应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

非对称自变量线性各向同性张量函数的表示

郭 仲 衡

（北京大学数学系*，1981年4月2日收到）

摘　要

本文给出了非对称自变量的线性各向同性标量值和张量值张量函数表示定理的数学证明.

一、引　言注）

张量函数理论在近代连续介质力学本构关系的研究中起重要作用[1]. 描述线性各向同性弹性体应力应变关系的广义胡克定律是熟知的一例. 人们经过漫长的历史争议才达到了独立的弹性常数只有两个的结论. 在教科书里对这结论大致有两种介绍法：

（一） 接受应力主向和应变主向重合；引进杨氏模量E，波桑比ν和剪切模量G分别描述轴向简单拉伸和纯剪切的实验结果；将三个正交方向的简单状态"迭加"而得出具有三个常数的三维关系式；在，例如，$\sigma_y=-\sigma_z$和$\sigma_x=0$应力状态的正六面体考虑垂直于y和z轴等分角线的截面的纯剪切状态，经过几何考虑，得出$G=\frac{1}{2}E/(1+\nu)$. 这里"线性"和"各向同性"隐约地被应用着（参阅[2]）.

（二） 明确地从一般的分量形式线性关系出发，依次将各坐标轴转过π，"各向同性"要求某些弹性系数应相等，另一些系数应为零，归结得三个常数；然后利用应变张量的对称性得出两个独立常数的结论（参阅[3]）.

将变换系数对参量进行微商，Thomas[4]根本地改变了做法（二）在应用"各向同性"中需要逐个系数进行考察的费事手续. Gurtin在[5]中用两章的篇幅提出另一种证法，要点在于将对称张量分解为球张量和偏量之和. Martins 和 Guidugli[6]应用线性变换的线性变换的某些性质，按[5]的线索给出了一个较短的证明. 1974年，Gurtin[7]给出了经典弹性本构关系，即自变量为对称张量的线性各向同性张量值函数的表示定理的另一个清晰简捷

注） 本文是作者在德国完成的. 作者对德意志研究联合会（Deutsche Forschungsgemeinschaft），洪堡基金会（Alexander von Humboldt-Stiftung）和鲁尔大学（Ruhr-Universität）的支持以及 Th. Lehmann 教授的热情接待表示谢意.

* 现在西德鲁尔大学力学研究所工作.

的证明.

近年来发展了微极弹性理论，那里应力和应变张量都不再为对称（参阅[8]）．因此，将表示定理推广于一般的非对称自变量是有意义的．本文目的在于给出非对称自变量的线性各向同性标量值和张量值函数的表示定理．定理的全部数学证明只用到“线性”和“各向同性”两性质．

二、准 备[9,10]

希腊字母表示实数：α，β，$\varphi\in R$．令$\mathscr{V}$为三维内积空间．黑体小写拉丁字母表示向量：$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}\in\mathscr{V}$．黑体大写拉丁字母表示$\mathscr{V}$上的线性变换，即(二阶)张量：$\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$．Sym，Skw 和 Orth 分别表示空间 $\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$中的所有对称，反对称和正交元素．$\mathbf{I}$是单位张量．“$\otimes$”和“$\wedge$”分别表示张量积和叉积．如果$\mathbf{e}_i$ $(i=1，2，3)$是$\mathscr{V}$的笛氏基向量，则向量$\mathbf{u}$，张量$\mathbf{B}$和$\mathbf{I}$可写成并矢形式：

$$\mathbf{u}=u_i\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{B}=B_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j,\quad \mathbf{I}=\delta_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i \tag{2.1}$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，并用到“求和约定”．两向量并列表示它们的内积，如 $\mathbf{uv}$．内积运算施加于张量时表示它们并矢形式中相邻的两基向量的内积，如

$$\mathbf{Bu}=(B_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)(u_k\mathbf{e}_k)=B_{ij}u_j\mathbf{e}_i \tag{2.2}$$

$$\mathbf{AB}=(A_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)\ (B_{rs}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_s)=A_{ir}B_{rj}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{2.3}$$

张量的共轭运算“*”在于其基向量次序的交换，如

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^*=\mathbf{v}\otimes\mathbf{u},\quad \mathbf{B}^*=(B_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)^*=B_{ij}\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i \tag{2.4}$$

在张量的并矢表示中，如 (2.1) 式，用内积代替$\otimes$，就得该张量$\mathbf{B}$的“迹”：

$$\mathrm{tr}\mathbf{B}\overset{\mathrm{df}}{=}B_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=B_{ii} \tag{2.5}$$

“:”表示两个张量的双点乘，例如

$$\mathbf{B}:\mathbf{C}\overset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{tr}(\mathbf{B}^*\mathbf{C})=B_{ij}C_{ij} \tag{2.6}$$

由此又有迹的另一表示：

$$\mathbf{I}:\mathbf{B}=\mathrm{tr}(\mathbf{IB})=\mathrm{tr}\mathbf{B} \tag{2.7}$$

$\mathbf{S}\in\mathrm{Sym}$，$\mathbf{A}\in\mathrm{Skw}$ 和 $\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}$ 分别满足性质：

$$\mathbf{S}^*=\mathbf{S},\quad \mathbf{A}^*=-\mathbf{A},\quad \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*=\mathbf{I}. \tag{2.8}$$

任何张量 $\mathbf{B}$ 至少有一个右主向$\mathbf{r}$：

$$\mathbf{Br}=\lambda_r\mathbf{r} \tag{2.9}$$

和一个左主向 $\mathbf{l}$：

$$\mathbf{lB}=\lambda_l\mathbf{l} \tag{2.10}$$

对称张量的右主向同时也是左主向，统称主向．对称张量至少有三个互相正交的主向．$\forall$单位$\mathbf{e}\in\mathscr{V}$，由于$\mathbf{e}\otimes\mathbf{ee}=\mathbf{e}$ 及 $\mathbf{ee}\otimes\mathbf{e}=\mathbf{e}$，$\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\in\mathrm{Sym}$ 的一个主向量为 $\mathbf{e}$，主值为 1．任意垂直于 $\mathbf{e}$ 的向量 $\mathbf{u}$ 均为 $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}$ 的主向，相应主值为零，因为$\mathbf{e}\otimes\mathbf{eu}=\mathbf{ue}\otimes\mathbf{e}=0$．如果$\underset{i}{S}$和$\underset{i}{\mathbf{r}}$ $(i=1,2,3)$分别表示$\mathbf{S}\in\mathrm{Sym}$ 的主值和单位主向量（今后主向量均为单位向量），则有 $\mathbf{S}$ 的谱表示：

$$\mathbf{S}=\sum_i \underset{i}{S}\,\underset{i}{\mathbf{r}}\otimes\underset{i}{\mathbf{r}} \tag{2.11}$$

这时 $\mathbf{S}$ 的迹等于

$$\mathrm{tr}\mathbf{S}=\sum_{i} S_{ii} \tag{2.12}$$

由于 $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})^*=-(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})$，$\forall\mathbf{u},\ \mathbf{v}\in\mathscr{V}$，张量 $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\in\mathrm{Skw}$. 它的唯一右（和左）主向是 $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}/|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|$，对应的主值为零，因为

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})=\mathbf{u}[\mathbf{v}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})]-\mathbf{v}[\mathbf{u}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})]=0$$

$\forall$非共面 $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\in\mathscr{V}$，任意反对称张量 $\mathbf{A}$ 可表为

$$\mathbf{A}=\xi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})+\eta(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}-\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})+\zeta(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}) \tag{2.13}$$

其中 $\xi,\ \eta,\ \zeta\in\mathrm{R}$.

定义1 标量值张量函数 $\varphi(\mathbf{B})$ 或张量值张量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{B})$ 是线性的，如果

$$\varphi(\alpha\mathbf{B}+\beta\mathbf{C})=\alpha\varphi(\mathbf{B})+\beta\varphi(\mathbf{C}) \tag{2.14}$$

$$\mathbf{F}(\alpha\mathbf{B}+\beta\mathbf{C})=\alpha\mathbf{F}(\mathbf{B})+\beta\mathbf{F}(\mathbf{C}) \tag{2.15}$$

$\forall\alpha,\ \beta\in\mathrm{R},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}\in\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$ 成立.

任何线性的 $\varphi(\mathbf{B})$ 均可表示为

$$\varphi(\mathbf{B})=\mathbf{L}:\mathbf{B}\qquad(\mathbf{L}\in\mathrm{Lin}(\mathscr{V})) \tag{2.16}$$

定义2 $\varphi(\mathbf{B})$ 或 $\mathbf{F}(\mathbf{B})$ 是各向同性的，如果

$$\varphi(\mathbf{B})=\varphi(\mathbf{QBQ}^*) \tag{2.17}$$

$$\mathbf{QF}(\mathbf{B})\mathbf{Q}^*=\mathbf{F}(\mathbf{QBQ}^*) \tag{2.18}$$

$\forall\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}$ 成立.

引理1 如果 $\mathbf{L}\in\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$ 满足

$$\mathbf{L}=\mathbf{Q}^*\mathbf{LQ}\qquad(\forall\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}) \tag{2.19}$$

则 $\mathbf{L}$ 是相似张量：

$$\mathbf{L}=\lambda\mathbf{I}\qquad(\lambda\in\mathrm{R}) \tag{2.20}$$

证明 设 λ 和 $\mathbf{r}$ 是 $\mathbf{L}$ 的主值和主向量，则由（2.19）式依次可得

$$\mathbf{LQ}=\mathbf{QL} \tag{2.21}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{Qr})=\mathbf{QLr}=\lambda(\mathbf{Qr}) \tag{2.22}$$

$$(\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I})(\mathbf{Qr})=0 \tag{2.23}$$

由于 $\mathbf{Q}$ 的任意性，任何方向 $\mathbf{Qr}$ 均为 $\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I}$ 的零向，故 $\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I}$ 是零张量. 证毕

引理2 $\mathbf{S}\in\mathrm{Sym}$ 的主向也是各向同性张量值张量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{S})$ 的主向.

证明 设 λ 和 $\mathbf{r}$ 是 $\mathbf{S}$ 的主值和主向量：

$$\mathbf{Sr}=\mathbf{rS}=\lambda\mathbf{r} \tag{2.24}$$

考虑一个特殊的正交张量（实现绕 $\mathbf{r}$ 转过 π 角）：

$$\mathbf{R}=-\mathbf{I}+2\mathbf{r}\otimes\mathbf{r} \tag{2.25}$$

注意到（利用(2.24)式）

$$\begin{aligned}\mathbf{RSR}^*&=(-\mathbf{I}+2\mathbf{r}\otimes\mathbf{r})\mathbf{S}(-\mathbf{I}+2\mathbf{r}\otimes\mathbf{r})\\&=\mathbf{S}-2\mathbf{Sr}\otimes\mathbf{r}-2\mathbf{r}\otimes\mathbf{rS}+4\mathbf{r}\otimes\mathbf{rSr}\otimes\mathbf{r}=\mathbf{S}\end{aligned} \tag{2.26}$$

对于这个特殊正交张量，各向同性公式（2.18）具体化为

$$\mathbf{RF}(\mathbf{S})\mathbf{R}^*=\mathbf{F}(\mathbf{S})\qquad\text{即}\qquad\mathbf{RF}(\mathbf{S})=\mathbf{F}(\mathbf{S})\mathbf{R} \tag{2.27}$$

并有

$$\mathbf{R}[\mathbf{F}(\mathbf{S})\mathbf{r}]=\mathbf{F}(\mathbf{S})\mathbf{Rr}=\mathbf{F}(\mathbf{S})\mathbf{r} \tag{2.28}$$

上式说明 $\mathbf{F(S)r}$ 也是 $\mathbf{R}$ 的主方向. 另一方面，转轴方向 $\mathbf{r}$ 是转动张量 $\mathbf{R}$ 的唯一主向，故 $\mathbf{F(S)r}$ 和 $\mathbf{r}$ 共线，即

$$\mathbf{F(S)r}=\mu\mathbf{r} \qquad \text{证毕} \tag{2.29}$$

由于主向数目相同，我们得

推论 1 对称自变量的各向同性张量值张量函数的函数值对称.

三、标 量 值 函 数

定理 1 任何对称张量的线性各向同性标量值函数 $\varphi(\mathbf{S})$ 可表示为

$$\varphi(\mathbf{S})=\lambda\operatorname{tr}\mathbf{S} \tag{3.1}$$

其中 λ 是与 $\mathbf{S}$ 无关的唯一常数.

证明 局限于 $\mathbf{u}$ 是单位向量的 $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ 型自变量，则 $\varphi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})=\lambda(\mathbf{u})$ 变成单位向量 $\mathbf{u}$ 的标量值向量函数. 记 $\mathbf{v}=\mathbf{Qu}(\forall\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth})$，并考虑到各向同性性质(2.17)，得

$$\lambda(\mathbf{u})=\varphi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})=\varphi(\mathbf{Qu}\otimes\mathbf{uQ}^*)=\varphi((\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qu}))$$
$$=\varphi(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})=\lambda(\mathbf{v})$$

由于 $\mathbf{Q}$（亦即 $\mathbf{v}$）的任意性，向量函数 λ 是与其单位自变量无关的标量. 就是说，当自变量为 $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ 型（$\mathbf{u}$ 是单位向量）时，

$$\varphi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})=\lambda \tag{3.2}$$

对于任意 $\mathbf{S}\in\mathrm{Sym}$，利用(2.11)，(2.14)，(3.2)和(2.12)各式，我们有

$$\varphi(\mathbf{S})=\varphi(\Sigma_i S_i\mathbf{r}_i\otimes\mathbf{r}_i=\Sigma_i S_i\varphi(\mathbf{r}_i\otimes\mathbf{r}_i)=\lambda\operatorname{tr}\mathbf{S} \qquad \text{证毕}$$

表示式（3.1）对非对称自变量 $\mathbf{B}\in\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$ 亦成立，因有

定理 2 任何张量的线性各向同性标量值函数 $\varphi(\mathbf{B})$ 可表示为

$$\varphi(\mathbf{B})=\lambda\operatorname{tr}\mathbf{B} \tag{3.3}$$

其中 λ 是与 $\mathbf{B}$ 无关的唯一常数.

证明 根据线性性质（2.14），即（2.16），我们有

$$\varphi(\mathbf{B})=\mathbf{L}:\mathbf{B} \tag{3.4}$$

问题归结为求 $\mathbf{L}\in\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$. 由各向同性性质(2.17)，有

$$\mathbf{L}:\mathbf{B}=\mathbf{L}:(\mathbf{QBQ}^*)=(\mathbf{Q}^*\mathbf{LQ}):\mathbf{B} \tag{3.5}$$

自变量 $\mathbf{B}$ 的任意性导致

$$\mathbf{L}=\mathbf{Q}^*\mathbf{LQ} \qquad (\forall\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}) \tag{3.6}$$

由引理 1 知，$\mathbf{L}$ 必为相似张量：

$$\mathbf{L}=\lambda\mathbf{I} \tag{3.7}$$

将上式代入(3.4)式，并考虑到（2.7）式，即得表示式（3.3）. 证毕

注 将 $\mathbf{B}$ 分解为 $\mathbf{S}\in\mathrm{Sym}$ 及 $\mathbf{A}\in\mathrm{Skw}$ 之和，从

$$\operatorname{tr}\mathbf{B}=\operatorname{tr}\mathbf{S}+\operatorname{tr}\mathbf{A}=\operatorname{tr}\mathbf{S} \tag{3.8}$$

可知，变量 $\mathbf{B}$ 的反对称部分对 $\varphi(\mathbf{B})$ 不起作用. 换言之，任何反对称自变量的线性各向同性标量值函数恒等于零.

四、张量值函数

定理 3 任何对称张量的线性各向同性张量值函数 $\mathbf{F}(\mathbf{S})$ 可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{S})=\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{S})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{S} \tag{4.1}$$

其中 λ 和 μ 是与 $\mathbf{S}$ 无关的两个常数.

证明 对单位 $\mathbf{e}\in\mathscr{V}$，取笛氏标架的基向量 $\mathbf{e}_3=\mathbf{e}$，则 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 平面上任意单位向量是 $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\in\mathrm{Sym}$ 的主向量，对应的主值为零. 根据引理2，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 平面上任意方向也是 $\mathbf{F}(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})$ 的主方向，对应于相等的主值，设为λ，于是得谱表示

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})&=\lambda(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)+\gamma\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\\&=\lambda\mathbf{I}+(\gamma-\lambda)\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\equiv\lambda(\mathbf{e})\mathbf{I}+2\mu(\mathbf{e})\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\end{aligned} \tag{4.2}$$

一般而言，λ 和 μ 是 $\mathbf{e}$ 的函数. 对单位向量

$$\mathbf{f}=\mathbf{Q}\mathbf{e} \qquad (\forall\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}) \tag{4.3}$$

(4.2)式变为

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}\otimes\mathbf{f})=\lambda(\mathbf{f})\mathbf{I}+2\mu(\mathbf{f})\mathbf{f}\otimes\mathbf{f} \tag{4.4}$$

将 (4.3) 式代入 (4.4) 式左端，并考虑到各向同性性质 (2.18) 和 (4.2) 式，得

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{f}\otimes\mathbf{f})&=\mathbf{F}((\mathbf{Q}\mathbf{e})\otimes(\mathbf{Q}\mathbf{e}))=\mathbf{F}(\mathbf{Q}\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\mathbf{Q}^*)=\mathbf{Q}\mathbf{F}(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})\mathbf{Q}^*\\&=\lambda(\mathbf{e})\mathbf{I}+2\mu(\mathbf{e})\mathbf{Q}\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\mathbf{Q}^*=\lambda(\mathbf{e})\mathbf{I}+2\mu(\mathbf{e})\mathbf{f}\otimes\mathbf{f}\end{aligned} \tag{4.5}$$

由 (4.4) 和 (4.5) 两式，得

$$[\lambda(\mathbf{e})-\lambda(\mathbf{f})]\mathbf{I}+2[\mu(\mathbf{e})-\mu(\mathbf{f})]\mathbf{f}\otimes\mathbf{f}=0 \tag{4.6}$$

上式左端是一零张量，它将任何非零向量变换为零向量. 特别地 $\forall\mathbf{u}\perp\mathbf{f}$，得

$$[\lambda(\mathbf{e})-\lambda(\mathbf{f})]\mathbf{u}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda(\mathbf{e})=\lambda(\mathbf{f}) \tag{4.7}$$

从而由 (4.6) 式，有

$$[\mu(\mathbf{e})-\mu(\mathbf{f})]\mathbf{f}\otimes\mathbf{f}=0 \quad\Rightarrow\quad \mu(\mathbf{e})=\mu(\mathbf{f}) \tag{4.8}$$

由于 $\mathbf{Q}$ (亦即 $\mathbf{f}$) 为任意，λ 和 μ 是与其向量自变量无关的标量. 就是说，我们总有

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r})=\lambda\mathbf{I}+2\mu\mathbf{r}\otimes\mathbf{r} \qquad (\forall\text{单位}\mathbf{r}) \tag{4.9}$$

对于任意 $\mathbf{S}$，利用(2.11)，(2.15)，(4.9)和(2.12)各式，得

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{S})&=\mathbf{F}(\sum_i S_i\mathbf{r}_i\otimes\mathbf{r}_i)=\sum_i S_i\mathbf{F}(\mathbf{r}_i\otimes\mathbf{r}_i)=\sum_i S_i(\lambda\mathbf{I}+2\mu\mathbf{r}_i\otimes\mathbf{r}_i)\\&=\lambda(\sum_i S_i)\mathbf{I}+2\mu\sum_i S_i\mathbf{r}_i\otimes\mathbf{r}_i=\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{S})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{S} \qquad \text{证毕}\end{aligned} \tag{4.10}$$

为了将表示定理推广于非对称张量，先证

定理 4 任何 $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}(\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathscr{V})$ 型的反对称张量的线性各向同性张量值函数 $\mathbf{F}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})$ 可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})=2\alpha(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}) \tag{4.11}$$

其中α是与 $\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ 无关的唯一常数.

证明 先考虑任意非共线的 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$. 记

$$\mathbf{C}=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u} \tag{4.12}$$

及其主向量

$$\mathbf{r}\overset{\mathrm{df}}{=}\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}/|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}| \tag{4.13}$$

则

$$\mathbf{Cr}=\mathbf{rC}=0 \tag{4.14}$$

对于由（2.25）式定义的正交张量R，考虑到上式，我们有

$$\mathbf{RCR}^*=\mathbf{C}-2\mathbf{Cr}\otimes\mathbf{r}-2\mathbf{r}\otimes\mathbf{rC}+4\mathbf{r}\otimes\mathbf{rCr}\otimes\mathbf{r}=\mathbf{C} \tag{4.15}$$

于是，各向同性公式（2.18）具体化为

$$\mathbf{RF}(\mathbf{C})\mathbf{R}^*=\mathbf{F}(\mathbf{C}) \quad 即 \quad \mathbf{RF}(\mathbf{C})=\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{R} \tag{4.16}$$

并且有

$$\mathbf{R}[\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{r}]=\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{Rr}=\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{r} \tag{4.17}$$

$$[\mathbf{rF}(\mathbf{C})]\mathbf{R}=\mathbf{rRF}(\mathbf{C})=\mathbf{rF}(\mathbf{C}) \tag{4.18}$$

就是说，$\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{r}$和$\mathbf{rF}(\mathbf{C})$分别是R的右和左主向．考虑到R的唯一的左，右主向相同，且等于r，我们有

$$\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{r}=\xi_r\mathbf{r} \quad 和 \quad \mathbf{rF}(\mathbf{C})=\xi_l\mathbf{r} \tag{4.19}$$

以u，v，r为基，$\mathbf{F}(\mathbf{C})$可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{C})=&\xi_{11}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+\xi_{12}\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}+\xi_{13}\mathbf{u}\otimes\mathbf{r}+\xi_{21}\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}+\xi_{22}\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\\&+\xi_{23}\mathbf{v}\otimes\mathbf{r}+\xi_{31}\mathbf{r}\otimes\mathbf{u}+\xi_{32}\mathbf{r}\otimes\mathbf{v}+\xi_{33}\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\end{aligned} \tag{4.20}$$

一般而言，各ξ_{ij}是u和v的函数．将上式代入（4.19）式，得

$$\xi_{13}\mathbf{u}+\xi_{21}\mathbf{v}+(\xi_{33}-\xi_r)\mathbf{r}=0 \tag{4.21}$$

$$\xi_{31}\mathbf{u}+\xi_{32}\mathbf{v}+(\xi_{33}-\xi_l)\mathbf{r}=0 \tag{4.22}$$

向量u，v，r的线性无关导致

$$\xi_{13}=\xi_{31}=\xi_{23}=\xi_{32}=0 \tag{4.23}$$

$$\xi_{33}=\xi_r=\xi_l\equiv\xi(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \tag{4.24}$$

考虑到上两式，将各向同性性质（2.18）应用于表示式（4.20），$\forall\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}$，有

$$\begin{aligned}&(\xi_{11}-\xi_{11}^Q)(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qu})+(\xi_{12}-\xi_{12}^Q)(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qv})+(\xi_{21}-\xi_{21}^Q)(\mathbf{Qv})\otimes(\mathbf{Qu})\\&+(\xi_{22}-\xi_{22}^Q)(\mathbf{Qv})\otimes(\mathbf{Qv})+\xi(\mathbf{u},\ \mathbf{v})(\mathbf{Qr})\otimes(\mathbf{Qr})-\xi(\mathbf{Qu},\ \mathbf{Qv})\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}=0\end{aligned} \tag{4.25}$$

其中$\xi_{ij}^Q=\xi_{ij}(\mathbf{Qu},\ \mathbf{Qv})$．Qu，Qv，Qr也是线性无关的，故r可表示为

$$\mathbf{r}=\beta\mathbf{Qu}+\gamma\mathbf{Qv}+\eta\mathbf{Qr} \tag{4.26}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}=&\beta^2(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qu})+\beta\gamma(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qv})+\beta\eta(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qr})\\&+\gamma\beta(\mathbf{Qv})\otimes(\mathbf{Qu})+\gamma^2(\mathbf{Qv})\otimes(\mathbf{Qv})+\gamma\eta(\mathbf{Qv})\otimes(\mathbf{Qr})\\&+\eta\beta(\mathbf{Qr})\otimes(\mathbf{Qu})+\eta\gamma(\mathbf{Qr})\otimes(\mathbf{Qv})+\eta^2(\mathbf{Qr})\otimes(\mathbf{Qr})\end{aligned} \tag{4.27}$$

将上式代入（4.25）式，考虑到并矢基$(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qu})$，$(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qv})$，…的线性无关，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\beta\eta\xi(\mathbf{Qu},\ \mathbf{Qv})=0\\&\gamma\eta\xi(\mathbf{Qu},\ \mathbf{Qv})=0\\&\xi(\mathbf{u},\ \mathbf{v})-\eta^2\xi(\mathbf{Qu},\ \mathbf{Qv})=0\end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

如果Q不是绕r轴的转动（或带反射），β和γ不能同时为零，不妨取$\beta\neq0$．以β除第一式，并代入第三式，得

$$\xi(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=0 \tag{4.29}$$

考虑到这结果及并矢基的线性无关，从（4.25）式又有

$$\xi_{ij}(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\xi_{ij}(\mathbf{Q}\mathbf{u},\ \mathbf{Q}\mathbf{v}) \quad (i,\ j=1,\ 2) \tag{4.30}$$

Q的任意性使得，ξ_{ij}是与u，v无关的常数，于是（4.20）式简化为

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})=\xi_{11}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+\xi_{12}\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}+\xi_{21}\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}+\xi_{22}\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} \tag{4.31}$$

F(C)的线性性质使得它也是u和v的线性函数，因此进一步又有

$$\xi_{11}=\xi_{22}=0 \tag{4.32}$$

考虑到上述结果及函数的线性性质，我们有

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})=-\mathbf{F}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=-\xi_{12}\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\xi_{21}\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} \tag{4.33}$$

比较（4.31）和（4.33）两式，根据$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$和$\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}$的线性无关，我们有

$$\xi_{12}=-\xi_{21}\equiv 2\alpha \tag{4.34}$$

从而得表示式（4.11）．该表示式对共线的u，v也成立．　　证毕

利用反对称张量的表示式（2.13），及函数的线性性质，我们有

推论 2　任何反对称张量的线性各向同性张量值函数F(A)可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=2\alpha\mathbf{A} \tag{4.35}$$

其中 α 是与 A 无关的常数．

推论 3　反对称自变量的线性各向同性张量值函数的函数值反对称．

我们现在可以实现表示定理的推广了．

定理 5　任何张量的线性各向同性张量值函数F(B)可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{B})=\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{B})\mathbf{I}+(\mu+\alpha)\mathbf{B}+(\mu-\alpha)\mathbf{B}^* \tag{4.36}$$

其中λ，μ和α是与B无关的三个独立常数．

证明　将B分解为对称和反对称部分之和，根据F(B)的线性性质，我们有

$$\mathbf{F}(\mathbf{B})=\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{B}+\mathbf{B}^*}{2}\right)+\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{B}-\mathbf{B}^*}{2}\right) \tag{4.37}$$

将表示式（4.1）和（4.35）分别应用于上式右端，得

$$\mathbf{F}(\mathbf{B})=\lambda\left(\mathrm{tr}\frac{\mathbf{B}+\mathbf{B}^*}{2}\right)\mathbf{I}+2\mu\frac{\mathbf{B}+\mathbf{B}^*}{2}+2\alpha\frac{\mathbf{B}-\mathbf{B}^*}{2} \tag{4.38}$$

在上式，考虑到trB线性依赖于B和

$$\mathrm{tr}\mathbf{B}=\mathrm{tr}\mathbf{B}^* \tag{4.39}$$

即得表示式（4.36）．　　证毕

线性各向同性微极弹性体的应力应变关系就具有（4.36）的形式（参阅[8]）

推论 4　对满足定理 5 条件的F(B)，恒有

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{B})=\mathbf{F}(\mathbf{B}^*) \tag{4.40}$$

证明　根据推论 1 和推论 3，(4.37)式右端第一项对称，第二项反对称．如果我们将(4.37)式左端进行加法分解：

$$\mathbf{F}(\mathbf{B})=\frac{1}{2}[\mathbf{F}(\mathbf{B})+\mathbf{F}^*(\mathbf{B})]+\frac{1}{2}[\mathbf{F}(\mathbf{B})-\mathbf{F}^*(\mathbf{B})] \tag{4.41}$$

比较（4.37）和（4.41）两式的对称（或反对称）部份，根据分解的唯一性，推论 4 是显然的．

参 考 文 献

1. Truesdell, C. and Noll, W., *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. Handbuch der Physik, Bd. III/3, Springer, (1965).
2. Timoshenko S. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, (1951).
3. Pearson, C. E., *Theoretical Elasticity*, Harvard Univ. Press, Cambridge, U. S. A. (1959).
4. Thomas, T. Y., *Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry*, Acad. Press, New York, (1961).
5. Gurtin, M. E., *The Linear Theory of Elasticity*, Handbuch der Physik, Bd. VIa/2, Springer, (1972).
6. Martins, L. C. and Guidugli, P. P., A new proof of the representation theorem for isotropic, linear constitutive relations *J. Elasticity*, 8, (1978), 319—322.
7. Gurtin, M. E., A short proof of the representation theorem for isotropic, linear stress-strain relations, *J. Elasticity*, 4, (1974), 243—245.
8. Nowacki, W. and Olszak, W., *Micropolar Elasticity*, CISM Course No. 151 Udine, Springer, (1974).
9. Chadwick, P., *Continuum Mechanics—Concise Theory & Problems*, George Allen & Unwin, London, (1976).
10. 郭仲衡, 《非线性弹性理论》, 科学出版社, (1980).

Representations of Linear, Isotropic Tensor Functions of an Asymmetric Argument

Guo Zhong-heng

(Department of Mathematics, Beijing University, Beijing)

Abstract

This paper gives a mathematical demonstration of the representation theorems for linear, isotropic scalar- and tensor-valued tensor functions of an asymmetric argument.