folgenden Ergebnisse jenen, die sich aus dem Defektansatz ergeben, gegenübergestellt. Die Resultate zufolge des Defektansatzes werden mit Verwendung von Glg. 4.69 gewonnen. In Abb. 7.7 wird eine logarithmische Abszisse verwendet. Dadurch soll der Zusammenhang zum später gezeigten Widerstandsbeiwertdiagramm (vergleiche Abb. 7.8) anschaulicher werden.

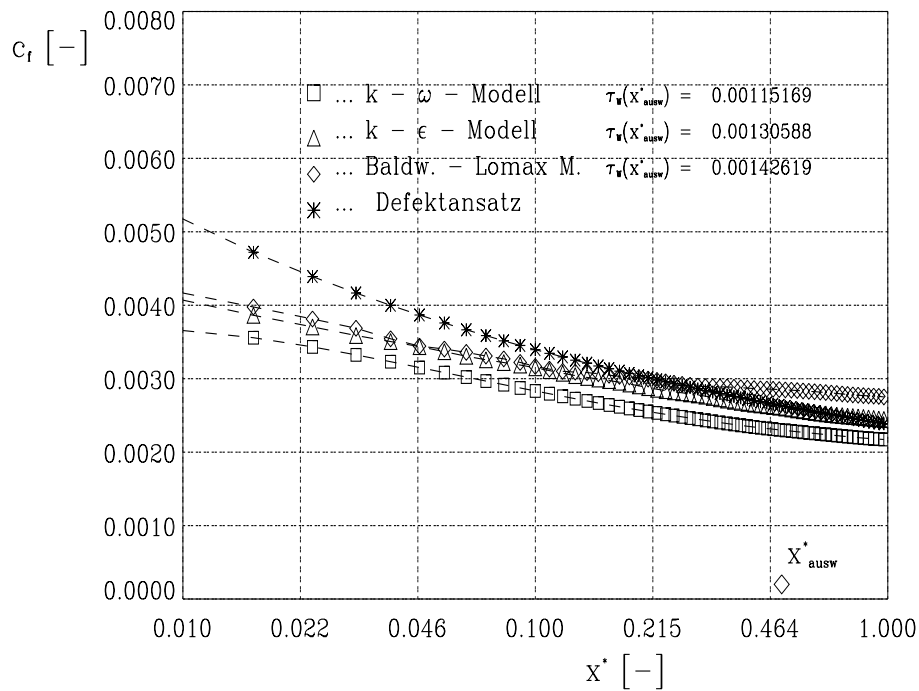


Abbildung 7.7: Reibungsbeiwerte

Die Reibungsbeiwerte des $k - \epsilon$ - Modells zeigen gute Übereinstimmung mit jenen aus dem Defektansatz. Ein wenig stärker weichen die Ergebnisse des $k - \omega$ und Baldwin - Lomax - Modells ab.

Ein Vergleich von Abb. 7.7 mit Versuchsdaten ist deswegen nicht möglich, da in der Literatur hauptsächlich Widerstandsbeiwerte ausgewiesen werden. Die Übereinstimmung der Resultate der Theorie (Defektansatz) mit jenen zufolge der Turbulenzmodelle ist als zufriedenstellend zu bezeichnen, da folgendes zu beachten ist: Allgemein stimmen Simulationsergebnisse nicht zuletzt zufolge der Festsetzung der Modellkonstanten mit den Versuchsergebnissen überein. Die Modellkonstanten werden üblicherweise so festgelegt, daß nicht nur

7. Berechnungsergebnisse

die turbulente Plattengrenzschicht, sondern eine große Klasse von Strömungen berechnet werden können. Weiters ist zu beachten, daß der berechnete Plattenabschnitt doch einen beachtlichen Reynoldszahlbereich umfaßt. Auch ist das hier gewählte Netz ein relativ grobes.

Aus den Reibungsbeiwerten lassen sich mit der Glg. 3.5 leicht die Widerstandsbeiwerte herleiten. Zur Berechnung wurde so vorgegangen, daß das Integral durch die Summe der Produkte der c_f - Werte mit den dazugehörigen Intervallängen angenähert wurde. Die Resultate sind in Abb. 7.8 zu sehen.

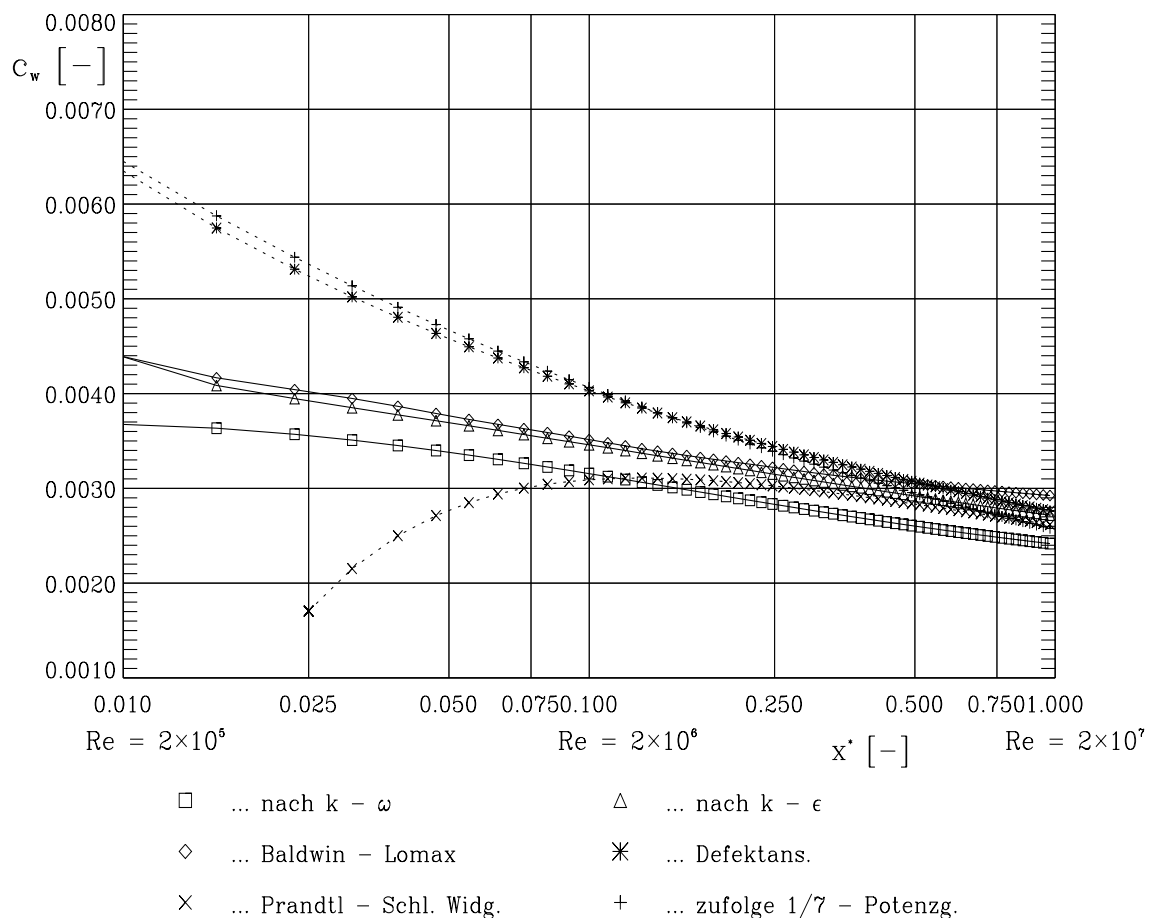


Abbildung 7.8: Widerstandsbeiwerte

Die in Abb. 7.8 eingetragenen Widerstandsbeiwerte, die als zufolge des $1/7$ - Potenzgesetzes bezeichnet sind, wurden mit Glg. 7.4 berechnet. Die Bezeichnung wurde deswegen verwendet, weil das angesprochene Gesetz eine der Grundlagen für Glg. 7.4 ist, siehe [11]. Es ist in der Abbildung auch das Prandtl - Schlichting'sche Widerstandsgesetz, Glg. 3.10, eingetragen. Dieses berücksichtigt, wie bereits erwähnt, ein laminares Anlaufstück (alle anderen Kurven in Abb. 7.8 berücksichtigen ein solches nicht). In seiner Nähe liegt ein Großteil der experimentellen Daten nach Abb. 3.3. Dadurch soll der Vergleich von Abb. 3.3 und Abb. 7.8

erleichtert werden.

Es ist festzustellen, daß man analog zu den Reibungsbeiwerten auch bei den c_w - Werten von zufriedenstellenden Ergebnissen sprechen kann. Wenn man Abb. 7.8 mit Abb. 7.7 vergleicht, fällt auf, daß am Anfang der Platte die Abweichungen der Simulationsergebnisse von jenen der Theorie (Defektansatz) bei den Widerstandsbeiwerten größer sind. Am Plattenende sind keine so großen Unterschiede zu verzeichnen. Die großen Differenzen zu Plattenbeginn sind folgendermaßen erklärbar: Es liefert der Defektansatz für sehr kleine Reynoldszahlen $c_w \rightarrow \infty$. Die Simulationen ermitteln aber – aufgrund der dahinterstehenden Programme – stets endliche Reibungsbeiwerte. Damit folgen nach den Ergebnissen der Strömungsmodellierungen stets endlich kleine Resultate für c_w . Es stimmen nach den Simulationsergebnissen auch, siehe Abbn. 7.7 und 7.8, c_f und c_w am Plattenbeginn der Größe nach gut überein. Bezüglich Plattenanfang gilt daher: Widerstandsbeiwerte zufolge der Simulationsergebnisse sind wesentlich kleiner als jene, die theoretisch ohne Berücksichtigung eines Anlaufstückes hergeleitet werden (Defektansatz und $1/7$ - Potenzgesetz). Daher kommt es zu guter Übereinstimmung zwischen experimentellen Daten beziehungsweise Prandtl - Schlichting'schem Widerstandsgesetz und den Ergebnissen der Simulationen.

Ein weiterer wichtiger Punkt, der bei beiden Abbildungen zum Ausdruck kommt ist, daß bei hohen Reynoldszahlen es für die Größe von c_w für praktische Anwendungen egal ist, ob ein laminares Anlaufstück berücksichtigt wird oder nicht. Eine Ausdehnung der Berechnung durch Hinzunahme eines solchen ist daher in Bezug auf den Reibungsbeiwert nur bei kleinen bis mäßig großen Reynoldszahlen wichtig.

7.6 Turbulente Zähigkeit, turbulente kinetische Energie, Dissipation und turbulente Frequenz

Diese Größen unterliegen den im Abschnitt über Zweigleichungsmodelle dargestellten Abhängigkeiten, weshalb sie auch hier gemeinsam behandelt werden. Bezüglich einer Vergleichsmöglichkeit der hier gewonnenen Ergebnisse soll auf [17] hingewiesen werden. Die turbulente kinetische Energie und die Dissipation bzw. turbulente Frequenz werden von FIDAP nur bei Verwendung des $k - \varepsilon$ - bzw. $k - \omega$ - Modells berechnet, sodaß sie für das Baldwin - Lomax - Modell nur mit weiteren theoretischen Herleitungen dargestellt werden könnten. μ_T und weitere Ergebnisse des letzteren angesprochenen Modells werden im nächsten Punkt ausführlicher behandelt. Die Resultate für das $k - \omega$ - Modell sind in den Abbn. 7.9 und 7.10 dargestellt, für das $k - \varepsilon$ - Modell siehe Abbn. 7.11 und 7.12. Jeweils zwei Abbildungen wurden erstellt, um den Verlauf der Größen sowohl für den inneren, als auch für den äußeren Teil der Grenzschicht deutlich erkennen zu können. Zur Bereichseinteilung siehe Abb. 4.1. Die Abbildungen zeigen die Verhältnisse bei $x^* = x^*_{ausw}$. Für die den Grenzschichtinnenteil betreffenden Abbildungen, es sind dies Abb. 7.9 und Abb. 7.11, wurden die Größen über der dimensionslosen Koordinate y^+ aufgetragen. Für den Grenzschichtaußenteil wurde jeweils y^* herangezogen. Ein Hinweis zur Datenermittlung: Im FDOUT - File stehen im Falle des $k - \varepsilon$ - Modells die Werte der Dissipation, im Falle des $k - \omega$ - Modells jene der turbulenten Frequenz. Beim $k - \omega$ - Modell wird in FIDAP die Größe ω^F , für die

$$\omega^F = \omega\beta^* \tag{7.1}$$

7. Berechnungsergebnisse

gilt, verwendet. Mit Glg. 7.1 folgt aus Glg. 5.48 links

$$\varepsilon = \omega^F k, \quad (7.2)$$

und aus Glg. 5.44

$$\mu_T = C_\mu \rho \frac{k}{\omega^F}. \quad (7.3)$$

Bezüglich des $k - \omega$ - Modells wurde mit den Daten des FDOUT - Files die Dissipation mittels Glg. 7.2 ermittelt. Beim $k - \varepsilon$ - Modell wurde mit Glg. 7.2 auf ω^F rückgerechnet. μ_T wurde bei beiden Modellen mit Glg. 7.3 ermittelt.

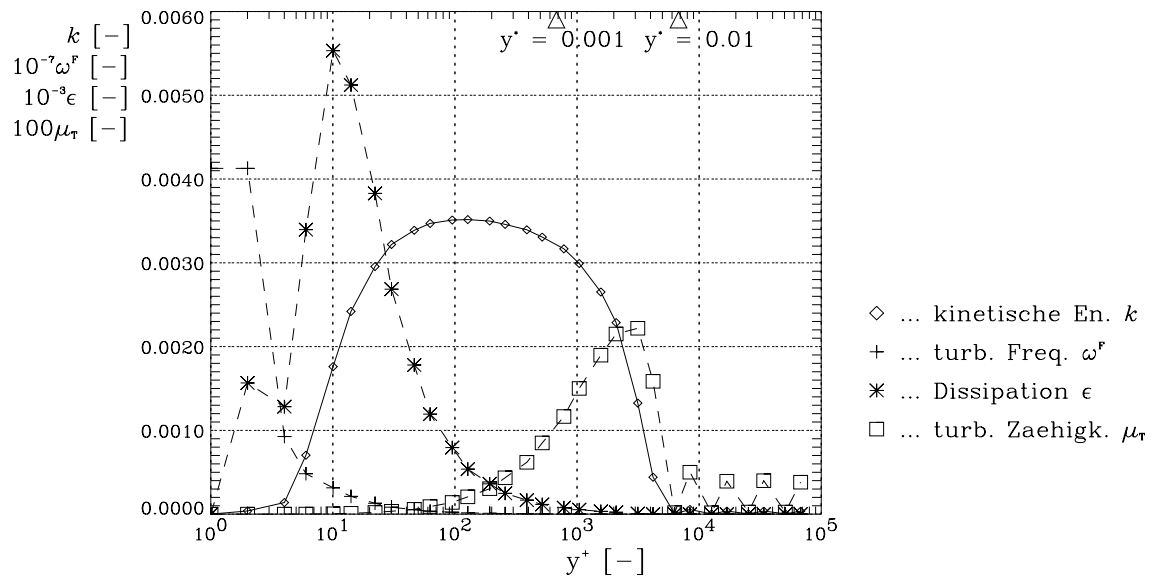


Abbildung 7.9: turbulente Frequenz, Dissipation, turbulente kinetische Energie und turbulente Zähigkeit beim $k - \omega$ - Modell, innere Schicht

7. Berechnungsergebnisse

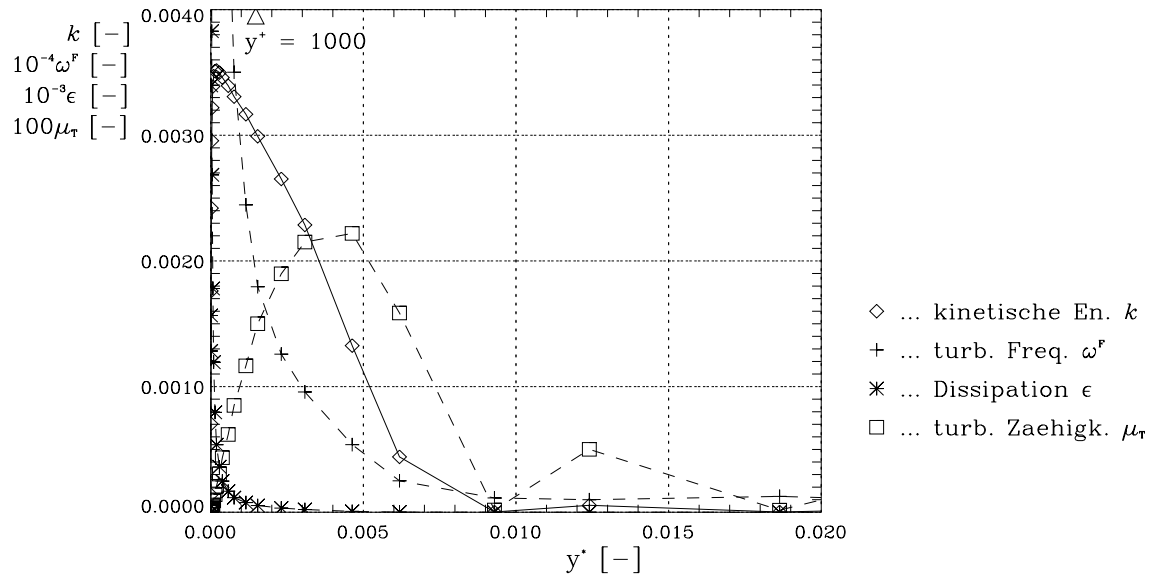


Abbildung 7.10: turbulente Frequenz, Dissipation, turbulente kinetische Energie und turbulente Zähigkeit beim $k-\omega$ -Modell, äußere Schicht

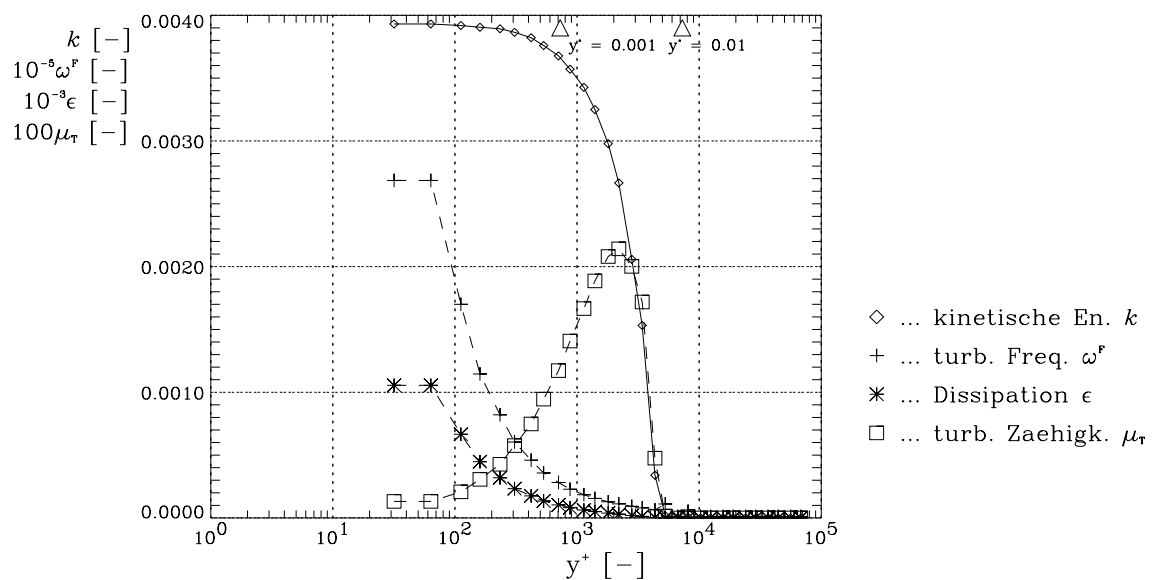


Abbildung 7.11: turbulente Frequenz, Dissipation, turbulente kinetische Energie und turbulente Zähigkeit beim $k-\epsilon$ -Modell, innere Schicht

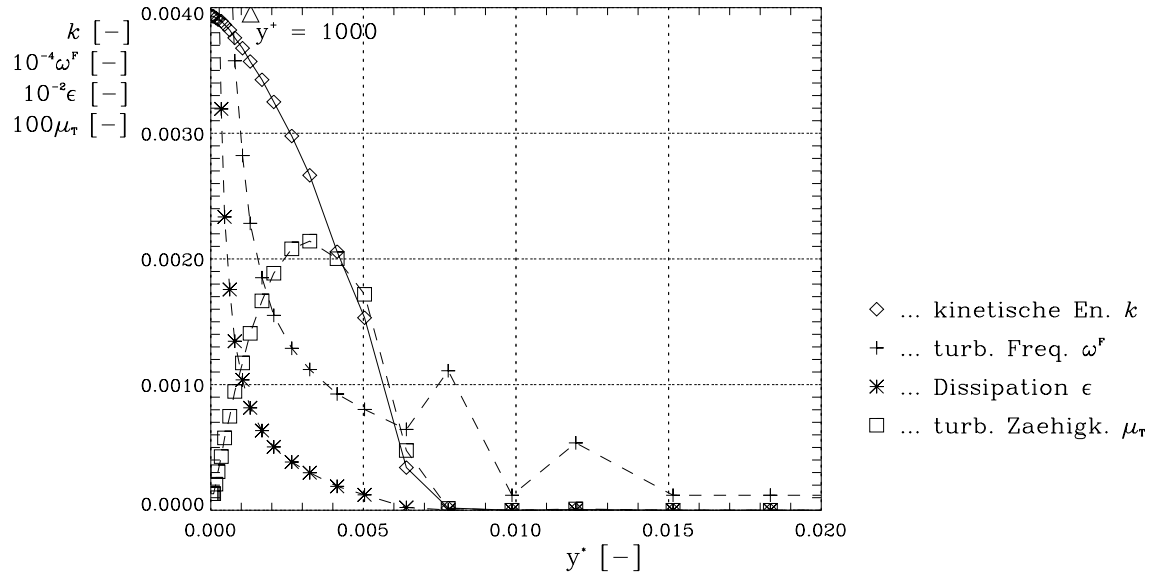


Abbildung 7.12: turbulente Frequenz, Dissipation, turbulente kinetische Energie und turbulente Zähigkeit beim $k - \varepsilon$ -Modell, äußere Schicht

Für beide Modelle gilt: Dissipation und turbulente kinetische Energie sind in der Grenzschicht wesentlich größer als im freien Strömungsfeld. Die turbulente Zähigkeit erreicht ihre größten Werte im Grenzschichtaußenteil. Die Anhängigkeit dieser Größen (k , ε und μ_T) von y^* ist für beide Modelle nahezu gleich. Lediglich beim $k - \omega$ -Modell scheint μ_T beim Übergang von der Grenzschicht zur Außenströmung nicht so rasch abzusinken. Die turbulente Frequenz ist in den inneren Grenzschichtbereichen am größten.

Beim $k - \omega$ -Modell ist der Verlauf der Größen über y^+ interessant (siehe Abb. 7.9). Man erkennt, daß die Maxima der turbulenten kinetischen Energie und der Dissipation nicht, wie man zunächst meinen könnte, zusammenfallen. Das Dissipationsmaximum ist näher bei der Platte. Die in FIDAP berechnete Dissipation, Glg. 5.35, ist zwar nicht ident mit der thermodynamischen, siehe die entsprechenden Gleichungen in [12]. Die Unterschiede zwischen der thermodynamischen Dissipation und dem durch Glg. 5.35 berechneten Wert sind in Bezugnahme auf Turbulenzmodelle jedoch vernachlässigbar. Daher kann davon ausgegangen werden, daß theoretische Zusammenhänge qualitativ richtig wiedergegeben werden. Es wird somit durch die k -Gleichung das Auseinandertriften von turbulenter kinetischer Energie und Dissipation verständlich, da k unter anderem von Konvektions- und vor allem Diffusionstermen bestimmt wird. Wie in [12] auch hergeleitet wird, diffundiert die turbulente kinetische Energie vom Maximum der Turbulenzproduktion (welches theoretisch bei $y^+ = 10.6$ liegt, siehe [12]) nach beiden Seiten weg. Für die Verteilung von k über y^+ siehe auch Abb. 5.4. Zwischen Theorie und den Simulationsergebnissen sind Abweichungen vorhanden.

Zur turbulenten Zähigkeit beim $k - \omega$ -Modell ist noch zu bemerken, daß diese in der freien Strömung erheblichen Schwankungen (die wahrscheinlich durch das in diesem Teil des Strömungsgebietes zu grobe Netz bedingt werden) unterworfen ist. Man kann jedoch

davon ausgehen, daß dies, da die Geschwindigkeitsgradienten in diesem Bereich verschwindend klein sind, die Lösung nicht nennenswert beeinflusst.

7.7 Größen des Baldwin - Lomax Modells

Wie bereits beschrieben wurde, ist das Baldwin - Lomax - Modell ein Zweischichtenmodell. Es wird dabei die Zähigkeit der inneren Schicht mit der durch die Dämpfungsfunktion modifizierten Mischungswegformel ermittelt. Zur Zähigkeitsberechnung der äußeren Schicht werden die Größen F_{max} (siehe 5.27) und y_{max} herangezogen. Um eine Vorstellung über diese, sowie auch über die weiteren Größen des Baldwin - Lomax - Modells zu haben, wurde Abb. 7.13 erstellt.

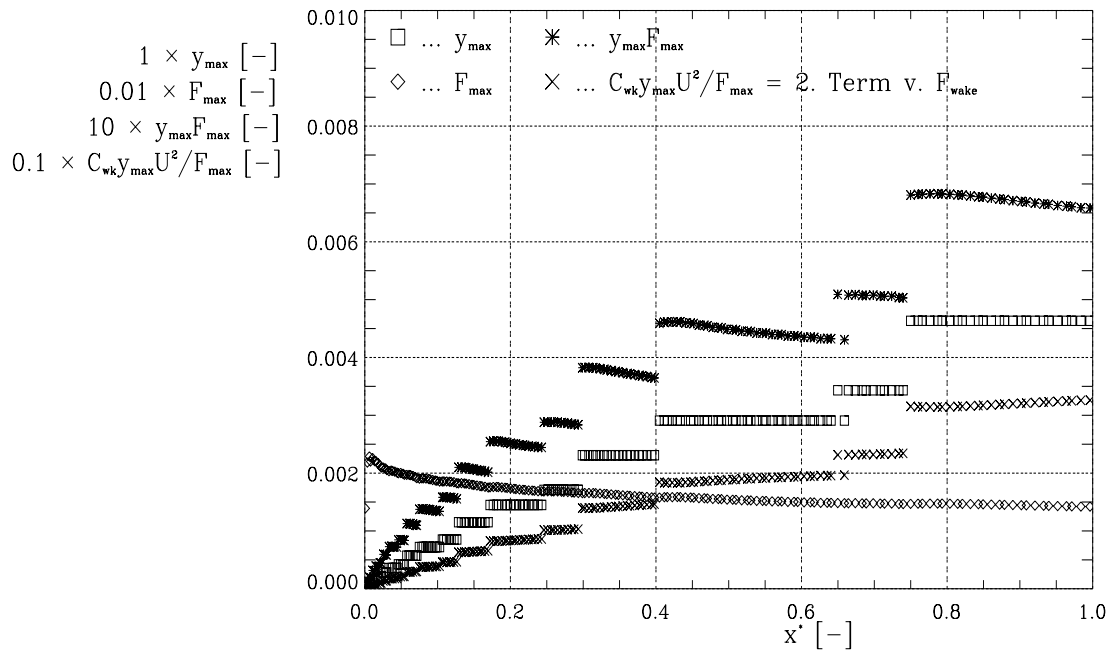


Abbildung 7.13: Größen zufolge des Baldwin - Lomax - Modells

Interessant ist zunächst, das F_{max} über die ganze Plattenlänge nahezu konstant ist. y_{max} , also jene Stelle, wo $l_{mix}|\omega|$ das Maximum erreicht, entfernt sich jedoch mit wachsender Plattenlänge von der Plattenoberfläche. An der Auswertestelle x_{ausw}^* kann y_{max} auch in Abb. 7.3 gefunden werden. Wie, soll durch die Ausführungen im folgenden Absatz kurz aufgezeigt werden.

Zunächst ist festzuhalten, daß im äußeren Teil der Grenzschicht, das heißt ab y^+ größer ungf. 100, l_{mix} praktisch mit κy^* übereinstimmt. Der Einfluß der Van Driest'schen Dämpfungsfunktion auf l_{mix} ist bei großem y^+ verschwindend klein, siehe Abb. 5.2. $|\omega|$ ist praktisch gleich der partiellen Ableitung $\partial u^* / \partial y^*$. Dadurch gilt näherungsweise mit Glg. 5.27 $F_{max} = \max |y^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}|$. Allgemein wird in einem Diagramm, wo $f(x)$ über $\ln x$ aufgetragen

wird, das Maximum von $x \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ durch die größte Steigung der Kurve ausgewiesen. In Abb. 7.3 ist u^+ als Abhängige von $\ln y^+$ dargestellt. Das heißt, daß bei großen y^+ - Werten F_{max} an der Stelle der größten Steigung der Kurve liegt. Mit F_{max} liegt auch y_{max} an dieser Stelle. Die Übergänge von y^+ zu y^* und u^+ zu u^* ändern an dieser Aussage nichts, da sie nur durch multiplikative Verknüpfung mit Konstanten angestellt werden. Bei kleinem y^+ wird das Produkt $l_{mix}|\omega|$ durch die Van Driest'sche Dämpfungsfunktion abgemindert, vergleiche dazu Glg. 5.27. Dadurch ist im Bereich der laminaren Unterschicht auch $l_{mix}|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}|$ kleiner als $\kappa y^*|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}|$. $\frac{1}{\kappa}l_{mix}|\omega|$ stimmt in diesem Bereich daher nicht mit der Steigung der Kurven überein, da die Steigung durch $y^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}$ gegeben ist. Wenn in Abb. 7.3 die Tangenten im Bereich $y^+ < 30$ unter Umständen auch größere Steigungen besitzen als im Defektbereich, so gilt trotzdem: Für das Maximum von $l_{mix}|\omega|$ ist die größte Steigung der Tangente im Defektbereich verantwortlich. F_{max} liegt also immer in diesem Bereich. Mit F_{max} ist auch y_{max} an den Defektbereich gebunden.

y_{max} hat auch einen entscheidenden Einfluß auf die Zähigkeit (vergleiche Glgn. 5.25 und 5.26). Damit kann man zumindest für den hier behandelten Fall der längsangeströmten Platte folgendes erkennen: Die Berechnung eines Defektbereiches durch das Baldwin - Lomax - Modell liefert nicht nur gute Anpassung an experimentelle Daten, sie ist sogar Voraussetzung, um durch diesen Modellansatz richtige Resultate zu erzielen.

Wie bereits bekannt ist, sind Geschwindigkeitsprofile $\bar{u} = \bar{u}(y)$ im Defektbereich über der Plattenlänge x ähnlich, vergleiche z. Bsp. Abb. 3.5. Bei geeigneten Turbulenzmodellen wird man daher mit ziemlicher Sicherheit annehmen können, daß sie auch ähnliche Lösungen über x liefern. Das trifft auch auf das Baldwin - Lomax - Modell zu. Damit ist nun erklärt, warum F_{max} über der Plattenlänge nahezu konstant ist. Im Vorderteil der Platte hat man kleines y_{max} , dafür aber große Gradienten $\partial u^*/\partial y^*$. Mit wachsender Plattenlänge wächst y_{max} an, der Gradient nimmt ab. Die Proportionalitätsfaktoren werden – Ähnlichkeit vorausgesetzt – ungefähr gleich groß sein. Damit ist der annähernd gleiche Wert von $max|y^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}|$ über der Plattenlänge begründet. Das Produkt $y_{max}F_{max}$, welches einen entscheidenden Einfluß auf μ_{To} hat (Glg. 5.26 und 5.25), nimmt mit zunehmender Plattenlänge zu. Und zwar, wie sich aus den vorigen Ausführungen schließen läßt, nahezu linear (wenn auch durch das eher grobe Netz in relativ großen Sprüngen). Wie bereits angeführt wurde, dient $y_{max}F_{max}$ dazu, um den Ausdruck $U_e \delta_V$ in Glg. 5.15 zu ersetzen. Dabei wird, wie aus den Glgn. 5.15 und 5.25 hervorgeht, auch die Modellkonstante C_{cp} verwendet. Wie man durch Vergleich von Abb. 7.6 mit 7.13 erkennt, gilt bei den hier vorliegenden Ergebnissen tatsächlich in guter Näherung $U_e \delta_V \approx C_{cp} y_{max} F_{max}$.

Der Ersatz von $U_e \delta_V$ durch $y_{max}F_{max}$ kann, zumindest für den hier behandelten Fall der ebenen Platte, nun noch weiter spezifiziert werden: Zunächst gilt, daß δ_V und y_{max} einerseits, und andererseits auch U_e und $y_{max} \frac{\partial U_e}{\partial y}$ in ihren Dimensionen übereinstimmen. Da hier F_{max} nahezu konstant ist, kann man es daher als Ersatz für U_e deuten. y_{max} kann, da es mit wachsender Plattenlänge zunimmt, als Ersatzgröße für δ_V aufgefaßt werden. Ob nun diese Spezifizierung für geometrisch andere Strömungsformen als der ebenen Plattenströmung zulässig ist, kann nicht beurteilt werden. Es ist aber bei nicht so simplen Strömungsgeometrien, wie bei der Platte, z. Bsp. bereits bei der Umströmung einer Ecke, die Festlegung einer "Außengeschwindigkeit" U_e nicht in eindeutiger Weise möglich.

In Abb. 7.13 sind auch die durch den Ausdruck $C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}$ berechneten Resultate eingetragen. Dessen Werte sind stets größer als jene von $y_{max} F_{max}$. Wegen Glg. 5.26 wird damit bei der Simulation für F_{wake} das Produkt $y_{max} F_{max}$ herangezogen. Das ist also richtigerweise jener Term von Glg. 5.26 rechts, der zur Berechnung von Grenzschichten zu verwenden ist.

In Abb. 7.14 ist die Klebanoff'sche Intermittenzfunktion bei $x^* = 0.3, 0.5$ und 0.7 dargestellt. Sie wurde mit Glg. 5.29, der zum Baldwin - Lomax - Modell gehörigen Gleichung für die Intermittenzfunktion ermittelt.

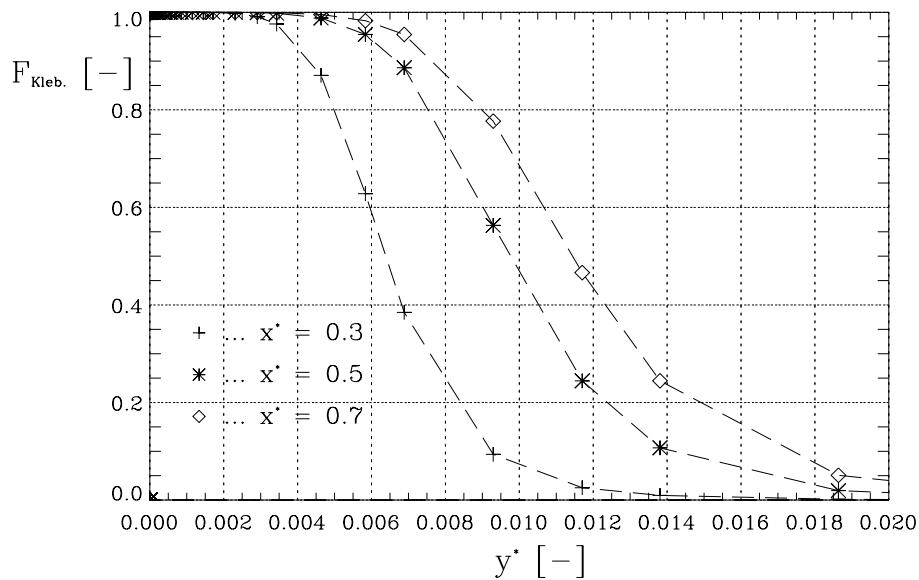


Abbildung 7.14: Klebanoff'sche Intermittenzfunktion des Baldwin - Lomax - Modells

Analog wie y_{max} mit der Plattenlänge zunimmt, nimmt auch der Ort gleicher Intermitenz mit wachsender Plattenlänge zu. Die gewünschte Ähnlichkeit dieser Kurven zu jener in Abb. 3.2 ist durch die Glgn. 3.1 und 5.29 begründet.

Die Zähigkeiten werden zur besseren Übersichtlichkeit wieder in zwei Diagrammen, eines für die innere, das zweite für die äußere Schicht dargestellt, siehe Abbn. 7.15 und 7.16. Der Zusammenhang von μ_T zu μ_{Ti} und μ_{To} ist durch die Bedingungen Glg. 5.21 gegeben.

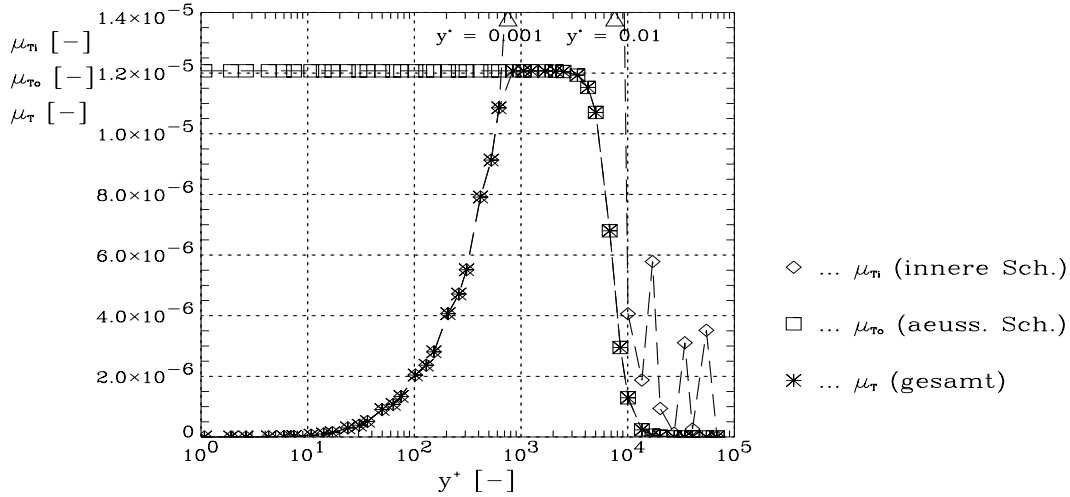


Abbildung 7.15: Zähigkeiten, innere Schicht

Abb. 7.15 ist die Darstellung der Zähigkeiten über y^+ . Man sieht, daß im inneren Grenzschichtteil μ_{Ti} die für μ_T bestimmende Größe ist. μ_{Ti} bleibt in nächster Wandnähe zunächst sehr klein, beginnt aber dann rasch zu steigen. Der Übergang der turbulenten Zähigkeit μ_T von den stark steigenden Werten von μ_{Ti} zu den zunächst nahezu konstanten Werten von μ_{To} erfolgt relativ schroff. In Abb. 7.15 sind rechts noch stark schwankende Werte von μ_{Ti} feststellbar.

Zu den in Abb. 7.3 dargestellten Werten des Baldwin - Lomax - Modells können folgende Zusammenhänge aufgezeigt werden: der Bereich der Gültigkeit von Glg. 4.19 erscheint in Abb. 7.3 als Gerade, in Abb. 7.15 jedoch annähernd parabelförmig. Wie man aus Abb. 7.16 entnimmt, ist in diesem Bereich eine nahezu lineare Zunahme der Zähigkeit mit y^* zu verzeichnen. Für den an den Grenzschichtinnenteil angrenzenden Abschnitt des Defektbereiches (in Abb. 7.15 ab $y^+ \approx 1.5 \times 10^3$) ist die Zähigkeit μ_T konstant. Die Konstanz von μ_T trägt zu dem parabelförmigen Aussehen der Darstellung u^+ über y^+ im Bereich $1.5 \times 10^3 < y^+ < 4 \times 10^3$ bei. Konstantes μ_T in diesem Bereich ist daher ein wesentlicher Beitrag zu der Berechnung eines Defektbereiches beim Baldwin - Lomax - Modell.

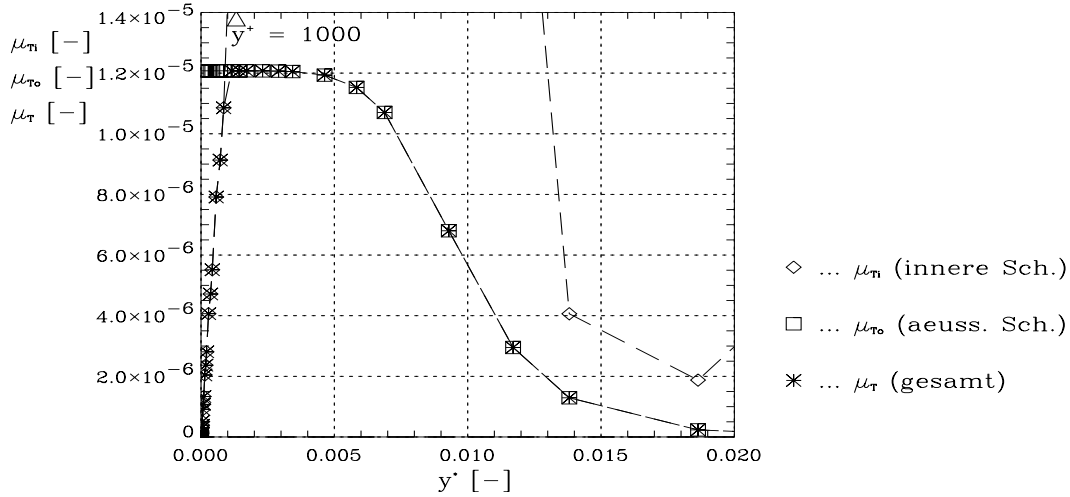


Abbildung 7.16: Zähigkeiten, äußere Schicht

In Abb.7.16 wird die Zähigkeit über der dimensionslosen Koordinate y^* aufgetragen. Auch hier erkennt man Werte der Zähigkeit der inneren Schicht in der freien Strömung. Für μ_{Ti} gilt Glg. 5.24. $|\omega|$ wird in den äußeren Grenzschichtbereichen sehr klein (und ist damit dort für die Gesamtlösung unwesentlich), aber bezüglich y^* auch stark schwankend. Dadurch kommt es zu dem stark schwankenden Verlauf von μ_{Ti} . Es ist daher in anderen Fällen als den dem Diagramm zugrundeliegenden durchaus möglich, daß μ_{Ti} auch im äußeren Grenzschichtteil unter μ_{To} sinkt. Wie Auswertungen an anderen Stellen als x_{ausw}^* zeigen, ist dies teilweise bei der hier behandelten Platte auch tatsächlich der Fall. Um zu verhindern, daß dort μ_{Ti} gleich μ_T gesetzt wird, wird die Bedingung nach Glg. 5.21 herangezogen. Durch ihre auf den ersten Blick umständliche Formulierung ist sichergestellt, daß für $y > y_m$ stets μ_{To} für die turbulente Zähigkeit μ_T herangezogen wird. y_m liegt in unserem Fall bei ungefähr 0.0008 .

Man erkennt aus Abb. 7.16, daß der Verlauf von μ_{To} durch die Klebanoff'sche Intermittenzfunktion vorgegeben ist. Es sind bei festem x^* in Glg. 5.25 alle Größen bis auf F_{Kleb} konstant.

7.8 Schubspannungen

Durch die Auswertung mit IDL gelingt es, den Schubspannungsverlauf über der Plattenhöhe darzustellen. Benützt wurde dazu die Beziehung

$$\tau = \tau_L + \tau_T = (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} . \quad (7.4)$$

Einige Erläuterungen betreff der Diagrammerstellung, zunächst bezüglich des $k - \omega$ - und $k - \varepsilon$ - Modells (Abbn. 7.17 bis 7.20): Die Geschwindigkeiten werden mit den zugehörigen Koordinaten dem FDOUT - File entnommen. Damit kann $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ näherungsweise durch $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ berechnet werden. Üblicherweise wird vorausgesetzt, daß Näherungen dieser Art in Intervallmitte besser zutreffend sind als an den Rändern. Für die weitere Rechnung wird daher $\frac{\Delta u}{\Delta y}$

auf Mittenkoordinaten (Koordinaten in der Mitte zweier benachbarter Knotenpunkte) angesetzt. Bei der Ermittlung der Zähigkeiten wurde zunächst analog wie bei den Diagrammen in Unterkapitel 7.6 vorgegangen. Dadurch liegen sie aber vorerst in den Knotenpunkten vor. In weiterer Folge wurden dann die Zähigkeiten durch arithmetische Mittelung auf Mittenkoordinaten umgelegt. Dies deswegen, damit eine sinnvolle Verknüpfung mit $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ gewährleistet ist. Weiters wurde die laminare Zähigkeit μ addiert. Durch die Mittelung von μ_T und Addition von μ erhält der Zähigkeitsverlauf über y^+ bzw. y^* gegenüber voriger Abbildungen ein geringfügig anderes Aussehen. Speziell wird auch der stark schwankende Verlauf der turbulenten Zähigkeit des $k - \omega$ - Modells außerhalb der Grenzschicht, vergleiche Abbn. 7.9 und 7.17, gut gemittelt. Da ja auch interessant ist, wie die Geschwindigkeit, Ableitung dieser und turbulente Zähigkeit als zur Schubspannungsberechnung nötige Größen zusammenwirken, wurden sie ebenfalls in die Diagramme aufgenommen. Im Falle des Baldwin - Lomax - Modells konnten Zähigkeiten und Ableitungen $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ den Auswertefiles entnommen werden. Die Daten beziehen sich jetzt jedoch – im Gegensatz zum $k - \varepsilon$ - und $k - \omega$ - Modell – auf Integrationsstützstellen. Da Zähigkeiten und Ableitungen nun auf gemeinsamen Koordinaten vorliegend übernommen werden konnten, wurde die Diagrammerstellung wesentlich vereinfacht. Die Berechnung von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ ist nicht nötig, und auch die Geschwindigkeit \bar{u} selbst nicht erforderlich, weswegen sie hier nicht verwendet wurde.

Werte von Koordinaten als Grundlage der Diagramme Abbn. 7.21 und 7.22 (Baldwin - Lomax - Modell) gehen also aus den Integrationsstützstellen hervor. Die anderen Diagramme basieren auf Knotenpunktskoordinaten. Dadurch ist das wandnächste y^+ in Abb. 7.21 (ungefähr 0.2) auch wesentlich kleiner als in Abbn. 7.17 und 7.19. Aus gleichem Grund ist auch in früher vorgestellten Abbn. (z. Bsp. Abb. 7.3) das wandnächste y^+ etliches größer als in Abb. 7.21. Zur Lage der Knoten versus Integrationsstützstellen siehe auch Abb. 6.1.

Bei allen drei Modellen wird wieder Innen- und Außenteil der Grenzschicht getrennt ausgewiesen, da der Schubspannungsverlauf in beiden Teilen von Interesse ist. Betreffs des Innenteils wird y^+ als dimensionslose Koordinate verwendet. Es wird eine logarithmisch skalierte Abszisse herangezogen, da einerseits die Verhältnisse in der laminaren Unterschicht und im Übergangsbereich von Interesse sind, und andererseits der Vergleich zu Abbn. 7.9 und 7.10 erleichtert wird. Die den Grenzschichtaußenteil betreffenden Größen werden über y^* bei linear skaliertem Abszisse aufgetragen. Dies ergibt eine anschauliche Wiedergabe der Verhältnisse im Defektbereich, und der Vergleich mit Abb. 3.1 ist besser möglich.

7. Berechnungsergebnisse

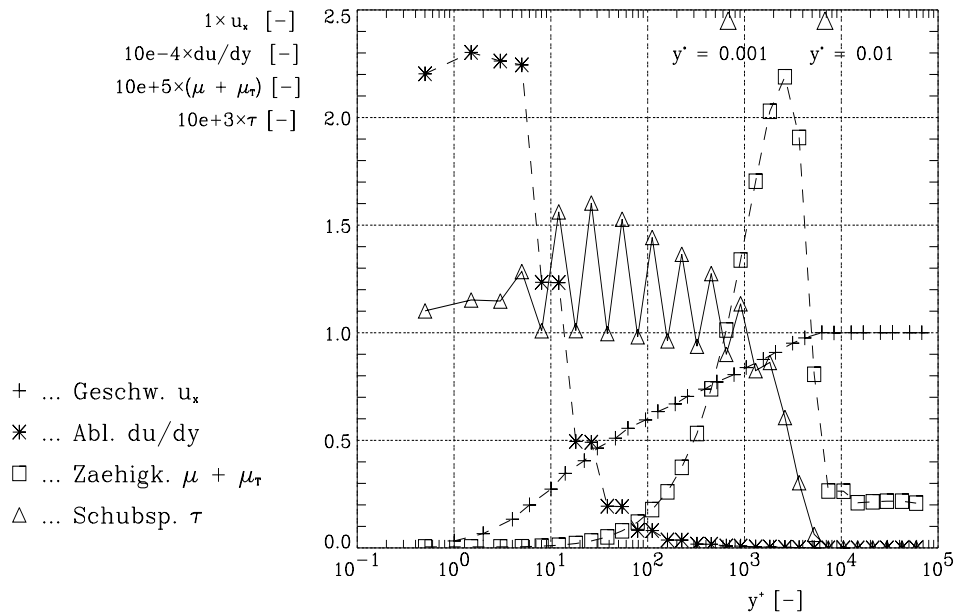


Abbildung 7.17: Schubspannung zufolge $k - \omega$ - Modells, innere Schicht

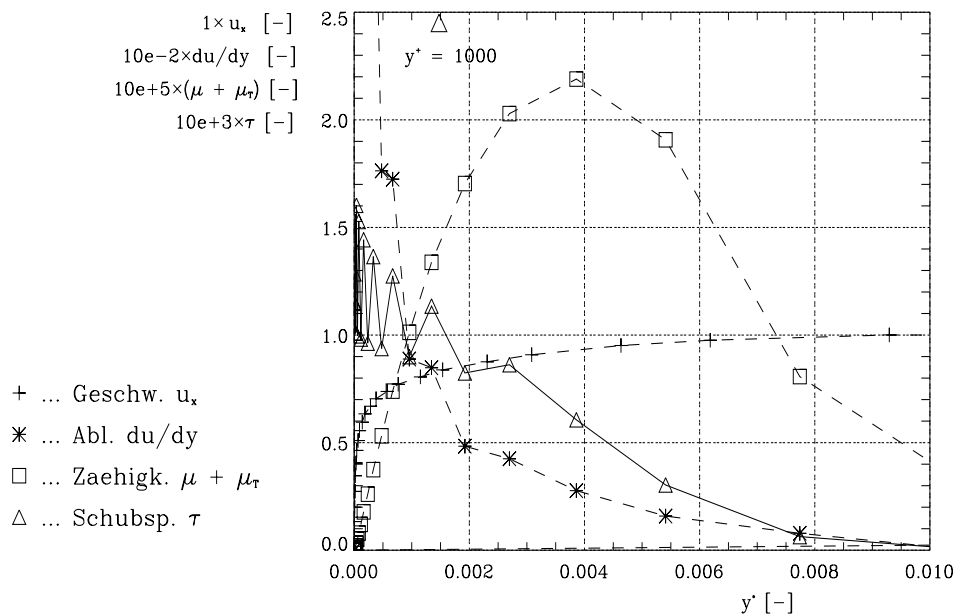


Abbildung 7.18: Schubspannung zufolge $k - \omega$ - Modells, äußere Schicht

7. Berechnungsergebnisse

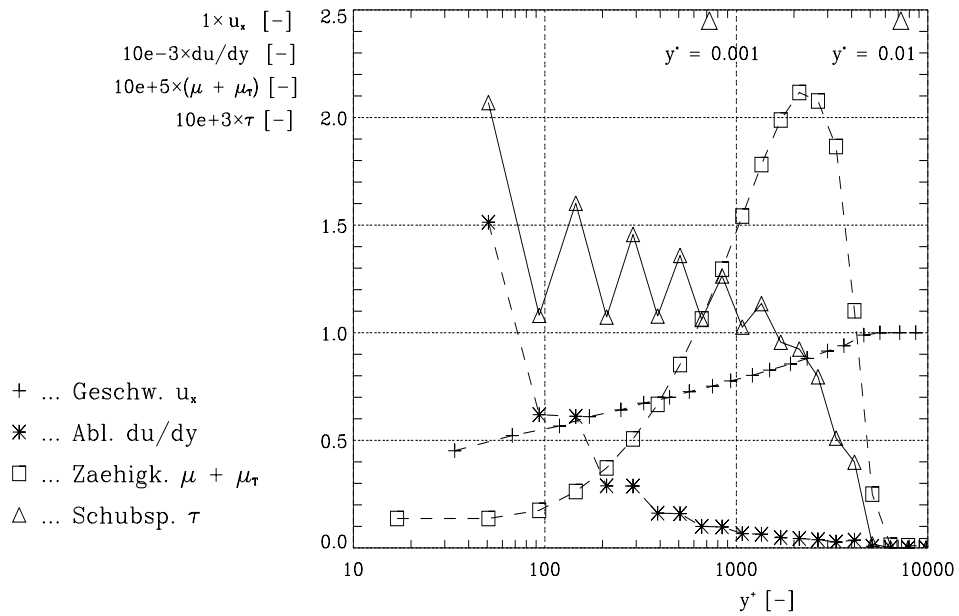


Abbildung 7.19: Schubspannung zufolge $k - \varepsilon$ -Modells, innere Schicht

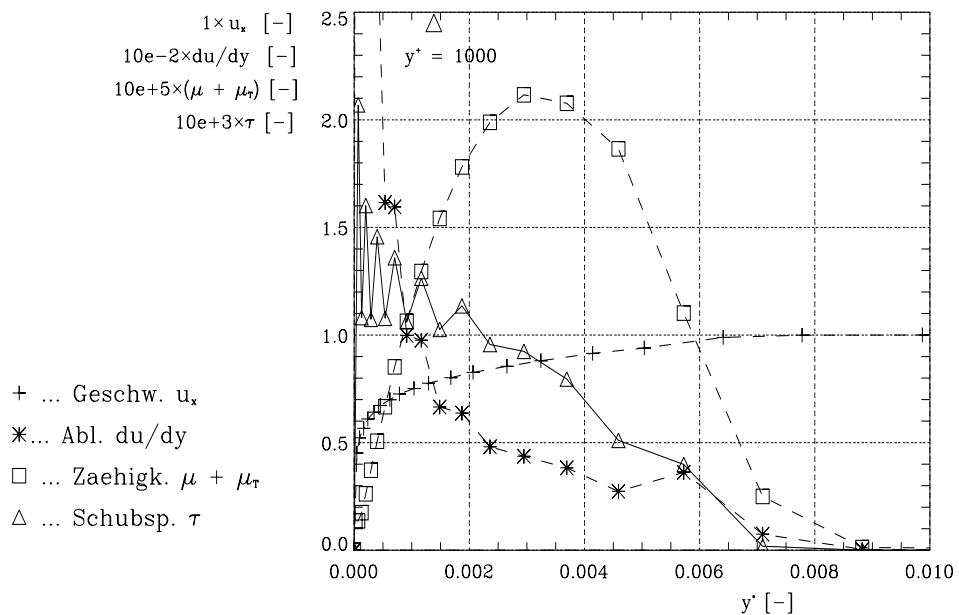


Abbildung 7.20: Schubspannung zufolge $k - \varepsilon$ -Modells, äußere Schicht

7. Berechnungsergebnisse

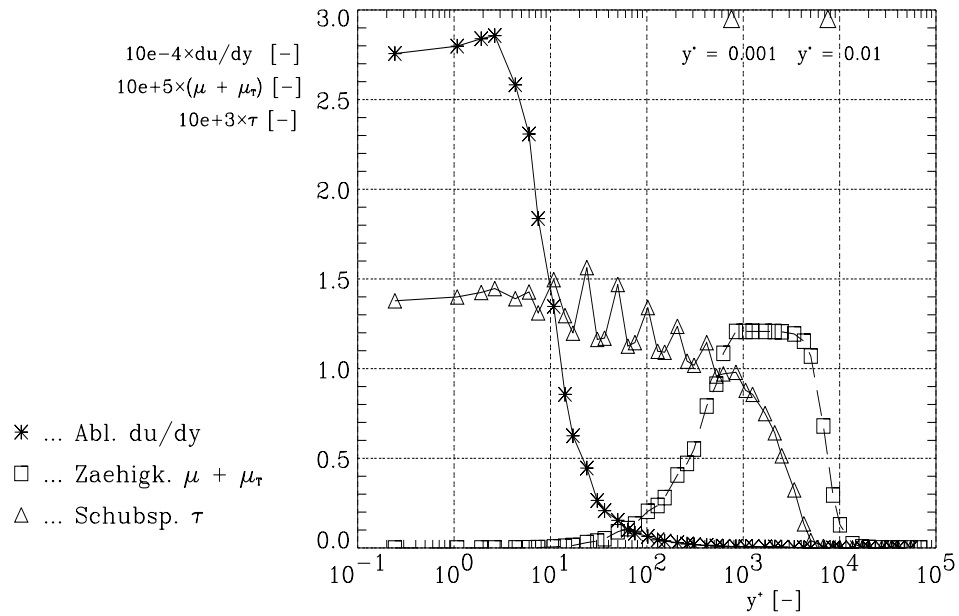


Abbildung 7.21: Schubspannung zufolge Baldwin - Lomax - Modells, innere Schicht

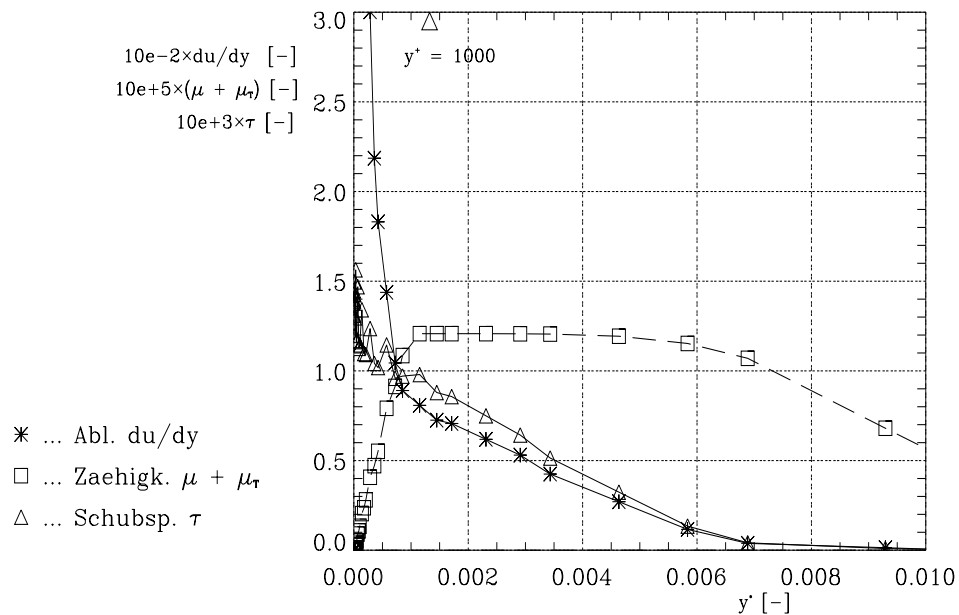


Abbildung 7.22: Schubspannung zufolge Baldwin - Lomax - Modells, äußere Schicht

Die Schubspannung τ wird abschnittsweise als stark schwankende Größe ausgewiesen. Dieser Bereich der Schwankungen läßt sich ungefähr mit $8 < y^+ < 1000$ festlegen. Gut ist dies in den Abbn. 7.17, 7.19 und 7.21 erkennbar. In der laminaren Unterschicht (Abbn. 7.17 und 7.21), aber auch im Defektbereich sind jedoch nur geringe Schwankungen von τ feststellbar. Trotzdem weisen interessanterweise alle drei Modelle bezüglich des Schubspannungsverlaufes τ sehr ähnliche Ergebnisse aus. Deshalb werden sie auch nachfolgend kurz gemeinsam kommentiert. Für die innere Schicht stellt man, obwohl Geschwindigkeit und vor allem deren Gradient $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, aber auch die turbulente Zähigkeit großen Änderungen unterliegen, fest: die Schubspannung ist in ihrem Mittelwert nahezu konstant, und das für y^+ bis zu 1000. Dies stimmt mit der Theorie überein, wo eine konstante Schubspannung vorausgesetzt wird. Das Baldwin - Lomax - Modell weist die geringsten Schwankungen von τ auf. Bezüglich der äußeren Schicht wird bei allen drei Modellen bei Plattenbeginn zunächst der – jetzt kleine – Bereich ungefähr konstanter Schubspannung ausgewiesen. Danach folgt ein stetiger Abfall auf verschwindend kleine Werte. Dies wiederum steht in gutem Zusammenhang zu den experimentellen Ergebnissen, vergleiche Abb. 3.1.

Zur Schubspannungsabnahme mit wachsendem y^+ beziehungsweise y^* im Defektbereich kann folgendes festgestellt werden: Bei Verwendung des $k - \varepsilon$ - Modells wird sie als am stärksten, bei Verwendung des $k - \omega$ - Modells als am geringsten ermittelt. Bezüglich letztes angesprochenen Modells ist dies verständlich, da dieses auch in der von der Grenzschicht unbeeinflussten Strömung hohe Zähigkeitswerte aufweist.

7.9 Weitere Diagramme - Vergleiche

Es sollen hier zunächst Zähigkeiten als aussagekräftige Größen verglichen werden. In Abb. 7.23 werden für die Verhältnisse an der Platte ($y^+ \leq 50$) die turbulente Zähigkeit zufolge des $k - \omega$ - Modells und die zufolge des Baldwin - Lomax - Modells und auch die laminare Zähigkeit dargestellt.

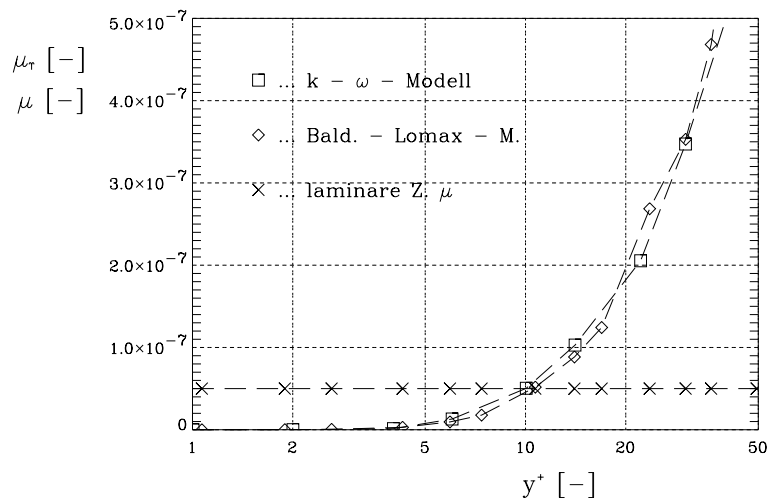


Abbildung 7.23: Vergleich von Zähigkeiten

Man erkennt zunächst in Abb. 7.23, daß beide Modelle im betrachteten Bereich für y^+ gut übereinstimmende turbulente Zähigkeiten ausweisen. Für $y^+ < 10$ sind die turbulenten Zähigkeiten kleiner als die laminaren. Es folgt weiters aus Abb. 7.23, daß in der laminaren Unterschicht tatsächlich die laminare Zähigkeit μ der dominante Beitrag zur Gesamtzähigkeit ist. Es bietet sich nun die Heranziehung von Abb. 7.3 an. In dieser ist für $y^+ \leq 6$ sehr gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse an das Gesetz für die laminare Unterschicht (Glg. 4.15) gegeben. Die Turbulenzmodelle nähern also in der laminaren Unterschicht den theoretischen Zusammenhang $y^+ = u^+$ gut an. Die Abhängigkeit von \bar{u} vom Wandabstand in der laminaren Unterschicht wird damit wie nach der Theorie auch zufolge der Strömungsmodellierungen von der laminaren Zähigkeit μ geprägt.

Beim Baldwin - Lomax - Modell ist auch die turbulente Zähigkeit μ_T über einen großen Bereich von y^+ konstant. Wie aus Abb. 7.15 hervorgeht, hauptsächlich im Defektbereich. Im vorangegangenen Absatz wurde festgestellt, daß konstante Zähigkeit μ in der laminaren Unterschicht zu der Beziehung $u^+ = y^+$ führt. Auch beim Defektbereich des Baldwin - Lomax - Modells ist ein solcher Zusammenhang eindeutig feststellbar, vergleiche Abbn. 7.15 und 7.3. Die Konstanz von μ_T im Defektbereich ist daher offensichtlich ein wesentlicher Faktor, daß dieser Bereich auch deutlich im Sinne einer Überhöhung über das logarithmische Wandgesetz ausgewiesen wird. Eine mathematische Beweisführung gestaltet sich vor allem wegen der stark unterschiedlichen Randbedingungen gegenüber der laminaren Unterschicht aufwendig und wird daher hier unterlassen. Betreffend Simulationsbedingungen soll nur bemerkt werden, daß in der laminaren Unterschicht und im Defektbereich natürlich gleichartige Elemente verwendet werden.

Um eine Vorstellung von der turbulenten Zähigkeit über der Platte (d.h. über die Gesamtlösung) zu vermitteln, wurden Konturdarstellungen von μ_T erstellt, vergleiche Abbn. 7.24, 7.25 und 7.26.

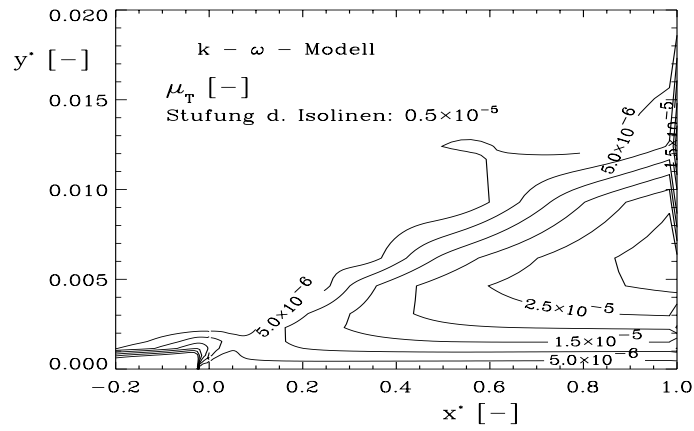


Abbildung 7.24: turbulente Zähigkeit über der Platte, $k - \omega$ - Modell

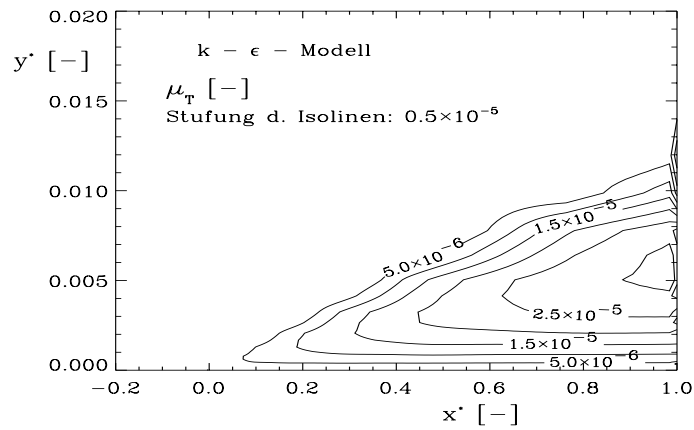


Abbildung 7.25: turbulente Zähigkeit über der Platte, $k - \epsilon$ - Modell

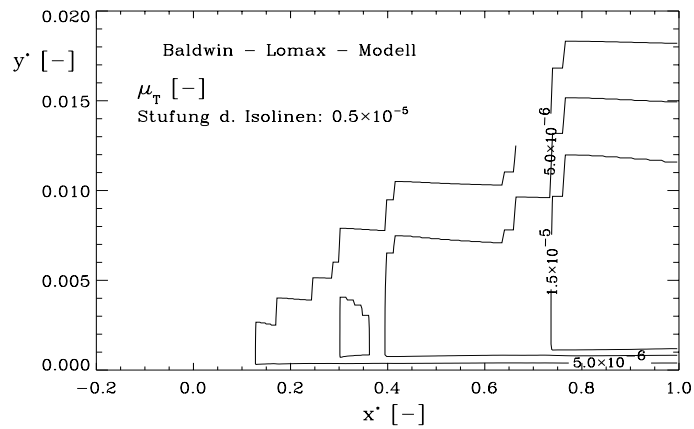


Abbildung 7.26: turbulente Zähigkeit über der Platte, Baldwin - Lomax - Modell

Man erkennt in allen drei Abbildungen gut das Anwachsen der turbulenten Zähigkeit mit zunehmender Plattenlänge. Gleichzeitig sieht man auch, daß sich das Maximum von μ_T mit wachsendem x^* von der Platte weg nach außen verschiebt. Interessant sind auch die Ergebnisse für μ_T zu Plattenbeginn. $k - \varepsilon$ - und Baldwin - Lomax - Modell zeigen turbulente Zähigkeiten – wie zu erwarten – erst über der Platte. Beim $k - \omega$ - Modell jedoch (Abb. 7.24) werden Bereiche erhöhter turbulenter Zähigkeit bereits vor der Platte ausgewiesen.

Beim Vergleich von Abb. 7.26 mit Abb. 7.24 beziehungsweise 7.25 fällt auf, daß im Falle des Baldwin - Lomax - Modells hohe Werte der turbulenten Zähigkeiten bis sehr nahe an die Platte reichen. Die teilweise nahezu vertikalen Isolinien weisen außerdem auf die Tatsache hin, daß für die Beziehung $\mu_T = \mu_T(y^*)$ in großen Bereichen nahezu – oder auch gänzlich – $\mu_T = \text{konst.}$ gilt (vergleiche dazu Abb. 7.16). Die durch das Baldwin - Lomax - Modell berechnete turbulente Zähigkeit verhält sich stark anders, als jene, die durch das $k - \omega$ beziehungsweise $k - \varepsilon$ - Modell ermittelt werden. Im Falle beider letzt angesprochener Modelle gestaltet sich die Beziehung $\mu_T = \mu_T(y^*)$ wesentlich kontinuierlicher, vergleiche auch Abbn. 7.10 und 7.12. Ein Abschnitt mit $\mu_T = \text{konst.}$ ist hier nicht vorhanden. Das Fehlen eines solchen ist insofern bedeutsam, da das Geschwindigkeitsprofil u^+ über y^+ von der Zähigkeit stark beeinflusst wird. Neben der Zähigkeit sind aber auch die Bedingungen in den an den Defektbereich angrenzenden Bereichen für das Geschwindigkeitsprofil von großer Bedeutung. Welches die dominanten Einflüsse sind, kann aber ohne weitergehende Überlegungen nicht gesagt werden. In diesem Zusammenhang soll darauf hingewiesen werden, daß beim $k - \omega$ - Modell das Geschwindigkeitsprofil im Defektbereich nicht richtig ermittelt wird. Nicht richtig insofern, als daß es zu keiner Überhöhung des Geschwindigkeitsprofils $u^+ = f(y^+)$ gegenüber dem logarithmischen Wandgesetz kommt, vergleiche Abb. 7.3. Vergleichsrechnungen zeigen diesen Mangel auch bei Netzen mit wesentlich mehr Elementen über der Platte. Das $k - \varepsilon$ - Modell weist den Defektbereich in groben Zügen richtig aus.

Eine Anmerkung zu dem stark schwankendem Verlauf der Isolinien für kleine Werte von μ_T in den äußeren Grenzschichtbereichen: verantwortlich dafür ist zum einen das dort vorliegende grobe Netz. Eine weitere Ursache dafür sind die Eigenheiten der Algebraisierung bei der Finiten - Elemente - Methode (Form der Ansatzfunktionen).

Einen Überblick über Konvergenz und Rechenzeiten betreffend $k - \varepsilon$ - , $k - \omega$ - und Baldwin - Lomax - Modell soll Tabelle 7.1 geben. Die Abbruchschranke ist bei allen drei Modellen die gleiche. Dazu soll angemerkt werden, daß Vergleichsrechnungen mit kleinerer Abbruchschranke vor allem beim Baldwin - Lomax - Modell zu besseren Ergebnissen, vor allem bezüglich der Annäherung an das logarithmische Wandgesetz (vergleiche Abb. 7.3) führen. Im Gegensatz dazu ist bei den anderen beiden, vor allem beim $k - \omega$ - Modell, eine Verbesserung der Ergebnisse in erster Linie durch Vergrößerung der Elementanzahl über der Plattenhöhe erzielbar.

Für eine gewisse Vervollständigung der Informationen bezüglich der Rechenzeiten ist auch eine Vergleichsrechnung durchgeführt worden. Bei dieser wurde in der Subroutine lediglich $\mu_T = \text{konst.}$ gesetzt, weitere Berechnungen und Ein- und Ausgabe von Daten in Files wurden unterlassen. Die Festlegung der Iterationszahl erfolgte dabei mit 20.

	Anzahl der Iterationen	Gesamtrechenzeit [s]	Zeit pro Iterat. [s]
$k - \omega$ - Modell	1694	6470.70	3.82
$k - \varepsilon$ - Modell	1544	5778.91	3.74
Baldwin - Lomax - Modell	577	19925.93	34.53
Vergleichsrechnung	20	52.76	2.64

Tabelle 7.1: Konvergenz und Rechenzeiten

Das $k - \omega$ - Modell benötigt geringfügig mehr Iterationen zur Erreichung der Konvergenz als das $k - \varepsilon$ - Modell. Die Gesamtrechenzeit (Total Solution Time) und die Gesamtrechenzeit pro Iteration sind beim $k - \varepsilon$ - Modell am geringsten. Die weitaus kleinste Iterationsanzahl um eine konvergente Lösung zu erreichen benötigt das Baldwin - Lomax - Modell. Trotzdem sind bei ihm die größten Rechenzeiten gegeben. Die Gründe dafür sind in den restriktiven Implementierungsmöglichkeiten von Unterprogrammen in FIDAP (Übergabe von Werten nur Element für Element), aber auch in der nicht optimierten Subroutine selbst zu suchen. Durch Optimierung letzterer ist noch eine bedeutende Reduktion der Rechenzeiten zu erwarten.

Zum Verlauf der Residuen ist anzumerken, daß dieser bei allen drei Modellen als ein stetiger vorliegt. Dies ist nicht zuletzt eine Folge der Stabilisierungsmaßnahme $u_y = 0$ am Austritt.

Kapitel 8

Folgerungen und Hinweise für weitere Arbeiten

8.1 Abschließende Kommentierung der Ergebnisse

Zu den Ergebnissen soll zusammenfassend folgendes festgehalten werden: Alle drei näher untersuchten Modelle weisen für Reibungs- und Widerstandsbeiwerte bei höheren Reynoldszahlen gute Ergebnisse aus. Bezüglich der Geschwindigkeitsverteilung über der Plattenhöhe errechnen $k - \epsilon$ - und Baldwin - Lomax - Modell auch den Defektbereich gut. Größere Unterschiede zeigen sich jedoch beim qualitativen Verlauf der turbulenten Zähigkeit über der Platte. Vor allem jene vom Baldwin - Lomax - Modell ermittelte weicht stärker ab, wobei aber die anderen Größen zufriedenstellend – und somit mit den experimentellen Daten einigermaßen gut übereinstimmend – ausgewiesen werden.

Man könnte zunächst ein wenig überrascht sein, daß, abgesehen vom einfachen Mischungsweglängenansatz, die einzelnen Modelle einigermaßen gut übereinstimmende und an die Theorie und den Experimenten angepaßte Ergebnisse liefern. Aber es ist folgendes zu bedenken: Die den einzelnen Turbulenzmodellen zugehörigen Konstanten sind im allgemeinen so festgelegt, daß mit dem jeweiligem Modell eine große Klasse von Strömungen erfaßt werden kann, siehe z. Bsp. [8] oder [5]. Üblicherweise wird die turbulente Plattengrenzschicht als berechenbar mit eingeschlossen. Zur Festsetzung der Modellkonstanten stehen Meßdaten verschiedener Versuche zur Verfügung. Bei Nachrechnung dieser Versuche mittels gut brauchbarer Turbulenzmodelle (wie dem $k - \epsilon$ - oder dem $k - \omega$ - Modell) müssen bei deren richtigem Einsatz nahezu jene Ergebnisse erreicht werden, wie sie durch die Meßdaten der Versuchsströmung vorliegen. Da mit ziemlicher Sicherheit anzunehmen ist, daß auch die experimentellen Ergebnisse über die turbulente Plattengrenzschicht eine der Grundlagen für die Bestimmung der Modellkonstanten der einzelnen Modelle darstellt, sind die gut übereinstimmenden Ergebnisse zwischen Experiment und Simulationsergebnissen nicht weiter überraschend. In diesem Zusammenhang soll aber noch einmal darauf hingewiesen werden, daß der Einsatz vierknotiger Elemente bei dem hier angewendeten Rechenetz keine brauchbaren Resultate lieferte.

Wie die hier angestellten Berechnungen erkennen lassen, sind mit dem $k - \omega$ - und dem Baldwin - Lomax - Modell bei feinerem Netz qualitativ bessere Ergebnisse erzielbar. Das

Netz ist bezüglich dieser Modelle als akzeptierbares, doch grobes zu bezeichnen. Die Intervalle hinsichtlich der Plattenlänge und auch -höhe sind zu groß. Vergleichsrechnungen deuten darauf hin, daß mit besserer Netzfeinheit, speziell auch in den äußeren Grenzschichtbereichen, die Ergebnisse doch noch verbessert werden könnten. Andererseits muß man bedenken, daß bei besserer Strömungsauflösung andere Faktoren sehr an Einfluß gewinnen, so daß man auch die Auswirkungen dieser betrachten beziehungsweise in die Auswertung mitaufnehmen müßte. Es sind dies zum Beispiel die Randbedingungen, aber vor allem die Frage der turbulenten Zähigkeit in der drehungsfreien Strömung. Wie verhält sie sich im strömenden Fluid? Im Falle des $k - \varepsilon$ - und $k - \omega$ - Modells wird sie über die Randbedingungen von turbulenter kinetischer Energie und Dissipation in die Berechnung eingebracht. Vergleichsrechnungen zeigen, daß μ_T , im Gegensatz zu k und ε , nur wenig im Strömungsverlauf abnimmt. Ob dies realitätsgetreu ist, kann schwer beurteilt werden. Beim Baldwin - Lomax - Modell ist die turbulente Zähigkeit in der von der Grenzschicht unbeeinflussten Strömung überhaupt gegenüber der laminaren vernachlässigbar. Dies ist jedoch im Falle von Strömungsmaschinen unrealistisch. Wegen der bei diesen Maschinen stets vorhandenen Geschwindigkeitsänderungen und Umlenkungen der strömenden Medien sind stets auch in Strömungsgebieten, die nicht von der Grenzschicht beeinflusst werden, Turbulenzen zu erwarten. Es sind daher auch in diesen Gebieten Zähigkeiten anzusetzen, die weit über die laminare hinausgehen. Bei Strömungen, die durch Bewegung von festen Körpern durch ruhende Medien entstehen ("external flows", z. B. Tragflügel), kann jedoch von verschwindendem Turbulenzgrad und damit von verschwindender turbulenter Zähigkeit in der von der Grenzschicht unbeeinflussten Strömung ausgegangen werden.

Bei Berechnungen in der Ebene sind nun die Auswirkungen der Zähigkeit im freien Strömungsfeld wegen der dort kleinen vorherrschenden Geschwindigkeitsgradienten eher gering. Anders ist dies bei räumlichen Strömungssimulationen. Es kann erwartet werden, daß die Zähigkeit die Wirbelbildung im Raum doch entscheidend beeinflusst. Bezüglich der Strömung über der Platte soll noch einmal festgestellt werden, daß Zweigleichungsmodelle zwar Reibungsbeiwerte gut berechnen, aber weniger geeignet sind, den Defektbereich sauber auszuweisen. Ein Einfluß dieses Bereiches auf die gesamte Strömung ist zwar vorhanden, er soll aber speziell bei ebenen Problemen nicht überbewertet werden.

Um eine weitergehende Bewertung der Turbulenzmodelle zu ermöglichen, wären vor allem räumliche Strömungsberechnungen nötig. Deren Ergebnisse sollten dann an Versuchsergebnissen gemessen werden, wodurch der Einfluß und die Wirkung der Randwerte (k und ε) erkenntlich würde.

Als Resumee der Implementierung des Baldwin - Lomax - Modells in FIDAP gilt kurz gefaßt folgendes: Es liefert dieses Modell, verglichen mit den anderen verwendeten, tatsächlich qualitativ gute Ergebnisse, bei gleichzeitig wesentlich geringerer Iterationsanzahl. (Hinweis: Die Iterationsanzahl hängt stark vor allem von den Relaxationsfaktoren ab. Eine Parameterstudie, inwieweit diese die Iterationsanzahl beeinflussen, wurde nicht durchgeführt). Wegen der restriktiven Eingriffsmöglichkeiten und des damit verbundenen aufwendigen Datentransfers durch die Subroutine kommt es aber zu langen Rechenzeiten. Sie sind länger als bei Verwendung von FIDAP - internen Turbulenzmodellen. Das hier auf diese Weise implementierte Baldwin - Lomax - Modell ist daher weniger geeignet, um rasch ein Ergebnis zu erlangen. Es kann aber sehr gut für eher tiefere Berechnungen verwendet werden. Dies deswegen,

da durch die Subroutine doch ein gewisser Eingriff auf strömungsbestimmende Parameter (zum Beispiel Randbedingungen) möglich ist. Geachtet werden muß jedoch bei vertiefenden Berechnungen auf den Einfluß des Diskretisierungsverfahrens "Finite - Elemente", er ist gegebenenfalls näher zu betrachten. Die Behandlung weiterer strömungstechnischer Aufgaben mittels des Baldwin - Lomax - Modells ist damit wegen der hier erzielten, zufriedenstellenden Ergebnisse vielversprechend.

8.2 Hinweise für weitere Arbeiten

Da die Berechnungsergebnisse zufriedenstellend sind, kann mit der hier begonnenen Modellierung an zahlreiche neue Probleme herangegangen werden. Bevor einige dieser Aufgaben vorgestellt werden, eine eher allgemeine Bemerkung: bei der Erstellung der Subroutinen müssen zunächst Richtigkeit und dann kurze Rechenzeiten durch Programmverbesserungen angestrebt werden, z. Bsp. durch Reduzierung und Zusammenfassung von Ein- und Ausgabeoperationen. Durch kürzere Rechenzeiten ist es möglich, das Netz zu verfeinern und damit exaktere Resultate zu erhalten. Auch wird es möglich, kompliziertere Strömungsvorgänge hinsichtlich räumlicher Konfigurationen mit hinreichender Netzauflösung zu simulieren, wobei auch mittels Subroutine wichtige Größen, wie z. Bsp. der Wandabstand, berechnet werden können.

Als erstes zu behandelndes Problem drängt sich – wie bereits bei Vergleichsrechnungen durchgeführt – die Simulation des Nachlaufgebietes auf. Wie bekannt, sollte im Baldwin - Lomax - Modell dabei für die Berechnung der Zähigkeit der äußeren Schicht der zweite Term von Glg. 5.26 zum tragen kommen. Durch die Hinzunahme eines Strömungsbereiches hinter der Platte würde daher eine gewisse vervollständigte Anwendung des Baldwin - Lomax - Modells vorliegen. Als Ergänzung zu dieser Aufgabe könnte gleichzeitig eine nähere Analyse der Strömung ab der Plattenhinterkante erfolgen (Entwicklung der Nachlaufdele).

Ein zweites wichtiges Vorhaben könnte die Hinzunahme eines laminaren Anlaufstückes sein. Bei kleineren Reynoldszahlen hat der laminare Anlauf auf den Widerstandsbeiwert eine doch erhebliche Auswirkung im Sinne einer Schmälerung dessen. Um dabei Instabilitäten hintanzuhalten, kann der laminar - turbulent Übergang als stetiger Übergang modelliert werden. Ein solcher ist realitätsgetreuer als ein abrupter Übergang. Ein Fernziel könnte sein, den laminar - turbulent Übergang an zusätzliche Parameter zu koppeln (zum Beispiel dem Turbulenzgrad der Außenströmung).

Ein weiteres, auch theoretisch anspruchsvolles Problem ist die Simulation der Strömung direkt an der Plattenvorderkante. Diese Rechnungen könnten aber damit gekoppelt werden, die äußerst unangenehme Tatsache des Massendefektes näher zu untersuchen (es kann dieser doch für Anwendungen des Finiten - Elemente - Verfahrens hinderlich werden). Um diesen zu minimieren beziehungsweise zu unterbinden, sollte dabei nach dazu geeigneten Modellierungen Ausschau gehalten werden. Mit diesem Problemkreis gekoppelt ist die Frage der Elementgeometrie. Es bietet sich bei Ecken (Plattenvorderkante) ein Übergang auf Dreieckselemente an, sodaß hier auch der Einfluß der Elementgeometrie betrachtet werden kann. Auch das unterschiedliche Verhalten von vier- und neunknotigen Elementen könnte

dabei untersucht werden. Allgemein muß der Übergang auf andere als rechteckige Elemente für Simulationsaufgaben als mögliche Variante immer beachtet werden. Leider ist dabei – zum Beispiel bei Verwendung von Dreieckselementen bei der ebenen Platte – eine wesentlich größere Elementanzahl erforderlich. Bei besseren Ressourcen der Datenverarbeitung ist es aber durchaus vorstellbar, daß andere Elementformen eingesetzt werden können und die Rechteckselemente wegen ihrer Starrheit beim Netzaufbau verdrängen.

Eine für die praktische Problematik sehr wichtige Weiterführung der Anwendungen der Turbulenzmodelle und somit des Baldwin - Lomax - Modells besteht in der Anwendung auf räumliche Probleme. Wie bereits angedeutet wurde, ist zu hoffen, daß durch Vergleich der Rechenergebnisse mit Versuchsdaten Stärken und Schwächen der Turbulenzmodelle deutlicher zum Ausdruck kommen. Bei der Berechnung der Zähigkeit über Subroutinen hat man nun die Möglichkeit, abweichend von den Modellvorschlägen, Werte vorzugeben. Dies ist vor allem zur Modellierung der freien Strömung wichtig. Es kann erwartet werden, daß die in ihr vorhandene Zähigkeit das räumliche Strömungsbild erheblich beeinflusst (Sekundärwirbel). Aber erst durch solche Berechnungen und Ergebnisvergleich mit experimentellen Daten gelingt es, ein Gefühl für den richtigen Einsatz der numerischen Strömungsmechanik zu entwickeln, und auch Hinweise über das tatsächliche Strömungsbild können unter Umständen gewonnen werden.

Literaturverzeichnis

- [1] *Baldwin B., Lomax H.* : Thin - Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. AIAA - Paper 78-257, (1978)
- [2] *Carlson J. R.*: High Reynolds Number Analysis of Flat Plate and Separated Afterbody Flow using non- linear Turbulence Models. AIAA - Paper 96-2544, (1996)
- [3] *Cebeci T., Cousteix J.* : Modeling and Computation of Boundary - Layer Flow. Springer - Verlag, (1999)
- [4] *Coles D.*: The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 1, (1956)
- [5] FLUENT: *FIDAP8 - Users Manual.*: FLUENT Inc., (1998)
- [6] *Gersten K., Herwig H.*: Strömungsmechanik. Verlag Vieweg, (1992)
- [7] *Klebanoff S.*: Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient. NACA - Report 1247, (1953)
- [8] *Launder B. E., Spalding D. B.* : The Numerical Computation of Turbulent Flows. Computer Methods Appl. Mech. Eng., 3, (1974)
- [9] *Mayle R. E.*: The Role of Laminar - Turbulent Transition in Gas Turbine Engines. ASME Journal of Turbomachinery, Vol 113, (October 1991)
- [10] RSI: *IDL Version 5.1*: Research Systems Inc., (1998)
- [11] *Schlichting, H.*: Grenzschicht - Theorie. 5. Auflage, Verlag G. Braun, (1965)
- [12] *Schlichting, H., Gersten, K.*: Grenzschicht - Theorie. 9. Auflage, Springer, (1997)
- [13] *Truckenbrodt, E.*: Fluidmechanik. Band 2, 3. Auflage, Springer - Verlag, (1992)
- [14] *Wang Q., Massey S. J., Abdol - Hamid K. S., Frink N. T.*: Solving Navier - Stokes Equations with Advanced Turbulence Models on Three - Dimensional Unstructured Grids. AIAA - Paper 99-0156, (1999)
- [15] *Wilcox, D. C.*: Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, (1993)
- [16] *Willinger R.*: Vorlesung über Rechnergestützte Auslegung Thermischer Turbomaschinen und Energieanlagen. Institut für Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen der TU Wien, (1999)

- [17] *Henkes R. A. W. M.*: Scaling of the Turbulent Boundary Layer Along a Flat Plate According to Different Turbulence Models. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19, (1998)

Abbildungsverzeichnis

1.1	laminar - turbulent Übergang (aus [12])	3
1.2	Turbulenzflecken, Entwicklung der dreidimensionalen Störung (aus [11]) . .	4
1.3	Schnittbild der turbulenten Grenzschicht (schematisch)	6
3.1	Turbulente Schwankungsgeschwindigkeiten in der Grenzschicht (aus [11]) . .	13
3.2	Verteilung des Intermittenzfaktors (aus [11])	15
3.3	Widerstandsgesetz der längsangeströmten ebenen Platte (aus [11])	16
3.4	Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht (aus [13])	18
3.5	logarithmische Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht (aus [11]) . .	19
4.1	Bereichseinteilung turbulenter Grenzschichten	22
4.2	Dimensionslose Geschwindigkeitsprofile zufolge formaler Beziehungen	28
4.3	Die Funktion $G(\lambda, D)$ zur Berechnung von Reibungs- und Widerstandsbeiwerten	38
4.4	Grenzschicht- und Verdrängungsdicken zufolge theoretischer Beziehungen bei mäßigen Reynoldszahlen	41
4.5	Grenzschicht- und Verdrängungsdicken zufolge theoretischer Beziehungen bei hohen Reynoldszahlen	42
5.1	zur Erklärung der Mischungsweglänge	44
5.2	Dämpfungsfunktion nach Van Driest	47
5.3	Freistrahл als Beispiel einer freien turbulenten Strömung	47
5.4	theoretische Verteilung charakteristischer Größen in wandnahen Bereichen (aus [12])	52
6.1	vier- und neunknotiges Element, jeweils transformiert	58
6.2	Randbedingungen	63
6.3	Netzparameter	64
6.4	Netzmodifikation durch Intervalländerungen	65
6.5	Netzerweiterung mit Nachlaufgebiet	66
7.1	Geschwindigkeitsprofile	70
7.2	Geschwindigkeitslösungen am Grenzschichtrand	71
7.3	u^+ über y^+ - Darstellung	72
7.4	Grenzschichtdicken	74
7.5	Prozentgrenzschichtdicken - Gegenüberstellung	75
7.6	Verdrängungsdicken	76
7.7	Reibungsbeiwerte	77

7.8	Widerstandsbeiwerte	78
7.9	turbulente Frequenz, Dissipation, turbulente kinetische Energie und turbulente Zähigkeit beim $k - \omega$ - Modell, innere Schicht	80
7.10	turbulente Frequenz, Dissipation, turbulente kinetische Energie und turbulente Zähigkeit beim $k - \omega$ - Modell, äußere Schicht	81
7.11	turbulente Frequenz, Dissipation, turbulente kinetische Energie und turbulente Zähigkeit beim $k - \varepsilon$ - Modell, innere Schicht	81
7.12	turbulente Frequenz, Dissipation, turbulente kinetische Energie und turbulente Zähigkeit beim $k - \varepsilon$ - Modell, äußere Schicht	82
7.13	Größen zufolge des Baldwin - Lomax - Modells	83
7.14	Klebanoff'sche Intermittenzfunktion des Baldwin - Lomax - Modells	85
7.15	Zähigkeiten, innere Schicht	86
7.16	Zähigkeiten, äußere Schicht	87
7.17	Schubspannung zufolge $k - \omega$ - Modells, innere Schicht	89
7.18	Schubspannung zufolge $k - \omega$ - Modells, äußere Schicht	89
7.19	Schubspannung zufolge $k - \varepsilon$ - Modells, innere Schicht	90
7.20	Schubspannung zufolge $k - \varepsilon$ - Modells, äußere Schicht	90
7.21	Schubspannung zufolge Baldwin - Lomax - Modells, innere Schicht	91
7.22	Schubspannung zufolge Baldwin - Lomax - Modells, äußere Schicht	91
7.23	Vergleich von Zähigkeiten	92
7.24	turbulente Zähigkeit über der Platte, $k - \omega$ - Modell	94
7.25	turbulente Zähigkeit über der Platte, $k - \varepsilon$ - Modell	94
7.26	turbulente Zähigkeit über der Platte, Baldwin - Lomax - Modell	94

Tabellenverzeichnis

7.1 Konvergenz und Rechenzeiten	96
---	----