第五章 大数定理和中心极限定理

5.1 依概率收敛

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是一个随机变量序列，A是一个常数，如果对于任意的$\epsilon>0$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|X_n-A|<\epsilon\}=1 \tag{1}$$

则称随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$依概率收敛于常数A，记作$X_n\xrightarrow{P}A$.

5.2 切比雪夫不等式

设随机变量X的数学期望EX和方差DX存在，则对于任意的$\epsilon>0$,总有

$$P\{|X-EX|\geq\epsilon\}\leq\frac{DX}{\epsilon^2} \tag{2}$$

5.3 切比雪夫大数定理

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为两两不相关的随机变量序列，存在常数$C$,使$D(X_i)\leq C\ \ (i=1,2,\cdots)$,则对于任意的$\epsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i|<\epsilon\}=1 \tag{3}$$

5.4 伯努利大数定理

设随机变量$X_n\sim B(n,p),n=1,2,\cdots$，则对于任意$\epsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{X_n}{n}-p|<\epsilon\}=1 \tag{4}$$

5.5 辛钦大数定理

设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，具有数学期望$EX_i=\mu,i=1,2,\cdots$,则对任意的$\epsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\epsilon\}=1 \tag{5}$$

5.6 拉普拉斯中心极限定理

设随机变量$X_n\sim B(n,p),n=1,2,\cdots$,则对于任意实数$x$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\}=\Phi(x) \tag{6}$$

其中$\Phi(x)$是标准正态分布函数。

$$X_n \sim N(np, np(1-p))?\text{应该是吧} \tag{7}$$

5.7 林德伯格中心极限定理

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$独立同分布，具有数学期望和方差，$EX_n = \mu, DX_n = \sigma^2, n = 1, 2, \cdots$,则对于任意实数$x$,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \Phi(x) \tag{8}$$

其中$\Phi(x)$是标准正态分布函数。

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \tag{9}$$