MATEMÁTICA FINANCIERA

CICLO PROFESIONAL

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Córdoba

UNC Universidad Nacional de Córdoba
FCE Facultad de Ciencias Económicas
educación a distancia

MATEMÁTICA FINANCIERA

CICLO PROFESIONAL

AUTORES:

Mgter. Oscar Margaría

Cra. Laura Bravino

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FCE Facultad de Ciencias Económicas

educación a distancia

Margaría, Oscar
Matemática financiera / Oscar Margaría y Laura Bravino. - 1a ed. - Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba, 2014.
E-Book.

ISBN 978-950-33-1118-9

1. Finanzas. I. Bravino, Laura II. Título.
CDD 332.071 1

Fecha de catalogación: 28/03/2014

Matemática Financiera. Material de Estudio teórico práctico está distribuido bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Rector
Dr. Francisco Tamarit

Vicerrectora
Dra. Silvia Barei

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Decano
Lic. FRANCISCO M. ECHEGARAY

Vicedecano
Cr. ÁNGEL A. TAPIA

Secretaria de Asuntos Académicos
Mgter. SHIRLEY SAUNDERS

Asesora Académica
Dra. Catalina Alberto de Azcona

Secretario Técnico
Cr. SERGIO ZEN

Secretario de Extensión
Lic. EDUARDO DI LEONARDO

Secretaria de Asuntos Estudiantiles
Cr. FACUNDO QUIROGA MARTINEZ

Secretaria de Ciencia, Técnica y Relaciones Internacionales
Dr. ALFREDO VISINTINI

Secretario de Administración
Mgter. MARCELO SÁNCHEZ

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Coordinadora del Dpto. de Educación a Distancia
Mgter. Dalmira Pensa

Coordinadora Pedagógica
Dra. Adela Coria

Equipo Pedagógico
Esp. Verónica Pacheco
Lic. Marina Yazyi

Maquetación de contenidos
Lic. Víctor Cacciagiú
Lic. Diego Ruíz

Diseño gráfico
Beatríz Barbosa

educación
a distancia

ÍNDICE

MATEMÁTICA FINANCIERA:
Introducción

La presente propuesta tiene por objetivo acompañarlos en el estudio de la asignatura **Matemática Financiera** -modalidad a distancia- que corresponde al **Ciclo Superior** de las carreras dictadas en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Córdoba. La misma ha sido diseñada de manera integral, a partir de espacios que se articulan y complementan. Este **material** de estudio será de utilidad para orientarlos en el recorrido por la asignatura y ayudarlos en la comprensión de las distintas temáticas abordadas. También forma parte de esta propuesta un **aula virtual** diseñada para enriquecer los aprendizajes, potenciar la interacción entre docentes y estudiantes y posibilitar el acceso a múltiples recursos.

En estos materiales se desarrollan todos los contenidos del programa. Los mismos han sido organizados en **bloques y unidades**:

Bloque 1	Unidades 1 a 3
Bloque 2	Unidades 4 y 5
Bloque 3	Unidades 6 y 7
Bloque 4	Unidades 8 y 9

Los bloques abarcan varias unidades, las cuales incluyen:

- los **objetivos y contenidos** de la asignatura;
- una **presentación,** que contiene un **ejemplo introductorio** vinculado a alguno/s de los contenidos, que se irá resolviendo a lo largo de la unidad;
- el **desarrollo conceptual y matemático-financiero** de los contenidos de la unidad. Encontrarán aquí definiciones, explicaciones, desarrollos matemáticos, gráficos y ejemplos. Cada uno de estos ejemplos está destacado e identificado con el número de unidad y con numeración correlativa;
- ejercicios a resolver. A medida que se avanza en el desarrollo de las distintas temáticas, encontrarán una serie de ejercicios que los ayudarán a poner en práctica lo aprendido hasta el momento. Asimismo, al finalizar cada unidad, se ofrece una nueva propuesta de actividades para seguir trabajando;
- un breve resumen de los temas analizados en la unidad, denominado **Integrando Ideas** y, por último;
- la **bibliografía**, referenciada en el programa de la asignatura como obligatoria.

Durante la lectura de este material podrá observar una serie de **íconos** que les permitirán identificar de manera rápida y ágil algunos aspectos que queremos destacar:

	hace referencia a los **ejemplos introductorios** de la presentación de cada unidad.
	indica la importancia de prestar especial atención sobre algún concepto o idea que puede dar lugar a **errores frecuentes** o generar conflictos en su compresión.
	hace referencia a todos aquellos ejercicios que tendrán que resolver a medida que avanzan en el estudio de la asignatura. Todos tienen su respuesta en el texto.
	Nos anticipa cuáles serán los **recursos a utilizar** en cada una de las unidades. Si trabajaremos por ejemplo con videos tutoriales de ejercicios, de planilla de cálculo, con instructivos para el uso de la calculadora financiera y/o con simuladores, además de hacerlo con este material teórico-práctico.

También, encontrarán otros íconos que hacen referencia a distintos espacios y recursos disponibles en el **aula virtual**:

Remite a las presentaciones de los distintos bloques y unidades. Allí los profesores proporcionan pistas y algunas recomendaciones para el estudio de los distintos temas abordados.

Con él les recordamos que no están solos en el estudio y que contamos con distintos medios e instancias de interacción virtuales que nos permiten aprender juntos a compañeros y profesores. Estos espacios están destinados a establecer **diálogos sobre los contenidos**, allí podrán consultar cualquier duda o dificultad que se presente. Cabe aclarar que también contaremos con instancias presenciales destinadas a tal fin.

Nos advierte sobre la posibilidad de realizar **autoevaluaciones** por bloque. Las mismas estarán disponibles, en el aula virtual, a medida que se avance en el estudio de la asignatura para ayudarlos a hacer un seguimiento de los progresos en el aprendizaje.

Tal como les indicamos anteriormente, y considerando que la asignatura implica adquirir habilidades para resolver operaciones financieras, hemos desarrollado en el aula virtual una sección denominada **explicando cómo se hace**. Allí encontrarán numerosos ejercicios para resolver que se han sido identificados de diferente manera:

Ejercicio resuelto en video tutorial. En cada unidad hemos seleccionado algunos ejercicios a fin de mostrarles, de manera detallada, cómo se resuelven ya que por su nivel de dificultad pueden generar confusión y/o porque permiten agrupar contenidos diversos y, de este modo, se integra para su resolución varios de los procedimientos enseñados.

Ejercicio resuelto empleando la **planilla de cálculo** y en video tutorial. Como profesionales en Ciencias Económicas seguramente realizaremos muchas tareas en una computadora. En este sentido, la planilla de cálculo constituye una herramienta clave para trabajar con funciones financieras. En aquellas unidades donde sea necesario introducir distintas funciones encontrarán ejercicios resueltos en formato de video.

Ejercicio resuelto con instrucciones en la utilización de la **calculadora financiera**. Para facilitar el uso de la calculadora financiera hallaremos en el aula virtual archivos donde se encuentran resueltos ejercicios con instrucciones en el uso de los modelos Casio FC-100V y Casio FC-200V. Estos archivos estarán en las unidades donde sea necesario aprender nuevas funciones.

Ejercicio resuelto con **simuladores de operaciones financieras** y en video tutorial. Con el objetivo de afianzar lo que aprendemos en la asignatura y vincularlo con las operaciones habituales del sistema financiero, les proponemos, en algunas unidades, ejercicios que permitirán el uso de simuladores de operaciones financieras ofrecidas por bancos y otras entidades. En estos videos podremos conocer algunos simuladores y cómo utilizarlos.

nos indica la bibliografía obligatoria establecida en el programa de la asignatura.

hace referencia a la **biblioteca** ha sido creada para facilitar el acceso distintos recursos y materiales complementarios. Allí podrán encontrar archivos con instrucciones para el uso de ***calculadoras financieras de otros modelos o marcas***. También podrán consultar todos los ***videos agrupados*** de la asignatura y algunas ***pistas para navegar el aula.***

Como ya se mencionó, el aula virtual ha sido pensada de manera complementaria al material digital. La información y contenido dentro de ella está estructurado a partir de diferentes espacios. Los invitamos a ingresar y a recorrerla a fin de que puedan familiarizarse con el entorno y consultar a los profesores las dudas que se presenten.

Sobre el margen izquierdo podrán encontrar las siguientes secciones:

Acerca de la materia

Desde allí podrán acceder a:
Una **introducción** en video, que contextualiza la asignatura.
El **programa**, que detalla los contenidos a desarrollar.
Una descripción de **equipo docente**.
El **cronograma**, es decir, las fechas y tiempos de trabajo.

Espacio de comunicación

Esta sección está destinada a la interacción entre profesores y estudiantes:

En el **foro Novedades** se publicarán distintos anuncios que acompañan el desarrollo de la materia, referidos a la organización general, como fechas relevantes, inicio y cierre de unidades, de actividades, etc.

Fuera de clase es un sitio distendido, destinado a la socialización y el intercambio, vinculado a diversas temáticas de interés común.

La sección **Participantes** se utilizará para el envío de mensajería personal a quienes participan en el curso, sean profesores o estudiantes.

Biblioteca

Como ya se mencionó, esta sección presenta recursos y materiales complementarios.

En la sección central del aula encontrarán los contenidos de las unidades de estudio, distribuidas en diferentes pestañas que configuran un menú de navegación. Cada pestaña corresponde a una unidad y se irán habilitando a medida que lo indique el cronograma. Allí podrán acceder, cuando el material digital indique o cuando ustedes consideren necesario, a la presentación del bloque y/o unidad correspondiente, al material de estudio en formato digital, a los recursos integrados en la categoría explicando cómo se hace y al espacio destinado a las consultas, debates, etc. denominado diálogos sobre los contenidos que ya se han mencionado previamente.

Por último, consideramos importante destacar que la modalidad a distancia implica una manera particular de llevar adelante el cursado. Si bien otorga flexibilidad en el estudio, requiere una mayor autonomía de trabajo por parte de los estudiantes. Es por ello que les recomendamos que establezcan su propio ritmo de trabajo y organización pero siempre respetando los tiempos, fechas y modalidad pautados por la propuesta.

Esperamos entonces que esta propuesta integral que incluye este material, junto con los recursos disponibles en el aula virtual y los espacios de interacción, sean de ayuda para aprender los contenidos de la asignatura.

Los Autores

U1

BLOQUE 1

UNIDAD 1

TEORÍA DEL INTERÉS

UNIDAD 1:
Teoría del interés

CONTENIDOS

Introducción a la Matemática Financiera. Operaciones Financieras. Teoría del interés. Teoría del interés en el campo discreto. Tasa de interés. Valor del capital al final de la operación financiera o Monto en el campo discreto. Operaciones financieras fundamentales: Capitalización y Actualización.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Comprender el postulado fundamental de la Matemática Financiera
- Reconocer las operaciones financieras
- Identificar y obtener la tasa de interés en una operación financiera
- Valorar el concepto financiero del valor del capital en el tiempo y la importancia de la unidad de tiempo de la operación

PRESENTACIÓN

En esta unidad nos introduciremos en nuestra asignatura lo que implicará dar nuestros primeros pasos en el campo financiero, definiendo el postulado fundamental y los elementos que intervienen en las operaciones financieras.
Analizaremos detenidamente conceptos como: tasa de interés, plazo, unidad de tiempo, capitales, que estarán presentes a lo largo de toda la asignatura. Asimismo, diferenciaremos cuándo una operación es a interés simple o a interés compuesto y cuándo es de capitalización o de actualización.

AULA VIRTUAL
SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **Introducción al Bloque 1,** donde los profesores explican la relación entre contenidos temáticos de las unidades 1 a 3 y la **presentación de la Unidad 1** donde se proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de ésta unidad.

RECURSOS A UTILIZAR EN LA UNIDAD 1

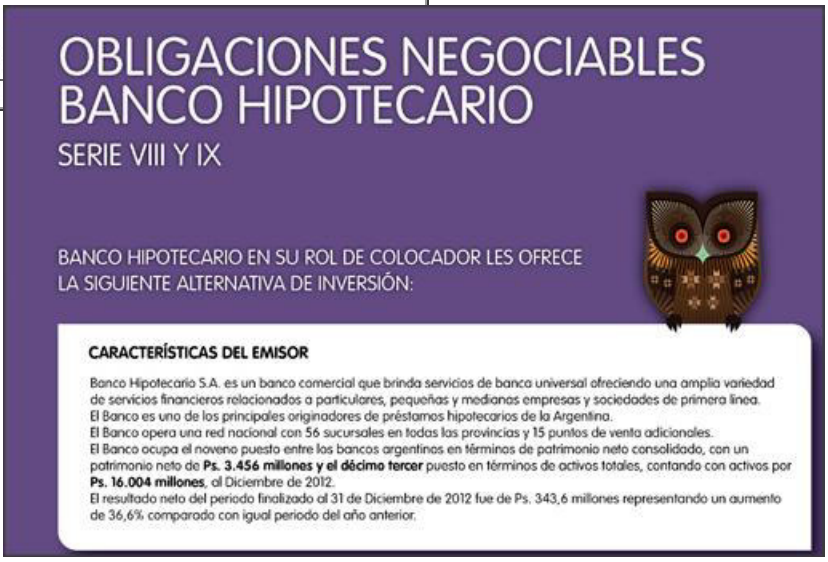
- Material Teórico - Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios
- Videos Tutoriales sobre planilla de cálculo
- Instructivo calculadora financiera

Matemática Financiera

Banco Credicoop	tradicional	13,00 %	$1
Banco Comafi	Plazo fijo tradicional	12,50 %	$1
Banco Piano	Plazo fijo tradicional	12,50 %	$1.000
Banco Patagonia	Plazo fijo tradicional	12,50 %	$1.000
BBVA Banco Francés	Plazo fijo clásico	12,25 %	$1

Depósitos a Plazo Fijo con Opción de Cancelación Anticipada en Pesos

Características:
- Plazo Mínimo: 180 días.
- Moneda: Pesos
- Imposición Mínima:$5.000.- por certificado
- Monto Máximo por Inversor: $399.999
- Tasa para Cancelación Anticipada: La cancelación efectiva transcurrido el plazo mínimo de 30 días con



PRODUCTOS - PRÉSTAMOS PERSONALES

Top 5 Mercado Abierto | Buscar Préstamo

Entidad	CFT
Banco Nación	47,17 %
Banco de Formosa	48,62 %
Banco Municipal de Rosario	51,30 %

Cuando pensamos en matemática financiera, se nos aparecen, seguramente, distintas imágenes, por un lado, como toda matemática, fórmulas, operaciones, calculadoras y por otro lado, informaciones periodísticas, publicidades, conversaciones familiares acerca de préstamos, créditos, comprar en cuotas, tasa de interés, plazo fijo…
La matemática financiera, como toda matemática aplicada requiere de definir conceptos, analizar desarrollos, obtener fórmulas, realizar cálculos, interpretar resultados, y por otra parte está vinculada a operaciones que cotidianamente realizan las personas, las familias y las empresas.

La Matemática Financiera es una de las ramas de la matemática aplicada que estudia el valor del dinero en el tiempo combinando capitales, tasas y tiempo, solucionando problemas de naturaleza financiera y ayudando en la toma de decisiones de inversión y financiación, siendo las operaciones financieras su objeto de estudio analítico y sistemático.

Operación Financiera

Definimos una **operación financiera** como:

"todo intercambio no simultáneo de capitales a título oneroso"

A partir de esta definición podemos indicar las condiciones que deben estar presentes para que una operación sea considerada financiera:

- Dos o más partes que interactúan, con posiciones opuestas. Por ejemplo, en un préstamo, el deudor y el acreedor, en un depósito, el depositante y el depositario (entidad financiera).
- A título oneroso, es decir, siempre hay un precio.
- Capitales, pueden tratarse de bienes o valores, expresados en sumas de dinero, y en diferentes monedas.
- No simultáneo, en el intercambio de capitales es necesario el transcurso del tiempo, produciéndose el reemplazo de un capital por otro en un momento distinto del tiempo. Por ejemplo, la venta de un ticket aéreo de contado no constituye una operación financiera. Pero si el precio se paga luego de transcurrido cierto plazo y pagando un interés como importe adicionado por el período adicional, la operación adquiere el carácter de operación financiera.

Es posible clasificar las operaciones financieras de diferentes maneras, dependiendo del criterio que se adopte, según: el sentido en que se aplica la ley financiera, el número de capitales y la duración:

- Según el **sentido** en el que se aplica la ley financiera:
  - De capitalización: sustituye un capital presente por otro capital futuro. Por ejemplo: una operación de depósito a plazo fijo.
  - De actualización o descuento: sustituye un capital futuro por otro capital presente. Por ejemplo: una operación de descuento de cheques diferidos.
- Según el **número de capitales** de que consta:
  - Simples: constan de un solo capital en la prestación y en la contraprestación. Por ejemplo: un préstamo a devolver en un solo pago.
  - Complejas: formadas por más de un capital en la prestación y/o en la contraprestación. Por ejemplo: un préstamo a devolver en cuotas.

- Según si la **duración** está establecida o no:
    - Ciertas: se conoce la fecha de inicio y finalización de la operación. Ejemplo: un bono emitido por el estado nacional.
    - Contingentes: el inicio y/o la finalización están condicionados a un evento aleatorio. Ejemplo: una renta vitalicia correspondiente a un seguro en caso de vida.

Evolución de las operaciones financieras

Las operaciones financieras han estado vinculadas a la actividad productiva y comercial desde la antigüedad. Los grupos humanos tuvieron la necesidad de intercambiar aquello que tenían en exceso, por determinados productos de los cuales carecían, es así que surge el comercio, a través del trueque directo de bienes y servicios.

El aumento en la variedad de productos generó la necesidad de un bien que facilitara el intercambio, surgiendo así el dinero. Este ha formado parte de la actividad comercial utilizándose como medio de pago en primer lugar, y de acumulación y ahorro posteriormente. A lo largo de los siglos su utilización y aplicación se ha vuelto más sofisticada. En general, se ha identificado como unidades superavitarias a las personas y familias y como unidades deficitarias al estado y a las empresas, pero pueden en distintos momentos asumir uno u otro rol.

Como mencionamos, al ser el dinero un medio de acumulación y ahorro, y a su vez un bien escaso, se generó un mercado del dinero en donde interactúan unidades llamadas económicas que tienen excedentes de dinero y unidades que necesitan este recurso llamadas unidades deficitarias. En general, se ha identificado como unidades superavitarias a las personas y familias y como unidades deficitarias al estado y a las empresas, pero pueden en distintos momentos asumir uno u otro rol.

Este intercambio, en donde el dinero asume el rol de objeto principal, da origen a las operaciones financieras. Pero dicho intercambio no es sencillo ya que todos los interesados en las operaciones deben conciliar plazos, montos y precios. La necesidad de dar respuesta a los oferentes y demandantes de dinero, dieron lugar al surgimiento de intermediarios, que hoy podemos identificar como las entidades financieras (sistema financiero) y mercados y bolsas de valores (mercado de capitales).

En el sistema financiero tienen lugar operaciones que permiten captar los excedentes a través de depósitos (operaciones pasivas) en distintas modalidades como cuentas corrientes, cajas de ahorro y plazo fijo y los ponen a disposición de las unidades deficitarias, a través de préstamos (operaciones activas). En el mercado de capitales nos encontraremos con títulos valores que posibilitan realizar operaciones de inversión y financiación.

Teoría del Interés. Postulado Fundamental del Campo Financiero

Debemos considerar que las operaciones financieras se desarrollan bajo un principio básico, que podemos denominar **Postulado Fundamental** y que indica que:

"El capital aplicado a una operación financiera crece con el transcurso del tiempo"

Ejemplo 1.1:
Si una persona cuenta hoy con $10.000, no es válido financieramente que luego de transcurrido un cierto tiempo (supongamos un año) tenga $10.000. Ese capital necesariamente ha crecido ya que pudo ser aplicado a una operación financiera que permite que ese capital se incremente. Y al final del plazo contará con $10.100, $11.000, $12.000 u otro valor mayor que $10.000.

Componentes de una operación financiera

Como puede notarse, hemos mencionado distintos componentes de una operación financiera: capital, interés, plazo y unidad de tiempo, tasa de interés, que definimos a continuación.

1. Capital
Este término ya ha sido abordado en diferentes asignaturas de la carrera pero en el marco de la Matemática Financiera adquiere una connotación especial. El **capital** es la denominación que le damos a la suma de dinero que, colocada en una operación financiera variará en función del tiempo. Vamos a simbolizar este valor con $f(t)$. Como el capital es una función que depende del tiempo, utilizamos f, letra que representa una función, y entre paréntesis el valor que asume el tiempo. Como analizaremos más adelante, el crecimiento del capital es continuo, pero a los fines de su aplicación en operaciones financieras la medición del capital se realiza en períodos discretos.

En el Gráfico 1 podemos observar en el sistema de ejes cartesianos donde encontramos en el eje de las abcisas el tiempo (variable independiente), y en el eje de las ordenadas el capital colocado en la operación financiera, siendo $f(0)$ el capital en el momento 0 y $f(t)$ el valor que asume el capital en el momento t.

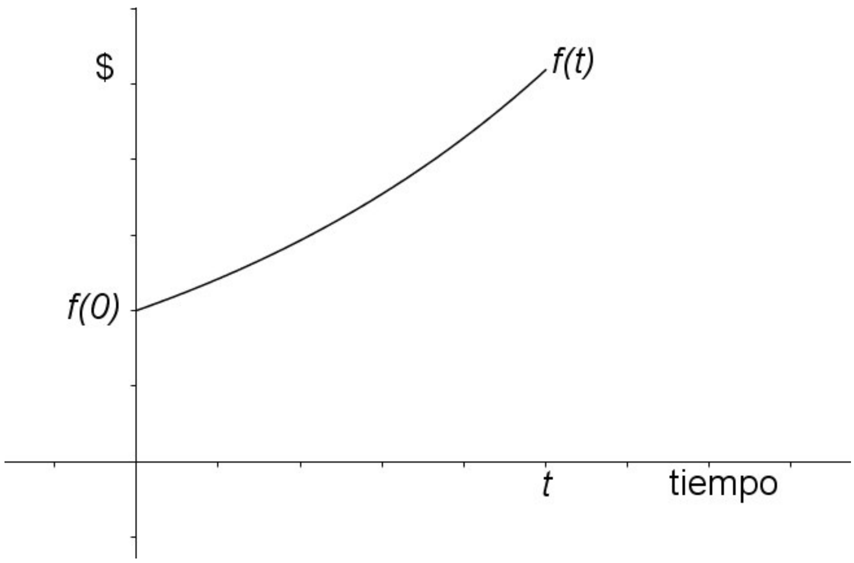


Gráfico 1

Podemos diferenciar el capital inicial del capital final:

El ***capital inicial*** es la suma de dinero colocada al inicio de la operación financiera (momento 0). En el Ejemplo 1.1, los $10.000.

Vamos a simbolizar este valor con $f(0)$ ya que el capital es una función que depende del tiempo, y en esta caso está al inicio -momento 0- de la operación. El capital inicial debe ser siempre mayor a cero:

$$f(0) > 0$$

El ***capital al final***, es la suma de dinero obtenida al final de la operación financiera. En el Ejemplo 1.1 son: $10.100, $11.000, $12.000.

Simbolizaremos con $f(n)$ al capital final. El n representa un momento futuro cualquiera, posterior al momento 0 y en el cual concluye la operación financiera. En el ejemplo 1.1 este capital está ubicado un año después del $f(0)$.

El capital final debe ser siempre mayor al capital inicial:

$$f(n) > f(0)$$

2. Interés

Denominamos **Interés** *al crecimiento operado por el capital a lo largo del tiempo y que puede obtenerse de la diferencia entre el capital final y el capital inicial. Lo representamos con la letra I . En el Ejemplo 1.1:*

$$I = 10.100 - 10.000 = 100$$
$$I = 11.000 - 10.000 = 1.000$$
$$I = 12.000 - 10.000 = 2.000$$

En general:

$$\boxed{I = f(n) - f(0)}$$

3. Plazo y Unidad de Tiempo

Como puede notarse, un elemento fundamental presente en una operación financiera es el tiempo ya que es necesario que este transcurra para que un capital crezca, por lo que a mayor tiempo, mayor es el crecimiento. En este sentido, podemos afirmar que la variación del capital se da en función del tiempo y esta relación es de tipo creciente.

Este crecimiento es continuo pero en las operaciones financieras corrientes, la medición se realiza de manera discreta, fijando intervalos de tiempo al final del cual se mide el capital. Por ejemplo, 30 días, 60 días, un año, etc.

Al trabajar con operaciones financieras, debemos ser capaces de diferenciar:

- La ***unidad de tiempo,*** que es el lapso de tiempo al final del cual se mide el capital y se determina el interés obtenido en una operación financiera. En el Ejemplo 1.1, los intereses están medidos al final del año, por lo tanto es el año la unidad de tiempo.

- El ***plazo,*** que es el tiempo de duración de una operación financiera. En el Ejemplo 1.1 la duración (plazo) es un año.

Aunque en el ejemplo mencionado puede parecer que unidad de tiempo y plazo son conceptos idénticos, no es así. Muchas veces se presentan operaciones financieras en donde los intereses se miden en períodos intermedios. Por ejemplo, si la operación tiene una duración (plazo) de un año y los intereses se calculan al final de cada mes (unidad de tiempo). Como podemos notar en este caso, el plazo (año) es distinto a la unidad de tiempo (mes).

Ambos elementos se relacionan a través de n, siendo este el número de unidades de tiempo contenidas en el plazo de la operación.
Mencionamos anteriormente que el plazo y la unidad de tiempo de una operación pueden coincidir (en ese caso $n=1$). Por ejemplo, si el plazo es un año y los intereses se miden al final del año, el plazo es el año y la unidad de tiempo también. Por lo tanto $n=1$.
Pero podemos encontrarnos con una operación en donde el plazo es un año y los intereses se calculan al final de cada mes, por lo tanto, la unidad del tiempo es un mes. Como en un año tenemos 12 meses, $n=12$, en este caso $n>1$.

Podemos obtener el valor de n con el siguiente cálculo:

$$\boxed{n=\frac{Plazo}{Unidad\ de\ Tiempo}}$$

4. Tasa de interés
La ***tasa de interés*** indica:

"el interés obtenido por cada unidad de capital inicial y por cada unidad de tiempo".

Este es un elemento muy importante en las operaciones financieras y, como lo indica su definición, representa el interés que se gana por cada unidad de capital aplicado a la operación financiera.
Si analizamos el Ejemplo 1.1, se depositaron \$10.000 y uno de los capitales finales es de \$11.000, el Interés (I), es de \$1.000. Es decir, que por los \$10.000 se ganaron \$1.000. ¿Cuánto se obtuvo por cada \$1 depositado?

$$\frac{Interés\ de\ la\ unidad\ de\ tiempo}{Capital\ al\ Inicio}=Tasa\ de\ Interés$$

Si lo aplicamos a nuestro ejemplo resulta:

$$\frac{1.000}{10.000}=0{,}10\ \ anual$$

Es decir, por cada peso, se ganan 10 centavos o \$0,10, y la expresión "anual" indica que el tiempo necesario para alcanzar esa ganancia es un año.

Al enunciar una tasa de interés, observaremos que se compone de dos partes un número y un período:

- El **número** nos indica el interés por cada peso invertido.

- El **período de tiempo**, nos indica el lapso de tiempo que es necesario que transcurra para obtener ese interés. Este período de tiempo nos indica la unidad de tiempo de la tasa de interés.

Simbolizaremos la tasa de interés con i.

Podemos representar gráficamente la tasa de interés de la siguiente manera:

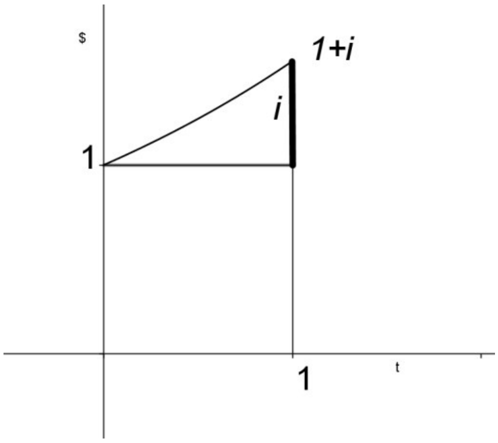


Gráfico 2

En el Gráfico 2, partimos de $1 de capital inicial y al cabo de una unidad de tiempo alcanzamos el capital final $(1+i)$ siendo i el interés obtenido.

Es común encontrarnos con tasas de interés expresadas como porcentaje. Por ejemplo, una tasa de interés de 0,10 anual equivale en porcentaje al 10% anual de interés. Son dos formas alternativas de hacer referencia al mismo valor y es equivalente indicar que por $1 se obtiene 10 centavos ($0,10) que por cada $100 se obtienen $10.

Está muy difundido expresar "la tasa de interés es el 10%". Formalmente es incorrecto, porque debe indicarse "la tasa de interés es 0,10 anual" o "el porcentaje de interés es el 10% anual", pero debemos estar atentos a que en el lenguaje corriente suele no respetarse la manera correcta de expresarse.

Tal como indicamos anteriormente, la tasa de interés se obtiene:

$$Tasa\ \ de\ \ Interés = \frac{Interés\ \ de\ \ la\ \ unidad\ \ de\ \ tiempo}{Capital\ \ al\ \ Inicio}$$

En símbolos:

$$\boxed{i = \frac{I}{f(0)}}$$

Si sabemos que $I = f(1) - f(0)$, reemplazamos:

$$i = \frac{f(1) - f(0)}{f(0)}$$

O también:

$$i = \frac{f(1)}{f(0)} - 1$$

En ambos casos, el capital final es aquel que se obtiene al final de una unidad de tiempo, debido a que la tasa de interés se calcula en base a la unidad de tiempo de la operación.

Cuando se trata de una operación de colocación de fondos, la tasa de interés nos reflejará el rendimiento financiero de la operación.
Cuando se trata de una operación de toma de fondos, la tasa de interés reflejará el costo financiero de la operación.

Antes de seguir avanzando mencionaremos los **elementos desarrollados** y, cuando corresponda, la **simbología a utilizar**:

Unidad de Tiempo
Plazo
n = número de unidades de tiempo contenidas en el plazo de la operación
$f(0)$ = capital al inicio o capital inicial
$f(n)$ = capital al final o capital final
i = tasa de interés
I = Interés

Se indicó anteriormente que el interés de una operación financiera se obtiene de la diferencia entre el capital final y el capital inicial. Pero puede suceder que conozcamos sólo el capital inicial y la tasa de interés. En este caso, el interés para la primera unidad de tiempo, se calcula como:

$$I = f(0) \, . \, i$$

Es decir, el producto entre el capital al inicio de la unidad de tiempo multiplicado por la tasa de interés para esa unidad de tiempo.
Si aplicamos esta expresión al Ejemplo 1.1, tendremos:

$$10.000 \;\; . \;\; 0{,}10 = 1.000$$

En las operaciones financieras, una vez calculados los intereses al final de la unidad de tiempo, pueden presentarse las siguientes situaciones:

- Que los intereses se paguen o se cobren, o se retiren. Es una operación a *interés simple.*
- Que los intereses se sumen al capital inicial, para originar nuevos intereses. Es una operación a *interés compuesto.*

A continuación nos detendremos en la explicación de dichas operaciones.

Operaciones Financieras a Interés Simple

Como indicamos anteriormente, las operaciones financieras a interés simple son aquellas en las que los intereses obtenidos al final de cada unidad de tiempo se retiran, se cobran o pagan.
En estas operaciones podemos identificar los siguientes elementos:

$f(0)$ = capital colocado a una operación a interés simple
i = tasa de interés para la unidad de tiempo

n = número de unidades de tiempo de la operación

Al inicio de la operación tendremos:

$$f(0)$$

Al final de la primera unidad de tiempo se calculan los intereses:

$$I_1 = f(0)\,.\,i$$

y se obtiene el capital final:

$$f(1) = f(0) + I_1 = f(0) + f(0)\,.\,i$$

los intereses son retirados y volvemos a tener el capital inicial $f(0)$.

Al final de la segunda unidad de tiempo se calculan los intereses:

$$I_2 = f(0)\,.\,i$$

y se obtiene el capital final:

$$f(2) = f(0) + I_2 = f(0) + f(0)\,.\,i$$

los intereses son retirados y volvemos a tener el capital inicial $f(0)$.

De la misma manera operamos para las unidades de tiempo siguientes, hasta la última, la enésima, en donde:

$$I_n = f(0)\,.\,i$$

y se obtiene el capital final:

$$f(n) = f(0) + I_n = f(0) + f(0)\,.\,i$$

los intereses son retirados junto con el capital $f(0)$.

Podemos indicar entonces que los intereses obtenidos en cada una de las unidades de tiempo de la operación son iguales:

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2
Considerando los datos indicados a continuación:

$f(0)$ = $10.000
i = 0,06 mensual
Plazo = 3 meses
Unidad de tiempo = mes

$$n = \frac{3\,meses}{1\,mes} = 3$$

Resolvemos:
Al final de la primera unidad de tiempo (mes, en este caso) se calculan los intereses:
$I_1 = 10.000 \, . \, 0,06 = 600$
y se obtiene el capital final:
$f(1) = 10.000 + 600 = 10.000 + 10.000 \, . \, 0,06 = 10.600$
y se retiran $600 de interés.
Como los intereses son retirados, volvemos a tener el capital inicial $f(0)$ = $10.000.

Al final de la segunda unidad de tiempo (2° mes), se calculan los intereses:
$I_2 = 10.000 \, . \, 0,06 = 600$
y se obtiene el capital final:
$f(2) = 10.000 + 600 = 10.000 + 10.000 \, . \, 0,06 = 10.600$
Se retiran $600 de interés y volvemos a tener el capital inicial $f(0)$ = $10.000.

Al final del 3° mes:
$I_3 = 10.000 \, . \, 0,06 = 600$
y se obtiene el capital final:
$f(3) = 10.000 + 600 = 10.000 + 10.000 \, . \, 0,06 = 10.600$
Se retiran los $10.600 ya que concluye la operación.

Verificamos que:
$I_1 = I_2 = I_3 = 600$
Podemos observar esta operación, a través de un gráfico de ejes cartesianos:

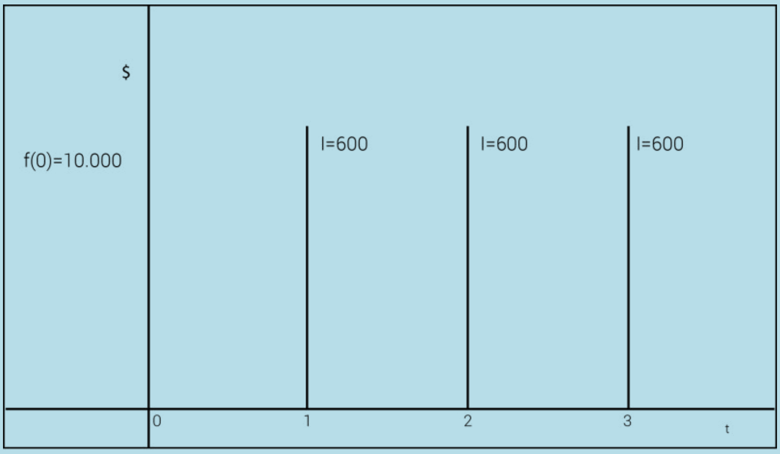


Gráfico 3

En el Gráfico 3, se muestra el interés obtenido en cada una de las tres unidades de tiempo de la operación.

En el Gráfico 4, que presentamos a continuación, podemos visualizar en el eje horizontal (eje de las abcisas), el tiempo medido a través de las unidades de tiempo, y en el eje vertical (eje de las ordenadas) el capital.

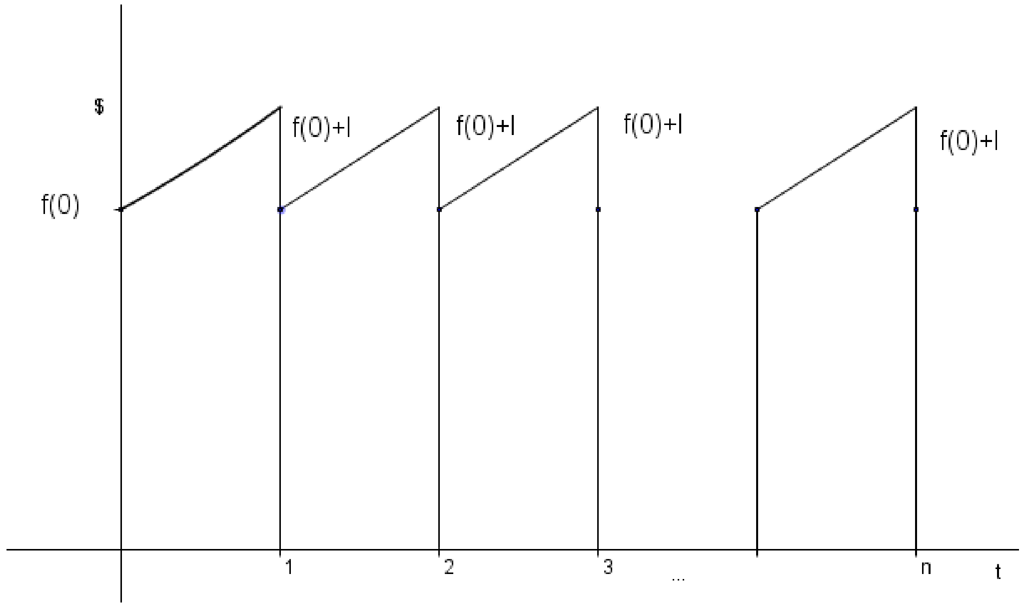


Gráfico 4

En el momento *0*, se encuentra $f(0)$ al final de la 1° unidad de tiempo, $f(0)+I$, que es retirado, y al inicio de la 2° unidad de tiempo, el capital vuelve a ser $f(0)$, y así sucesivamente hasta la última unidad de tiempo.
Al representar el crecimiento del capital por una línea curva de tipo creciente, reflejamos que el crecimiento es continuo aunque se mida al final de cada unidad de tiempo.

Podemos asociar el incremento del capital, al crecimiento que podemos observar en una planta, o recordar, cuando éramos niños y medían nuestro crecimiento. Supongamos que nos midieron un día determinado y lo hacen nuevamente seis meses después, constatando que crecimos cuatro centímetros. No significa que el aumento se produce en el momento de la medición, sino que el crecimiento es continuo y se mide cada cierto período de tiempo. De igual manera ocurre con el capital en el campo financiero: crece de manera continua, midiéndose ese crecimiento cada cierto tiempo.
También es posible representar la evolución de un capital colocado en una operación de interés simple en el campo discreto. En el Gráfico 5 se observa al final de cada unidad de tiempo, la medición del capital y de los intereses, que serán retirados:

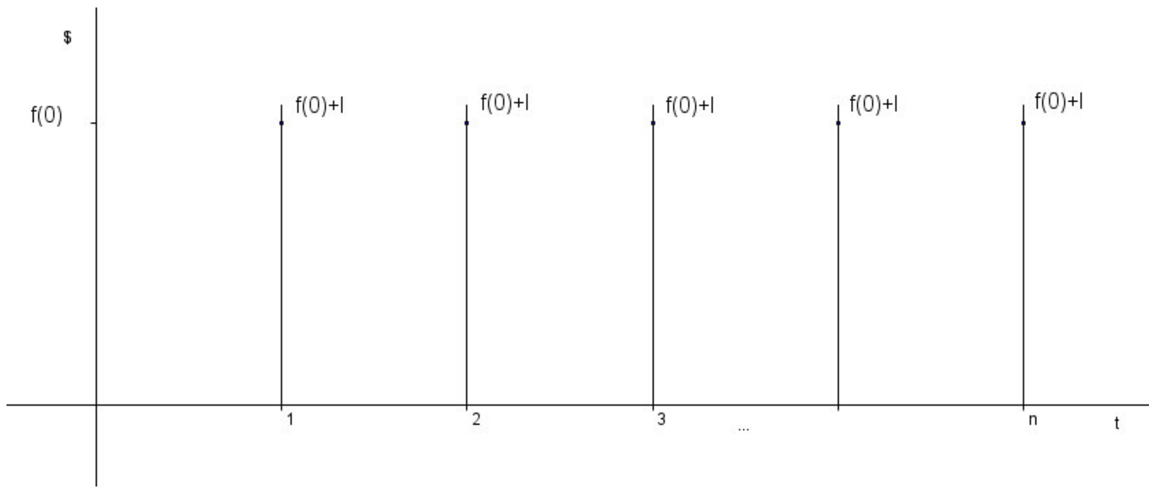


Gráfico 5

Es frecuente la aplicación de la siguiente fórmula para obtener el capital final de una operación a interés simple:

$$f(n) = f(0) + f(0)\ .\ i\ .\ n \quad = \quad f(0)(1 + i.n)$$

Lo que hacemos a través de esta fórmula es calcular el interés para cada unidad de tiempo $(f(0)\ .\ i)$ y luego multiplicarlo por la cantidad de unidades de tiempo de la operación (n).

Si bien esto puede tener validez matemática no es válido financieramente.
¿Por qué? Porque estaríamos sumando valores que están ubicados en distintos momentos del tiempo. Si los intereses son retirados ya no forman parte de esta operación. Son importes de libre disponibilidad para quien los ha obtenido y los puede utilizar para otra operación, financiera o no.

Es decir, volviendo a nuestro ejemplo, si aplicamos esta fórmula obtendríamos:

$$f(n) = 10.000(1 + 0{,}06\ .\ 3) = 11.800$$

No es lo mismo recibir $11.800 a los 3 meses que ir recibiendo $600 a final del primer mes, $600 al final del segundo mes y $10.600 al final del tercero. Los $600 que se obtuvieron al final del primer mes podrán ser utilizados por el depositante (consumirlos o invertirlos nuevamente) y no tener que esperar otros 2 meses para recibirlos con el capital depositado.
Teniendo en cuenta el principio fundamental del campo financiero, no es lo mismo recibir $600 al final del primer mes que recibir esos mismos $600 a los 3 meses.

A pesar de esto, el uso de esta fórmula está muy difundido en las operaciones comerciales.

Es común el uso de la siguiente expresión para calcular intereses bajo el modelo de interés simple:

$$I = \frac{C.R.T}{100.365}$$

Donde:
C = capital prestado o precio de contado.
R = *razón, porcentaje de interés generalmente anual.*
T = *plazo de la operación, medido en días, meses o años.*

Operando:

$$I = C.\frac{R}{100}.\frac{T}{365}$$

Obtenemos una expresión idéntica a la que ya habíamos trabajado:

$$I = f(0).\,i\,.\,n$$

Ya que:

$$i = \frac{R}{100} \text{ y } n = \frac{T}{365}$$

A fin de aplicar lo aprendido acerca de las operaciones a interés simple, los invitamos a realizar el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 1
Un particular coloca $12.000, por 180 días, en el Banco Alemán en un depósito a Plazo Fijo Renta. La tasa de interés es 0,01 para 30 días.
El inversor retirará cada 30 días los intereses devengados, y el capital, junto a los intereses de la última unidad de tiempo, a los 180 días.
Indicar:
a) Los intereses a retirar cada 30 días.
b) El capital final a retirar a los 180 días.

Rta: a) $120   b) $12.120

Operaciones Financieras a Interés Compuesto

En estas operaciones el interés obtenido al final de cada unidad de tiempo no se retira sino que se agrega al capital al inicio de cada una de ellas, es decir, se "capitalizan" y, por lo tanto, generarán nuevos intereses.

Si dados:
$f(0)$ = capital colocado a una operación a interés compuesto
i = tasa de interés para la unidad de tiempo
n = número de unidades de tiempo de la operación

Al inicio de la operación tendremos $f(0)$.

Al final de la primera unidad de tiempo se calculan los intereses

$$I_1 = f(0) . i$$

y se obtiene el capital final:

$$f(1) = f(0) + I_1 = f(0) + f(0) . i$$

En esta última expresión extraemos factor común $f(0)$:

$$f(1) = f(0) + f(0) \ . \ i = f(0)(1+i) \qquad (1)$$

Los intereses no son retirados y al inicio de la segunda unidad de tiempo tenemos como capital inicial $f(1)$.

Al final de la segunda unidad de tiempo se calculan los intereses:

$$I_2 = f(1) . i$$

y se obtiene el capital final:

$$f(2) = f(1) + I_2 = f(1) + f(1) . i$$

En esta última expresión extraemos factor común $f(1)$:

$$f(2) = f(1) + f(1) \ . \ i = f(1)(1+i)$$

Remplazamos a $f(1)$ por la expresión que obtuvimos en (1):

$$f(2)=f(0)(1+i)(1+i)=f(0)(1+i)^2 \quad (2)$$

Los intereses no son retirados y al inicio de la tercera unidad de tiempo tenemos como capital inicial $f(2)$.

Al final de la tercera unidad de tiempo se calculan los intereses:

$$I_3=f(2).i$$

y se obtiene el capital final:

$$f(3)=f(2)+I_3=f(2)+f(2).i$$

En la última expresión extraemos factor común $f(2)$:

$$f(3)=f(2)+f(2)\ .\ i=f(2)(1+i)$$

Remplazamos a $f(2)$ por la expresión que obtuvimos en (2):

$$f(3)=f(0)(1+i)^2(1+i)=f(0)(1+i)^3$$

Los intereses no son retirados y al inicio de la cuarta unidad de tiempo tenemos como capital inicial $f(3)$.

De la misma manera para las unidades de tiempo siguientes hasta la última, la enésima, en donde:

$$I_n=f(n-1).i$$

y se obtiene el capital final:

$$f(n)=f(n-1)+I_n=f(n-1)+f(n-1).i$$

En la última expresión extraemos factor común $f(n-1)$:

$$f(n)=f(n-1)(1+i)$$

Remplazamos a $f(n-1)$:

$$f(n)=f(0)(1+i)^{n-1}(1+i)$$

$$\boxed{f(n)=f(0)(1+i)^n}$$

Donde $I_1<I_2<I_3<\ldots<I_n$

Tomando los mismos datos que utilizamos en el Ejemplo 1.2 para operaciones a interés simple realizamos la operación a interés compuesto:

$f(0) = 10.000$

i = 0,06 mensual

Plazo = 3 meses

Al final del primer mes:

$I_1 = 10.000 \,.\, 0,06 = 600$

y el capital final:

$f(1) = 10.000 + 600 = 10.000 + 10.000 \,.\, 0,06 = 10.600$

$f(1) = 10.000(1 + 0,06) = 10.600$

Al final de la segunda unidad de tiempo se calculan los intereses

$I_2 = 10.600 \,.\, 0,06 = 636$

y se obtiene el capital final:

$f(2) = 10.600 + 636 = 10.600 + 10.600 \,.\, 0,06 = 11.236$

$f(2) = 10.000(1 + 0,06)^2 = 11.236$

Al final de la tercera unidad de tiempo se calculan los intereses

$I_3 = 11.236 \,.\, 0,06 = 674,16$

y se obtiene el capital final

$f(3) = 11.236 + 674,16 = 11.236 + 11.236 . 0,06 = 11.910,16$

$f(3) = 10.000(1 + 0,06)^3 = 11.910,16$

En donde $600 < 636 < 674,16$

La expresión $f(n) = f(0)(1+i)^n$ llamada **fórmula de monto** (o capital final) a interés compuesto, o directamente fórmula de monto, es la que nos permite obtener el capital final de una operación financiera a interés compuesto

También podemos representar gráficamente el Ejemplo 1.2 de la siguiente manera:

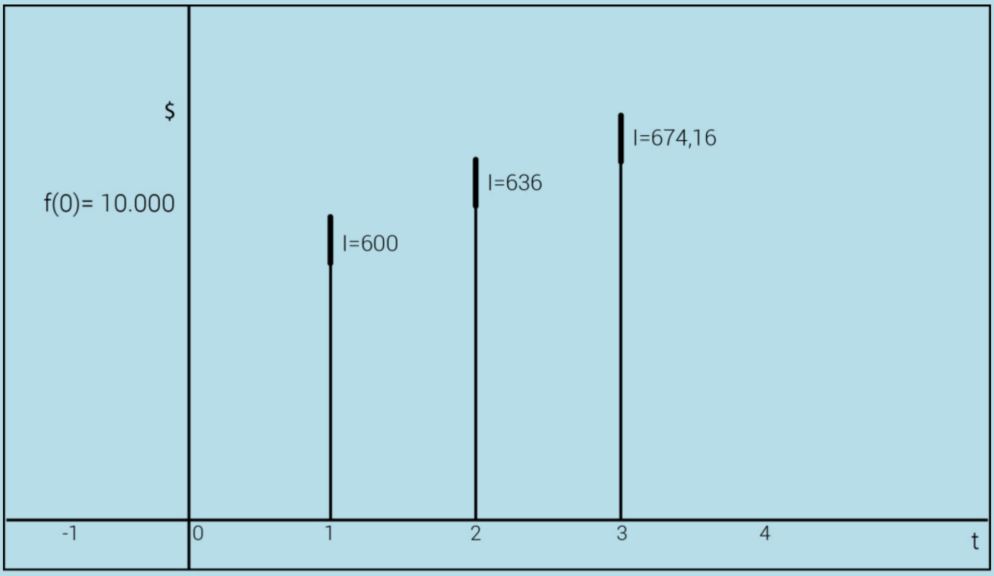


Gráfico 6

En el Gráfico 6 observamos cómo el interés obtenido en cada unidad de tiempo es creciente, debido a que se le adiciona el interés al capital que le dio origen, es decir, se “capitaliza”.

Al representar el crecimiento del capital de manera continua, se genera la gráfica de una función exponencial, que crece a medida que el valor de t aumenta.
De manera general, es posible representar el valor de un capital colocado en una operación a interés compuesto como puede observarse en el Gráfico 7, donde se refleja la variación continua de un capital $f(0)$ en una operación a interés compuesto:

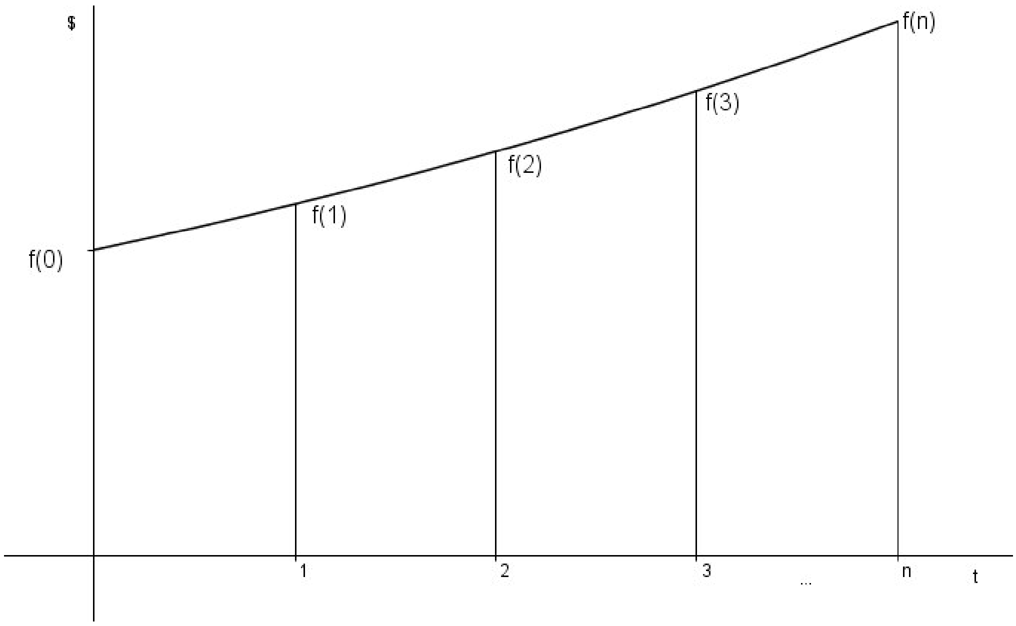


Gráfico 7

También puede representarse en el campo discreto como puede observarse en el Gráfico 8, que representa el capital obtenido al final de cada una de las unidades de tiempo que componen la operación.

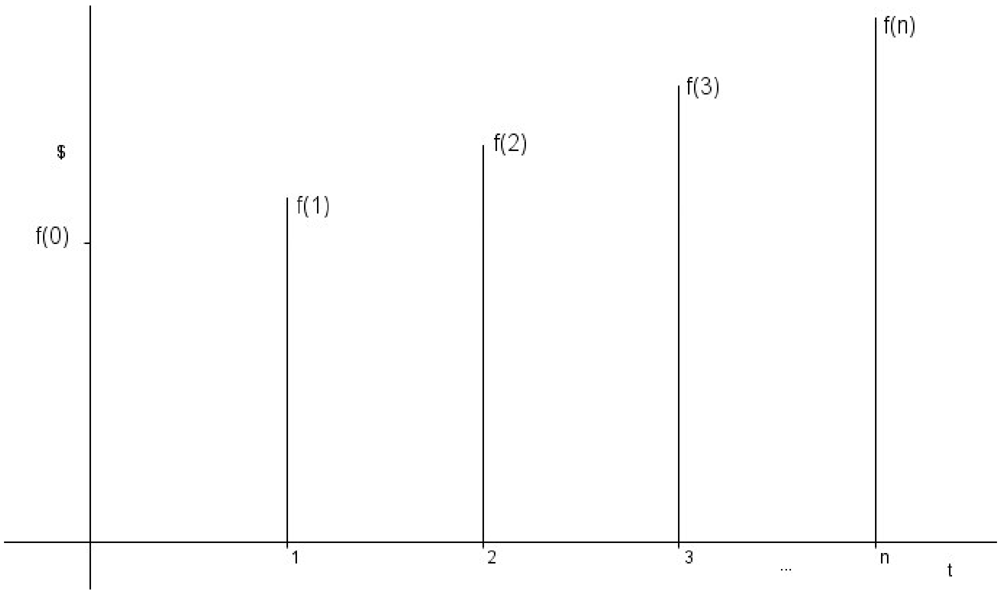


Gráfico 8

Finalmente, en el siguiente cuadro se compara cómo evoluciona el capital al final de cada unidad de tiempo, teniendo en cuenta si la operación se realiza a Interés Simple o Interés Compuesto, considerando el Ejemplo 1.2:

n	Interés Simple	Interés Compuesto
	$f(0)$ = 10.000	$f(0)$ = 10.000
1	$f(1)$ = 10.600	$f(1)$ = 10.600
2	$f(2)$ = 10.600	$f(2)$= 11.236
3	$f(3)$ = 10.600	$f(3)$ = 11.910,16

Observamos que cuando $n=1$, los capitales finales coinciden. Pero para $n>1$, al capitalizarse los intereses (Interés Compuesto) el capital final es diferente.

Si en este caso aplicamos la fórmula de monto a interés simple (de la cual indicamos que no tiene validez financiera a pesar de su uso extendido) obtenemos:

$$f(n)=f(0)(1+i\ .\ n)$$

$$f(n)=10.000(1+0{,}06\,.\,3)=11.800$$

Su valor es inferior al monto a interés compuesto. Si los intereses no son cobrados y pagados, deben ser agregados al concluir cada unidad de tiempo, transformándose en una operación a interés compuesto.

Cálculo de los elementos que componen la fórmula de Monto a Interés Compuesto

Obtuvimos anteriormente, al analizar las operaciones financieras a interés compuesto, la fórmula de cálculo del monto o capital final:

$$f(n)=f(0)(1+i)^n$$

Notamos que intervienen cuatro elementos: $f(n)$, $f(0)$, i y n
Conociendo 3 de ellos podemos calcular el que nos falta.

Con los datos del Ejemplo 1.2, determinamos que:

$$f(3)=10.000(1+0{,}06)^3=11.910{,}16$$

Si queremos determinar el valor de $f(0)$

$$\boxed{f(0)=\frac{f(n)}{(1+i)^n}=f(n)(1+i)^{-n}}$$

Si remplazamos:

$$f(0)=\frac{11.910,16}{(1+0,06)^{3}}=11.910,16(1+0,06)^{-3}=10.000$$

Si queremos calcular el valor de i, despejando convenientemente, determinamos que:

$$\boxed{i=\left(\frac{f(n)}{f(0)}\right)^{\frac{1}{n}}-1}$$

Dando valores a los elementos conocidos:

$$i=\left(\frac{11.910,16}{10.000}\right)^{\frac{1}{3}}-1=0,06\ \ mensual$$

Finalmente para determinar el valor de n:

$$\boxed{n=\frac{\log f(n)-\log f(0)}{\log(1+i)}}$$

Remplazando:

$$n=\frac{\log 11.910,16-\log 10.000}{\log(1+0,06)}=\frac{4,0759-4}{0,0253}=3$$

El cálculo de los elementos que componen la fórmula de Monto a Interés Compuesto puede ser realizado a través de una calculadora financiera o planilla de cálculo.

Les proponemos ahora, resolver los siguientes ejercicios a fin de aplicar lo aprendido hasta aquí:

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios utilizando las funciones financieras de la **planilla de cálculo**. Les sugerimos consultarlas una vez que hayan intentado resolverlos.

EJERCICIO 2

Se depositan en una institución financiera \$8.000, con capitalización mensual durante 4 meses, a una tasa de interés del 0,0135 mensual. Calcular el valor final de dicho depósito.

Rta.:\$8.440,83

EJERCICIO 3

Si retiramos \$1.830, luego de que han transcurrido 90 días desde el momento que se depositó un capital en una entidad financiera a una tasa de interés de 0,0098 para 30 días, ¿cuál fue el capital depositado?

Rta.: \$1.777,24

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios utilizando las funciones financieras de la **planilla de cálculo**. Les sugerimos consultarlas una vez que hayan intentado resolverlos.

EJERCICIO 4

¿Cuál fue la tasa de interés para 30 días aplicada en una operación donde se depositaron \$3.650, se retiraron \$3.886,07 y el plazo fue de 180 días?

Rta.: 0,0105 para 30 días

EJERCICIO 5

La empresa SOLTIX SA solicita al Banco Trex SA, con el que opera habitualmente, un préstamo de \$15.000. El mismo se abonará en un único pago de \$17.956,35 y la tasa aplicada a la operación es 0,046 bimestral. ¿Cuántos meses transcurren entre el otorgamiento del préstamo y su devolución?

Rta.: 8 meses

Operación Financiera de Capitalización

Se denomina **capitalización** *a la operación financiera que permite obtener el valor futuro de un capital ubicado en un momento determinado del tiempo.*

A través de la fórmula de monto, $f(n)=f(0)(1+i)^n$, se puede trasladar cualquier capital ubicado en un momento 0, hasta el momento n.

De manera general se puede expresar que:

$$f(t)=f(0)(1+i)^t$$

que permite trasladar un capital inicial a un momento t.

Al multiplicar un capital por $(1+i)^t$, es posible obtener su valor en el momento t. Por esto, $(1+i)^t$ es llamado **factor de capitalización**.

También se simbolizará este factor de capitalización con u^t, por lo tanto:

$$u^t=(1+i)^t$$

Definimos u^t como: “el valor final de una unidad de moneda, en t unidades de tiempo”. Y se expresa en “t unidades de tiempo” porque es el valor al que está elevado. Si se tratara de:

$u=(1+i)^1$ es “el valor final de \$1 en una unidad de tiempo”.

$u^5=(1+i)^5$ es “el valor final de \$1 en cinco unidades de tiempo”.

Podemos graficar u de la siguiente manera:

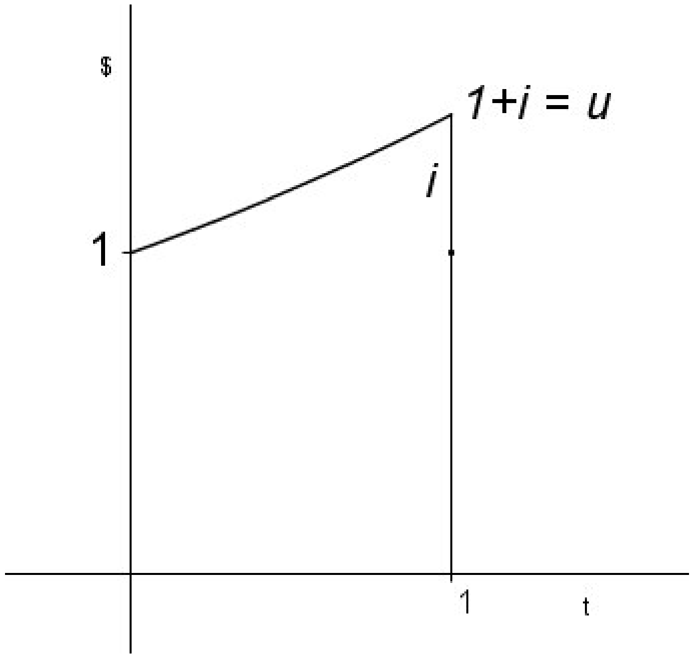


Gráfico 9

En el Gráfico 9, además de observar el factor de capitalización para una unidad de tiempo, ha quedado también representada la tasa de interés i, que es el interés de una unidad de capital inicial en una unidad de tiempo.

En el Ejemplo 1.2 el factor de capitalización es:

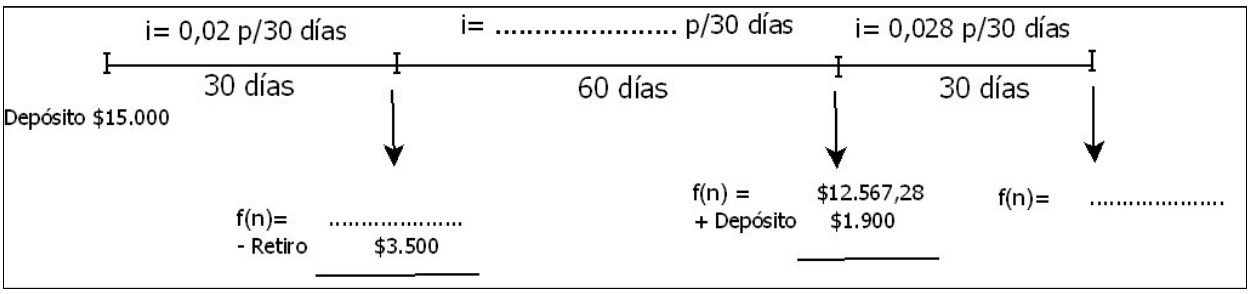
$$(1+0,06)^3 = 1,191016$$

Al multiplicar este factor por $f(0) = \$10.000$, se obtiene los $\$11.910,16$ de capital final.

A continuación, les proponemos resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 6
Un particular deposita inicialmente a Plazo Fijo $15.000. La siguiente línea de tiempo refleja las sucesivas operaciones realizadas por el depositante:
Ud debe completar, indicando los cálculos realizados.



Rta: $ 14.872,36

Operación Financiera de Actualización

Se denomina **actualización** *a la operación financiera que consiste en obtener el valor actual de un capital futuro.*
A partir de la fórmula de monto:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

Se determinó previamente el valor de $f(0)$:

$$f(0) = \frac{f(n)}{(1+i)^n} = f(n)(1+i)^{-n}$$

De manera general se puede expresar que:

$$f(0) = \frac{f(t)}{(1+i)^t} = f(t)(1+i)^{-t}$$

Se denomina a $(1+i)^{-t}$ **factor de actualización**, que multiplicado por un capital ubicado en un momento determinado del tiempo, permite obtener su valor actual.

También se simbolizará este factor de actualización con v^t:

$$v^t = (1+i)^{-t} = \frac{1}{(1+i)^t}$$

Por lo tanto:

$v^t = (1+i)^{-t}$ es el valor actual de \$1 en t unidades de tiempo.

Si el factor es:

$v = (1+i)^{-1}$, es el valor actual de \$1 en 1 unidad de tiempo.
$v^5 = (1+i)^{-5}$, es el valor actual de \$1 en 5 unidades de tiempo.

Puede graficarse v de la siguiente manera:

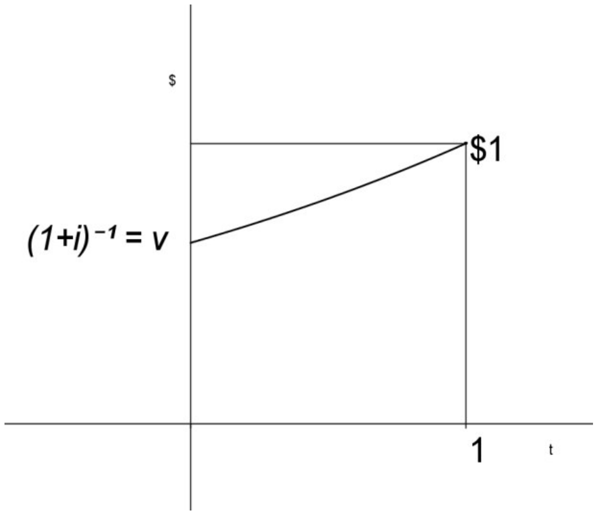


Gráfico 10

En el Gráfico anterior observamos $1 al final de una unidad de tiempo y su valor actual a la tasa de interés i, simbolizado con v.

En el Ejemplo 1.2, el factor de actualización es:

$$(1+0,06)^{-3}=0,839619$$

Al multiplicar este factor por $f(n)=\$11.910,16$, se obtienen los $\$10.000$ depositados.

Les proponemos resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 7
Un productor agropecuario compra una máquina, y la abona de la siguiente forma: una entrega inicial de $18.000 y una cuota de $35.600, a los 60 días. Determinar el precio de contado si la tasa de interés que incluyó el vendedor en la cuota es 0,012 p/30 días.

Rta: $ 52.760,74

La interpretación y el uso de la variable tiempo en las operaciones financieras

Un aspecto a considerar en las operaciones que estamos analizando es la interpretación de la variable tiempo. En general, en las operaciones comerciales se trabaja con un año que equivale a 360 días, un mes a 30 días, un bimestre a 60 días, etc.
En cambio, en las operaciones que se realizan en el sistema financiero y mercado de capitales está más extendido el uso de la cantidad exacta de días del año, es decir, 1 año equivale a 365 días. Por lo tanto, es importante tener en cuenta desde dónde se parte para definir la cantidad de días que tiene:

$$1\ mes=\frac{365}{12}=30{,}4167\ días$$

$$2\ meses = \frac{365}{12}\ .\ 2 = \frac{365}{6} = 60{,}83\ días$$

De la misma manera determinamos la cantidad de días de un trimestre, cuatrimestre, semestre, etc.

Por lo tanto, es necesario poner atención para no cometer errores frecuentes, comprendiendo que desde este punto de vista no es lo mismo:

Un mes que 30 días,
Un bimestre que 60 días,
Un semestre que 180 días, etc.

Esto que acabamos de analizar será la manera en que trabajaremos en las operaciones a interés compuesto.

De todos modos debemos estar atentos en la práctica profesional, y tener en cuenta con qué criterio se trabaja en cada operación en particular.
También es común que en algunas operaciones bancarias se mencione una tasa mensual, cuando en realidad se está haciendo referencia a una tasa para 30 días.

Otro aspecto importante referido al tiempo consiste en *cómo contar la cantidad de días de una operación financiera* y determinar la fecha de inicio o la fecha de vencimiento.
En las operaciones financieras pactadas de una fecha determinada a otra, se cuenta el día de inicio de la operación y no se cuenta el día del vencimiento. Este criterio se sustenta, en que el día del inicio de la operación, quien recibe el dinero (deudor) ya tiene disponibilidad sobre él. En cambio, el día del vencimiento, el dinero se encontrará a disponibilidad del acreedor, por lo tanto en la fecha de inicio se generan intereses, no así, en la fecha de vencimiento.

Entonces:
- Si se conocen la fecha de inicio y la fecha de vencimiento de la operación, para determinar el plazo, se cuenta desde el día de inicio hasta el día anterior al vencimiento.
- Si se conocen la fecha de inicio y el plazo, para determinar la fecha de vencimiento se cuentan los días desde la fecha de inicio hasta concluir el plazo, el día siguiente será la fecha de vencimiento de la operación.
- Si se conoce la fecha de vencimiento y el plazo de la operación, para determinar la fecha de inicio, se comienza a contar desde el día anterior al vencimiento hacia atrás en el tiempo, el día que se cubre el plazo es la fecha de inicio de la operación.

Es posible realizar estos cálculos a través de una calculadora financiera.

Les proponemos resolver ejercicios que se presentan a continuación:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 8
Determinar el plazo necesario para que un capital depositado se duplique, si la tasa de interés de la operación es 0,065041 trimestral.

Rta: 11 trimestres, o bien, 2 años y 9 meses

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de estos ejercicios, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

EJERCICIO 9
Si se depositan a plazo fijo $5.000, el día 3 de Julio y se retiran $5.100 el día 25 de agosto.
Obtener:
a) La unidad de tiempo de la operación.
b) La tasa de interés de la operación.

Rta.: a) 53 días
b) 0,02 p/53 días

EJERCITACION

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 10
Para ejercitar el uso de las distintas fórmulas de cálculo, completar el siguiente cuadro

	$f_{(0)}$	$f_{(n)}$	I	n	unidad de tiempo	plazo	i
a)	1.000				bimestre	6 meses	0,022
b)		875,50		4	30 días		0,0095
c)	960		640		mes	8 meses	
d)	5.640	8.049,68			60 días		0,024
e)	12.700			6		3 años	0,065
f)		25.600	3.300		cuatrimestre	2 años	

Rta: a) $ 1.067,46; $67,46; 3
b) $843; $32,49; 120 días
c) $1.600; 8; 0,0659 mensual
d) $2.409,68; 15; 900 días
e) $18.531,11; $5.831,11; semestre
f) $22.300; 6; 0,02327 cuatrimestral

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 11
Determinar la alternativa correcta:

Si un préstamo de $1.800 se devuelve en un pago de $2.113,86 y la tasa de interés aplicada es 0,041 para 60 días, el plazo de la operación es:

a) 4 bimestres b) 240 días c) 120 días d) 4 meses

Rta: opción b)

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas **las resoluciones** de estos ejercicios en formato video.

EJERCICIO 12
Una persona retira un plazo fijo por $5.860,35. ¿Cuál fue el importe depositado, si el mismo estuvo colocado durante 390 días y la tasa de interés para los primeros 210 días fue de 0,015 para 30 días y para el resto del plazo la tasa para 30 días se incrementó en un punto porcentual?

Rta: $ 4.553,21

EJERCICIO 13
Se depositan $10.000 en una entidad financiera que capitaliza los intereses cada 30 días al 1% para 30 días, teniendo en cuenta que 90 días después del primer depósito se retiran $1.000; 60 días más tarde se depositan $500 y 240 días después se retiran $2.000. ¿Qué monto se podrá extraer transcurridos 330 días más desde el último retiro?

Rta: $9.837,67

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 14
Un trabajador ha recibido $65.000 de indemnización por despido. Hasta decidir cómo invertir esa suma de dinero, el día 5 de marzo decide colocarlo en un depósito a plazo fijo renta por 180 días, que le permite retirar cada 30 días $780 en concepto de interés.
Determinar:
a) La tasa de interés de la operación.
b) La fecha en que se retira el capital final y el importe a recibir en ese momento.

Rta: a) 0,012 para 30 días b) 1 de septiembre, $65.780

EJERCICIO 15
Un empresario coloca $80.000 en dos depósitos simultáneos a Plazo Fijo por 120 días. Una parte la invierte a una tasa de interés de 0,018 para 60 días y el importe restante a una tasa de interés de 0,025 para 60 días. Por ambas operaciones se obtiene un capital final total de $83.620,97. Determinar el capital inicial y final de cada depósito.

Rta: $30.000; $31.089,72 y $50.000; $52.531,25

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 16
Lorenzo López le presta a un amigo $12.000, acordando una tasa de interés para 30 días, un plazo de 180 días y el capital final a devolver de $12.951,60.
Determinar los intereses correspondientes a la segunda y tercera unidades de tiempo de la operación.

Rta: $313,12

INTEGRANDO IDEAS

DIALOGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

El recorrido realizado a lo largo de esta unidad nos ha permitido introducirnos en temáticas propias del campo financiero. Se analizaron conceptos y modelos que son fundamentales y constituyen la base de la asignatura. Por este motivo, y para continuar con el estudio de la próxima unidad es necesario que se hayan comprendido los conceptos abordados hasta aquí incorporado los distintos componentes de las operaciones financieras, aclarado todas las dudas y adquirido destreza en la resolución de los ejercicios prácticos.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:

CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Primera Parte. Córdoba Facultad de Ciencias. Económicas U.N.C. (2001).

U2

BLOQUE 1

UNIDAD 2

OPERACIONES FINANCIERAS EQUIVALENTES

UNIDAD 2:
Operaciones financieras equivalentes

CONTENIDOS

Operaciones financieras equivalentes. Tasa de interés equivalente. Tasa de interés promedio. Tasa de interés proporcional (Tasa nominal de interés). Relación entre distintas tasas de interés.
Teoría del interés en el campo continuo. Tasa instantánea de interés. Valor del capital al final de la operación financiera o Monto en el campo continuo.

OBJETIVOS

- Reconocer operaciones financieras equivalentes.
- Identificar y calcular tasas de Interés equivalentes.
- Identificar la tasa de interés proporcional.
- Obtener tasa de interés promedio.
- Integrar en el análisis la incidencia de gastos y otros conceptos vinculados a las operaciones financieras.

PRESENTACIÓN

En esta unidad continuaremos con el estudio de operaciones financieras de capitalización y actualización, incorporando el análisis de operaciones y tasa de interés equivalentes. También nos detendremos a reconocer y determinar tasas de interés proporcionales y promedio.

Diferenciar estos distintos tipos de tasas, nos permitirá poder abordar el estudio del valor del capital en el tiempo en el campo continuo, obtener la fórmula de cálculo de la tasa instantánea de interés y del capital final.

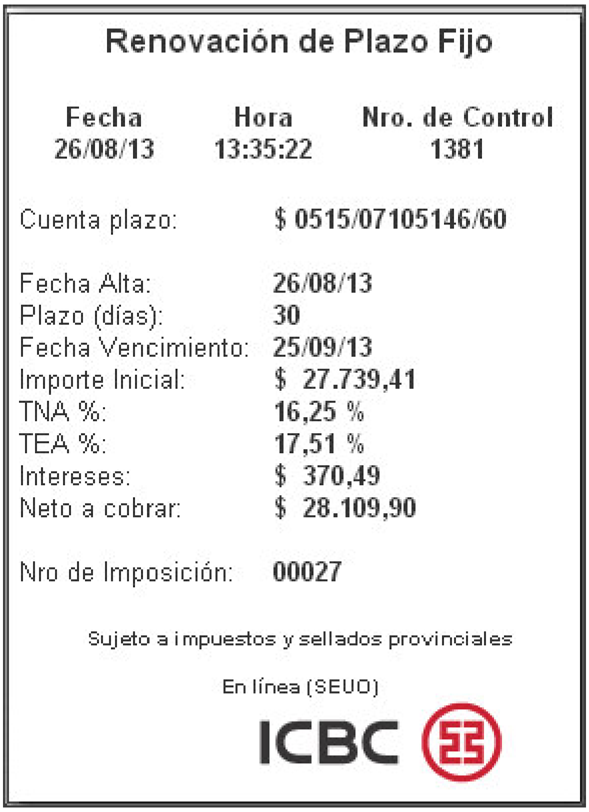
La siguiente imagen nos muestra un certificado que corresponde a una renovación de una operación de plazo fijo efectuado a través del servicio de home banking:

AULA VIRTUAL
SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **presentación de la Unidad 2**. Allí los profesores proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de los temas abordados

RECURSOS A UTILIZAR EN LA UNIDAD 2

- Material Teórico – Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios
- Videos Tutoriales sobre planilla de cálculo
- Videos Tutoriales simuladores
- Instructivo calculadora financiera



Renovación de Plazo Fijo

Fecha	Hora	Nro. de Control
26/08/13	13:35:22	1381

Cuenta plazo:	$ 0515/07105146/60
Fecha Alta:	26/08/13
Plazo (días):	30
Fecha Vencimiento:	25/09/13
Importe Inicial:	$ 27.739,41
TNA %:	16,25 %
TEA %:	17,51 %
Intereses:	$ 370,49
Neto a cobrar:	$ 28.109,90
Nro de Imposición:	00027

Sujeto a impuestos y sellados provinciales

En línea (SEUO)

ICBC

En la imagen podemos identificar elementos que ya conocemos, como el plazo, capital inicial e intereses, pero otros elementos nos son desconocidos: las siglas TNA y TEA, representan la Tasa Nominal Anual y la Tasa Equivalente Anual. A lo largo de esta unidad aprenderemos acerca de ellas.

Operaciones financieras equivalentes

Cuando los agentes económicos deben tomar decisiones de financiación o inversión, suelen tener que elegir entre distintas alternativas que se presentan. Por ejemplo, al momento de comprar una máquina, una empresa puede considerar la propuesta de financiamiento del proveedor o la posibilidad de obtener un préstamo bancario para comprarla de contado.

Al analizar la conveniencia de realizar operaciones financieras se consideran aspectos como el plazo, el riesgo, el rendimiento o el costo. Tal como indicamos en la Unidad 1, la tasa de interés nos refleja el rendimiento (en caso de una inversión) o el costo (cuando se trata de una operación de financiamiento) por cada unidad de capital inicial, por unidad de tiempo. Por lo tanto, en caso de inversiones se elegirá la que ofrezca la tasa de interés más alta y en caso de tratarse de alternativas de financiamiento, se elegirá la menor.

Pero al analizar distintas posibilidades, estas no siempre presentan la misma unidad de tiempo en la tasa de interés.

DIALOGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1
A un ahorrista se le presentan tres alternativas para realizar una operación financiera de inversión para un plazo de 6 meses:

Alternativa A
$i=0,025\ mensual$

Alternativa B
$i=0,07689\ trimestral$

Alternativa C
$i=0,05\ bimestral$

Determinaremos a continuación la alternativa más conveniente.
Si se calcula el capital final obtenido por cada unidad de capital inicial en el plazo de la operación:

Alternativa A
Plazo = 6 meses
Unidad de tiempo = 1 mes

$i=0,025\ mensual$

$$n=\frac{6\ meses}{1\ mes}=6$$

$$f(n)=(1+0,025)^6=1,1597$$

Alternativa B
Plazo = 6 meses
Unidad de tiempo = 1 trimestre (3 meses)

$i=0,07689\ trimestral$

$$n=\frac{6\ meses}{3\ meses}=2$$

$$f(n)=(1+0,07689)^2=1,1597$$

Alternativa C
Plazo = 6 meses
Unidad de tiempo = 1 bimestre (2 meses)

$i=0,05\ bimestral$

$$n=\frac{6\ meses}{2\ meses}=3$$

$$f(n)=(1+0,05)^3=1,1576$$

Se puede concluir que las Alternativas A y B obtienen el mismo rendimiento y que, a su vez, es mayor al ofrecido por la Alternativa C.
Que las Alternativas A y B alcancen el mismo rendimiento por cada peso invertido, indica que ambas operaciones son equivalentes.

Dos operaciones financieras son equivalentes cuando, en un mismo plazo, y con tasas de interés diferentes, referidas a distintas unidades de tiempo, se obtiene el mismo capital final (o rendimiento) por unidad de capital invertido.

Por lo tanto, A y B son equivalentes, ya que, en el mismo plazo (6 meses), con tasas de interés diferentes (0,025 y 0,07689), distintas unidades de tiempo (mes y trimestre) se obtiene el mismo capital final (1,1597) o el mismo rendimiento (0,1597) por unidad de capital inicial.

Se puede generalizar indicando que, dado un mismo plazo, y dos operaciones A y B:

Operación A
i_a = tasa de interés de la alternativa A
Unidad de tiempo = a

Operación B
i_b = tasa de interés de la alternativa B
Unidad de tiempo = b

Y, en donde:

$$i_a \neq i_b$$
$$a \neq b$$

Ambas operaciones serán equivalentes si:

$$(1+i_a)^{\frac{Plazo}{a}}=(1+i_b)^{\frac{Plazo}{b}}$$

Para el Ejemplo 2.1
Si:

$$\left(1+0,025\right)^{6}=1,1597$$

y

$$\left(1+0,07689\right)^{2}=1,1597$$

Se puede expresar que:

$$\left(1+0,07689\right)^{2}=\left(1+0,025\right)^{6}$$

Si se eleva a $\frac{1}{2}$ en ambos miembros de la igualdad:

$$\left[\left(1+0,07689\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\left(1+0,025\right)^{6}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(1+0,07689\right)=\left(1+0,025\right)^{3}$$

Restando 1 en ambos miembros:

$$0,07689=\left(1+0,025\right)^{3}-1$$

Como se puede observar la tasa de interés trimestral ha quedado expresada en función de la tasa mensual. Resolviendo:

$$0,07689=1,07689-1$$

Cuando dos operaciones son equivalentes, sus tasas de interés son equivalentes.

Para el ejemplo, la tasa de 0,025 mensual equivale a 0,07689 trimestral. Si una operación permite obtener una rendimiento financiero de 0,025 mensual y la operación tuviera una duración de 3 meses, el rendimiento sería el 0,07689 trimestral.

De igual manera, si:

$$\left(1+0,07689\right)^{2}=\left(1+0,025\right)^{6}$$

Si se eleva a $\frac{1}{6}$ en ambos miembros de la igualdad:

$$\left[\left(1+0,07689\right)^{2}\right]^{\frac{1}{6}}=\left[\left(1+0,025\right)^{6}\right]^{\frac{1}{6}}$$

$$\left(1+0,07689\right)^{\frac{1}{3}}=\left(1+0,025\right)^{1}$$

Restando 1 en ambos miembros:

$$\left(1+0,07689\right)^{\frac{1}{3}}-1=0,025$$

La tasa de interés mensual ha quedado expresada en función de la tasa trimestral. Resolviendo:

$$1,025 - 1 = 0,025$$

Puede afirmarse que la tasa de interés mensual es equivalente a la tasa de interés trimestral

Podemos generalizar, indicando que una **tasa de interés equivalente**, que simbolizaremos con $i_{(m)}$, se puede obtener con la siguiente expresión:

$$\boxed{i_{(m)} = (1+i)^m - 1}$$

Donde:

$i_{(m)} =$ representa una tasa de interés equivalente.

$m =$ es la cantidad de veces que la unidad de tiempo de la tasa de interés conocida está contenida en la unidad de tiempo de la tasa de interés equivalente. O se puede expresar que:

$$m = \frac{unidad\ de\ tiempo\ de\ i_{(m)}}{unidad\ de\ tiempo\ de\ i}$$

Al realizar el cálculo a través de la expresión anterior, debe tenerse la precaución de trabajar siempre con la misma medida del tiempo, por ejemplo, meses, o días, o años, etc.

Para el caso en que se conoce la tasa de interés mensual y se quiere encontrar la tasa de interés equivalente trimestral se procede de la siguiente manera:

$$m = \frac{3\ meses}{1\ mes} = 3$$

$$i_{(m)} = (1+0,025)^3 - 1 = 0,07689\ \ trimestral$$

Si en cambio, se cuenta como dato la tasa de interés trimestral y se desea calcular la tasa de interés equivalente mensual:

$$m = \frac{1\ mes}{3\ meses} = \frac{1}{3}$$

$$i_{(m)} = (1+0,07689)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,025\ \ mensual$$

También es posible realizar la representación gráfica de la tasa de interés mensual y su equivalente trimestral, tal como lo observamos en el Gráfico 1:

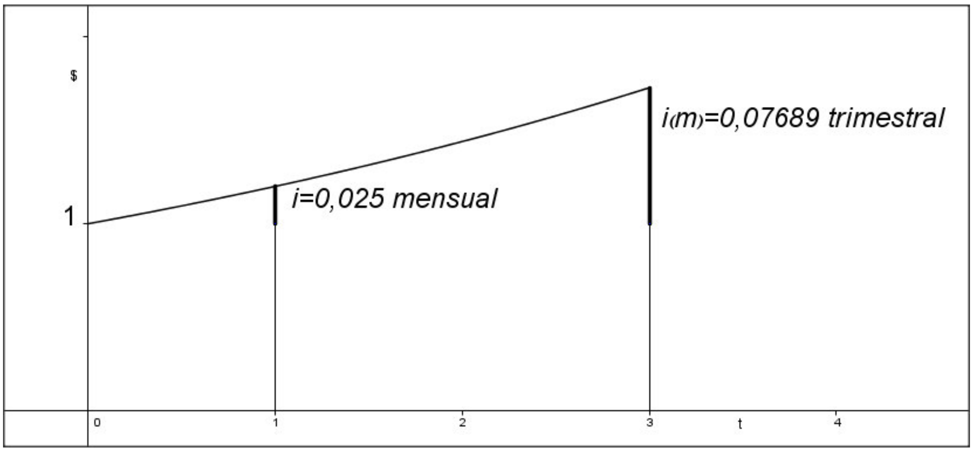


Gráfico 1

Dada una tasa de interés, se pueden calcular tasas de interés equivalentes para cualquier unidad de tiempo. Esto es un instrumento muy útil, especialmente, cuando es necesario comparar operaciones financieras y las tasas de interés tienen unidades de tiempo diferentes. En estos casos será útil encontrar tasas de interés equivalentes para una misma unidad de tiempo, comparar y tomar una decisión respecto de cuál es la más conveniente.

En distintas publicaciones suele aparecer la abreviatura TEA o TAE, ambas hacen referencia a la tasa de interés equivalente anual.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2
Una empresa necesita obtener un préstamo. Luego de consultar en diferentes entidades financieras, reúne la siguiente información respecto a las tasas de interés ofrecidas:

Banco	i
América	0,025 mensual
Latino	0,075 para 90 días
Privado	0,3350 anual

¿Cuál es más conveniente? La empresa debería elegir el banco que le ofrezca una tasa de interés menor, ya que se trata de una operación de préstamo.

Pero tal como se presenta la información, no es posible tomar una decisión, ¿cuál conviene?, ¿la tasa de interés mensual o la anual?, ¿la tasa de interés mensual o la de 90 días?
Para poder comparar se necesitan tener tasas de interés referidas a la misma unidad de tiempo. Una tasa de interés nos indica (en este caso) cuál es el costo por cada peso de préstamo obtenido, para una unidad de tiempo determinada.

En primer lugar debe elegirse una unidad de tiempo para realizar la comparación.
Una posibilidad es comparar tasas de interés anuales. Entonces deben obtenerse tasas de interés equivalentes para esa unidad de tiempo.

Para el Banco Privado ya se conoce que la tasa de interés es anual y por lo tanto no es necesario realizar ningún cálculo con ella.

Para el Banco América se parte de la tasa de interés mensual y se calcula su equivalente anual:

$$i_{(m)} = (1 + 0{,}025)^{12} - 1 = 0{,}3449\ anual$$

El exponente es 12 ya que se busca una tasa de interés anual (12 meses) partiendo de una tasa de interés mensual (1 mes).

Este procedimiento implica que los intereses generados cada mes se capitalizan, por ello no es correcto realizar la siguiente operación:

$$0{,}025\ .\ 12 = 0{,}30\ anual$$

El valor obtenido es inferior (0,30 < 0,3449) debido a que no considera la capitalización de intereses.

Para el Banco Latino se toma la tasa de interés para 90 días y se calcula su equivalente anual:

$$i_{(m)} = (1 + 0{,}075)^{\frac{365}{90}} - 1 = 0{,}3408\ anual$$

Puede notarse que, cuando la tasa de interés tomada como dato está expresada en cierta cantidad de meses, el año se expresa como 12 meses, y cuando la tasa de interés que se toma como dato está indicada en cantidad de días, el año se expresa como 365 días.

Ahora que las tres tasas de interés son anuales, es posible comparar:

Banco	*i* anual
América	0,3449
Latino	0,3408
Privado	***0,3350***

Por ofrecer la menor tasa de interés, es más conveniente el Banco Privado.
También se arribaría a la misma conclusión si se comparan tasas de interés para 90 días:

Banco	i para 90 días
América	0,0758
Latino	0,075
Privado	***0,07384***

Para calcular la tasa de interés equivalente para 90 días de la tasa de interés ofrecida por el Banco América, deberemos considerar la cantidad de días del mes financiero $\left(\frac{365}{12} = 30,4167\right)$, por lo tanto:

$$i_{(m)} = (1 + 0,025)^{\frac{90}{30,4167}} - 1 = 0,0758 \quad p/90d.$$

El exponente nos está indicado que buscamos una tasa de interés equivalente para 90 días, teniendo como dato una tasa de interés mensual.

Revisemos lo aprendido hasta aquí, resolviendo los siguientes ejercicios:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 1

Si el día 24/07 depositamos $8.500 obteniendo el 28/08 un valor final de $8.725,00,

a) ¿Cuál es la tasa de interés correspondiente a ese plazo?

b) Calcular la tasa de interés equivalente anual.

Rta.: a) 0,02647 p/ 35 días; b) 0,31319 anual

EJERCICIO 2

A partir de la tasa de interés de 0,024 para 35 días, complete el siguiente cuadro:

a) Tasa de interés equivalente anual	
b) Tasa de interés para 30 días	
c) Tasa de interés equivalente para 5 meses	
d) Tasa de interés equivalente para 180 días	

Rta: a) 0,2806 anual; b) 0,020536 p/30 días
c) 0,10855 p/5 meses; d) 0,12972 p/180 días

EJERCICIO 3

¿Qué importe se habrá invertido en un plazo fijo, si al cabo de 46 días da un valor final de $2.300 y el rendimiento financiero obtenido fue del 0,02 mensual?

Rta.: $2.232,14

Tasa de Interés Proporcional. Tasa de interés nominal

Al analizar el Ejemplo 2.2, indicamos que, para el Banco América, necesitábamos calcular la tasa de interés equivalente anual, ya que sólo conocíamos la tasa de interés mensual.
La tasa de interés mensual es 0,025 y su equivalente anual 0,3449, reflejando este último valor el costo anual de la operación. También se aclaró que no es correcto simplemente multiplicar por 12 (la cantidad de meses del año) ya que el valor obtenido, 0,30, no refleja el costo anual por cada peso obtenido en préstamo.

Realizar ese cálculo, $0{,}025 \, . \, 12 = 0{,}30\, anual$, implica justamente calcular una tasa proporcional, que consiste en multiplicar una tasa de interés $(0{,}025)$ por un valor que representa una proporción entre las unidades de tiempo de la tasa de interés proporcional buscada (12 meses) y la tasa de interés conocida (para 1 mes).

Calcular una tasa de interés proporcional nos puede llevar a tomar decisiones incorrectas porque no refleja el verdadero costo o rendimiento de la operación, al no considerar la capitalización de los intereses.
A pesar de esto, es muy común encontrarnos con una tasa proporcional, cuando en las operaciones financieras se menciona la Tasa Nominal Anual.
Por lo tanto, es importante aclarar que esta tasa no representa un valor financiero: nunca se utilizará directamente en una operación de capitalización o actualización, ni es útil para comparar alternativas.

¿Por qué analizarla? Porque su uso está generalizado y nos está informando, realizando algunos cálculos, cuál es la tasa de interés de una operación.
Es común verla en los bancos, en publicidades y en artículos de contenido económico y financiero.
Normalmente, se la simboliza como TNA (Tasa Nominal Anual). Nosotros utilizaremos indistintamente esa expresión o $i^{(m)}$.

Es fundamental aclarar que no es una tasa de interés, ya que no responde a la definición de la misma (interés de una unidad de capital inicial en una unidad de tiempo).
La definimos como:

El incremento de una unidad de capital inicial en un período de tiempo (generalmente un año) en donde el interés en cada una de las m partes en que se divide el período, es igual al interés del primer m-ésimo.

Simbólicamente:

$$\boxed{i^{(m)} = i.m}$$

Donde:
$i^{(m)}$ = tasa nominal anual
i = tasa de interés de la operación
m = cantidad de unidades de tiempo en que se ha dividido el período, es decir:

$$m = \frac{Periodo\ de\ i^{(m)}}{unidad\ de\ tiempo\ de\ i}$$

Como generalmente la tasa nominal de interés es anual:

$$m = \frac{Año}{unidad\ de\ tiempo\ de\ i}$$

Cuando la tasa nominal de interés anual se enuncie para una operación financiera, lo que se debe hacer es calcular la tasa de interés para la unidad de tiempo indicada en la operación, a través del siguiente cálculo:

Si: $i^{(m)} = i.m$

Despejando:

$$\boxed{i = \frac{i^{(m)}}{m}}$$

Ejemplo 2.3
Para operaciones de préstamos personales el Banco Nacional ofrece el pago en cuotas mensuales, enunciando una TNA del 0,12.

Al tratarse de una operación donde el pago se realizará en cuotas mensuales, la unidad de tiempo es el mes.

La tasa de interés mensual se obtiene haciendo:

$$i = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01\ mensual$$

Una vez obtenida la tasa de interés mensual podemos operar con ella en el cálculo de la cuota, o calcular una tasa de interés equivalente si fuera necesario.

Ejemplo 2.4
Para operaciones de depósito a plazo fijo a 30 días el Banco Local ofrece un interés nominal anual del 12%.

Si la TNA se expresa como 0,12 anual para una operación a 30 días, el cálculo de la tasa de interés se realiza de la siguiente manera:

$$i = \frac{0{,}12}{\frac{365}{30}} = \frac{0{,}12}{365}\ .\ 30 = 0{,}0099\ para\ 30\ días$$

Es el momento de preguntarnos si la TNA tiene alguna relación con tasa de interés equivalente anual. Definitivamente, no va a darnos el mismo resultado.
Una tasa de interés equivalente se obtiene:

$$i_{(m)} = (1+i)^m - 1$$

Es decir, crece más que proporcionalmente, ya que implica que el interés obtenido en cada *m-ésimo* se va capitalizando

Para la tasa de interés nominal:

$$i^{(m)} = i\ .\ m$$

Implica que el crecimiento es proporcional. En cada *m-ésimo* es el mismo, es decir, no se va capitalizando. Por ello calculamos una sola tasa que es para el primer *m-ésimo*, que es el único válido financieramente, ya que es sobre una unidad de capital inicial.

El siguiente gráfico nos ayudará a ver la diferencia entre ambas:

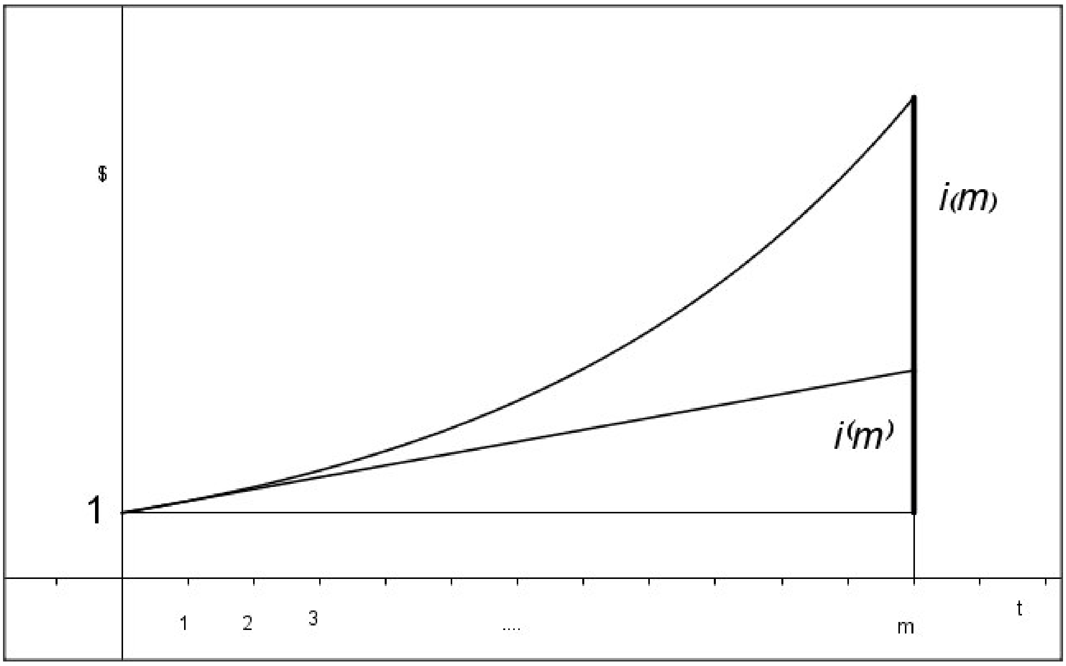


Gráfico 2

El Gráfico 2 nos muestra como el crecimiento exponencial de la tasa de interés equivalente adquiere valores mayores a la tasa nominal, cuyo crecimiento es lineal.
Es común encontrarnos con una expresión que resume en un único cálculo, el paso de una tasa nominal anual a la tasa de interés equivalente anual:

$$i_{(m)} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1$$

Como observamos, dentro del paréntesis se encuentra el cálculo de i, que luego es elevada al exponente m que permite obtener la tasa de interés equivalente anual.

El Banco Central de la República Argentina (BCRA) establece en la normativa de las operaciones de depósitos a plazo fijo e inversiones a plazo, que deben indicarse la tasa de interés anual contractual (la tasa nominal anual) en porcentaje y con dos decimales y la tasa efectiva anual equivalente, la que se determina de la siguiente manera:

$$i = \left\{\left[\left(1 + i_s \cdot \frac{m}{365 \cdot 100}\right)^{\frac{df}{m}}\right] - 1\right\} \cdot 100$$

Donde:
$i =$ tasa de interés anual efectiva expresada en porcentaje
$i_s =$ tasa de interés anual contractualmente aplicada, en porcentaje
$m =$ cantidad de días correspondiente al plazo de la operación, o de los subperíodos correspondientes a pago de intereses, cuando se trate de este tipo de operaciones.

Con lo analizado hasta aquí podemos inferir que la tasa nominal anual no es útil al momento de comparar alterativas. En el caso que se enuncie en una operación, será necesario calcular la tasa de interés de la operación y con ella, o si es necesario determinar tasas de interés equivalentes, cotejar las distintas alternativas.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.5
Se enuncia una interés anual nominal del 12%. Se aplicará a operaciones de 180, 120, 90, 60, 30 días y de 1 día.
Determinamos la tasa de interés para cada unidad de tiempo y su tasa equivalente anual de interés.

Unidad de Tiempo	*i*	*Tasa de interés equivalente anual*
180 días	$i=\frac{0,12}{\frac{365}{180}}=0,059178\ p/180d.$	$i_{(m)}=(1+0,059178)^{\left(\frac{365}{180}\right)}-1=0,12365\ anual$
120 días	$i=\frac{0,12}{\frac{365}{120}}=0,039452\ p/120d.$	$i_{(m)}=(1+0,039452)^{\left(\frac{365}{120}\right)}-1=0,1249\ anual$
90 días	$i=\frac{0,12}{\frac{365}{90}}=0,02959\ p/90d.$	$i_{(m)}=(1+0,02959)^{\left(\frac{365}{90}\right)}-1=0,12554\ anual$
60 días	$i=\frac{0,12}{\frac{365}{60}}=0,019726\ p/60d.$	$i_{(m)}=(1+0,019726)^{\left(\frac{365}{60}\right)}-1=0,12618\ anual$
30 días	$i=\frac{0,12}{\frac{365}{30}}=0,00986\ p/30d.$	$i_{(m)}=(1+0,00986)^{\left(\frac{365}{30}\right)}-1=0,12679\ anual$
1 día	$i=\frac{0,12}{365}=0,00033\ diaria$	$i_{(m)}=(1+0,00033)^{(365)}-1=0,12798\ anual$

Podemos concluir que:
- Dada una tasa de interés para una unidad de tiempo menor a un año, su tasa equivalente anual de interés es mayor a su tasa nominal anual.
A modo de ejemplo, para la tasa de interés de $0,00986\ p/30d.$ su tasa de interés equivalente anual de 0,12679 es mayor a su tasa nominal anual de 0,12.
- Dada una tasa nominal anual de interés, para diferentes unidades de tiempo, sus tasas de interés equivalentes anuales serán distintas. A medida que la fracción de tiempo es menor, mayor es la tasa de interés equivalente anual.

Retomando del caso inicial
Ya estamos en condiciones de analizar la operación a plazo fijo planteada al inicio de la unidad.

Fecha Alta:	**26/08/13**
Plazo (días):	**30**
Fecha Vencimiento:	**25/09/13**
Importe Inicial:	**$ 27.739,41**
TNA %:	**16,25 %**
TEA %:	**17,51 %**
Intereses:	**$ 370,49**
Neto a cobrar:	**$ 28.109,90**

A partir de la tasa nominal anual (TNA) calculamos la tasa de interés de la operación:

$$i = \frac{0,1625}{\frac{365}{30}} = 0,013356\, p/30d.$$

Luego, calculamos el capital final:

$$f(n) = 27.739,41(1+0,013356)^{1} = 28.109,90$$

Verificándose el valor del certificado.
Calculemos la tasa de interés equivalente anual (TEA):

$$i_{(m)} = (1+0,013356)^{\left(\frac{365}{30}\right)} - 1 = 0,1751\, anual$$

Les proponemos resolver los ejercicios siguientes:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 4
Para la tasa nominal anual de interés de 0,24 indicar la tasa de interés para los siguientes períodos de capitalización:a) Mensual
b) Bimestral
c) Semestral
d) 60 días

Rta: a) 0,02 mensual; b) 0,04 bimestral
c) 0,12 semestral; d) 0,039452 p/60 días

EJERCICIO 5
Un capital de $1.000 genera al cabo de 12 meses un monto de $1.093,81. Calcular la tasa nominal anual de interés enunciada en esta operación, teniendo en cuenta que la misma capitaliza mensualmente.

Rta.: 0,09 nominal anual

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de estos ejercicios, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

EJERCICIO 6
Dada una operación pactada a 45 días, a la tasa de interés nominal anual del 0,50 determinar:
a) La tasa de interés de la operación.
b) La tasa de interés equivalente mensual.
c) La tasa de interés equivalente anual.

Rta.: a) 0,06164 p/ 45 días; b) 0,04126 mensual;
c) 0,6245 anual

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 7

A partir de las siguientes tasas de interés, complete el siguiente cuadro:

	Tasa de interés	**Tasa de interés equivalente anual**	**Tasa nominal anual**
a)	0,026 mensual		
b)	0,092 cuatrimestral		
c)	0,012 para 15 días		
d)	0,10 para 180 días		

Rta.: a) 0,3607anual y 0,312 nominal anual
b) 0,3022 anual y 0,276 nominal anual
c) 0,3368 anual y 0,292 nominal anual
d) 0,2132 anual y 0,2028 nominal anual

EJERCICIO 8

Para una operación de 65 días pactada con un interés bimestral del 4%, determinar:

a) la tasa equivalente de interés mensual.
b) la tasa de interés nominal anual con capitalización bimestral.
c) La TNA con capitalización cada 95 días que debería enunciarse en otra operación para que sea equivalente a la primera.

Rta.: a) 0,0198 mensual; b) 0,24 nominal anual
c) 0,2427 nominal anual

Monto o Capital Final con tasas de interés variables. Tasa de interés promedio

Al estudiar la Unidad 1, analizamos las operaciones financieras de capitalización y actualización y obtuvimos la fórmula de cálculo del capital final a interés compuesto:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

que utilizamos en diferentes operaciones considerando que la tasa de interés se mantenía constante.

Pero podemos encontrarnos con operaciones en donde la tasa de interés asume diferentes valores durante el plazo. En estos casos, puede aplicarse sucesivamente, la fórmula de monto, donde el capital final obtenido en cada uno de los cálculos parciales, constituye el capital inicial para la unidad de tiempo posterior:

$$f(0)(1+i_1)^{n_1}$$

$$f(0)(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}$$

$$f(0)(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}$$

...

$$f(0)(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}\dots(1+i_p)^{n_p}$$

Se resume el cálculo con la siguiente expresión:

$$f(n)=f(0)(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}\dots(1+i_p)^{n_p} \quad (1)$$

donde $i_1, i_2, i_3, ..., i_p$ simbolizan las sucesivas tasas de interés y $n_1, n_2, n_3, ..., n_p$ las cantidad de unidades de tiempo que cada una de ellas es aplicada en la operación.

La expresión (1) también puede ser planteada a través de la siguiente multiplicatoria:

$$f(n)=f(0)\prod_{r=1}^{p}(1+i_r)^{n_r} \quad (2)$$

Para el caso en que $n_1, n_2, n_3, ..., n_p =1$, la expresión (1) y (2) se reducirán a:

$$f(n)=f(0)(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\dots(1+i_p)=f(0)\prod_{r=1}^{p}(1+i_r) \quad (3)$$

Ejemplo 2.6
Un capital inicial de $10.000 es colocado sucesivamente a dos operaciones, la primera por 90 días a una tasa de interés para 30 días de 0,02 y la segunda por 120 días a una tasa de interés de 0,035 para 60 días.
El cálculo del capital final puede realizarse de la siguiente manera:

$$f(n)=10.000(1+0,02)^3=10.612,08$$
$$f(n)=10.612,08(1+0,035)^2=11.367,93$$

o directamente:

$$f(n)=10.000(1+0,02)^3(1+0,035)^2=11.367,93$$

Ejemplo 2.7
Un capital inicial de $20.000 es colocado sucesivamente a tres operaciones, la primera por 30 días a una tasa de interés para 30 días de 0,02, la segunda por 30 días a una tasa de interés de 0,018 para 30 días y la última también por 30 días a la tasa de interés para 30 días de 0,024.
El capital final ascenderá a:

$$f(n)=20.000(1+0,02)(1+0,018)(1+0,024)=21.265,61$$

Al analizar los Ejemplos 2.6 y 2.7, se observa que intervienen distintas tasas de interés y en estos casos puede interesar a las partes que intervienen saber cuál es la tasa de interés que, en promedio, actuó en la operación.

Para determinar esta tasa de interés promedio, hay que tener en cuenta, en primer lugar, que al tratarse de operaciones sucesivas los intereses obtenidos se van capitalizando, por lo tanto, el cálculo de la media aritmética con los valores de las tasas de interés que intervienen no arrojará el valor de la tasa de interés promedio de la operación.

Es decir, no es correcto hacer, para una operación como la analizada en (3):

$$\frac{i_1 + i_2 + i_3 + \ldots i_p}{p}$$

Para determinar la tasa de interés promedio, $\bar{i}$, será necesario, en primer lugar, calcular la tasa de interés para todo el plazo de la operación:

$$i = \left[(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}\ldots(1+i_p)^{n_p}\right] - 1$$

Y luego, determinar la tasa de interés equivalente para la unidad de tiempo de la operación o para la unidad de tiempo que se desee conocer la tasa de interés promedio:

$$i_{(m)} = (1+i)^m - 1$$

En resumen, la tasa de interés promedio puede calcularse como:

$$\boxed{\bar{i} = i_{(m)} = \left[(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}\ldots(1+i_p)^{n_p}\right]^m - 1}$$

Determinemos la tasa de interés promedio en los ejemplos anteriores:

Ejemplo 2.6
Determinamos la tasa de interés para todo el plazo:

$$i = \left[(1+0,02)^3(1+0,035)^2\right] - 1 = 0,13679 \ para\ 210\ dias$$

El plazo total se obtiene de sumar el plazo de las sucesivas operaciones (90 y 120 días, respectivamente).
Luego determinamos la tasa de interés equivalente para la unidad de tiempo para la cual se quiera determinar la tasa de interés promedio. En este caso se calculará para 30 días, por lo tanto:

$$\bar{i} = (1+0,13679)^{\frac{30}{210}} - 1 = 0,01848 \ para\ 30\ dias$$

Ejemplo 2.7

$$i = \left[(1+0,02)(1+0,018)(1+0,024)\right] - 1 = 0,06328 \; para \; 90 \; dias$$

donde i representa la tasa de interés para todo el plazo de la operación.

$$\bar{i} = (1+0,06328)^{\frac{30}{90}} - 1 = 0,020663 \; para \; 30 \; dias$$

Se puede resumir en un único cálculo:

$$\bar{i} = \left[(1+0,02)(1+0,018)(1+0,024)\right]^{\frac{30}{90}} - 1 = 0,020663 \; para \; 30 \; dias$$

También es posible determinar la tasa de interés promedio a partir de la fórmula de capital final, si se conocen los valores de $f(n)$ y $f(0)$:

$$\boxed{f(n) = f(0)(1+\bar{i})^n}$$

Donde n dependerá del plazo de la operación y de la unidad de tiempo elegida para el cálculo de la tasa de interés promedio.

Para el Ejemplo 2.7:

$$21.265,61 = 20.000(1+\bar{i})^3$$

El valor de n se obtiene de:

$$n = \frac{90 \; dias}{30 \; dias} = 3$$

Por lo tanto, la tasa de interés promedio es:

$$\bar{i} = 0,020663 \; para \; 30 \; dias$$

A continuación les proponemos aplicar lo aprendido, resolviendo el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 9

Un particular desea invertir por 60 días $22.300. Coloca esa suma durante 30 días el 15 de abril, obteniendo al final del plazo $22.500. En ese momento renueva la operación por 30 días más, a la tasa de interés nominal anual de 0,10. Indicar:

a) El capital final retirado.

b) La tasa de interés equivalente anual de la primera operación.

c) La tasa de interés para los 60 días. (Calcule la misma de dos maneras diferentes)

d) La tasa de interés equivalente para 30 días de la obtenida en el inciso c).

Rta.: a) $22.684,93; b) 0,11475 anual
c) 0,01726 p/ 60 días; d) 0,008594 p/ 30 días

Tasa Instantánea de Interés

Al iniciar la Unidad 1 indicamos, de acuerdo al postulado fundamental del campo financiero, que el capital crece con el transcurso del tiempo. Ese crecimiento se produce continuamente a través del tiempo pero se mide al final de cada unidad de tiempo.

Es decir, el capital devenga intereses en forma continua pero por razones prácticas, en las operaciones financieras sólo se determina la magnitud de los intereses al final de cierto tiempo.
Se establece entonces, un concepto fundamental dentro del campo financiero: la tasa de crecimiento instantáneo del capital.

Sea $f(t)$ el capital en el momento t y sea t la variable que mide el tiempo en alguna unidad de medida cualquiera (días, meses, trimestres, etc.), el interés producido por el capital $f(t)$ durante un período de tiempo n, está determinado por el crecimiento del capital en ese lapso. Al final, obtendremos $f(t+n)$.

Si a este valor le restamos el capital $f(t)$:

$$f(t+n)-f(t)$$

El resultado es el interés producido por el capital $f(t)$ en n unidades de tiempo.

Si $n=1$, entonces:

$$f(t+1)-f(t)$$

Nos indica el interés o incremento de un capital $f(t)$ en una unidad de tiempo.

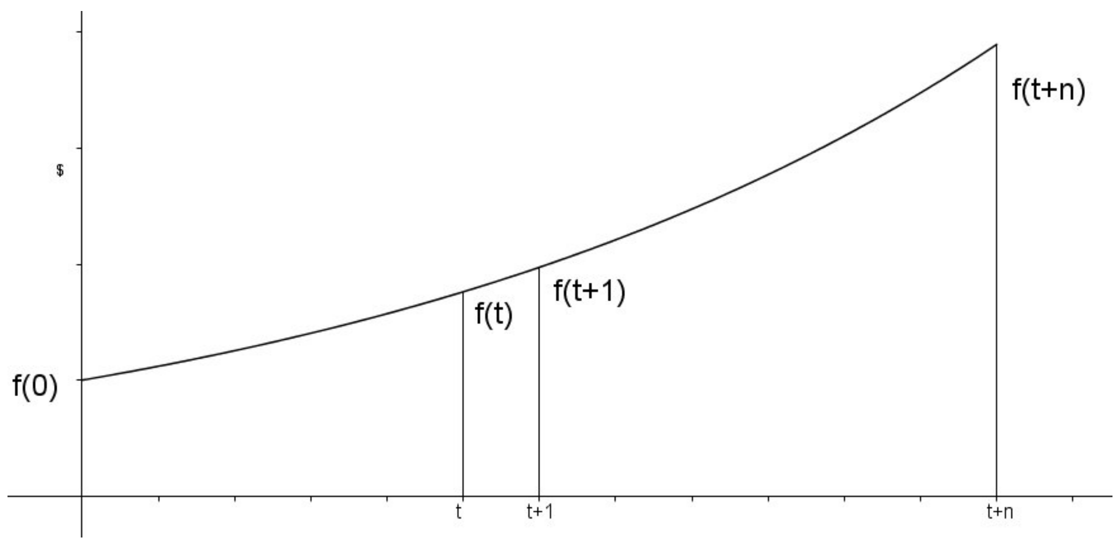


Gráfico 3

En el Gráfico 3 podemos observar el capital $f(t)$ luego de transcurrida una unidad de tiempo y el capital final luego de transcurridas n unidades de tiempo.

Si a la unidad de tiempo se la divide en m partes iguales, el interés producido en el primer $m-$ésimo es:

$$f\left(t+\frac{1}{m}\right)-f\left(t\right)$$

Se multiplica por m la expresión anterior:

$$m\left[f\left(t+\frac{1}{m}\right)-f\left(t\right)\right]$$

El multiplicar por m implica que el crecimiento se mantiene constante para las $m-1$ partes siguientes de la unidad de tiempo, obteniéndose el crecimiento del capital $f\left(t\right)$ en una unidad de tiempo (es la unidad de tiempo siguiente al momento t) bajo el supuesto de que el incremento en cada uno de los $m-$subperíodos que la constituye, es igual al incremento del primer $m-$ésimo.

Al dividir la expresión anterior por $f\left(t\right)$:

$$i^{(m)}=\frac{m\left[f\left(t+\frac{1}{m}\right)-f\left(t\right)\right]}{f\left(t\right)}$$

Se obtiene el crecimiento de la unidad de capital en una unidad de tiempo. Esta es una tasa proporcional de crecimiento, porque este se produce bajo el supuesto de que el incremento en los m subperíodos en que se divide la unidad de tiempo es igual al incremento del primer $m-$ésimo. Se simboliza esta tasa proporcional con $i^{(m)}$.

Se reemplaza:

$$\frac{1}{m}=h$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$i^{(m)}=\frac{\frac{1}{h}\left[f\left(t+h\right)-f\left(t\right)\right]}{f\left(t\right)}$$

Se reordena:

$$i^{(m)}=\frac{1}{f\left(t\right)}\frac{\left[f\left(t+h\right)-f\left(t\right)\right]}{h}$$

Si se divide el período de tiempo en partes cada vez más pequeñas, es decir, el valor de m asume valores cada vez más grandes, acercándose a ∞, el valor de h tenderá a 0. Si se toma límite para cuando h tiende a 0:

$$\underset{h \to 0}{Lim} \frac{1}{f(t)} \frac{\left[f(t+h) - f(t)\right]}{h} = \frac{1}{f(t)} \underset{h \to 0}{Lim} \frac{\left[f(t+h) - f(t)\right]}{h}$$

Al tomarse límite para cuando h tiende a 0, se obtiene el interés que producirá la unidad de capital en una unidad de tiempo, considerando que el incremento en cada uno de los infinitésimos (o instantes) en que ha sido dividida, es igual al incremento del primer infinitésimo (instante).

Como el límite de una función sobre el incremento de la variable cuando el incremento de la variable tiende a cero es la derivada de la función, y esta nos determina una tasa instantánea de variación:

$$i^{(\infty)} = \frac{1}{f(t)} \frac{d\,f(t)}{dt}$$

obtenemos la tasa de interés instantánea (o de capitalización instantánea).

Como:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d \ln f(x)}{dx}$$

Se reemplaza:

$$i^{(\infty)} = \delta = \frac{d \ln f(t)}{dt}$$

Donde $i^{(\infty)}$ o δ es la **tasa instantánea de interés** y se define como:

el interés de una unidad de capital en un período de tiempo, bajo el supuesto de que el interés en cada una de los infinitésimos en que se divide el período es igual al interés del primer infinitésimo.

La tasa instantánea no es para el instante, sino que corresponde a una unidad de tiempo cualquiera, siendo instantáneo el cálculo de los intereses.

Monto en el Campo Continuo

Un capital devenga intereses en forma continua, modificando su valor con el transcurso del tiempo. El valor que asume ese capital luego de transcurrido un cierto período de tiempo se le denomina monto. Este monto o capital final está constituido por el capital inicial más los intereses y es necesario que el tiempo transcurra para que estos se generen.

En consecuencia el monto es función del capital inicial, del tiempo transcurrido y de la fuerza de crecimiento o tasa instantánea de interés.

Partiendo de:

$f(0)$ = capital inicial

$f(t)$ = valor alcanzado por el capital al final de t unidades de tiempo

δ = tasa instantánea de interés, constante y correspondiente a la unidad de tiempo considerada.

donde:

$$\delta = \frac{d \ln f(t)}{dt}$$

Para resolver esta ecuación diferencial por el método de separación de variables, obtenemos la diferencial de la función:

$$\delta dt = d \ln f(t)$$

δdt es el incremento de la unidad de capital en el primer instante a partir del momento cero. Al integrar entre 0 y t se obtiene el incremento de la unidad de capital en t unidades de tiempo, bajo el supuesto de que la intensidad del crecimiento durante todo el período es igual a la del primer instante:

$$\int_0^t \delta dt = \int_0^t d \ln f(t)$$

$$\delta t = \ln f(t) - \ln f(0)$$

Por propiedad de logaritmos:

$$\delta t = \ln \frac{f(t)}{f(0)}$$

Por definición de logaritmo:

$$e^{\delta t} = \frac{f(t)}{f(0)}$$

Despejando:

$$f(t) = f(0) e^{\delta t}$$

Obteniéndose el capital final o monto en términos de la tasa de interés instantánea.

Sabemos que el monto en el campo discreto es:

$$f(t) = f(0)(1+i)^t$$

Y el monto en el campo continuo:

$$f(t) = f(0) e^{\delta t}$$

Entonces:

$$f(0)(1+i)^t = f(0) e^{\delta t}$$

Para $f(0) = \$1$:

$$(1+i)^t = e^{\delta t}$$

Se obtiene el monto de una unidad de capital inicial en t unidades de tiempo.

Con $t=1$:

$$\left(1+i\right)=e^{\delta}$$

Se obtiene el monto de una unidad de capital inicial en una unidad de tiempo.
A partir de esta igualdad, se puede expresar la tasa de interés en términos de la tasa instantánea de interés:

$$i=e^{\delta}-1$$

Y la tasa instantánea de interés en función de la tasa de interés:

$$\delta=\ln\left(1+i\right)$$

Ejemplo 2.8
Se conoce que la tasa de interés anual es 0,12.
Si calculamos su correspondiente tasa instantánea:

$$\delta=\ln\left(1+0{,}12\right)$$

$$\delta=0{,}113329\ anual$$

Recordemos que esta tasa instantánea de interés representa una tasa proporcional anual (porque la obtenemos a partir de una tasa de interés anual) con intereses calculados instantáneamente.
Al calcular el valor final de una capital inicial de $10.000, obtendremos:
Con la fórmula correspondiente al campo discreto:

$$f\left(n\right)=f\left(0\right)\left(1+i\right)^{n}$$

$$f\left(n\right)=10.000\left(1+0{,}12\right)^{1}=11.200$$

Con la fórmula de monto en el campo continuo:

$$f\left(t\right)=f\left(0\right)e^{\delta t}$$

$$f\left(t\right)=10.000\,e^{0{,}113329}=11.200$$

Por otra parte, si calculamos las tasas nominales anuales a enunciarse para operaciones de 180, 120, 90, 60, 30 días y de 1 día, de manera tal que la tasa de interés equivalente anual sea 0,12, los valores que obtenemos son:

Unidad de tiempo	*i*	*TNA*
180 días	$i=\left(1+0{,}12\right)^{\frac{180}{365}}-1=0{,}05748\ p/180d.$	$i^{(m)}=0{,}05748\frac{365}{180}=0{,}1166\ anual$
120 días	$i=\left(1+0{,}12\right)^{\frac{120}{365}}-1=0{,}03796\ p/120d.$	$i^{(m)}=0{,}03796\frac{365}{120}=0{,}1155\ anual$
90 días	$i=\left(1+0{,}12\right)^{\frac{90}{365}}-1=0{,}02834\ p/90d.$	$i^{(m)}=0{,}02834\frac{365}{90}=0{,}1149\ anual$
60 días	$i=\left(1+0{,}12\right)^{\frac{60}{365}}-1=0{,}0188\ p/60d.$	$i^{(m)}=0{,}0188\frac{365}{60}=0{,}1144\ anual$
30 días	$i=\left(1+0{,}12\right)^{\frac{30}{365}}-1=0{,}00936\ p/30d.$	$i^{(m)}=0{,}00936\frac{365}{30}=0{,}11388\ anual$
1 día	$i=\left(1+0{,}12\right)^{\frac{1}{365}}-1=0{,}000311\ diaria$	$i^{(m)}=0{,}000311.\frac{365}{1}=0{,}11352\ anual$

Podemos observar que:
- A medida que la unidad de tiempo es menor, disminuye la tasa nominal anual de interés (tasa proporcional) que debe enunciarse para obtener en todos los casos la misma tasa de interés equivalente anual.
- La tasa nominal anual de interés, proporcional a una unidad de tiempo cada vez más pequeña, se acerca al valor de la tasa instantánea $(0{,}113329\,anual)$, ya que como indicamos anteriormente, es una tasa proporcional a cada instante o infinitésimo.

EJERCITACIÓN

Para poner en práctica todo lo estudiado en esta unidad y en la anterior, les proponemos resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 10
Una persona dispone de $6.000 por un plazo de 90 días y puede invertirlos de la siguiente manera:
I. Efectuar un depósito por 30 días al 48% de interés nominal anual.
II. Realizar un depósito por 90 días al 48% de interés nominal anual.
Determinar:
a) La alternativa de inversión más conveniente.
b) ¿Cuál debe ser la tasa de interés nominal anual para el depósito de 90 días para que esta operación sea equivalente a la alternativa I?

Rta.: a) Conviene la alternativa I.
b) 0,4992 nominal anual c/ capitalización c/ 90 días.

EJERCICIO 11
Se desea constituir un fondo de $10.000 dentro de 6 meses. El banco abona una TNA de 0,42 con capitalización mensual. Si en la fecha se deposita la suma de $2.500, determinar la suma necesaria que se deberá depositar al final del tercer mes, para alcanzar el importe planificado.

Rta.: $6.247,63

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 12
Usted dispone de un capital de $10.000 que decide invertir en 3 depósitos sucesivos a plazo fijo, de 30 días cada uno. Para el primero, la TNA es de 0,17, para el segundo, de 0,195 y para el tercero de 0,182; todos con capitalización a 30 días.
Determinar:
a) Los capitales finales al cabo de cada operación.
b) La tasa de interés para todo el plazo (90 días). Realice este cálculo de dos maneras distintas.
c) La fecha de retiro del dinero si el depósito se realizó el 19 de septiembre.

Rta.: a) $10.139,73 $10.302,24 y $10.456,35
b) 0,04564 para 90 días; c) 18/12

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 13
El Señor Carlos Ulloa realiza un depósito a plazo fijo por 60 días. El valor retirado es de $7.814,25 y el interés nominal anual enunciado es 4,4%.
A partir de esta información, completar:

a)	Tasa de interés de la operación	
b)	Unidad de tiempo	
c)	Plazo de la operación	
d)	Tasa de interés equivalente anual	
e)	Capital depositado	

Rta.: a) 0,007233 p/ 60 días; b y c) 60 días
d) 0,04482 anual; e) $7.758,14

EJERCICIO 14
La siguiente información pertenece a una operación a plazo fijo:

Tasa Nominal Anual de Interés	0,076
Plazo de la operación	61 días
Capital depositado	$15.568
Fecha de vencimiento	6 de diciembre

Completar:

a)	Fecha de depósito	
b)	Tasa de interés de la operación	
c)	Unidad de tiempo	
d)	Interés obtenido	
e)	Tasa de interés equivalente anual	

Rta.: a) 06/10; b) 0,0127 p/ 61 días;
c) 61 días; d) $197,73;
e) 0,07844 anual

EJERCICIO 15
El Señor Luis Alberto Mendoza es un monotributista que solicita un crédito en una entidad financiera. El préstamo deberá devolverse a los 120 días. El importe que deberá devolver el 14 de diciembre es de $7.824 y el interés enunciado en la operación es del 23% nominal anual con capitalización cada 40 días.
Determinar:
a) La tasa de interés de la operación.
b) El importe prestado.
c) Si al momento de recibir el dinero, le cobran gastos administrativos del 0,5% sobre el importe obtenido en b), ¿cuál es el capital que recibe? y ¿cuál es la tasa de costo correspondiente al plazo de la operación para el Sr. Mendoza?

Rta.: a) 0,02521 p/ 40 días; b) $7.260,90;
c) $7.224,69 y 0,082954 p/ 120 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 16
LA POSTA SRL realiza un depósito a plazo fijo de $12.320 en el Banco de la Provincia, retirando al vencimiento $12.557,62. La tasa de interés nominal anual de la operación es 0,22.
A partir de los datos suministrados para la operación, seleccione la alternativa correcta:

I. La tasa de interés de la operación es:
a) 0,0181 b) 0,0183
c) 0,0193 d) Ninguna de las anteriores

II. El plazo de la operación es
a) 32 días b) 1 mes
c) 30 días d) Ninguno de los anteriores

III. Si calculamos la tasa de interés equivalente anual de la tasa de interés de la operación, su valor será:
a) 0,2316 b) 0,22
c) 0,2436 d) Ninguna de las anteriores

Rta.: I. c); II. a); III. c).

EJERCICIO 17
Un particular desea invertir por 60 días $22.300 y solicita su asesoramiento sobre cuál de las siguientes alternativas debe seleccionar:

Inversión 1: Prestar a un tercero, a una tasa de interés para 10 meses de 0,095
Inversión 2: Depositar a Plazo Fijo a una TNA de interés de 0,14 con capitalización
cada 60 días.
Indicar la alternativa más conveniente, justificando su respuesta.

Rta.: conviene la inversión 2.

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 18
La empresa FABRICA SA reúne la siguiente información respecto a las tasas de interés ofrecidas para préstamos a mediano plazo por diferentes entidades financieras con las que opera habitualmente:

Banco del Sur SA	Banco Austral	Banco de la Empresa	BancoMix
45% anual nominal con capitalización 30 días	0,52 equivalente anual	0,48 anual con nominal con capitalización semestral	0,03846 mensual

Calcular la tasa de interés para 30 días ofrecida por cada entidad financiera e indicar la alternativa más conveniente.

Rta: 0,037; 0,03501; 0,036; 0,03792

EJERCICIO 19
Una empresa dedicada a la exportación de productos alimenticios, cobra $120.000 obtenidos de operaciones de exportación. Mientras decide acerca del destino de los mismos, los deposita a Plazo Fijo por 30 días, de la siguiente manera:

I. $45.000 Banco del Norte SA, a una tasa de interés anual equivalente de 0,25.
II. $28.000 Banco del Sur SA, a una tasa de interés anual nominal con capitalización cada 30 días de 0,28.
III. El resto en el Banco de la Ciudad SA, a una tasa de interés de 0,021 mensual.

Indicar:
a) El capital final de cada operación.
b) La tasa de interés para 30 días obtenida.

Rta.: a) I. $45.832,94; II. $ 28.644,38; III. $47.973,34
b) 0,02042 para 30 días.

EJERCICIO 20
Un ahorrista deposita $2.300.- el día 15 de abril en un banco que ofrece una tasa nominal anual de interés de 0,1022, retirando al vencimiento $2.319,32.
Calcular:
a) La tasa de interés de la operación.
b) La unidad de tiempo de la operación.
c) La fecha de vencimiento de la operación.

Rta.: a) 0,0084 para 30 días; b) 30 días;
c) 15 de mayo

EJERCICIO 21
Se depositan a Plazo Fijo $15.200 por 30 días a un 9% nominal anual de interés. Concluido el plazo y, previo retiro del 80% de los intereses obtenidos a ese momento, se renueva la operación 2 veces más: primero por 30 días, a la misma tasa de interés, y después (previo retiro de $3.500), por 60 días y a la tasa de 0,01 para 30 días.
Ud. debe:
a) Representar gráficamente la operación.
b) Calcular el capital final retirado.

Rta.: $12.072,98

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 22

Sebastián Linares obtiene un préstamo en Rapid Credit SA, una entidad financiera que otorga préstamos personales según el sueldo del solicitante.
El importe recibido asciende a $6.200, el plazo a 90 días y el interés al 15% anual nominal con capitalización a 90 días. La entidad financiera le cobrará además: $50 más IVA (21%) en concepto de gastos administrativos y el IVA (21%) sobre los intereses.
Determinar:
a) El importe para cancelar el préstamo.
b) La tasa de interés de la operación.
c) La tasa de costo para el deudor.

Rta: a) $6.538,08
b) 0,037 p/90días; c) 0,05453 p/90 días

EJERCICIO 23

Los siguientes valores corresponden a una operación de depósito a plazo fijo:

Importe Depositado	$23.000
TNA	0,10
Importe Retirado	$23.269,38

La entidad financiera descontó el 5% sobre los intereses en concepto de Impuesto sobre los intereses de operaciones de depósito a Plazo Fijo.
Determinar:
a) La tasa de interés de la operación.
b) El plazo de la operación.
c) La tasa de rendimiento para el depositante.

Rta: a) 0,01233 p/45 días; b) 45 días; c) 0,01171 p/45 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 24

Un comerciante decidió efectuar varios depósitos a plazo fijo, de acuerdo a sus necesidades de caja futuras. De acuerdo a su cronograma, puede inmovilizarse por los siguientes plazos y por los siguientes importes:

I. $4.000 por 35 días
II. $3.800 por 50 días
III. $2.500 por 70 días
IV. $2.400 por 120 días.

Si las tasas fijadas por una institución financiera son las que se comunican a continuación:

Plazo	TNA Pesos *	TNA Dolar **
30-45	7,25 %	0,10 %
46-59	7,35 %	0,20 %
60-89	7,50 %	0,30 %
90-119	7,75 %	0,50 %
120-149	8,00 %	0,75 %
150-179	8,25 %	0,75 %
180-269	8,50 %	1,25 %
270-365	8,75 %	1,25 %
366-539	9,25 %	1,50 %
540-729	9,75 %	1,50 %
mayor a 729	10,25 %	1,50 %

Se pide:
a) El monto de cada uno de los depósitos al finalizar el plazo.
b) Expresar, para cada una de las operaciones, la correspondiente tasa nominal anual de interés, la tasa de interés de la operación y la tasa equivalente anual de interés.

Rta.: a) I. $ 4.027,81; II. $3.838,26; III. $2.535,96; IV. $2.463,12
b) I. 0,0725 nominal anual; 0,006952 p/ 35 días y 0,07492 anual
II. 0,0735 nominal anual; 0,01007 p/ 50 días y 0,07587 anual
III. 0,075 nominal anual; 0,01438 p/ 70 días y 0,07731 anual
IV. 0,08 nominal anual; 0,02630 p/ 120 días y 0,08217 anual

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 25
Una señora colocó $25.000 en una operación de depósito a plazo el día 12/06 con vencimiento el 22/07, y la renovó por igual plazo y tasa de interés, dos períodos más, obteniendo un valor final de $25.910,84
El 10/10 compró un auto y lo pagó con:

- el producido del cierre de su caja de ahorro que tenía en el Banco Nación
- el certificado de depósito a plazo anterior y
- la venta de €500 en el mercado al tipo de cambio €1= $5,13.

Determine:

a) La tasa de interés nominal anual con capitalización cada 40 días pactada en la operación de depósito a plazo y la tasa equivalente anual de interés.

b) El producido de la cuenta de caja de ahorro, sabiendo que al 01/10 tenía un saldo de $6.000 y retiró $1.200. Faltan devengar intereses al 0,12% nominal anual, por el período entre el 01/10 y el 10/10 (fecha de retiro del saldo y sus intereses), y debitar gastos por $6. (Utilice el procedimiento de cálculo de intereses en caja de ahorro).

c) El valor efectivamente pagado en la compra del auto.

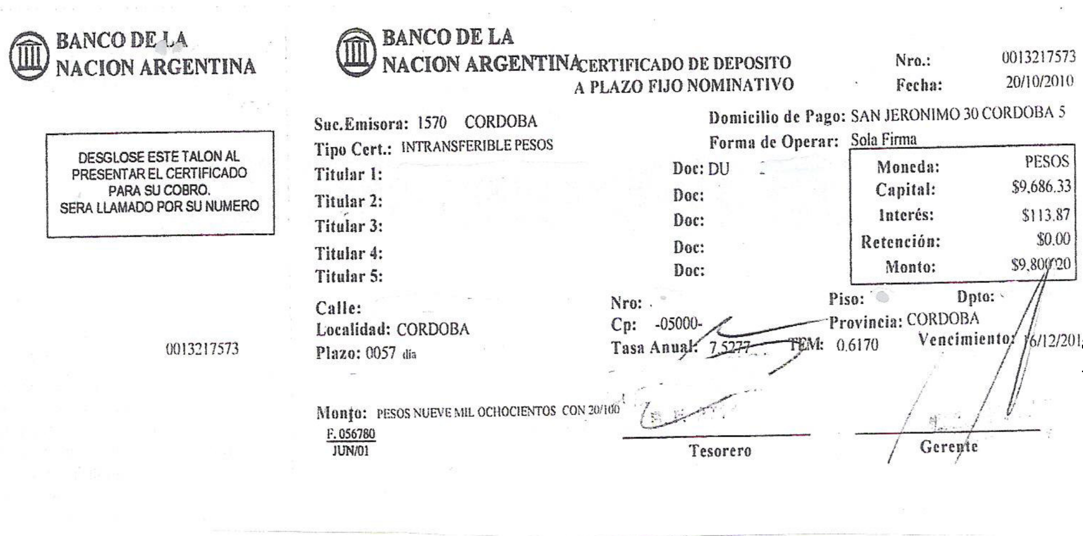
d) Si en oportunidad de retirar su vehículo se entera que faltaban considerar los gastos de patentamiento y otros conceptos vinculados, los que representan un 7,5% adicional, y la concesionaria le financia dicha suma mediante un préstamo a 30 días a una tasa de 0,21 anual. ¿Cuánto deberá abonar?

Rta.: a) 0,1095 nominal anual y 0,115 anual
b) $4.794,14, c) $ 33.269,98; d) $ 2.534, 65

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 26

El 20/10/2010, el señor Rodríguez realizó un depósito a plazo fijo, y le entregaron el siguiente certificado:


BANCO DE LA NACION ARGENTINA

DESGLOSE ESTE TALON AL PRESENTAR EL CERTIFICADO PARA SU COBRO. SERA LLAMADO POR SU NUMERO

0013217573

BANCO DE LA NACION ARGENTINA CERTIFICADO DE DEPOSITO A PLAZO FIJO NOMINATIVO

Nro.: 0013217573
Fecha: 20/10/2010

Suc.Emisora: 1570 CORDOBA
Tipo Cert.: INTRANSFERIBLE PESOS
Domicilio de Pago: SAN JERONIMO 30 CORDOBA 5
Forma de Operar: Sola Firma

Titular 1: Doc: DU
Titular 2: Doc:
Titular 3: Doc:
Titular 4: Doc:
Titular 5: Doc:

Moneda: PESOS
Capital: $9.686.33
Interés: $113.87
Retención: $0.00
Monto: $9.800.20

Calle: Nro: Piso: Dpto:
Localidad: CORDOBA Cp: -05000- Provincia: CORDOBA
Plazo: 0057 dia Tasa Anual: 7.5277 TEM: 0.6170 Vencimiento: 16/12/2010

Monto: PESOS NUEVE MIL OCHOCIENTOS CON 20/100
F. 056780
JUN/01
Tesorero Gerente

En base a los datos detallados:

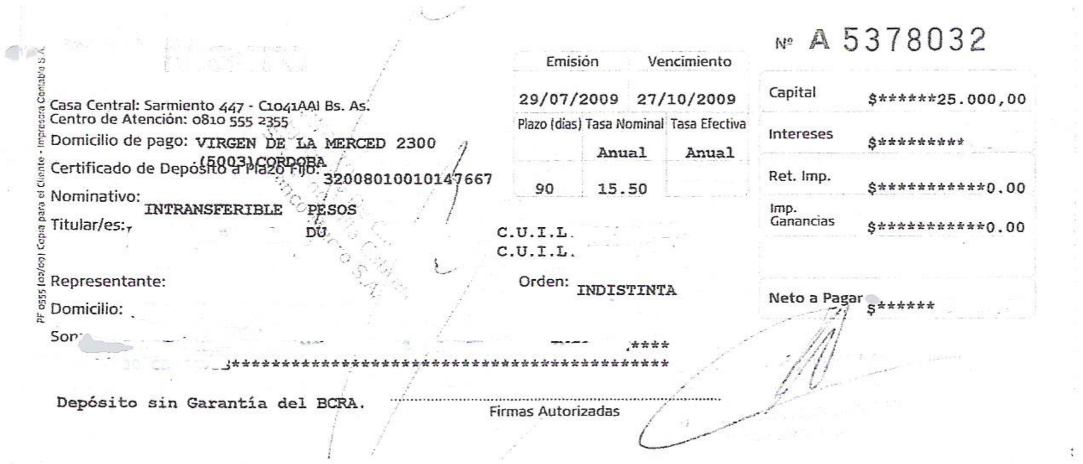
a) Identifique el capital depositado, el monto obtenido, la tasa de interés nominal anual, el plazo de la operación y la unidad de tiempo.
b) Calcule la tasa de interés de la operación.
c) Obtenga la tasa de interés equivalente para 30 días (TEM), y compare con la indicada en el certificado.
d) Indique el procedimiento para el cálculo de los intereses.

Rta: a) $9.686,33; $9800,20; 0,07527 nominal anual; 57 días.
b) 0,0117556 p/57 días; c) 0,00617 p/30 días.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 27

El siguiente es el certificado de depósito a plazo fijo realizado por la Sra. López el día 29/07/2009:



Nº A 5378032

Casa Central: Sarmiento 447 - C1041AAI Bs. As.
Centro de Atención: 0810 555 2355
Domicilio de pago: VIRGEN DE LA MERCED 2300 (5003) CORDOBA
Certificado de Depósito a Plazo Fijo: 32008010010147667
Nominativo: INTRANSFERIBLE PESOS
Titular/es: DU C.U.I.L. C.U.I.L.
Representante:
Domicilio:
Orden: INDISTINTA

Emisión	Vencimiento	
29/07/2009	27/10/2009	
Plazo (días)	Tasa Nominal Anual	Tasa Efectiva Anual
90	15.50	

Capital	$******25.000,00
Intereses	$**********
Ret. Imp.	$***********0.00
Imp. Ganancias	$***********0.00
Neto a Pagar	$******

Depósito sin Garantía del BCRA.

Firmas Autorizadas

A partir de la información obtenida:

a) Identifique el capital inicial, la tasa nominal anual de interés y la unidad de tiempo.
b) Calcule la tasa de interés de la operación y la tasa de interés equivalente anual (T.E.A.)
c) Obtenga el capital final y los intereses ganados.
d) Complete el certificado de depósito.

Rta: a) $25.000; 0,1550 nominal anual; 90 días
b) 0,0382192 p/90 días; 0,1643 anual; c) $25955,48; $955,48

DIALOGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios trabajados con **simuladores**.

EJERCICIO 28

Algunos bancos y consultoras financieras poseen en sus páginas web distintos simuladores, entre ellos:

a) De plazo fijo
b) De tasas

A partir de los ejemplos de los videos, ingrese a las páginas mencionadas y realice una simulación de un plazo fijo, verificando luego los datos obtenidos.

BIBLIOTECA

Aquí podrán consultar otros recursos que los docentes pondrán a disposición.

INTEGRANDO IDEAS

Hemos continuado en esta unidad con el estudio de operaciones financieras, aprendiendo herramientas fundamentales para comparar distintas alternativas de inversión y financiamiento y determinar el rendimiento financiero cuando se presentan tasas proporcionales o las tasas de interés son variables.
Aprendimos a identificar operaciones equivalentes y abordar el estudio del campo financiero desde el campo continuo, definiendo la tasa instantánea de interés.
En la unidad 3 continuaremos con nuevos desafíos e incorporando operaciones y variables a nuestro análisis.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:

CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Primera Parte. Córdoba Fac. de Cs. Económicas U.N.C. (2001).

U3

BLOQUE 1

UNIDAD 3
OPERACIÓN DE DESCUENTO

UNIDAD 3:
Operación de descuento

CONTENIDOS

Operación de descuento de documento. Interés y Descuento. Tasa de descuento. Valor actual. Tasas de descuento equivalentes. Tasa de descuento proporcional (Tasa nominal de descuento). Relación entre distintas tasas.

OBJETIVOS

- Identificar la operación de descuento y sus componentes
- Reconocer y calcular la tasa de descuento
- Diferenciar entre tasa equivalente y proporcional de descuento
- Relacionar tasa de interés y tasa de descuento
- Integrar en el análisis la incidencia de gastos y otros conceptos vinculados a las operaciones financieras de descuento.

PRESENTACIÓN

AULA VIRTUAL
SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **presentación de la Unidad 3**. Allí los profesores proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de los temas abordados.

RECURSOS A UTILIZAR
EN LA UNIDAD 1

- Material Teórico – Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios

En las dos unidades anteriores analizamos detenidamente operaciones financieras de capitalización y actualización definiendo sus distintos componentes: plazo, unidad de tiempo, capitales inicial y final. Todas estas operaciones se realizaron considerando una determinada tasa de interés. En esta unidad analizaremos un tipo particular de operación de actualización: las operaciones de descuento. Éstas se caracterizan por obtener el valor actual de un documento comercial que vence en el futuro pero que quiere efectivizarse antes de su vencimiento utilizándose, generalmente, una tasa de descuento.

También estudiaremos el impacto que conceptos no financieros como gastos e impuestos tienen sobre el rendimiento o el costo de las operaciones financieras analizadas en estas tres primeras unidades.

Para comenzar, observemos la siguiente imagen donde se simula una operación de descuento (desde el punto de vista de quien busca financiamiento a través de esta operación) realizada a través de un simulador disponible en el sitio puentenet.com:

Cheques de pago diferido

Seleccione INVERSIÓN para calcular el rendimiento de una inversión en cheques de pago diferido o seleccione FINANCIAMIENTO para calcular el monto a pagar por financiarse con cheques de pago diferido.

FINANCIAMIENTO | INVERSIÓN

Fecha de operación	03/10/2013
Fecha de vencimiento del cheque	02/11/2013
Monto del cheque	$ 50000
Descuento Operado	20 %
Percepción IVA	21 %
Aval SGR(mínimo $25)	3,50 %
Arancel Soc. de Bolsa(mínimo $25)	1 %
IVA	21 %

CALCULAR

Resultados

Cantidad de días al vencimiento	30
Monto final que abona el inversor	$ 48.770,65
Monto final(sin IVA)	$ 48.949,09
Tasa anual final	30,67 %
Descuento final(sin IVA)	26,12 %

DETALLES

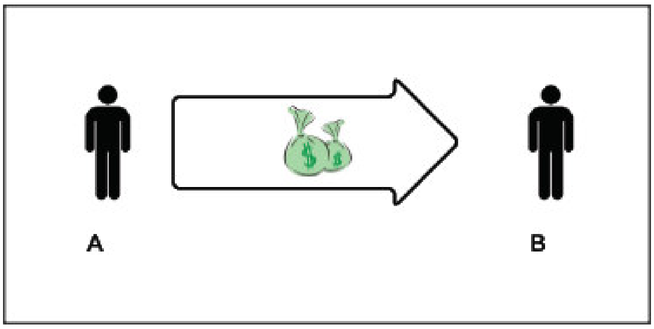
Descuento Operado	20,00 %	$ 808,63
Percepción IVA	21,00 %	$ 169,81
Aval SGR(mínimo $25)	3,50 %	$ 143,84
Arancel Soc. de Bolsa(mínimo $25)	1,00 %	$ 41,10
Costo Caja de Valores(variable)	0,03 %	$ 15,00
IVA	21,00 %	$ 8,63
Depósito de Cheques de pago diferido en Caja de Valores	$ 20 +0,03 %	$ 42,35
Costo de financiamiento neto	$ 1.229,35	

En la imagen anterior observamos información que corresponde a una operación de descuento: fecha, monto del cheque, descuento, costos, etc. A lo largo de esta unidad aprenderemos a identificarlos y operar con ellos.

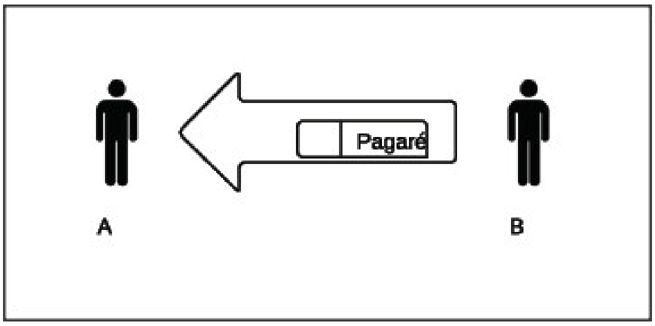
Descuento de documentos de terceros

En primer lugar analizaremos en qué consiste una operación de descuento. Sigamos con atención la siguiente secuencia:

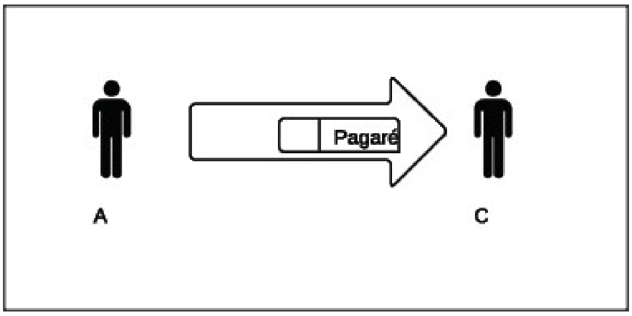
A le entrega un capital a **B**. Puede tratarse de un préstamo, venta de mercadería, etc.



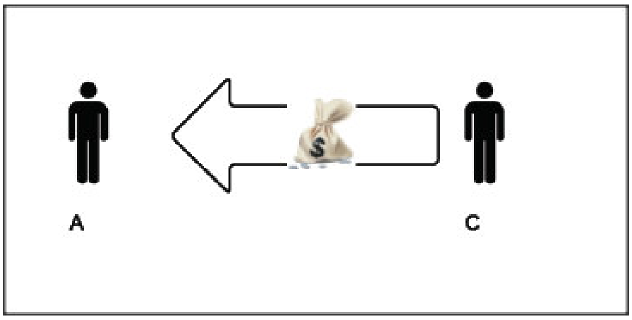
B, le entrega un documento como promesa de pago, a concretarse en un momento posterior del tiempo. Ese importe incluye la deuda original más los intereses a generarse durante el plazo otorgado por el acreedor. A este importe lo llamaremos N. Puede tratarse de un pagaré, de un cheque de pago diferido, de un cupón de tarjeta de crédito, etc.



A, el poseedor del documento, necesita contar con el dinero antes de la fecha de vencimiento del documento. Recurre a **C**, pudiendo ser esta una entidad financiera, para solicitarle dinero a cambio de cederle el derecho a cobrar el documento.



C acepta pero no le entrega N, sino una suma inferior, que llamaremos E, debido a que deberá esperar que transcurra el tiempo faltante para hacer efectivo el cobro. Podemos indicar que se trata del precio que **C** cobra a **A**, por entregarle una suma de dinero (E), a cambio de una promesa de pago en el futuro (N). A esta operación, la llamamos Descuento.



Al vencimiento, **C**, cobrará el importe del documento, es decir N.

En la actualidad son varios los documentos que pueden ser objeto de operaciones de descuento: pagarés, cheques, cupones de tarjeta de crédito, certificados de obra, facturas de crédito, certificados de plazos fijos, entre otros.

En el siguiente gráfico se representa la operación de descuento, considerando el tiempo y los importes involucrados en la operación: N, E y D que se obtiene de la diferencia entre el Valor Nominal y el Valor Efectivo.

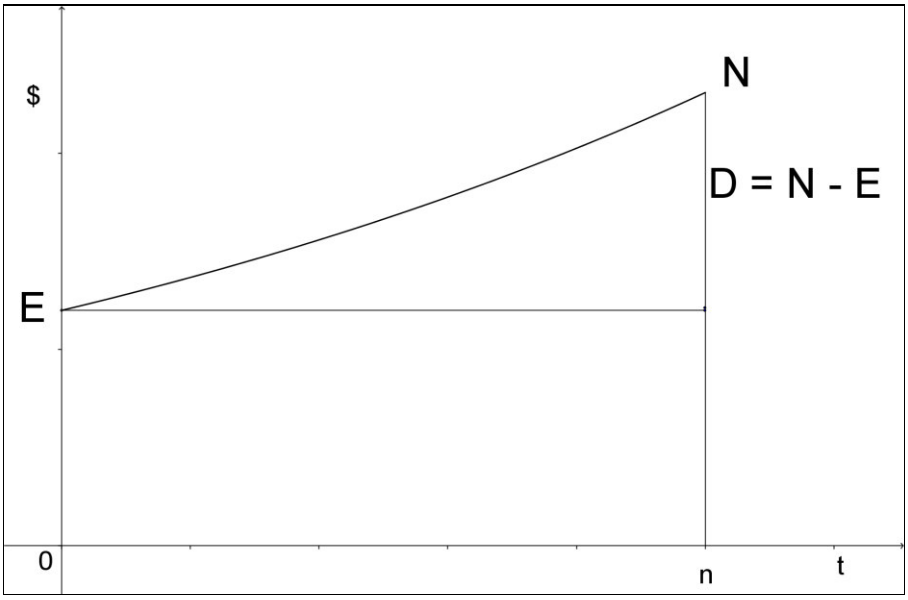


Gráfico 2

N = Valor Nominal del documento.
E = Valor Efectivo (o Valor Actual) del documento.
D = Descuento.
n = número de unidades de tiempo de la operación.

Desde el punto de vista de **A**, que es la parte que posee el/los documento/s por un valor N y que vencen en n unidades de tiempo, estará cambiando ese importe por E que recibirá en el momento de realizar la operación de descuento. La diferencia entre ellos es lo que denominamos Descuento (D):

$$D = N - E$$

Desde el punto de vista de **C**, a cambio de entregar una suma de dinero E en el momento *0,* recibirá N en el futuro, que incluye intereses, siendo el valor de estos la diferencia entre N y E.

Por otra parte, también podríamos afirmar que **C** entrega una suma de dinero $f(0)$ en el momento *0* a **A,** y que recibirá un capital mayor, $f(n)$, al final del plazo al cobrar el documento:

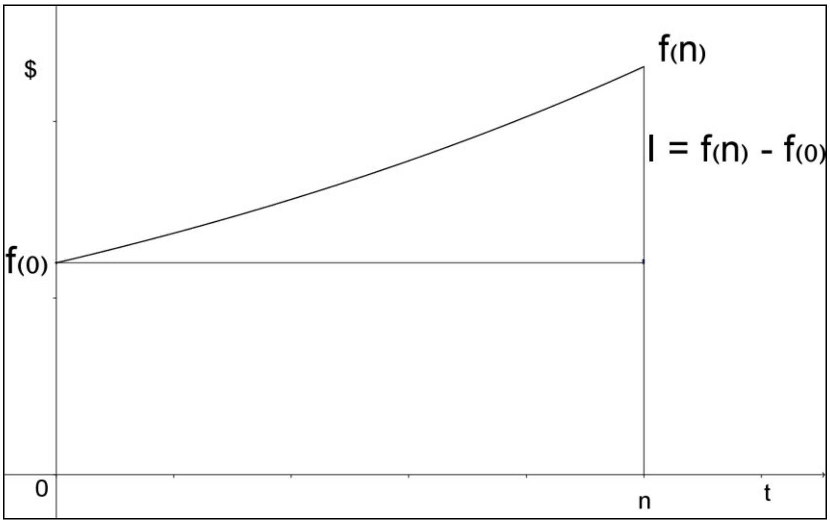


Gráfico 3

A partir de los Gráficos 2 y 3, concluimos que:

$$f(0) = E$$
$$f(n) = N$$

Conocemos que:

$$I = f(n) - f(0)$$
$$D = N - E$$

Por lo tanto, es válido afirmar que:

$$D = I$$

El siguiente gráfico, reúne lo observado en los dos anteriores:

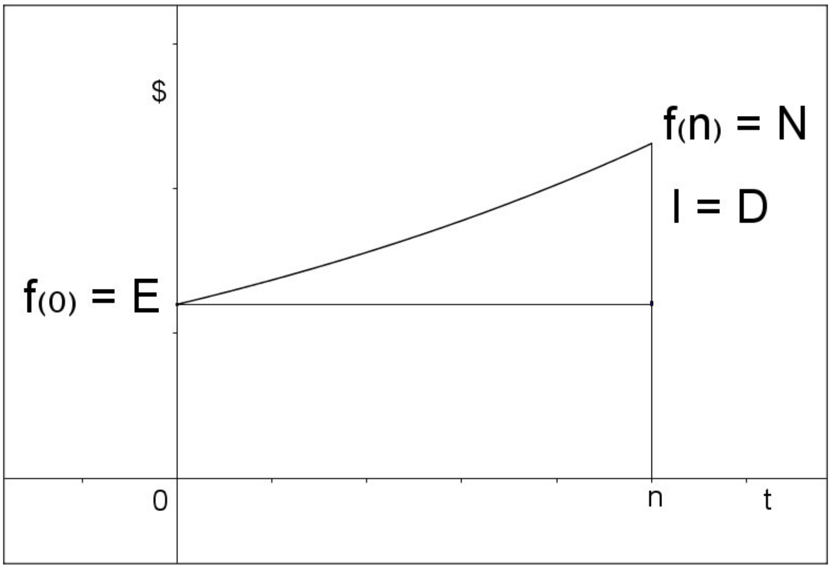


Gráfico 4

D*escuento* e *interés* tienen el mismo valor, y están ubicados en mismo momento (*n*). Puede parecernos que el interés está ubicado al final y el descuento al inicio de la operación, pero no es así, ambos están ubicados al final tal como lo muestra el Gráfico 4. Quien entrega E en el momento 0, recién logra (se le hará efectivo) el interés (descuento) al final del plazo. Para quien entrega los cheques hoy, recibiendo E, resigna la posibilidad de obtener N que percibiría si esperara para cobrarlo hasta el final de plazo. El descuento representa el interés que se deja de ganar.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1
El poseedor de un cheque diferido por un importe de $125.0000 que vence en un plazo de 180 días, decide descontarlo en el día de la fecha en una entidad financiera, que le entrega $100.000.

Por lo tanto:

$$N = f(n) = 125.000$$

$$E = f(0) = 100.000$$

$$Plazo = Unidad\ de\ Tiempo = 180\ dias$$

Por lo tanto, el descuento correspondiente a esta operación es:

$$D = N - E = f(n) - f(0) = 125.000 - 100.000 = 25.000$$

Tasa de Descuento

Al inicio de la unidad indicamos que en las operaciones de descuento, puede enunciarse y aplicarse la tasa de descuento.
La tasa de descuento se simboliza con d, y se define como:

"El descuento de una unidad de capital final en una unidad de tiempo."

Esta tasa se aplica sobre N, el valor nominal del documento, para obtener el descuento y el valor efectivo:

$$D = N.d$$

Por lo tanto, podemos expresar, para $n = 1$, la tasa de descuento como:

$$d = \frac{D}{N}$$

Con los datos del Ejemplo 3.1, la tasa de descuento es:

$$d = \frac{D}{N} = \frac{25.000}{125.000} = 0,20\ p/180d.$$

Este valor nos está indicando que por cada peso de valor nominal (o capital final) se descuentan 20 centavos o $0,20 por unidad de tiempo.

Determinación del Valor Efectivo

Frente a una operación de descuento, si conocemos el valor nominal, que es el importe que el documento a descontar tiene escrito o impreso, el plazo y la tasa de descuento a aplicar, podemos determinar el valor del descuento. Para $n = 1$:

$$D = N.d \qquad (1)$$

Por otra parte, si:

$$D = N - E$$

Despejando apropiadamente, el valor efectivo es:

$$E = N - D$$

Remplazamos a D por (1):

$$E = N - N.d$$

Extraemos N como factor común:

$$E = N(1-d)$$

Esta última expresión nos permite obtener el valor efectivo para una unidad de tiempo.
Para n unidades de tiempo:

$$\boxed{E = N(1-d)^n}$$

Como podemos utilizar indistintamente N y $f(n)$, y E y $f(0)$, es posible expresar la fórmula anterior como:

$$f(0) = f(n)(1-d)^n$$

Aplicaremos la fórmula de cálculo de E en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2:
Para una operación de descuento con los siguientes datos:

$$N = f(n) = 50.000$$
$$d = 0{,}035\ p/30d.$$
$$Plazo = 120 \text{ días}$$
$$Unidad\ de\ tiempo = 30 \text{ días}$$
$$n = \frac{120\ d}{30\ d} = 4$$

Aplicamos la fórmula de cálculo del valor efectivo:

$$E = 50.000(1-0{,}035)^4$$
$$E = 43.359$$

Siendo el descuento:

$$D = N - E$$
$$D = 50.000 - 43.359 = 6.641$$

El siguiente gráfico refleja los distintos elementos de esta operación de descuento:

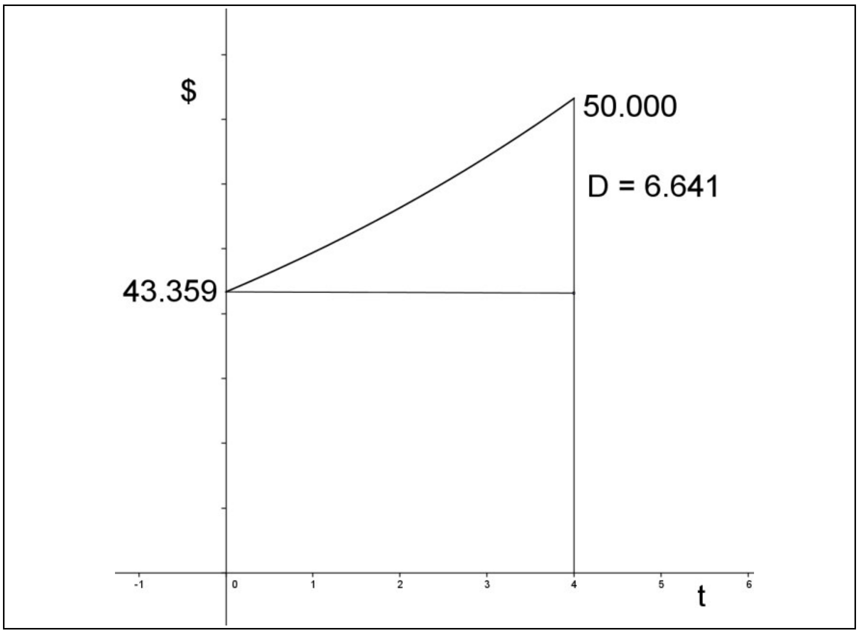


Gráfico 5

El resto de los elementos que componen la fórmula del valor efectivo, se obtienen de despejar convenientemente:

$$E = N(1-d)^n$$

El valor nominal:

$$N = \frac{E}{(1-d)^n} = E(1-d)^{-n}$$

La tasa de descuento:

$$d = 1 - \left(\frac{E}{N}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Finalmente, n :

$$n = \frac{\log E - \log N}{\log(1-d)}$$

Ahora, les proponemos resolver los siguientes ejercicios donde deberán aplicar algunas de las fórmulas obtenidas:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 1
Calcular el valor efectivo de un documento de \$ 4.000 aplicándose una tasa de descuento de 0,025 para 30 días, 60 días antes de su vencimiento.

Rta.: \$ 3.802,50

EJERCICIO 2
¿Qué tasa de descuento se aplicó al descuento de un documento de \$ 7.900, 150 días antes de su vencimiento, sabiendo que el descuento ascendió a \$540?

Rta.: 0,06835 p/ 150 días.

Relaciones entre la tasa de descuento y la tasa de interés

Cuando en la unidad 1 definimos la tasa de interés, indicamos que *es el interés de una unidad de capital inicial en una unidad de tiempo* y que podemos calcularla como:

$$i = \frac{I}{f(0)}$$

Donde I representa el interés de la unidad de tiempo.

Remplazamos a I :

$$i = \frac{f(1) - f(0)}{f(0)}$$

Como:

$$f(1) = f(0)(1+i)$$

Remplazamos $f(1)$ y simplificamos:

$$i = \frac{f(0)(1+i) - f(0)}{f(0)} = \frac{\cancel{f(0)}(1+i) - \cancel{f(0)}}{\cancel{f(0)}} = \frac{1+i-1}{1} = i$$

También definimos que la tasa de descuento es *el descuento de una unidad de capital final en una unidad de tiempo*, cuya fórmula de cálculo es:

$$d = \frac{D}{N}$$

Remplazamos D:

$$d = \frac{D}{N} = \frac{N-E}{N}$$

Por otra parte, indicamos que:

$$E = f(0)$$
$$N = f(1)$$

Entonces:

$$d = \frac{N-E}{N} = \frac{f(1) - f(0)}{f(1)}$$

Conocemos que:

$$f(0) = \frac{f(1)}{(1+i)} = f(1)(1+i)^{-1}$$

Remplazamos y simplificamos:

$$d = \frac{f(1) - f(0)}{f(1)} = \frac{f(1) - f(1)(1+i)^{-1}}{f(1)} = \frac{\cancel{f(1)} - \cancel{f(1)}(1+i)^{-1}}{\cancel{f(1)}} = \frac{1-(1+i)^{-1}}{1} = 1 - \frac{1}{(1+i)}$$

$$d = 1 - \frac{1}{(1+i)} = 1 - v$$

Recordemos que $v = \frac{1}{(1+i)}$ y es el valor actual de un peso en una unidad de tiempo, por lo tanto, es un valor menor que 1.

La tasa de descuento nos queda expresada como la diferencia entre \$1 de valor final menos el valor actual de \$1 (v).

Observemos la representación gráfica de la tasa de descuento:

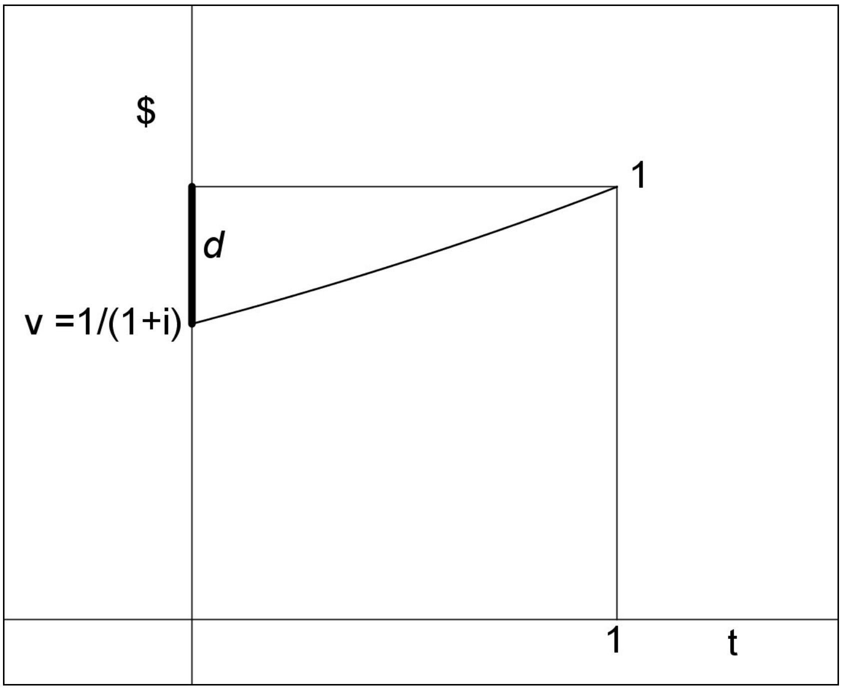


Gráfico 6

A partir de:

$$d = 1 - \frac{1}{(1+i)}$$

Resolvemos:

$$d = 1 - \frac{1}{(1+i)} = \frac{(1+i)-1}{(1+i)} = \frac{i}{1+i}$$

Y hemos encontrado una expresión que nos permite calcular la tasa de descuento, a partir de la tasa de interés.

$$\boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

Buscaremos ahora una expresión que nos permita encontrar la tasa de interés, a partir de la tasa de descuento:

$$d = \frac{i}{1+i}$$

Despejamos:

$$d(1+i) = i$$

Aplicamos propiedad distributiva:

$$d + di = i$$

$$d = i - di$$

En el segundo miembro extraemos factor común i:

$$d = i\left(1 - d\right)$$

Para finalizar, despejamos i:

$$\boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

Apliquemos estas fórmulas en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3:
Se descuenta un documento de valor nominal \$12.000, 180 días antes de su vencimiento, recibiéndose \$10.000.

$$N = f\left(1\right) = 12.000$$
$$E = f\left(0\right) = 10.000$$
$$Plazo = unidad\ de\ tiempo = 180 \text{ días}$$

Con estos datos, calculamos:

$$D = I = 12.000 - 10.000 = 2.000$$

$$d = \frac{2.000}{12.000} = 0{,}166667\ p/180\,d.$$

$$i = \frac{2.000}{10.000} = 0{,}2\ p/180\,d.$$

Es posible verificar el cálculo de d e i:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0{,}20}{1+0{,}20} = 0{,}166667\ p/180d.$$

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0{,}166667}{1-0{,}166667} = 0{,}20\ p/180d.$$

Notemos que para una operación determinada, la tasa de interés es mayor a la tasa de descuento. ¿Cómo explicar esta diferencia?

Observando el Ejemplo 3.3, vemos que:

$$N = f(1) = 12.000$$
$$E = f(0) = 10.000$$
$$D = I = 2.000$$
$$D = Nd = f(1)i = 12.000 \,.\, 0{,}166667$$
$$I = f(0)i = Ei = 10.000 \,.\, 0{,}20$$

Por lo tanto, como:
$E < N$

Entonces:
$i > d$

Al analizar la fórmula de cálculo de d :

$$d = \frac{i}{1+i}$$

Despejando:

$$d(1+i) = i$$

Al capitalizar la tasa de descuento por una unidad de tiempo, obtenemos la tasa de interés. Por lo tanto, se afirma que *la tasa de interés es el monto de la tasa de descuento en una unidad de tiempo*. Gráficamente:

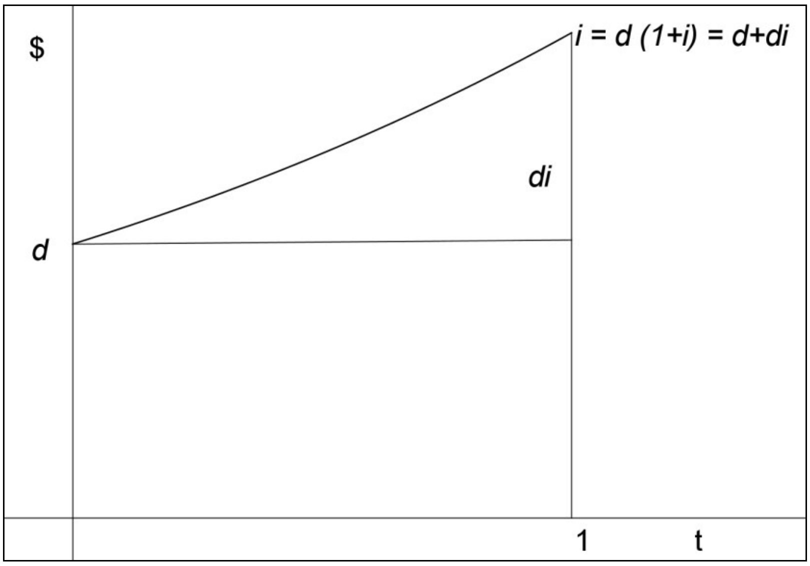


Gráfico 7

Si la tasa de interés es el monto de la tasa de descuento, entonces $i > d$.

Además:

$$d = i(1-d)$$

Como:

$$d = 1 - v$$

Entonces:

$$v = 1 - d$$

Finalmente:

$$d = iv$$

A partir de esta última igualdad, podemos afirmar que la tasa de descuento es el valor actual, en una unidad de tiempo, de la tasa de interés. El Gráfico 8 refleja esta afirmación:

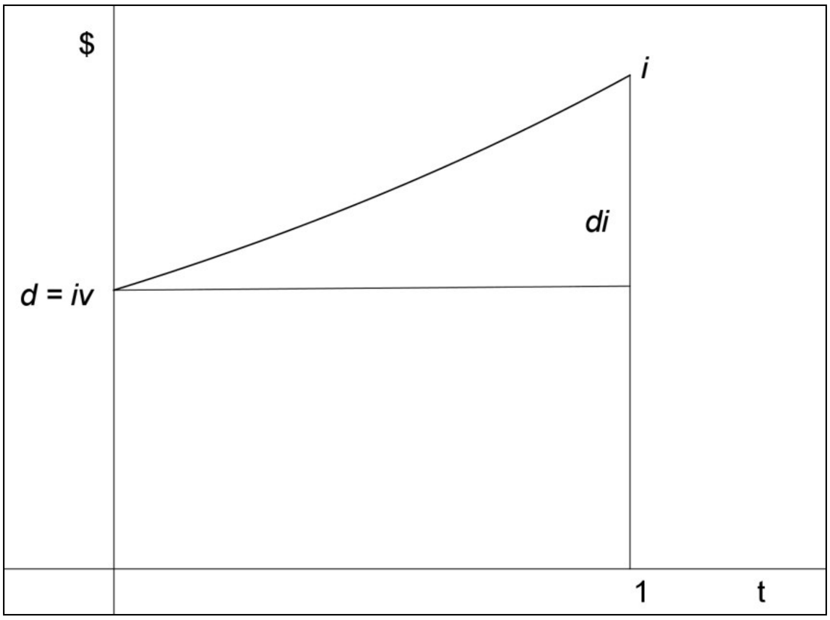


Gráfico 8

Para continuar con el análisis gráfico de estas relaciones entre tasa de interés y descuento, observemos el Gráfico 9:

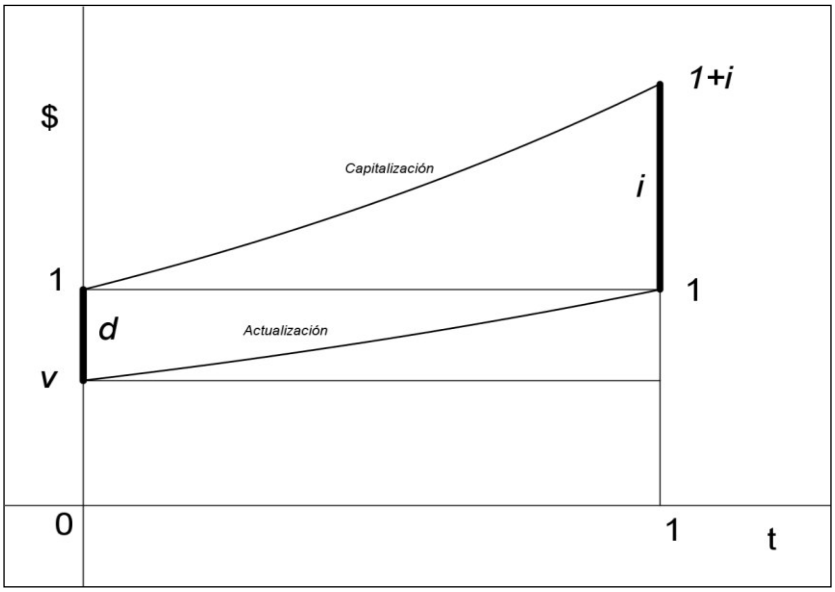


Gráfico 9

En el eje de las ordenadas del Gráfico 9 nos encontramos con el capital inicial de $1 que capitalizado por una unidad de tiempo nos permite obtener el capital final $(1+i)$. La diferencia entre el capital final y el inicial es la tasa de interés.
Al final de la unidad de tiempo observamos $1, que actualizado por una unidad de tiempo, nos permite obtener v. La diferencia entre el capital final y el inicial es la tasa de descuento. En resumen:

Capital Inicial	Capital Final	Diferencia
1	$(1+i)$	$(1+i)-1=i$
v	1	$1-v=d$

Por último, al considerar el segmento que corresponde a la tasa de descuento que aparece remarcado sobre el eje de las ordenadas en el Gráfico 9, y capitalizando el valor que representa, nos permite obtener la tasa de interés, que se refleja en el segmento destacado al final de la unidad de tiempo, verificando que:

$$d(1+i)=i$$

Es útil conocer estas relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento para la toma de decisiones cuando se presentan distintas alternativas entre operaciones de descuento e interés.
Cuando se consideran como alternativas de financiación operaciones de descuento, necesitaremos determinar el costo financiero por cada peso recibido en el momento cero, por lo tanto, deberemos calcular la tasa de interés de la operación para comparar y elegir la propuesta más conveniente.

También es importante estar atento a la manera en que se enuncia la tasa en una operación de descuento, puede que en algunos casos se informe la tasa de descuento y en otros, la tasa de interés.

Al momento de utilizar la calculadora financiera, debemos considerar que está diseñada para trabajar con la tasa de interés. Si necesitamos calcular alguno de los elementos de la fórmula:

$$E=N(1-d)^n$$

deberemos aplicar las fórmulas de los distintos componentes, o calcular la tasa de interés a partir de la tasa de descuento y determinar cualquiera de los elementos: E,N,d,n, con los procedimientos de la calculadora que aprendimos en la Unidad 1 para $f(0), f(n), i, n$.

A continuación, les proponemos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 3
Se descontó un cheque diferido 28 días antes de su vencimiento, enunciándose una tasa de descuento nominal anual de 0,60 con capitalización para el plazo de la operación, recibiendo en efectivo $2.350.
Determinar:
a) El valor nominal del cheque diferido.
b) El descuento de la operación.
c) La tasa de interés equivalente anual.

Rta.: a) $ 2.463,38; b) $113,38;
c) 0,84826 anual

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 4
Un comerciante recibe el día 2 de marzo un cheque diferido de valor nominal $ 7.500 como parte de pago, con vencimiento el 18 de mayo, y por necesidades de efectivo el día 3 de mayo lo negocia. Determinar:
a) ¿Cuál es el valor efectivo resultante y el descuento practicado si la tasa de descuento aplicada fue de 0,03 mensual?
b) ¿Qué tasa de interés mensual resultó?

Rta.: a) $ 7.388,18 y $111,82; b) 0,03093 mensual

Operaciones de descuento equivalentes

En la Unidad 2 analizamos el concepto de operaciones financieras equivalentes. También es posible aplicarlo a las operaciones de descuento:

"Dos operaciones financieras de descuento son equivalentes, cuando en un mismo plazo y con tasas de descuento diferentes, referidas a distintas unidades de tiempo, se obtiene el mismo valor efectivo o igual descuento, por unidad de capital final."

Las condiciones para que dos operaciones sean equivalentes son entonces:
- Igual plazo.
- Tasas de descuento diferentes, para unidades de tiempo distintas.
- Igual descuento por cada peso final.

Cuando dos operaciones son equivalentes, sus tasas son equivalentes

Ejemplo 3.4:
Para descontar un cheque diferido, que vence dentro de 180 días, se cuentan con dos alternativas:

Alternativa 1	**Alternativa 2**
d = 0,01 p/30 días	d = 0,05852 p/180 días

Determinemos el valor efectivo a recibir por cada peso de valor nominal, en cada una de las alternativas:

Alternativa 1

$$E = N\left(1-d\right)^{n}$$

$$n = \frac{Plazo}{unidad\ de\ tiempo} = \frac{180\ d.}{30\ d.} = 6$$

$$E = \left(1-0,01\right)^{6}$$

$$E = 0,94148$$

$$D = 0,05852$$

Alternativa 2

$$E = N\left(1-d\right)^{n}$$

$$n = \frac{Plazo}{unidad\ de\ tiempo} = \frac{180\ d.}{180\ d.} = 1$$

$$E = \left(1-0,05852\right)^{1}$$

$$E = 0,94148$$

$$D = 0,05852$$

En ambas operaciones obtenemos igual descuento por unidad de capital final (0,05852) o el mismo valor efectivo (0,94148) en el mismo plazo (180 días) y con tasas de descuento referidas a distintas unidades de tiempo (30 y 180 días), por lo tanto, son operaciones equivalentes.
Se puede generalizar indicando que, dado un mismo plazo, y dos operaciones A y B:

Operación A
d_a = tasa de descuento de la alternativa A
Unidad de tiempo = a

Operación B
d_b = tasa de descuento de la alternativa B
Unidad de tiempo = b
Y, en donde:

$$d_a \neq d_b$$
$$a \neq b$$

Ambas operaciones serán equivalentes si:

$$\left(1-d_a\right)^{\frac{Plazo}{a}} = \left(1-d_b\right)^{\frac{Plazo}{b}}$$

Para el Ejemplo 3.4
$\left(1-0,05852\right)^1 = \left(1-0,01\right)^6$
$1-0,05852 = \left(1-0,01\right)^6$

Restamos 1 en ambos miembros:
$-0,05852 = \left(1-0,01\right)^6 - 1$

Multiplicamos por (-1) ambos miembros:
$0,05852 = -\left(1-0,01\right)^6 + 1$
$0,05852 = 1 - \left(1-0,01\right)^6$

Se observa que la tasa de descuento para 180 días ha quedado expresada en función de la tasa de descuento para 30 días. Y puede afirmarse que la tasa de descuento para 180 días es equivalente a la tasa de descuento para 30 días.

Podemos generalizar, indicando que una tasa de descuento equivalente, que simbolizaremos con $d_{(m)}$, se puede obtener con la siguiente expresión:

$$\boxed{d_{(m)} = 1 - \left(1-d\right)^m}$$

donde:

$d_{(m)}$ = representa una tasa equivalente de descuento.
m = es la cantidad de veces que la unidad de tiempo de la tasa de descuento que tomamos como dato (en este caso, la tasa de descuento para 30 días) está contenida en la unidad de tiempo de la tasa de descuento que buscamos (en este caso la tasa de descuento para 180 días).

En conclusión:

$$m = \frac{unidad\ de\ tiempo\ de\ d_{(m)}}{unidad\ de\ tiempo\ de\ d}$$

Dada una tasa de descuento, se pueden calcular la tasa de descuento equivalente para cualquier unidad de tiempo.

Tasa de descuento nominal

La tasa de descuento nominal anual es la tasa proporcional que se obtiene de multiplicar la tasa de descuento de la operación por la cantidad de veces que la unidad de tiempo de la tasa de descuento está contenida en el año:

$$\boxed{d^{(m)} = d.m}$$

Es importante aclarar que no es una tasa de descuento, ya que no responde a la definición de la misma (descuento de una unidad de capital final en una unidad de tiempo)

Podemos definirla como:

El descuento de una unidad de capital final en un período de tiempo (generalmente un año) en donde el descuento en cada una de las m partes en que se divide el año, es igual al descuento del último m-ésimo.

La simbolizaremos con $d^{(m)}$, y cuando sea enunciada en una operación financiera, deberemos calcular la tasa de descuento para la unidad de tiempo correspondiente:

$$\boxed{d = \frac{d^{(m)}}{m}}$$

Donde:

$$m = \frac{Plazo\ \ de\ \ la\ \ d^{(m)}\ \ \left(generalmente\ \ es\ \ el\ \ año\right)}{unidad\ de\ tiempo\ \ de\ \ d}$$

Si se conoce el valor de la tasa de descuento, la tasa de descuento nominal anual correspondiente no es igual que su tasa de descuento equivalente anual.

Una tasa de descuento equivalente se obtiene:

$$d_{(m)} = 1 - \left(1 - d\right)^{m}$$

Para la cual, el decrecimiento es menos que proporcional.

La tasa nominal anual de descuento se determina:

$$d^{(m)} = d.m$$

e implica que el decrecimiento es proporcional. En cada m-ésimo es el mismo. Es por esta razón que calculamos una sola tasa de descuento que es para el último m-ésimo, que es el único válido financieramente, ya que es sobre una unidad de capital final.

Ejemplo 3.5
A partir de la tasa de descuento de 0,045 para 60 días, la tasa de descuento equivalente anual es:

$$d_{(m)} = 1 - (1 - 0,045)^{\frac{365}{60}} = 0,24429\ anual$$

La tasa nominal anual de descuento

$$d^{(m)} = 0,045\frac{365}{60} = 0,27375\ anual$$

Se observa que:

$$d^{(m)} > d_{(m)}$$

Tal como lo refleja el Gráfico 10:

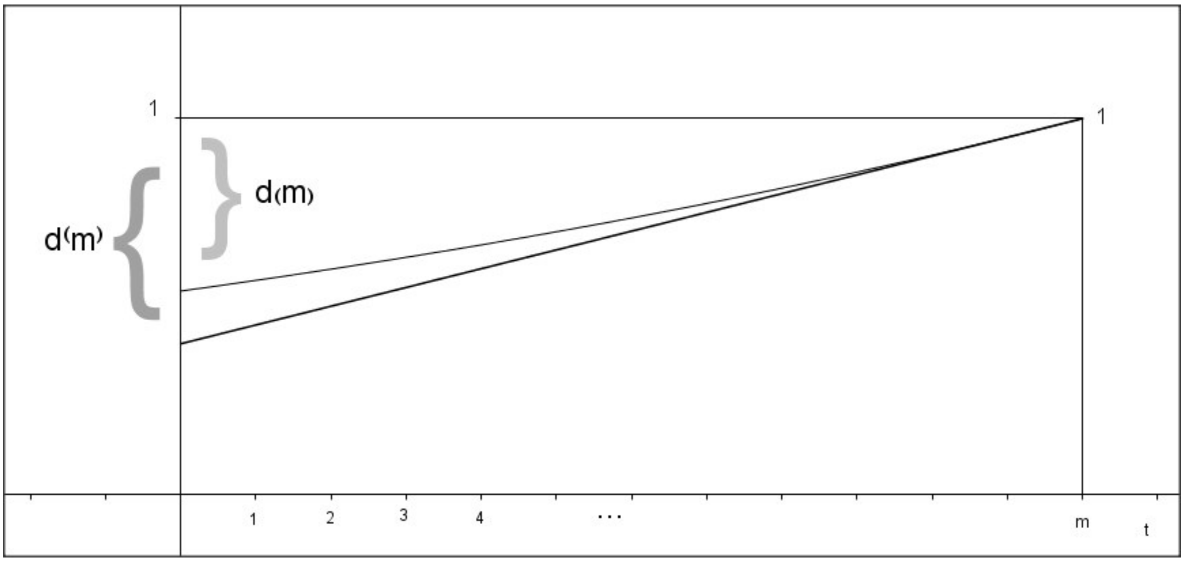


Gráfico 10

Les proponemos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 5
La empresa "La Paisana" SA necesita fondos y recurre al Banco de la Ciudad en el día de la fecha a descontar un conjunto de cheques diferidos que vencen en 75 días. El importe total de los cheques asciende a $12.520 y el banco aplica una tasa de descuento de 0,075 para el plazo de la operación.

A partir de esta información, completar:

a)	Importe recibido por la empresa	
b)	Descuento	
c)	Tasa de interés para 75 días	
d)	Tasa nominal anual de descuento	
e)	Tasa de interés equivalente anual	

Rta.: a) $11.581; b) $ 939 c) 0,08108 p/ 75 días;
d) 0,365 nominal anual; e) 0,4614 anual

EJERCICIO 6
Un industrial desea ampliar su fábrica para lo cual necesita $ 50.000. Para ello, se le presentan las siguientes alternativas:
I. Descontar un cheque diferido que vence dentro de 55 días, al 1,5% mensual de descuento.
II. Solicitar un préstamo a devolver dentro de 1 año, al 0,22 nominal anual con capitalización bimestral.
III. Otra entidad le presta el dinero que la empresa necesita, pero debe devolver $55.000 dentro de 180 días.
Determine la alternativa más conveniente.

Rta: Alternativa I.

La inclusión de conceptos no financieros en las operaciones financieras

Es habitual encontrar determinados conceptos que se incluyen en las distintas operaciones financieras que no responden a aspectos estrictamente financieros. Por ejemplo: costos administrativos, seguros, impuestos, gastos, etc.

Por lo general la tasa de interés enunciada en estas operaciones se refiere a la que se utiliza para calcular el capital final o el valor efectivo, dependiendo de que operación se trate, sin incluir los conceptos que mencionamos en el párrafo anterior, y que se incluyen posteriormente, para determinar cuál es el importe que finalmente se recibe (o se abona) en la operación.
Si nos interesa conocer el costo por todo concepto total de la operación, será necesario calcular una tasa que incluya todos los aspectos, es decir, considerando los importes que afectan la suma recibida o abonada.
Analizaremos a continuación cómo incluir estos aspectos no financieros en operaciones de depósitos (llamadas también operaciones pasivas) y operaciones de préstamos (operaciones activas).

Operaciones de depósito:
Cuando se realiza el depósito de un capital inicial, obtendremos un capital final, aplicando la fórmula de monto

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

Si corresponde aplicar algún impuesto (que generalmente será sobre los intereses) o gasto, traerá como consecuencia que el importe que recibirá el depositante será menor.

Definiremos una tasa de rendimiento (r)

$$r = \frac{\text{Importe Recibido} - f(0)}{f(0)}$$

Donde:

Importe Recibido = $f(n)$ - Impuestos, gastos, etc.
La tasa de rendimiento que obtenemos es para todo el plazo de la operación. Si queremos obtener el rendimiento para otra unidad de tiempo, lo calculamos con la fórmula de tasa de interés equivalente.

Cuando analizamos anteriormente operaciones financieras y no incluíamos estos conceptos económicos, la tasa de rendimiento era la tasa de interés. Al introducir los efectos económicos sobre las operaciones financieras, la tasa de interés sigue siendo la tasa de rendimiento financiero, pero será diferente al rendimiento económico de la operación, reflejado a través de r .

Operaciones de préstamo de pago único
En este tipo de operaciones, se obtiene un préstamo, $f(0)$, devolviendo al final del plazo un determinado importe, que calculamos con la fórmula de monto:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

Puede suceder que el acreedor aumente este importe agregando algún gasto, o que correspondan abonar impuestos, etc., por lo tanto el importe a pagar será mayor.

Definiremos una tasa de costo:

$$\text{tasa de costo} = \frac{\text{Importe a pagar} - f(0)}{f(0)}$$

Donde:
Importe a pagar = $f(n)$ + Impuestos, gastos, etc.

La tasa de costo que obtenemos es para todo el plazo de la operación. Si queremos obtener el costo para otra unidad de tiempo, lo calculamos con la fórmula de tasa de interés equivalente.

Cuando analizamos anteriormente operaciones financieras y no incluíamos estos conceptos económicos, estaba implícito que la tasa de costo era la tasa de interés. Al introducir los efectos económicos sobre las operaciones financieras, la tasa de interés sigue siendo la tasa de costo financiero, pero será diferente al costo económico de la operación, reflejado por la tasa de costo, que mide el efecto financiero y económico.

Es necesario analizar la naturaleza del concepto que disminuye el capital final. Por ejemplo, si se cobra IVA sobre los interés, para un responsable inscripto en este impuesto, no implica un costo, ya que podrá compensarlo en su Declaración Jurada de IVA. Pero será un costo, si quien realiza la operación es consumidor final o monotributista.

Operaciones de descuento

En este tipo de operaciones, hay que considerar además del importe del descuento, el sellado, gastos administrativos, otros impuestos, etc., que disminuyen el importe que finalmente recibe quien se presenta a descontar algún valor.

En primer lugar se determina el valor efectivo, que si se trabaja con la tasa de descuento, será:

$$E = N(1-d)^n$$

si se opera con la tasa de interés:

$$f(0) = f(n)(1+i)^{-n}$$

Luego, podremos calcular la tasa de costo:

$$\text{tasa de costo} = \frac{N - \text{Importe Recibido}}{\text{Importe Recibido}}$$

Donde:

Importe Recibido = E – Impuestos, sellado, gastos.

Proponemos resolver el siguiente ejercicio:

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 7

La empresa "La Pampa" SA necesita fondos y recurre al Banco de la Ciudad en el día de la fecha a descontar un conjunto de cheques diferidos que vencen en 105 días. El importe total de los cheques asciende a $17.950 y el banco aplica una tasa de interés de 0,048 para el plazo de la operación. Además, el banco retiene el 1% en concepto de impuesto a los sellos, calculados sobre el importe de los cheques. A partir de esta información, completar:

a)	Importe recibido por la empresa	
b)	Descuento	
c)	Tasa de descuento	
d)	Tasa de descuento equivalente anual	
e)	Tasa nominal anual de descuento	
f)	Tasa de costo de la operación	

Rta.: a) $16.948,36; b) $822,14
c) 0,04580 p/ 105 días; d) 0,1504 anual;
e) 0,1592 nominal anual f) 0,0591 p/105 días

Estamos en condiciones de poder analizar la operación presentada al inicio de la unidad:

Observemos que la cantidad de días entre ambas fechas (operación y vencimiento del cheque) es de 30 días, tal como se indica a la derecha de la imagen.
Donde se indica Descuento Operado, podríamos pensar que es el porcentaje de descuento. En realidad se trata de la tasa de interés nominal anual de la operación:

$$i = \frac{0,20}{\frac{365}{30}} = 0,016438 \; p/30d.$$

A partir de ella calculamos la tasa de descuento de la operación:

$$d = \frac{0,016438}{1 + 0,016438} = 0,016172 \; p/30d.$$

Luego, determinamos el importe del descuento:

$$D = N.d = 20.000 \,.\, 0,016172 = 808,63$$

Al valor del descuento se le adicionan una serie de gastos detallados en la imagen, lo que resulta un importe total (Descuento más gastos e impuestos) de 1.229,36.

Cuando se indica el monto final que abona el inversor se indica el importe que recibe quien presenta el cheque a descontar, y que surge de:

$$\text{Importe Recibido} = 50.000 - 1.229,35 = 48.770,65$$

Determinamos la tasa de costo de la operación:

$$\text{tasa de costo} = \frac{1.229,35}{48.770,65} = 0,02520678 \ p/30d.$$

La que el simulador muestra es la tasa nominal anual de la tasa de costo:

$$0,02520678 \,.\, \frac{365}{30} = 0,3067$$

Sin considerar el IVA:

$$\text{tasa de costo} = \frac{1.050,91}{48.949,09} = 0,02147 \ p/30d.$$

Donde los $1.050,91 surgen de la diferencia entre $50.000 y $48.949,09

$$0,02147 \,.\, \frac{365}{30} = 0,2612$$

EJERCITACIÓN

Les recomendamos resolver los siguientes ejercicios ya que permitirán aplicar los contenidos aprendidos en esta unidad:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 8
RECONQUISTA SRL necesita realizar pagos a proveedores de manera inmediata. Para obtener ese dinero recurre el día 14 de julio al Banco Nación a negociar una serie de valores que vencen dentro de 90 días. El Banco le enuncia una tasa nominal anual de descuento de 0,18. El valor efectivo asciende a $18.932,50.
A partir de esta información, seleccione la alternativa correcta:

I. La tasa de descuento de la operación es:

a) 0,0450 para 90 días	b) 0,0444 para 90 días

c) 0,0417 para 90 días	d) ninguna de las anteriores

la respuesta correcta es ....

II. El valor nominal de los cheques asciende a:

a) $18.091,90	b) $19.824,61

c) $19.815,20	d) ninguna de las anteriores

la respuesta correcta es ....

III. Si el banco cobra en concepto de gastos administrativos y sellado $95, la tasa de costo para la empresa ascenderá a:

a) 0,0545 para 90 días	b) 0,0497 para 90 días

c) 0,05174 para 90 días	d) ninguna de las anteriores

la respuesta correcta es ....

Rta.: I. b); II. d) $ 19.812,16; III. c)

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 9

La empresa “La Campestre” SA necesita fondos y recurre al Banco de la Ciudad en el día de la fecha a descontar un conjunto de cheques diferidos que vencen en 125 días. El importe total de los cheques asciende a $14.280 y el banco aplica una tasa de interés de 0,098 para el plazo de la operación.
A partir de esta información, completar:

a)	Importe recibido por la empresa	
b)	Descuento	
c)	Tasa de descuento	
d)	Tasa de descuento equivalente anual	
e)	Tasa nominal anual de interés	

Rta.: a) $13.005,46; b) $1.274,54
c) 0,08925 p/ 125 días; d) 0,2389 anual
e) 0,28616 nominal anual

EJERCICIO 10

Una empresa posee en cartera dos cheques diferidos que decide descontar en una entidad financiera, a efectos de hacerse de dinero en efectivo para cubrir gastos imprevistos del mes. El primero de los cheques es por $3.500 y vence dentro de 90 días, y el segundo es de $2.400 y vence dentro de 45 días. Si por la operación le cobran una tasa nominal anual de descuento de 0,48 con capitalización para el plazo de cada documento, indique:

a) La tasa de descuento a aplicar en el descuento de cada uno de los cheques.
b) La tasa de interés anual equivalente de cada una de las operaciones.
c) El valor efectivo recibido en ambas operaciones de descuento.

Rta.: a) 0,11836 p/ 90 días y 0,059178 p/ 45 días
b) 0,66676 anual y 0,64015 anual
c) $3.085,74 y $2.257,97

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 11

El día 01/09, de acuerdo con nuestro estado de cuenta, contamos con las siguientes obligaciones:

A los 30 días....... $ 3.000
A los 90 días....... $ 5.000
A los 180 días...... $ 7.500

Si deseamos reemplazar los tres documentos por uno solo con vencimiento dentro de 100 días, y siendo la tasa de descuento de 0,72 nominal anual, con capitalización para el plazo de cada documento, ¿cuál será el importe del nuevo documento y la fecha de vencimiento del mismo?

Rta.: $ 14.664,52 y 10/12

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 12

Un agente financiero recibió un cierto capital por haber descontado un documento, 60 días antes de su vencimiento, a una tasa de descuento del 0,62 nominal anual para ese plazo. La suma recibida resultó ser colocada a la tasa de interés del 0,75 nominal anual para el plazo de 140 días, obteniendo un monto de $ 15.600. Determinar el importe del documento.

Rta.: $ 13.489,73

EJERCICIO 13

El día 01/04 un deudor posee los siguientes compromisos, cuyos vencimientos se detallan:

- $ 8.000 vencimiento el 26/04
- $ 10.000 vencimiento el 15/05
- $ 12.000 vencimiento el 30/06

Con fecha 15/04 se presenta a su acreedor para sustituir las obligaciones por un único documento, con vencimiento el 15/06, a la tasa de descuento nominal anual de 0,68 con capitalización para el plazo de cada documento.

Determinar:
a) El importe adeudado al 15/04.
b) El valor nominal del nuevo documento.

Rta.: a) $27.578,08 b) $31.113,99

EJERCICIO 14

La empresa FEDERAL SRL, necesita contar con efectivo para realizar el pago de una indemnización. Para ello se presenta al Banco Local a descontar un cheque el día 15/5, 30 días antes de su vencimiento.

El banco aplica a la operación una tasa nominal anual de descuento de 0,20 y el importe del descuento es de $830,20. Calcular:
a) El valor efectivo recibido por el cheque.
b) La fecha de vencimiento del cheque.
c) La tasa de interés de la operación.

Rta: a) $49.673,50; b) 14/06
c) 0,016713 p/30 días

DIALOGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

INTEGRANDO IDEAS

En esta unidad hemos analizado detenidamente una de las operaciones de actualización más comunes: la operación de descuento. Debemos destacar la importancia que tiene la determinación del costo financiero en este tipo de operaciones, identificando adecuadamente las tasas que se enuncian y se aplican, y de esta manera asesorar correctamente acerca de su conveniencia.
También hemos incorporado a nuestro análisis elementos no financieros, como los gastos e impuestos, que afectan el rendimiento o el costo de las operaciones financieras.
Con esta unidad concluimos el primer bloque de la asignatura que nos ha permitido dar nuestros primeros pasos en el campo financiero.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:
CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Primera Parte. Córdoba Fac. de Cs. Económicas U.N.C. (2001).

U4

BLOQUE 2

UNIDAD 4
RENTAS CIERTAS DE PAGOS CONSTANTES IGUALMENTE ESPACIADOS

UNIDAD 4:
Rentas ciertas de pagos constantes igualmente espaciados

CONTENIDOS

Valores Finales (Imposiciones) de pagos vencidos y anticipados. Valores Actuales de pagos inmediatos, vencidos y anticipados. Valor actual de pagos diferidos.
Rentas Perpetuas. Valor Actual
Aplicación de valor actual a la amortización o extinción de deudas a cuota constante. Composición de la cuota. Saldos. Cuadro de amortización.

OBJETIVOS

- Identificar una renta, sus componentes y clasificaciones.
- Describir y diferenciar los modelos financieros que permiten obtener el equivalente financiero de una renta.
- Aplicar el valor actual de renta de cuota constante en amortización de deudas, identificando los componentes del sistema.
- Integrar el análisis de diferentes situaciones que se presentan en la amortización de deuda con cuota constante.

PRESENTACIÓN

En las unidades anteriores analizamos las operaciones financieras de capitalización y actualización: pudimos ver que a partir de un capital inicial buscamos su valor final o monto y, partiendo de un capital final, obteníamos su valor actual o capital inicial. Si en alguna operación se presentaba más de un capital, operábamos de un valor por vez y luego sumábamos los resultados parciales obtenidos.
Será habitual encontrarnos con operaciones financieras en donde los capitales involucrados sean varios.

A continuación le proponemos una operación de préstamo realizado en el simulador de un banco:

AULA VIRTUAL SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **Introducción al Bloque II**, donde los profesores explican la relación entre contenidos temáticos de las unidades 4 y 5 y la **presentación de la Unidad 4** donde se proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de los temas abordados.

RECURSOS A UTILIZAR EN LA UNIDAD 4

- Material Teórico – Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios
- Videos Tutoriales sobre planilla de cálculo
- Videos Tutoriales simuladores
- Instructivo calculadora financiera

El siguiente cuadro representa el pago de una deuda (monto del préstamo) indicada en la imagen anterior, que podemos identificar como un capital inicial, que se pagará por medio de cierta cantidad de cuotas, distribuidas a lo largo del tiempo:

Monto del Préstamo Simulado	$25.000,00
Destino del Préstamo Simulado	Refacción de vivienda
Gastos de Otorgamiento	$1.200,00
IVA sobre Gastos de Otorgamiento	$252,00
Plazo Solicitado	12 meses
TNA	33,00%
TEA	38,49%
Costo Financiero Total	71,35%
Primer Cuota	$2.661,01

Simulador de Préstamo Personal BBVA Francés

Detalle del préstamo simulado

Cuota Nro.	Cuota Pura	Capital	Interés	Seg.de Vida	IVA S/interés	Cuota Total	Saldo Deuda
1	2.468,62	1.790,54	678,08	50,00	142,40	2.661,01	23.209,46
2	2.468,62	1.839,10	629,52	46,42	132,20	2.647,24	21.370,36
3	2.468,62	1.888,98	579,63	42,74	121,72	2.633,08	19.481,38
4	2.468,62	1.940,22	528,40	38,96	110,96	2.618,54	17.541,16
5	2.468,62	1.992,84	475,77	35,08	99,91	2.603,61	15.548,32
6	2.468,62	2.046,90	421,72	31,10	88,56	2.588,28	13.501,42
7	2.468,62	2.102,41	366,20	27,00	76,90	2.572,52	11.399,01
8	2.468,62	2.159,44	309,18	22,80	64,93	2.556,34	9.239,57
9	2.468,62	2.218,01	250,61	18,48	52,63	2.539,72	7.021,56
10	2.468,62	2.278,17	190,45	14,04	39,99	2.522,65	4.743,39
11	2.468,62	2.339,96	128,66	9,49	27,02	2.505,12	2.403,43
12	2.468,62	2.403,43	65,19	4,81	13,69	2.487,11	0,00

Podremos resolver este y otro tipo de operaciones que involucran múltiples capitales a partir de lo que aprendamos en esta unidad y en las siguientes.

Renta: concepto y clasificación

En primer lugar debemos definir lo que es una renta y las diferentes maneras en que estás pueden ser clasificadas. Analicemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.1:
Una familia decide reunir cierta suma de dinero durante el año para poder realizar un viaje en las próximas vacaciones. Para ello, comienzan hoy depositando en una entidad financiera $2.500, agregando ese mismo importe cada 30 días y durante 10 unidades de tiempo. La entidad le reconoce un interés del 1% para 30 días. ¿Cuál es el importe reunido al final del plazo?
Si aplicamos lo que hemos aprendido, debemos capitalizar cada uno de los depósitos hasta el final del plazo utilizando la fórmula $f(n) = f(0)(1+i)^n$ y luego sumarlos.

Ejemplo 4.2:
Una empresa compra una máquina para su planta de producción y se pacta el pago en 6 cuotas cada 90 días, las primeras tres de $12.000 y las tres últimas de $18.000. El fabricante de la máquina ha considerado en el cálculo de la cuota una tasa interés del 0,065 para 90 días. ¿Cuál es el precio de contado?
Aplicando lo que hemos aprendido, deberíamos actualizar cada una de las 12 cuotas al momento *0* utilizando la fórmula $f(0)=f(n)(1+i)^{-n}$ y luego sumar esos valores.

Ejemplo 4.3:
Una persona de 45 años de edad decide contratar un seguro que le permita cobrar una determinada suma de dinero constante al final de cada año mientras esté con vida. La empresa aseguradora debe determinar el precio que le cobrará en el momento del contrato considerando un interés anual de 0,04.
Nuevamente se trata de una operación de actualización, a la que debe incorporarse la probabilidad de vida del asegurado, ya que el pago del beneficio dependerá de que la persona no fallezca.

En los tres ejemplos nos encontramos con capitales ubicados en distintos momentos del tiempo que deben ser valuados financieramente en un momento determinado.

En primer lugar definiremos lo que es una renta:

"Renta es un conjunto de capitales que corresponden a una operación financiera y que constituyen pagos, depósitos o retiros, que se realizan a lo largo de un período de tiempo."

En una renta identificaremos:

- El depósito o pago que denominamos *cuota.* Consideraremos que se encuentran igualmente espaciadas, es decir, el tiempo que hay entre una cuota y la siguiente es constante.
- El período de tiempo que existe entre dos depósitos sucesivos que denominaremos "intervalo de pago" y es, a su vez, la unidad de tiempo.
- El plazo que es el tiempo que transcurre entre las fechas de inicio y finalización de la renta.

En el Ejemplo 4.1:
El intervalo de pago es 30 días.
El plazo es 300 días (30 x 10 cuotas).

En el Ejemplo 4.2:
El intervalo de pago es 90 días.
El plazo es 540 días (90 x 6 cuotas).

En el Ejemplo 4.3:
El intervalo de pago es 1 año.
El plazo es incierto, porque dependerá del momento de fallecimiento de la persona asegurada.

Como vemos en los ejemplos se presentan distintos *intervalos de pago* (30 días, 90 días, un año) y *plazo* (300 días, 540 días), pero también podemos encontrar otras diferencias: en el primer ejemplo la cuota es siempre la misma: $2.500 y en el segundo la cuota varía, durante la primera mitad del plazo es $12.000, y en la segunda, $18.000.

Es posible identificar estas y otras diferencias entre las rentas, por ello analizaremos algunas clasificaciones:

Según de la duración de la renta:
- Renta temporaria: número finito de pagos o depósitos
- Renta perpetua o vitalicia: número infinito de pagos o depósitos

Según se conozca o no el plazo:
- Renta cierta: se conocen la fecha de inicio y finalización. Esto sucede en los Ejemplos 4.1 y 4.2 donde se conoce el momento en que se comienza a pagar o depositar y la fecha en que concluye.
- Renta contingente: cuando se desconoce la fecha de inicio y/o de finalización. Un ejemplo: la jubilación o la pensión. Se conoce la fecha de inicio, que es cuando se alcanza la edad establecida legalmente, pero no la fecha de finalización, que dependerá del momento del fallecimiento del jubilado o pensionado.

Según el momento del pago o depósito:
- Renta de pago vencido: cuando el pago o depósito se realice al final de la unidad de tiempo. Este es el caso del Ejemplo 4.3 donde el pago se realiza al final de cada año.
- Renta de pago anticipado (o adelantado): cuando el pago o depósito se realiza al inicio de la unidad de tiempo. Este es el caso del Ejemplo 4.1 donde los depósitos se realizan al inicio de cada unidad de tiempo de 30 días.

Según el momento en que comienzan a efectuarse los pagos y depósitos:
- Renta inmediata: cuando el primer pago o depósito se realiza en la unidad de tiempo inmediata posterior al momento de concretarse la operación.

- Renta diferida: cuando el primer pago o depósito no se realiza en la unidad de tiempo posterior del momento de concretarse la operación, es decir, deberá transcurrir cierta cantidad de unidades de tiempo antes de comenzarse con los pagos o depósitos. También se las conoce como rentas con período de gracia o con período de carencia. Un ejemplo es el siguiente: "Compre hoy y pague en cuotas mensuales, abonado la primera cuota dentro de tres meses". Transcurre cierta cantidad de meses hasta el momento en que comenzará el pago de las cuotas.

Según el valor del pago o depósito:
- Renta de pagos iguales o constantes: es decir, todos los pagos o depósitos son de igual importe (Ejemplo 4.1, $2.500).
- Renta de pagos variables: no todos los pagos o depósitos tienen igual valor. En el Ejemplo 4.2, hay importes diferentes: $12.000 y $18.000. La variación puede asumir algún comportamiento que puede asociarse a modelos matemáticos (variables en progresión aritmética, geométrica) o no.

Según el momento de valuación de la renta:
- Valor final: cuando dada una renta, se pretende determinar su valor al concluir el plazo. Esto sucede en el Ejemplo 4.1, donde debemos averiguar cuál es el importe reunido al final, luego de concluir con los depósitos.
- Valor actual: cuando dada una renta, buscamos determinar su valor al inicio del plazo. En el Ejemplo 4.2 queremos saber cuál es el precio de contado, es decir, el valor de la máquina en el momento *0*.

A lo largo de la asignatura trabajaremos con los distintos tipos de rentas que hemos mencionado en las diferentes clasificaciones. En esta unidad lo haremos con rentas ciertas, temporarias, perpetuas, vencidas y anticipadas, inmediatas y diferidas, constantes, y obteniendo valores finales y actuales.

Valor Final de una renta cierta, temporaria, constante, inmediata y vencida

En primer lugar abordaremos el estudio del valor final de una renta cierta de cuota constante como el que se refleja en el siguiente eje temporal:

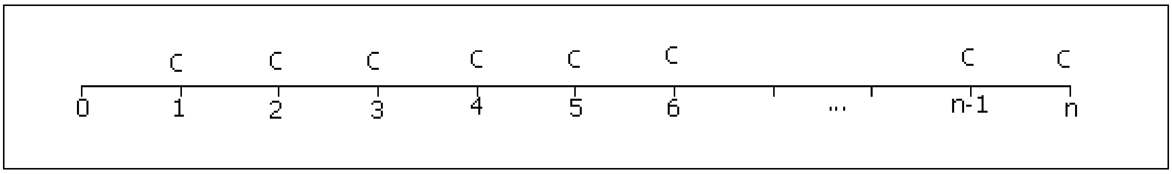


Gráfico 1

En el Gráfico 1 podemos ver cada uno de los depósitos o pagos, que representaremos con c. En este caso c es constante, igualmente espaciada y vencida, ya que los depósitos están ubicados al final de cada unidad de tiempo.

Nuestro objetivo es determinar el valor final de este conjunto de n depósitos vencidos y constantes de valor c. El valor final obtenido será simbolizado con A.

En resumen, los elementos que consideraremos son:

n = cantidad de cuotas (que coincide con las cantidad de unidades de tiempo de la operación)
c = cuota constante y vencida
i = tasa de interés de la operación
A = valor final de cuotas constantes y vencidas

Como estamos trabajando en el campo financiero sabemos que cada uno de estos depósitos genera intereses, a una determinada tasa de interés i.
Con los conocimientos que contamos, podemos obtener el valor final tomando cada uno de los depósitos y aplicar la fórmula de monto $f(n) = f(0)(1+i)^n$, para finalmente sumarlos cuando ya se encuentren expresados en el momento n.

Para determinar el valor al final del primer depósito, hacemos:

$$c(1+i)^{n-1}$$

El exponente es $n-1$, porque es la cantidad de unidades de tiempo que hay entre el final de la primera unidad de tiempo y el momento n, tal como puede observarse en el Gráfico 2:

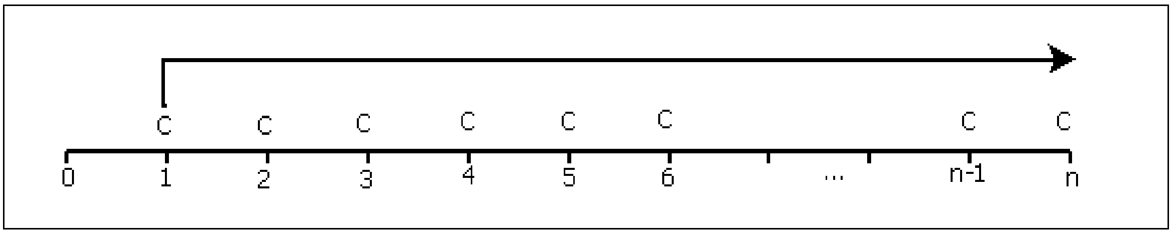


Gráfico 2

Para el segundo depósito:

$$c(1+i)^{n-2}$$

La capitalización se realiza por $n-2$ unidades de tiempo, porque esa es la distancia entre el momento del depósito de la segunda cuota y la determinación del valor final, tal como lo refleja el Gráfico 3:

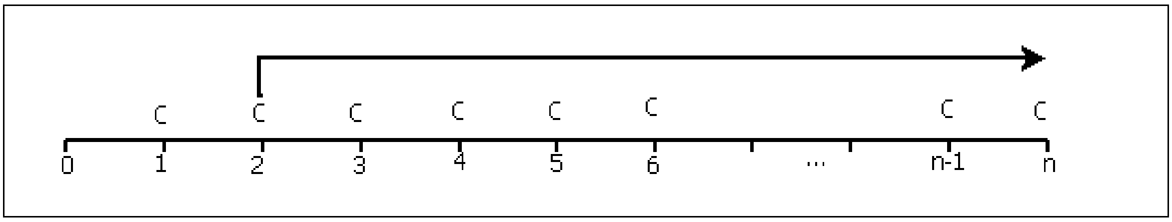


Gráfico 3

Para la tercera cuota:

$$c\left(1+i\right)^{n-3}$$

Y así sucesivamente para todos los depósitos.

Cuando llegamos al depósito que se realiza cuando faltan 2 unidades de tiempo (momento $n-2$), su valor final lo obtenemos:

$$c\left(1+i\right)^{2}$$

El exponente es 2 ya que esta cuota genera intereses durante 2 unidades de tiempo. Se puede constatar esto en el Gráfico 4:

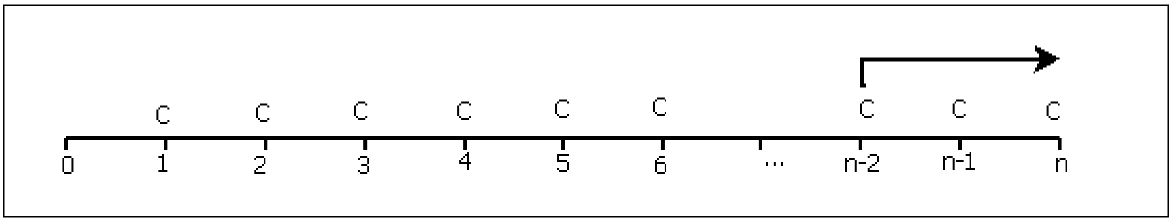


Gráfico 4

El depósito siguiente (Gráfico 5) se capitaliza por una unidad de tiempo:

$$c\left(1+i\right)^{1}$$

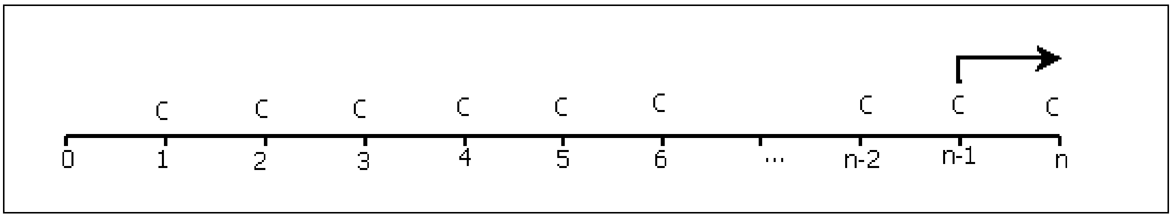


Gráfico 5

Finalmente, para la última cuota:

$$c\left(1+i\right)^{0}=c$$

ya que $\left(1+i\right)^{0}=1$

Si observamos el eje temporal del Gráfico 6:

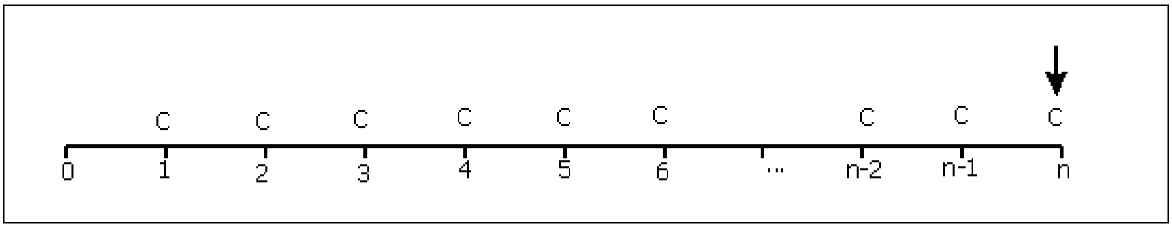


Gráfico 6

el último depósito se realiza en el momento en que se calcula el valor final, no ha transcurrido tiempo para que genere intereses.

Ahora que todos los depósitos están ubicados al final del plazo, el valor final se obtendrá de la suma de los importes obtenidos:

$$A = c(1+i)^0 + c(1+i)^1 + c(1+i)^2 + \ldots + c(1+i)^{n-3} + c(1+i)^{n-2} + c(1+i)^{n-1} = \sum_{t=0}^{n-1} c(1+i)^t$$

O:

$$A = cu^0 + cu^1 + cu^2 + \ldots + cu^{n-3} + cu^{n-2} + cu^{n-1} = \sum_{t=0}^{n-1} c\,u^t$$

Como todas las cuotas son iguales, extraemos factor común c:

$$A = c\left[(1+i)^0 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right] = c\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t \qquad (1)$$

La expresión que está entre corchetes, constituye la suma de los términos de una progresión geométrica. Recordemos que:

"Una sucesión es geométrica si cada uno de sus términos es igual al anterior multiplicado por una constante, llamada razón"

Si la razón es positiva menor que 1, la progresión es decreciente, ya que cada término es menor que el que lo antecede. En cambio, si la razón es mayor que 1, los términos aumentan su valor, dando origen a una progresión creciente.

En este caso la razón es $(1+i)$ porque cada término es igual al anterior multiplicado por $(1+i)$. Por ejemplo, $(1+i)^3$ es igual al anterior; $(1+i)^2$, multiplicado por $(1+i)$:

$$\underbrace{(1+i)^3 = (1+i)^2}_{\text{término anterior}}(1+i) \rightarrow \text{razón}$$

Y como $(1+i) > 1$, la progresión geométrica es creciente.

Cuando estamos en presencia de una progresión geométrica creciente, podemos obtener la suma de sus términos a través de la siguiente expresión:

$$\frac{a_n \,.\, r - a_1}{r-1} \quad (2)$$

Donde:

a_n = es el último término de la progresión geométrica

a_1 = es el primer término de la progresión geométrica

r = razón

Aplicando esta fórmula de cálculo en (1):

$a_n = \left(1+i\right)^{n-1} = u^{n-1}$

$a_1 = \left(1+i\right)^{0} = u^{0} = 1$

$r = \left(1+i\right) = u$

Remplazando en (2):

$$\frac{\left(1+i\right)^{n-1}.\left(1+i\right)-1}{\left(1+i\right)-1}$$

Resolvemos la multiplicación del primer término del numerador y la resta en el denominador:

$$\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{1+i-1} = \frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i} = \frac{u^{n}-1}{i}$$

Simbolizaremos la expresión anterior de la siguiente manera:

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i} = \frac{u^{n}-1}{i}$$

Finalmente, remplazamos en (1):

$$\boxed{A = A_{\overline{n|}\,i} = c\, s_{\overline{n|}\,i} = c\,\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i} = c\,\frac{u^{n}-1}{i}}$$

Donde:

"A es la suma de los valores finales de n cuotas constantes, igualmente espaciadas y vencidas de $\$c$, a la tasa de interés i."

Por lo tanto:

“ $s_{\overline{n|}i}$ es la suma de los valores finales de n cuotas constantes, igualmente espaciadas y vencidas de $\$1$, a la tasa de interés i .”

El valor de la cuota puede obtenerse a través del despeje correspondiente:

$$\boxed{c = \frac{A}{s_{\overline{n|}i}} = A \, . \, s_{\overline{n|}i}^{-1}}$$

También:

$$c = \frac{A}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{A \, . \, i}{(1+i)^n - 1}$$

Donde c es cada una de las n cuotas constantes, igualmente espaciadas y vencidas cuya suma de valores finales es igual a $\$A$ a la tasa de interés i .

Si $A = 1$:

$$c = s_{\overline{n|}i}^{-1} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Donde c es cada una de las n cuotas constantes, igualmente espaciadas y vencidas cuya suma de valores finales es igual a $\$1$ a la tasa de interés i .

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrará explicaciones para utilizar las funciones de la **planilla de cálculo y la calculadora financiera**.

En esta operación financiera intervienen cuatro elementos $(A, c, n$ e $i)$ que pueden obtenerse utilizando calculadora financiera o planilla de cálculo.

Valor Final de una renta cierta, temporaria, constante, inmediata y anticipada

En este apartado, determinaremos el valor final de un conjunto de cuotas constantes y anticipadas. Al observar el Gráfico 7:

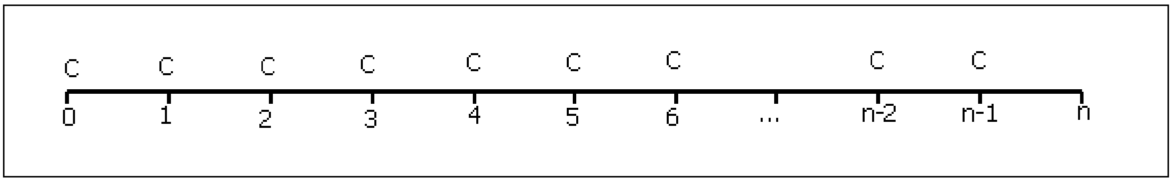


Gráfico 7

vemos que ahora las cuotas se depositan al inicio de cada unidad de tiempo, por esto decimos que se trata de cuotas anticipadas. Simbolizaremos con $\ddot{A}$ el valor final para este tipo de cuotas.

$\ddot{A}$ = valor final de cuotas constantes y anticipadas

Para determinar el valor al final del primer depósito, capitalizamos:

$$c\left(1+i\right)^{n}$$

El eje temporal representado en el Gráfico 8 permite visualizar que es n la cantidad de unidades de tiempo que hay entre el inicio de la primera unidad de tiempo y el momento en que se determina el valor final:

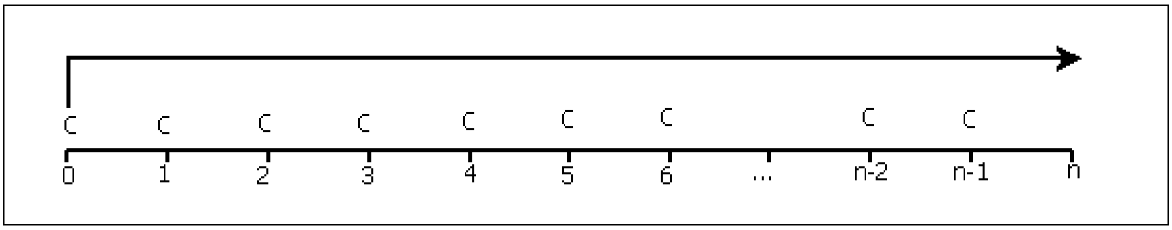


Gráfico 8

Para el segundo depósito:

$$c\left(1+i\right)^{n-1}$$

Para el tercero:

$$c\left(1+i\right)^{n-2}$$

Tal como lo muestra el Gráfico 9:

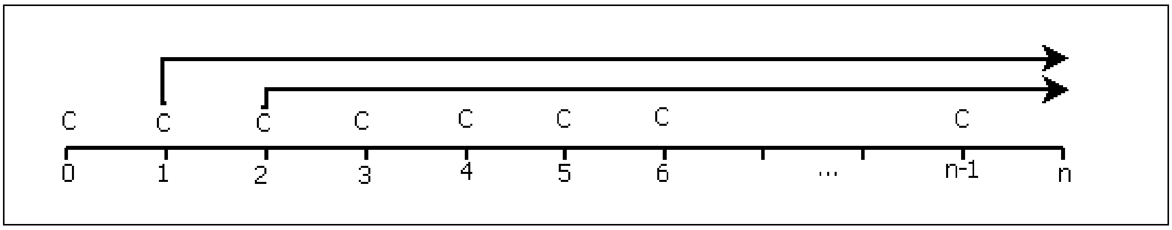


Gráfico 9

De igual manera continuamos con las cuotas siguientes. Cuando llegamos al penúltimo depósito (correspondiente a la unidad de tiempo $n-1$) el depósito se realiza al inicio de ese período, tal cual lo refleja el Gráfico 10:

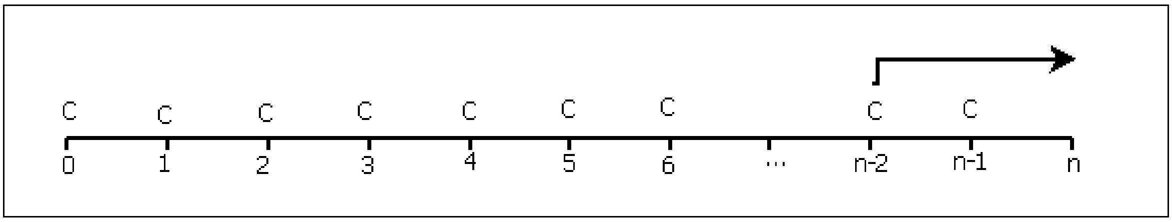


Gráfico 10

Su valor final es:

$$c(1+i)^2$$

El exponente es 2 ya que esta cuota genera intereses durante 2 unidades de tiempo.

Para el depósito siguiente, correspondiente a la última unidad de tiempo, haremos:

$$c(1+i)^1 = c(1+i)$$

ya que genera intereses por una unidad de tiempo (Gráfico 11).

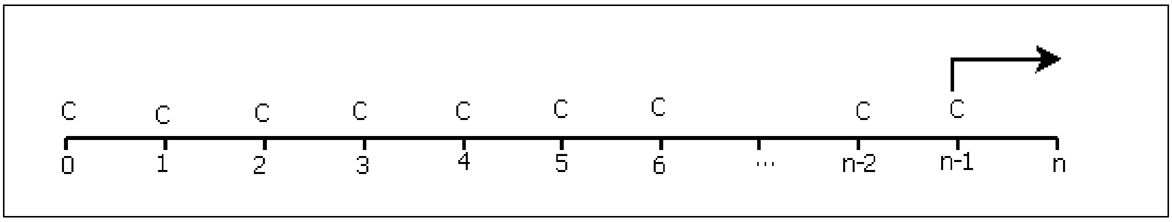


Gráfico 11

Ahora, todos los depósitos están ubicados al final del plazo y el valor final se obtendrá de la suma de estos importes obtenidos:

$$\ddot{A} = c(1+i)^1 + c(1+i)^2 + \ldots + c(1+i)^{n-3} + c(1+i)^{n-2} + c(1+i)^{n-1} + c(1+i)^n = \sum_{t=1}^{n} c(1+i)^t$$

Sabiendo que todas las cuotas son iguales, podemos extraer como factor común c:

$$\ddot{A} = c\left[(1+i)^1 + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n\right] = c\sum_{t=1}^{n}(1+i)^t \qquad (3)$$

O:

$$\ddot{A} = cu^1 + cu^2 + \ldots + cu^{n-3} + cu^{n-2} + cu^{n-1} + cu^n = \sum_{t=1}^{n} c\,u^t$$

En (3), entre corchetes, nuevamente nos encontramos con la suma de los términos de una progresión geométrica creciente. La suma de los términos es igual a:

$$\frac{a_n \,.\, r - a_1}{r-1}$$

Donde:

$$a_n = (1+i)^n = u^n$$
$$a_1 = (1+i)^1 = (1+i) = u$$
$$r = (1+i) = u$$

Remplazando:

$$\frac{(1+i)^n.(1+i)-(1+i)}{(1+i)-1}$$

Extraemos $(1+i)$ como factor común en el numerador y restamos en el denominador:

$$\frac{(1+i)\left[(1+i)^n-1\right]}{1+i-1}=(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}=u\frac{u^n-1}{i}$$

Simbolizaremos la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i}=(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}=u\frac{u^n-1}{i}$$

Remplazamos en (3):

$$\boxed{\ddot{A}=\ddot{A}_{\overline{n}|i}=c\,\ddot{s}_{\overline{n}|i}=c(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}=cu\frac{u^n-1}{i}}$$

Donde:

"$\ddot{A}$ es la suma de los valores finales de n cuotas constantes, igualmente espaciadas y anticipadas de $\$c$, a la tasa de interés i".

Y:

"$\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ es la suma de los valores finales de n cuotas constantes, igualmente espaciadas y anticipadas de $\$1$, a la tasa de interés i."

El valor de la cuota se obtiene:

$$\boxed{c=\frac{\ddot{A}}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}}=\ddot{A}.\ddot{s}_{\overline{n}|i}^{-1}}$$

También:

$$c=\frac{\ddot{A}}{(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}}=\frac{\ddot{A}.i}{(1+i)\left[(1+i)^n-1\right]}$$

Donde c es cada una de las n cuotas constantes, igualmente espaciadas y anticipadas cuya suma de valores finales es igual a $\$\ddot{A}$ a la tasa de interés i.

Si $\ddot{A} = 1$:

$$c = \ddot{s}_{\overline{n|}i}^{-1} = \frac{i}{(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

Donde c es cada una de las n cuotas constantes y anticipadas cuya suma de valores finales es igual a $\$1$ a la tasa de interés i.

Cualquiera de los cuatro elementos ($\ddot{A}, c, n$ e i) que intervienen en esta operación pueden obtenerse utilizando calculadora financiera o planilla de cálculo.

Les proponemos resolver los siguientes ejercicios para verificar lo aprendido hasta aquí:

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de este ejercicio, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

EJERCICIO 1
Indicar la alternativa correcta:

1.- Si se depositan 6 cuotas mensuales, iguales y adelantadas de $225 en el Banco Comercial SA, a una tasa de interés semestral de 0,08, el valor final obtenido es:

a) 1.394,33 b) 1.412,33
c) 1.782,63 d) Ninguna de las anteriores

2.- Si los depósitos se realizan al final de cada mes, el capital final será:

a) 1.650,58 b) 1.394,33
c) 1.352,70 d) Ninguna de las anteriores

Rta.: 1.b) 2.b)

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 2
Un artículo del hogar tiene un valor de $3.000. Usted decide adquirirlo dentro de 6 meses. Calcular:
a) El importe de la cuota que debe depositar al comienzo de cada mes para obtener el capital necesario, suponiendo que el precio no aumentará y que el interés mensual es de 1,5%.
b) Si el valor del artículo en cuestión aumenta un 25%. ¿Cuál será el depósito mensual para poder alcanzar el importe de la compra?

Rta.:a)$474,46 b)$593,07

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 3
Un ahorrista deposita durante un año $500 al final de cada mes en una entidad financiera que le reconoce una tasa de interés anual equivalente de 0,21.
Seleccione la respuesta correcta:

1) La tasa de interés mensual de la operación es:

a) 0,0175 mensual b) 0,016012 mensual
c) 0,03 mensual d) Ninguna de las anteriores

2) El capital obtenido al final del plazo es:

a) 6.006,25 b) 6.557,64
c) 6.728,27 d) 6.662,64
e) Ninguna de las anteriores

3) Si el depositante opta por retirar el capital reunido 3 meses más tarde después de cumplido el plazo, el valor a retirar es:

a) 6.990,07 b) 6.662,64
c) 6.352,58 d) 6.877,71
e) Ninguna de las anteriores

Rta.:1)b 2)b 3)d

Relaciones entre el Valor Final de cuotas vencidas y Valor Final de cuotas anticipadas

Hemos aprendido a calcular el valor final de un conjunto de cuotas constantes vencidas y anticipadas. A continuación analizaremos la relación entre ambos valores finales.
Revisemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.4
Una persona deposita en una entidad financiera 6 cuotas cada 30 días de $4.000, aplicándose una tasa de interés de 0,025 para 30 días.
Determinaremos el valor final considerando cuotas vencidas y cuotas anticipadas.

Con cuota vencida

$$A = c\, s_{\overline{n|}\, i} = c\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 4.000\, s_{\overline{6|}\, 0,025} = 4.000\,\frac{(1+0,025)^6 - 1}{0,025}$$

$$A = 25.550,95$$

Con cuota anticipada:

$$\ddot{A} = c\,\ddot{s}_{\overline{n|}\,i} = c\left(1+i\right)\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i} = 4.000\,\ddot{s}_{\overline{6|}\,0,025} = 4.000\left(1+0,025\right)\frac{\left(1+0,025\right)^6 - 1}{0,025}$$

$$\ddot{A} = 26.189,72$$

Al observar los resultados:

$$\ddot{A} > A$$

Si comparamos las fórmulas de cálculo:

$$A = c\,\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{A} = c\left(1+i\right)\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i}$$

Operando en esta última expresión:

$$\ddot{A} = c\left(1+i\right)\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i} = \underbrace{c\,\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i}}_{A}\left(1+i\right) = A\left(1+i\right)$$

Es posible afirmar que, dado un conjunto de cuotas, su valor final considerando cuotas anticipadas $(\ddot{A})$ es mayor al valor final con cuotas vencidas (A) y que el $\ddot{A}$ es igual a A capitalizado por una unidad de tiempo:

$$\ddot{A} = A\left(1+i\right)$$

El $\ddot{A}$ es mayor ya que las cuotas depositadas al inicio de cada unidad de tiempo generan intereses por una unidad de tiempo más que cada cuota vencida, que se deposita al final de cada unidad de tiempo.

En el Gráfico 12:

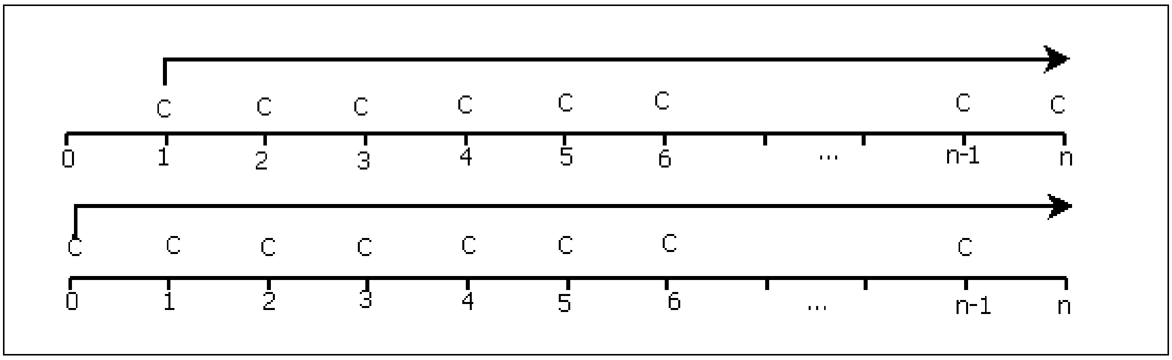


Gráfico 12

al analizar la primera cuota, vemos que si se deposita vencida (al final de la primera unidad de tiempo, momento 1) genera intereses por $n-1$ unidades de tiempo, ya que este es el tiempo que permanece depositada. Pero si es anticipada (al inicio de la primera unidad de tiempo, momento 0) genera intereses por n unidades de tiempo, es decir, produce intereses por una unidad de tiempo más y su valor final es mayor.

Si analizamos la segunda cuota:

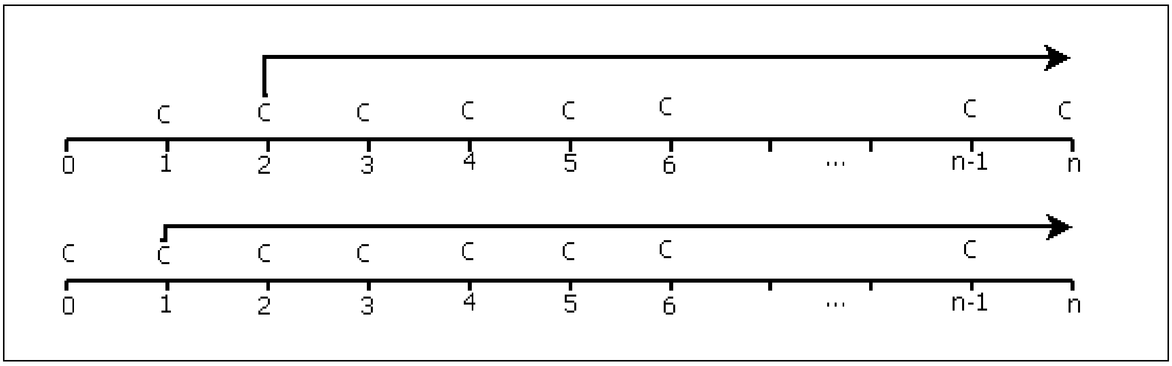


Gráfico 13

Al depositarse vencida (al final de la segunda unidad de tiempo, momento 2) genera intereses por $n-2$ unidades de tiempo, ya que este es el plazo que permanece depositada. Pero si la depositamos anticipada (al inicio de la segunda unidad de tiempo, momento 1) genera intereses por $n-1$ unidades de tiempo. Por lo tanto está obteniendo intereses por una unidad de tiempo más y su valor final es mayor.

Así sucesivamente para cada cuota, incluso la última:

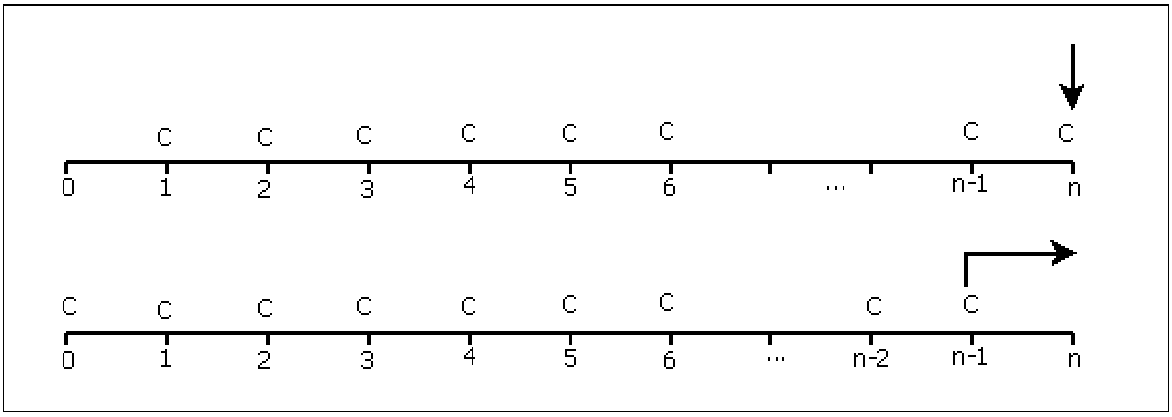


Gráfico 14

Observemos (Gráfico 14) que si se deposita vencida (al final de la última unidad de tiempo, momento n) no genera intereses, ya que este es el momento en que se calcula el valor final. Pero si la depositamos anticipada (al inicio de la última unidad de tiempo, momento $n-1$) genera intereses por 1 unidad de tiempo. Por lo tanto está produciendo intereses por una unidad de tiempo más y su valor final es mayor.

Revisemos los valores obtenidos en el Ejemplo 4.4:

$$A = 25.550,95$$

$$\ddot{A} = 26.189,72$$

Verificamos que:

$$26.189,72 = 25.550,95(1+0,025)$$

También es posible realizar el análisis con el valor final de un conjunto de cuotas de \$1:

Vencidas:

$$s_{\left.n\right\rceil i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{u^n-1}{i}=u^0+u^1+u^2+\ldots+u^{n-2}+u^{n-1}$$

Anticipadas:

$$\ddot{s}_{\left.n\right\rceil i}=(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}=u\frac{u^n-1}{i}=u^1+u^2+u^3+\ldots+u^{n-1}+u^n$$

En esta última expresión extraemos factor común u:

$$\ddot{s}_{\left.n\right\rceil i}=u^1+u^2+u^3+\ldots+u^{n-1}+u^n=u\underbrace{\left(u^0+u^1+u^2+\ldots+u^{n-2}+u^{n-1}\right)}_{s_{\left.n\right\rceil i}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\ddot{s}_{\left.n\right\rceil i}=s_{\left.n\right\rceil i}\,u}$$

Y:

$$\boxed{s_{\left.n\right\rceil i}=\ddot{s}_{\left.n\right\rceil i}\,v}$$

Verificando para cuota de \$1 la misma relación que determinamos para la cuota de $\$c$.

Otra relación interesante para analizar es la siguiente:

Si:

$$\ddot{s}_{\left.n\right\rceil i}=u^1+u^2+u^3+\ldots+u^{n-1}+u^n$$

En el caso de tratarse de $n-1$ cuotas de \$1:

$$\ddot{s}_{\left.n-1\right\rceil i}=u^1+u^2+u^3+\ldots+u^{n-1}$$

Por otra parte, si tenemos cuotas vencidas:

$$s_{\left.n\right\rceil i}=u^0+\underbrace{u^1+u^2+\ldots+u^{n-2}+u^{n-1}}_{\ddot{s}_{\left.n-1\right\rceil i}}$$

Como $u^0 = 1$:

$$\boxed{s_{\left.\overline{n}\right| i} = 1 + \ddot{s}_{\left.\overline{n-1}\right| i}}$$

O bien:

$$\boxed{s_{\left.\overline{n}\right| i} - 1 = \ddot{s}_{\left.\overline{n-1}\right| i}}$$

Relación que puede enunciarse como: *"el valor final de $n-1$ cuotas anticipadas de \$1 es igual al valor final de n cuotas vencidas menos \$1"*.

Para finalizar el estudio de estas relaciones, consideremos que se espera alcanzar un determinado valor final, depositando cierta cantidad de cuotas y a una determinada tasa de interés, ¿será diferente la cuota a depositar, si esta es vencida o si es anticipada?

Para determinar la cuota en cada caso es:

Cuota vencida:

$$c = A \,.\, s^{-1}_{\left.\overline{n}\right| i} = \frac{A \,.\, i}{(1+i)^n - 1}$$

Cuota anticipada:

$$c = \ddot{A} \,.\, \ddot{s}^{-1}_{\left.\overline{n}\right| i} = \frac{\ddot{A} \,.\, i}{\left[(1+i)^n - 1\right](1+i)}$$

Si el valor final es el mismo, es decir:

$$\ddot{A} = A$$

$$c = \frac{\ddot{A} \,.\, i}{\left[(1+i)^n - 1\right](1+i)} = \underbrace{\frac{\ddot{A} \,.\, i}{(1+i)^n - 1}}_{\substack{c \\ vencida}} \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

La única diferencia entre ambas expresiones, es el factor $(1+i)$ que tenemos en el denominador del cálculo de la cuota anticipada. Entonces, podemos indicar que:

$$c(anticipada) = \frac{c(vencida)}{(1+i)}$$

La cuota anticipada es el valor actual de la cuota vencida en una unidad de tiempo.

También es posible expresar que:

$$c(vencida) = c(anticipada)(1+i)$$

La cuota vencida es el valor final de la cuota anticipada, en una unidad de tiempo.

Ejemplo 4.5:
Una familia espera reunir un valor final de \$18.500 depositando 8 cuotas cada 90 días, a una tasa de interés de 0,052 para 90 días.
El valor de la cuota es:

Cuota vencida:

$$c = 18.500 \, . \, s^{-1}_{\overline{8}|\,0,052} = \frac{18.500 \, . \, 0,052}{(1+0,052)^8 - 1} = 1.923,54$$

Cuota anticipada:

$$c = 18.500 \, . \, \ddot{s}^{-1}_{\overline{8}|\,0,052} = \frac{18.500 \, . \, 0,052}{\left[(1+0,052)^8 - 1\right](1+0,052)} = 1.828,46$$

Concluimos afirmando que la cuota vencida es mayor que la cuota anticipada ya que, como cada cuota vencida genera intereses por una unidad de tiempo menos que cada cuota anticipada, es necesario depositar un importe mayor para alcanzar igual valor final:

$$1.828,46(1+0,052) = 1.923,54$$

Para poner en práctica lo aprendido hasta aquí, les proponemos resolver los siguientes ejercicios:

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios utilizando las funciones financieras de la **planilla de cálculo**. Les sugerimos consultarlas una vez que hayan intentado resolverlos.

EJERCICIO 4
Determinar el capital final, si se han depositado 8 cuotas mensuales de \$1.250 cada una en una institución financiera, a una TNA de interés de 0,12 con capitalización mensual, considerando:
a) Cuota vencida
b) Cuota anticipada
Compare y analice los resultados obtenidos en los incisos a) y b)

Rta.: a) \$10.357,09
b) \$10.460,66

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 5
¿Cuál es el valor de la cuota que debe depositarse cada 30 días, que permite reunir luego de 150 días, un capital final de \$3.550, si la tasa de interés es 0,27243 anual? Para responder, considere:
a) Cuota vencida
b) Cuota anticipada
Compare y analice los resultados obtenidos en los incisos a) y b)

Rta.: a) \$682,16
b) \$668,79

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 6
¿Qué cantidad de cuotas vencidas y semestrales de $2.340 son necesarias depositar para obtener un capital final de $10.236,60, a un interés del 6% semestral?

Rta.: 4

EJERCICIO 7
Indicar la tasa de interés proporcional anual con capitalización bimestral que permite constituir un capital final de $7.000 en un año y medio, a través del depósito de cuotas bimestrales y anticipadas de $710,65.

Rta.: 0,108 anual nominal con cap. Bimestral

EJERCICIO 8
La Sra Claudia Copetti deposita 8 cuotas cada 90 días, iguales y anticipadas de $850 en el Banco Comercial SA, a una TNA de interés de 0,08 con capitalización cada 90 días.
Completar:

a) La unidad de tiempo de la operación es ....

b) La tasa de interés de la operación es ....

c) El valor final obtenido es ....

d) Si, adicionalmente, se depositan $350 junto con la primera cuota y $450 con la última, el valor final ascenderá a ....

Rta.:a) 90 días b)0,019726 para 90 días
c) $7.432,24 d)$8.300,32

Valor Actual de una renta cierta, temporaria, constante, inmediata y vencida

Hasta aquí hemos encontrado expresiones que nos permiten calcular el valor final de cuotas constantes. A continuación analizaremos cómo encontrar el valor actual de este tipo de rentas.
El Gráfico 15 nos muestra una renta compuesta por n cuotas constates y vencidas de $\$c$ distribuidas a lo largo del tiempo:

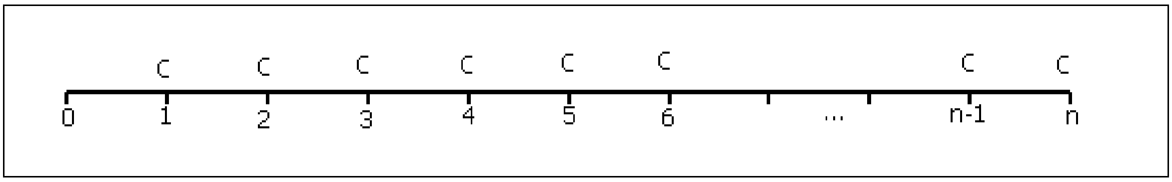


Gráfico 15

Nos proponemos encontrar el valor actual de este conjunto de cuotas, es decir, su valor en el momento *0*. Con los conocimientos que contamos hasta este momento, podemos obtener el valor actual tomando cada uno de los depósitos y aplicando la fórmula que nos permite calcular el capital inicial $f(0)=f(n)(1+i)^{-n}$ a cada uno de ellos, para finalmente sumarlos cuando ya se encuentren expresados en el momento 0.

Para el primer depósito:

$$c(1+i)^{-1}$$

El exponente es -1 porque 1 es la cantidad de unidades de tiempo que hay entre el final de la primera unidad de tiempo y el momento 0, tal como lo podemos observar en el Gráfico 16:

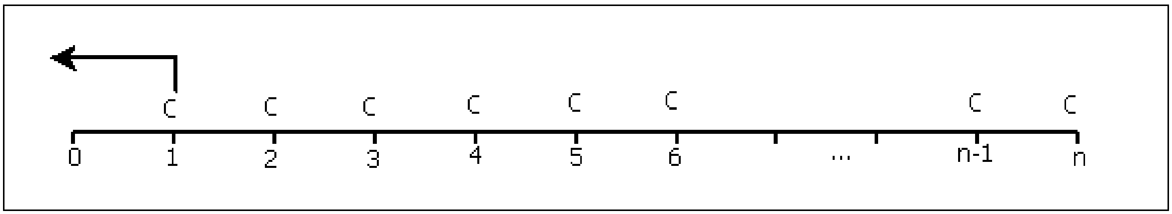


Gráfico 16

Para el segundo depósito:

$$c(1+i)^{-2}$$

Y para el tercero:

$$c(1+i)^{-3}$$

Ambos se reflejan en el siguiente eje temporal:

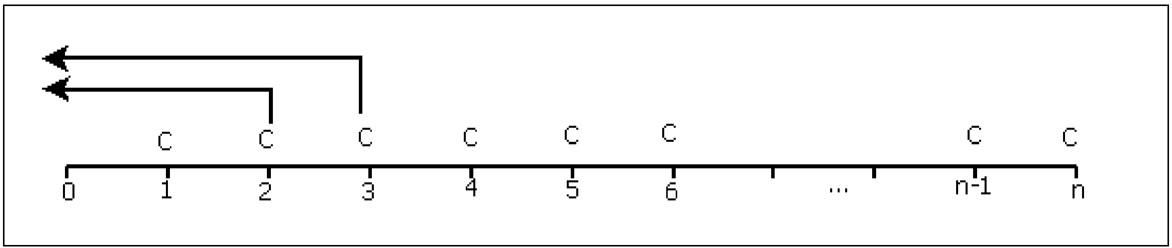


Gráfico 17

Y así sucesivamente para las siguientes cuotas. Cuando llegamos al depósito que se realiza cuando faltan 2 unidades de tiempo (momento $n-2$), su valor actual lo obtenemos:

$$c(1+i)^{-(n-2)}$$

El depósito siguiente:

$$c(1+i)^{-(n-1)}$$

Y el último:

$$c(1+i)^{-n}$$

Estos dos últimos depósitos los podemos observar en el Gráfico 18:

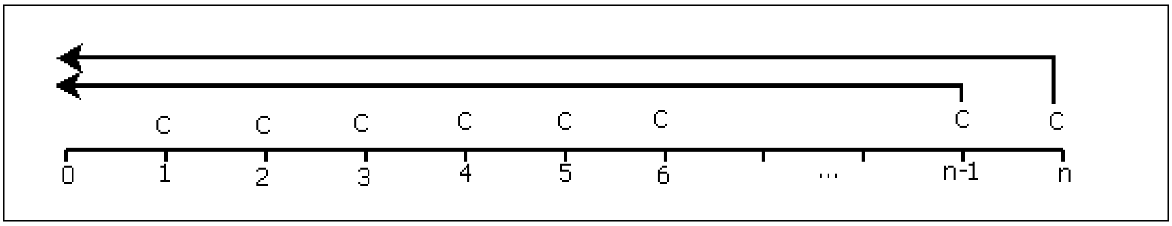


Gráfico 18

V = Valor actual de cuotas constantes y vencidas

Todos los depósitos están ubicados al inicio (momento 0) y el valor actual se obtendrá de la suma de estos importes obtenidos, y que simbolizaremos con V :

$$V = c\left(1+i\right)^{-n} + c\left(1+i\right)^{-(n-1)} + c\left(1+i\right)^{-(n-2)} + \ldots + c\left(1+i\right)^{-3} + c\left(1+i\right)^{-2} + c\left(1+i\right)^{-1} = \sum_{t=1}^{n} c\left(1+i\right)^{-t}$$

Observando la expresión, y sabiendo que todas las cuotas son iguales, podemos extraer como factor común c :

$$V = c\left[\left(1+i\right)^{-n} + \left(1+i\right)^{-(n-1)} + \left(1+i\right)^{-(n-2)} + \ldots + \left(1+i\right)^{-3} + \left(1+i\right)^{-2} + \left(1+i\right)^{-1}\right] = c\sum_{t=1}^{n}\left(1+i\right)^{-t} \qquad (4)$$

O:

$$V = cv^{n} + cv^{(n-1)} + cv^{(n-2)} + \ldots + cv^{3} + cv^{2} + cv^{1} = \sum_{t=1}^{n} cv^{t}$$

La expresión que está entre corchetes en (4), es la suma de los términos de una progresión geométrica creciente, de razón $\left(1+i\right)$, donde la suma de los términos es igual a:

$$\frac{a_n . r - a_1}{r-1} \qquad (5)$$

Es creciente porque cada término es igual al anterior multiplicado por $\left(1+i\right)$.

Por ejemplo: $\left(1+i\right)^{-3}\left(1+i\right) = \left(1+i\right)^{-2}$

Entonces:

$a_n = \left(1+i\right)^{-1}$

$a_1 = \left(1+i\right)^{-n}$

$r = \left(1+i\right)$

Remplazando en (5):

$$\frac{\left(1+i\right)^{-1} .\left(1+i\right) - \left(1+i\right)^{-n}}{\left(1+i\right)-1}$$

Resolvemos la multiplicación del primer término del numerador y la resta en el denominador:

$$\frac{(1+i)^{0}-(1+i)^{-n}}{1+i-1}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-v^{n}}{i}$$

Simbolizaremos la expresión anterior de la siguiente manera:

$$a_{\overline{n}|i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-v^{n}}{i}$$

Finalmente, remplazando en (4)

$$\boxed{V=V_{\overline{n}|i}=c\,a_{\overline{n}|i}=c\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=c\,\frac{1-v^{n}}{i}}$$

Donde:

"V es la suma de los valores actuales de n cuotas constantes, igualmente espaciados y vencidas de $\$c$, a la tasa de interés i".

y

"$a_{\overline{n}|i}$ es la suma de los valores actuales de n cuotas constantes, igualmente espaciados y vencidas de $\$1$, a la tasa de interés i".

Despejando apropiadamente obtenemos el valor de la cuota:

$$\boxed{c=\frac{V}{a_{\overline{n}|i}}=V\,a_{\overline{n}|i}^{-1}=\frac{V.i}{1-v^{n}}}$$

Donde c es cada una de las n cuotas constantes, igualmente espaciadas y vencidas cuya suma de valores actuales es igual a $\$V$ a la tasa de interés i.

Si $V=1$:

$$c=a_{\overline{n}|i}^{-1}=\frac{i}{1-v^{n}}$$

Donde c es cada una de las n cuotas constantes, igualmente espaciadas y vencidas cuya suma de valores actuales es igual a $\$1$ a la tasa de interés i.

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrará explicaciones para utilizar las funciones de la **planilla de cálculo y la calculadora financiera**.

En esta operación financiera de actualización intervienen cuatro elementos $(V, c, n \text{ e } i)$ que pueden obtenerse utilizando calculadora financiera o planilla de cálculo.

Valor Actual de una renta cierta, temporaria, constante, inmediata y anticipada

Hemos podido determinar el valor actual de una renta de cuotas constantes y vencidas. De manera similar podemos trabajar y obtener el valor actual de una renta, con cuotas anticipadas. Partiremos de una renta compuesta por n cuotas constantes y anticipadas, como la que se refleja en el eje temporal del Gráfico 19:

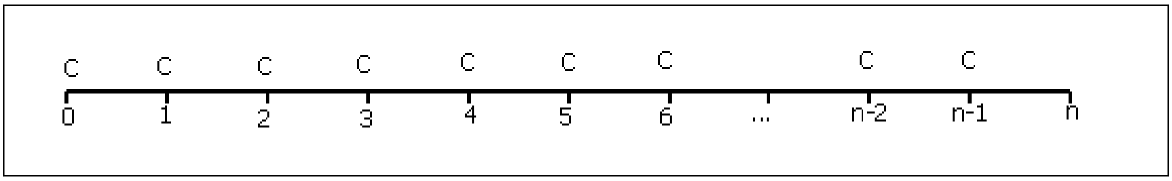


Gráfico 19

De esta renta nos interesa calcular su valor en el momento *0*, por ello actualizaremos cada una de las cuotas considerando que se encuentran al inicio de cada unidad de tiempo por ser anticipadas.

Determinaremos el valor actual del primer depósito:

$$c(1+i)^0 = c$$

ya que:

$$(1+i)^0 = 1$$

En el Gráfico 20:

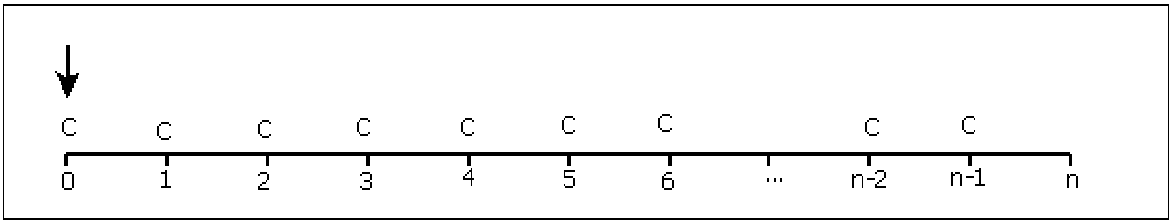


Gráfico 20

la cuota se encuentra ubicada en el momento 0, por lo tanto, su valor actual es c.
El segundo depósito, debe actualizarse por una unidad de tiempo:

$$c(1+i)^{-1}$$

Y el tercero:

$$c(1+i)^{-2}$$

Estas cuotas están representadas en el Gráfico 21:

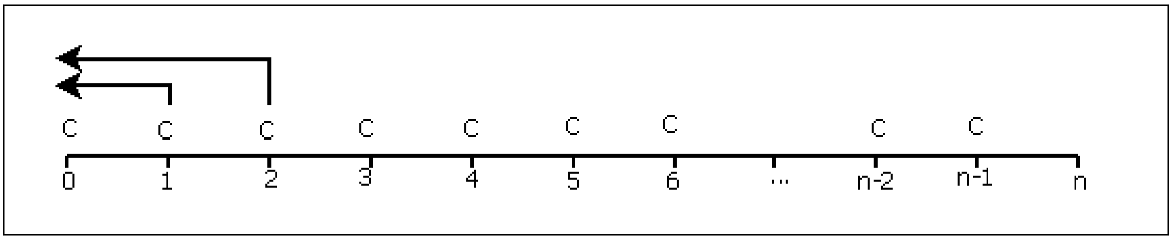


Gráfico 21

Continuamos, de la misma manera, hasta alcanzar el depósito que se realiza al inicio de la unidad de tiempo $n-1$ (momento $n-2$), su valor actual lo obtenemos:

$$c\left(1+i\right)^{-(n-2)}$$

El depósito siguiente es el último y se encuentra al inicio de la última unidad de tiempo, es decir, en el momento $n-1$. Su valor actual es:

$$c\left(1+i\right)^{-(n-1)}$$

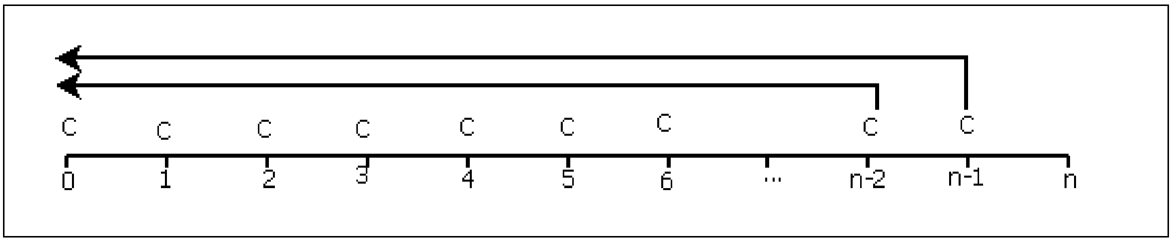


Gráfico 22

El Gráfico 22 refleja el tiempo que es necesario actualizar las últimas dos cuotas que componen la renta.

$\ddot{V}$ = Valor actual de cuotas constantes y vencidas

Finalmente todos los depósitos están ubicados al inicio y el valor actual se obtendrá de la suma de estos valores obtenidos, que simbolizaremos con $\ddot{V}$:

$$\ddot{V}=c\left(1+i\right)^{-(n-1)}+c\left(1+i\right)^{-(n-2)}+\ldots+c\left(1+i\right)^{-3}+c\left(1+i\right)^{-2}+c\left(1+i\right)^{-1}+c\left(1+i\right)^{0}=\sum_{t=0}^{n-1}c\left(1+i\right)^{-t}$$

O:

$$\ddot{V}=cv^{(n-1)}+cv^{(n-2)}+\ldots+cv^{3}+cv^{2}+cv^{1}+cv^{0}+=\sum_{t=0}^{n-1}cv^{t}$$

Extraemos factor común c :

$$\ddot{V}=c\left[\left(1+i\right)^{-(n-1)}+\left(1+i\right)^{-(n-2)}+\ldots+\left(1+i\right)^{-2}+\left(1+i\right)^{-1}+\left(1+i\right)^{0}\right]=c\sum_{t=0}^{n-1}\left(1+i\right)^{-t} \qquad (5)$$

Considerando la expresión que está entre corchetes, notemos se trata de la suma de los términos de una progresión geométrica creciente, de razón $(1+i)$, cuya suma de los términos es igual a:

$$\frac{a_n . r - a_1}{r-1}$$

Remplazamos:

$a_n = (1+i)^0 = 1$

$a_1 = (1+i)^{-(n-1)}$

$r = (1+i)$

Por lo tanto, la suma de los términos de la progresión geométrica resultará:

$$\frac{1.(1+i)-(1+i)^{-(n-1)}}{(1+i)-1}$$

Para obtener una expresión similar a la obtenida para cuotas vencidas, extraemos factor común $(1+i)$ en el numerador y resolvemos la resta en el denominador:

$$\frac{(1+i)\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{1+i-1} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = u\,\frac{1-v^n}{i}$$

Simbolizaremos la última expresión:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = u\,\frac{1-v^n}{i}$$

Finalmente, remplazando en (5)

$$\boxed{\ddot{V} = \ddot{V}_{\overline{n}|\,i} = c\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} = c(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = cu\,\frac{1-v^n}{i}}$$

Donde:

"$\ddot{V}$ es la suma de los valores actuales de n cuotas constantes, igualmente espaciados y anticipadas de $\$c$, a la tasa de interés i".

y

"$\ddot{a}_{\overline{n}|\,i}$ es la suma de los valores actuales de n cuotas constantes, igualmente espaciados y anticipadas de $\$1$, a la tasa de interés i".

Despejando obtenemos el valor de la cuota:

$$c = \frac{\ddot{V}}{\ddot{a}_{\overline{n|}\,i}} = \ddot{V}.\ddot{a}_{\overline{n|}\,i}^{-1} = \frac{\ddot{V}.i}{u\left(1-v^{n}\right)}$$

Donde c es cada una de las n cuotas constantes, igualmente espaciadas y anticipadas cuya suma de valores actuales es igual a $\$\ddot{V}$ a la tasa de interés i.

Si $\ddot{V} = 1$:

$$c = \ddot{a}_{\overline{n|}\,i}^{-1} = \frac{iv}{\left(1-v^{n}\right)}$$

Donde c es cada una de las n cuotas constantes, igualmente espaciadas y anticipadas cuya suma de valores actuales es igual a $\$1$ a la tasa de interés i.

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrará explicaciones para utilizar las funciones de la **planilla de cálculo y la calculadora financiera**.

Cualquiera de los cuatro elementos $(\ddot{V}, c, n \text{ e } i)$ que intervienen en esta operación pueden obtenerse utilizando calculadora financiera o planilla de cálculo.

En los siguientes ejercicios podremos aplicar lo que hemos aprendido hasta aquí acerca del valor actual de una renta:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 9

La empresa VERTEX SRL, compra materias primas por $55.000, financiando la operación en 25 cuotas mensuales y vencidas a una tasa de interés del 0,019 mensual. Calcular el valor de cada cuota.

Rta.: $2.784,16

EJERCICIO 10

Te regalan hoy cierta suma de dinero. Decides gastar $780, y el resto lo depositas, a una tasa de interés nominal de 0,12 anual con capitalización para 30 días, que te permite retirar $800 vencidos y durante 7 unidades de tiempo. ¿Cuál es el importe que recibiste de regalo?

Rta.:$6.165,45

EJERCICIO 11

Un comerciante mayorista vendió mercadería cuyo valor de contado es de $6.000 cobrando con dos cheques de pago diferido de igual importe a 30 y 60 días respectivamente por $3.162,95 cada uno.

¿Cuál es la tasa de interés para 30 días aplicada a la financiación?

Rta.:0,036 para 30 días

EXPLICANDO
COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de estos ejercicios, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

EJERCICIO 12
Determinar el importe que se debe recibir hoy en concepto de una cesión de un contrato de alquiler por 4 años que especifica pagos al inicio de cada mes de $1.250 y dicho convenio establece que el interés pactado es el 2% mensual.

Rta.:$39.108,23

Relaciones entre el valor actual de cuotas vencidas y el valor actual de cuotas anticipadas

Hemos determinado las fórmulas de cálculo que nos permiten obtener el valor actual de una renta de cuotas vencidas o anticipadas. Es posible encontrar algunas relaciones entre los valores actuales y las cuotas que más adelante nos serán de utilidad.
Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.6:
Una persona recibirá una renta anual de $30.000 durante 10 años. La tasa de interés de la operación es 0,09 anual.
Determinar el valor actual de la renta.

Consideraremos:

Cuota vencida:

$$V = 30.000\, a_{\overline{10|}\,0,09} = 30.000 \frac{1-(1+0,09)^{-10}}{0,09} = 192.529,73$$

Cuota anticipada:

$$\ddot{V} = 30.000\, \ddot{a}_{\overline{10|}\,0,09} = 30.000(1+0,09)\frac{1-(1+0,09)^{-10}}{0,09} = 209.857,41$$

Observemos que:

$$192.529,73 < 209.857,41$$

Por lo tanto:

$$V < \ddot{V}$$

Al comparar las fórmulas de cálculo de cada de los valores actuales:

$$V = c\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\ddot{V} = c(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Y operando sobre $\ddot{V}$:

$$\ddot{V} = c(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = c\underbrace{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}_{V}(1+i)$$

$$\ddot{V} = V(1+i)$$

Es posible afirmar que, dado un conjunto de n cuotas, su valor actual considerando cuotas anticipadas $(\ddot{V})$ es mayor al valor actual con cuotas vencidas (V) y que $\ddot{V}$ es igual a V capitalizado por una unidad de tiempo.

$\ddot{V}$ es mayor ya que las cuotas depositadas al inicio de cada unidad de tiempo se actualizan por una unidad de tiempo menos que cada cuota vencida, que se encuentran al final de cada unidad de tiempo.

Observemos el Gráfico 23:

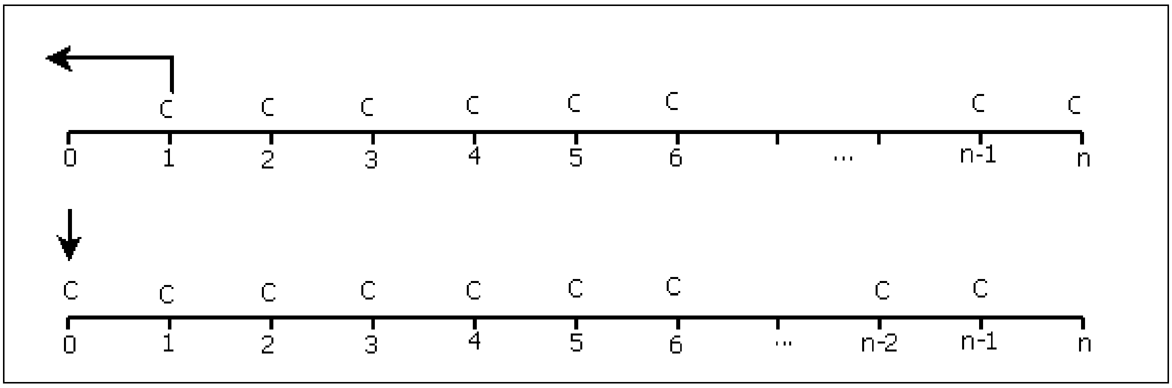


Gráfico 23

Para obtener el valor actual (en el momento 0) de la primera cuota vencida, se actualiza por una unidad de tiempo. La primera anticipada, ya está ubicada en el momento 0, por lo tanto no es necesario actualizarla.

Si analizamos la segunda cuota, a través del Gráfico 24:

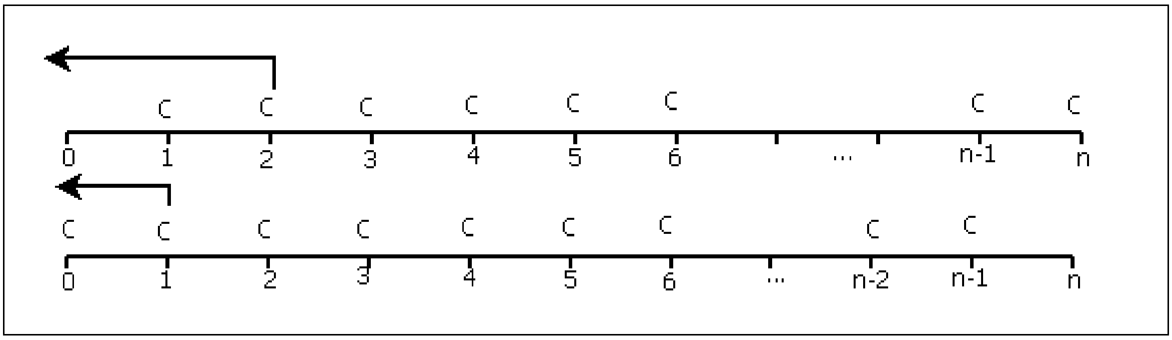


Gráfico 24

La segunda cuota vencida, depositada al final de la segunda unidad de tiempo, es necesario actualizarla por 2 unidades de tiempo para obtener su valor en el momento 0. Para la segunda cuota anticipada, depositada al inicio de la segunda unidad de tiempo, obtener su valor en el momento 0 implica actualizarla por una unidad de tiempo.

Así sucesivamente para cada cuota, incluso la última (Gráfico 25):

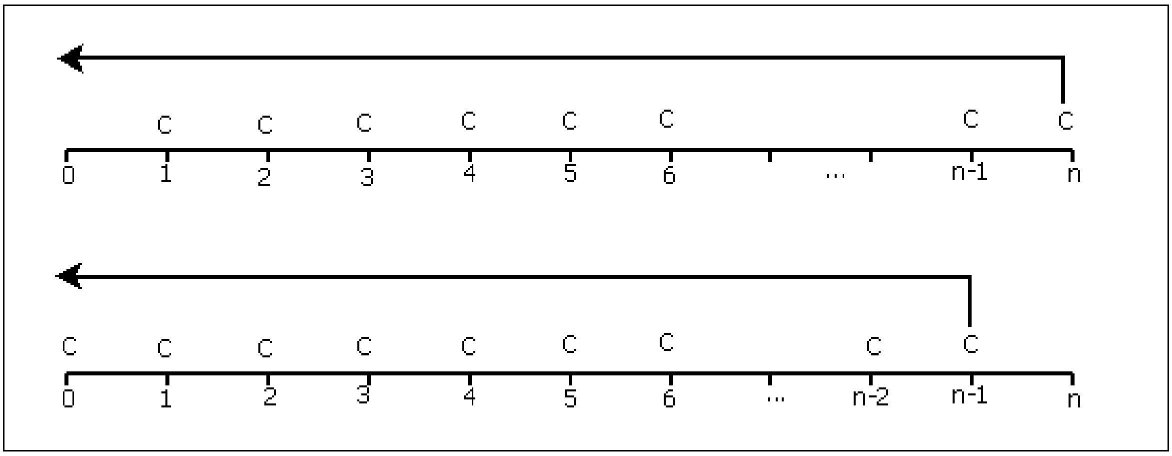


Gráfico 25

La última cuota vencida se actualiza entonces por n unidades de tiempo y la anticipada por $n-1$.

Podemos concluir afirmando que cada cuota vencida se actualiza por una unidad de tiempo más que cada cuota anticipada. Por lo tanto, el valor actual de cada cuota vencida será menor que el valor actual de cada cuota anticipada.

Volviendo a los resultados obtenidos en el Ejemplo 4.6:

$$V = 192.529,73$$
$$\ddot{V} = 209.857,41$$

$$192.529,73(1+0,09) = 209.857,41$$

Además, si:

$$V(1+i) = \ddot{V}$$

Entonces:

$$V = \frac{\ddot{V}}{(1+i)}$$

Lo que nos permite afirmar que el valor actual de cuotas vencidas es igual al valor actual en una unidad de tiempo del valor actual de cuotas anticipadas.

Podemos realizar un análisis similar trabajando con cuotas de $1:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = u\frac{1-v^n}{i} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t = v^0 + v^1 + v^2 + v^3 + \ldots + v^{(n-2)} + v^{(n-1)}$$

$$a_{\overline{n|}i}=\frac{1-v^n}{i}=\sum_{t=1}^{n}v^t=v^1+v^2+v^3+\ldots+v^{(n-2)}+v^{(n-1)}+v^n$$

En esta última expresión extraemos factor común v:

$$a_{\overline{n|}i}=v^1+v^2+v^3+\ldots+v^{(n-2)}+v^{(n-1)}+v^n=v\underbrace{\left[v^0+v^1+v^2+v^3+\ldots+v^{(n-2)}+v^{(n-1)}\right]}_{\ddot{a}_{\overline{n|}i}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a_{\overline{n|}i}=\ddot{a}_{\overline{n|}i}\,v}$$

Y:

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}i}=a_{\overline{n|}i}\,u}$$

Verificando para cuotas de \$1 la misma relación que determinamos para la cuota de $\$c$.

Otra relación interesante para analizar es la siguiente:

Si tenemos:

$$a_{\overline{n|}i}=v^1+v^2+v^3+\ldots+v^{n-1}+v^n$$

En el caso de tratarse de $n-1$ cuotas de \$1:

$$a_{\overline{n-1|}i}=v^1+v^2+v^3+\ldots+v^{n-1}$$

Por otra parte, si tenemos n cuotas anticipadas:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i}=v^0+\underbrace{v^1+v^2+\ldots+v^{n-2}+v^{n-1}}_{a_{\overline{n-1|}i}}$$

Como $v^0=1$:

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}i}=1+a_{\overline{n-1|}i}}$$

Relación que puede enunciarse como: "el valor actual de n cuotas anticipadas de \$1 es igual al valor actual de $n-1$ cuotas vencidas más \$1".

O bien:

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}i}-1=a_{\overline{n-1|}i}}$$

Para finalizar el estudio de estas relaciones para los valores actuales de cuotas constantes, analizaremos el importe de la cuota, si esta es vencida o si es anticipada, para un determinado valor actual, cierta cantidad de cuotas y a una tasa de interés dada. La cuota en cada caso es:

Cuota vencida:

$$c = V . a_{\overline{n|}\, i}^{-1} = \frac{V\, i}{\left(1 - v^n\right)}$$

Cuota anticipada:

$$c = \ddot{V} . \ddot{a}_{\overline{n|}\, i}^{-1} = \frac{\ddot{V}\, i}{u\left(1 - v^n\right)}$$

Si el valor actual es el mismo, es decir:

$$\ddot{V} = V$$

La cuota anticipada será:

$$c = \frac{\ddot{V}\, i}{u\left(1 - v^n\right)} = \underbrace{\frac{\ddot{V}\, i}{\left(1 - v^n\right)}}_{\substack{c \\ vencida}} \cdot \frac{1}{\left(1 + i\right)}$$

La única diferencia entre ambas expresiones, es el factor $\left(1 + i\right)$ que tenemos en el denominador del cálculo de la cuota anticipada. Entonces, podemos indicar que:

$$c\left(anticipada\right) = \frac{c\left(vencida\right)}{\left(1 + i\right)}$$

La cuota anticipada es el valor actual de la cuota vencida en una unidad de tiempo.

También podemos expresar que:

$$c\left(vencida\right) = c\left(anticipada\right)\left(1 + i\right)$$

La cuota vencida es el valor final de la cuota anticipada, en una unidad de tiempo.

Les proponemos los siguientes ejercicios donde podremos observar y aplicar las relaciones analizadas:

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios utilizando las funciones financieras de la **planilla de cálculo**. Les sugerimos consultarlas una vez que hayan intentado resolverlos.

EJERCICIO 13

Determinar el valor actual de una renta de 6 cuotas constantes, depositadas cada 45 días, de $440 cada una y a una tasa de interés de 0,022 para 45 días. Realice el cálculo con:

a) Cuota anticipada

b) Cuota vencida

Compare y analice los resultados obtenidos en los incisos a) y b)

Rta.: a) $2.501,94 b) $2.448.08

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 14
Si se depositan hoy en una cuenta $2.000, ¿cuál será el importe constante que se podrá extraer cada 30 días y durante 12 unidades de tiempo, si la tasa enunciada es 0,17033 nominal anual?
Para realizar los cálculos considere:
a) Cuota anticipada
b) Cuota vencida
Compare y analice los resultados obtenidos en los incisos a) y b)

Rta.: a)$179,70 b)$182,22

EJERCICIO 15
A partir del ejercicio anterior, determinar la tasa de interés nominal anual con capitalización cada 30 días a la que se debería realizarse la colocación para que el valor de la extracción vencida fuera de $200.

Rta.: 0,355614 anual nominal con cap. 30 días

EJERCICIO 16
Determinar el número de cuotas bimestrales y vencidas de $1.672,40 que permiten devolver $9.800 recibidos en el día de la fecha, a una tasa de interés mensual de 0,023.

Rta.: 7

Relación entre el Valor Final y el Valor Actual de cuotas constantes

Finalmente, es posible verificar la relación existente entre el valor actual y el valor final de una renta de cuotas constantes.
Dado un conjunto de cuotas constantes y vencidas, hemos podido determinado su valor final y su valor actual:

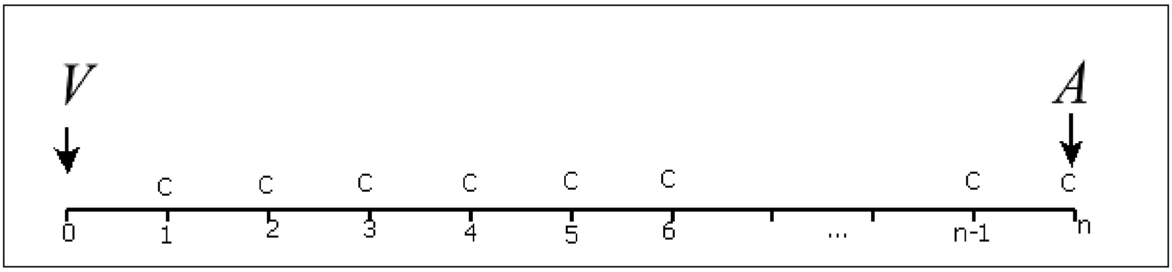


Gráfico 26

En el Gráfico 26 se encuentra representado un conjunto de n cuotas vencidas, del cual calculamos su valor final (ubicado en el momento n) y su valor actual (ubicado en el momento 0).

Por fórmula de monto, sabemos que:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

Por lo tanto:

$$A = V\left(1+i\right)^{n}$$

Comprobemos remplazando en cada caso por su fórmula correspondiente:

$$c\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i} = c\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}\left(1+i\right)^{n}$$

Trabajamos en el segundo miembro de la igualdad, multiplicando el numerador por $\left(1+i\right)^{n}$:

$$c\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i} = c\frac{\left(1+i\right)^{n}-\left(1+i\right)^{-n}\left(1+i\right)^{n}}{i}$$

Resolviendo:

$$c\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i} = c\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i}$$

lo que nos permite verificar la igualdad planteada.

Y si despejamos de la fórmula de monto el valor de $f\left(0\right)$:

$$f\left(0\right) = f\left(n\right)\left(1+i\right)^{-n}$$

Entonces:

$$V = A\left(1+i\right)^{-n}$$

De manera similar es posible justificar, para un conjunto de cuotas anticipadas y constantes, que:

$$\ddot{A} = \ddot{V}\left(1+i\right)^{n} \qquad \text{y} \qquad \ddot{V} = \ddot{A}\left(1+i\right)^{-n}$$

Valor Actual de una renta cierta, temporaria, constante, diferida y vencida

Al comenzar esta unidad y clasificar las rentas, indicamos que las diferidas son aquellas en donde el pago o depósito de las cuotas no comienza en la unidad de tiempo inmediata posterior al inicio de la operación, sino que transcurre una cierta cantidad de unidades de tiempo para su pago, que llamaremos “período de diferimiento” y que simbolizaremos con k.

De manera general representamos en un eje temporal una renta diferida con cuotas vencidas de la siguiente manera:

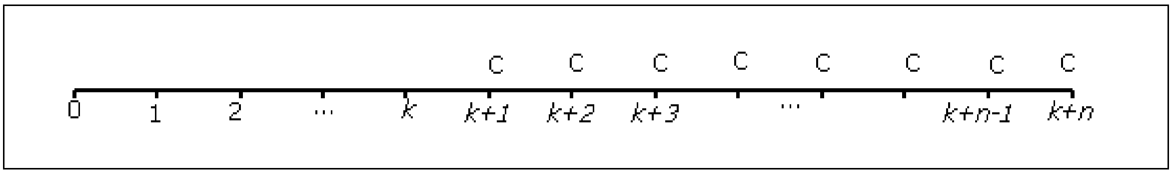


Gráfico 27

La cantidad de cuotas se mantiene en n, pero varía la cantidad de unidades de tiempo de la operación porque es necesario considerar las unidades de tiempo de diferimiento.
Nuestro objetivo será determinar el valor actual de una renta como la presentada en el Gráfico 27.

k = cantidad de unidades de tiempo de diferimiento
${}^{k}/V$ = valor actual de un conjunto de cuotas contantes y vencidas, diferidas en k unidades de tiempo.

Simbolizaremos con ${}^{k}/V$ al valor actual de un conjunto de cuotas diferidas, contantes y vencidas. El símbolo "${}^{k}/$" nos indica que existen k unidades de tiempo de diferimiento.

Comenzaremos por actualizar la primera cuota:

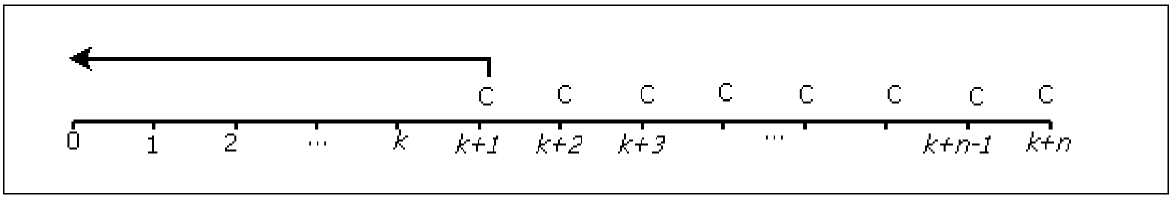


Gráfico 28

De lo observado en el Gráfico 28, debemos actualizar la primera cuota por $k+1$ unidades de tiempo:

$$c\left(1+i\right)^{-(k+1)}$$

El Gráfico 29 nos muestra el tiempo por el cual debemos actualizar la segunda cuota:

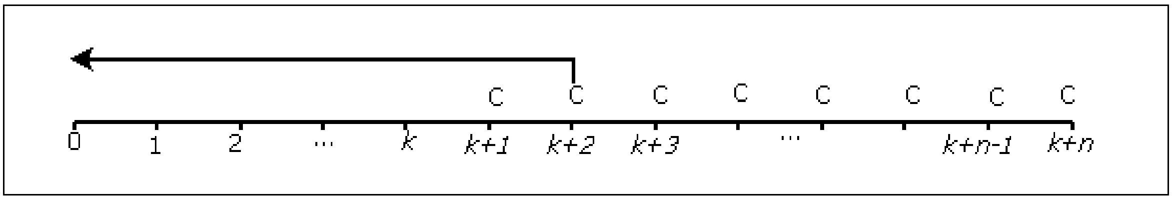


Gráfico 29

Por lo tanto, para obtener el valor actual de la segunda cuota haremos:

$$c\left(1+i\right)^{-(k+2)}$$

Se continúa con las cuotas restantes hasta arribar a las últimas dos (Gráfico 30):

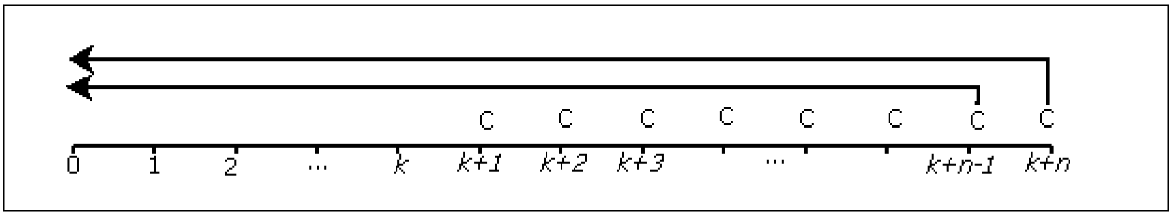


Gráfico 30

El valor actual de estás últimas dos cuotas será, respectivamente:

$$c\left(1+i\right)^{-(k+n-1)}$$

y:

$$c\left(1+i\right)^{-(k+n)}$$

Finalmente, para obtener el valor actual deberemos sumar los importes determinados para cada una de las cuotas y calcular el valor actual de toda la renta:

$${}^{k}/V = c\left(1+i\right)^{-(k+n)} + c\left(1+i\right)^{-(k+n-1)} + c\left(1+i\right)^{-(k+n-2)} + \ldots + c\left(1+i\right)^{-(k+3)} + c\left(1+i\right)^{-(k+2)} + c\left(1+i\right)^{-(k+1)}$$

También:

$${}^{k}/V = cv^{(k+n)} + cv^{(k+n-1)} + cv^{(k+n-2)} + \ldots + cv^{(k+3)} + cv^{(k+2)} + cv^{(k+1)} = \sum_{t=1}^{n} cv^{k+t}$$

Extraemos factor común cv^k :

$${}^{k}/V = cv^{k}\underbrace{\left[v^{n} + v^{(n-1)} + v^{(n-2)} + \ldots + v^{3} + v^{2} + v^{1}\right]}_{a_{\overline{n}|i}}$$

Por lo tanto:

$${}^{k}/V = cv^{k} a_{\overline{n}|i} = \underbrace{c\, a_{\overline{n}|i}}_{V}\, v^{k}$$

$${}^{k}/V = V\,.v^{k}$$

Llegamos a la misma expresión si, frente a una renta diferida, calculamos el valor actual de las n cuotas vencidas e inmediatas y luego actualizamos ese importe al momento 0 (Gráfico 31):

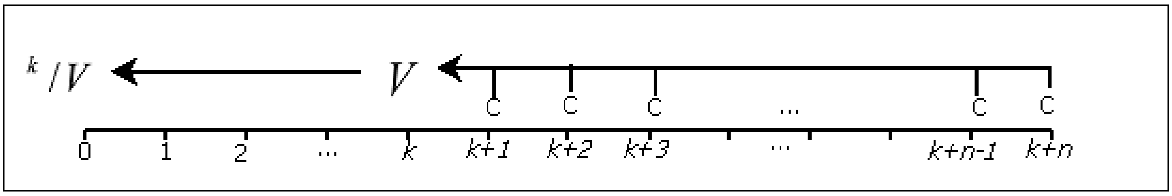


Gráfico 31

En primer lugar se calcula:

$$V = ca_{\overline{n}|i}$$

El paso siguiente es actualizar este valor al momento 0, aplicando el factor de actualización, por las k unidades de tiempo que hay entre el momento 0 y el momento k. Durante las unidades de tiempo existentes entre ambos valores no hay pago o depósito de cuotas, sólo hay transcurso del tiempo:

$$^{k}/V = V.v^{k}$$

Finalmente:

$$\boxed{^{k}/V = cv^{k}a_{\overline{n}|i}}$$

Donde:

$^{k}/V$ es la suma de los valores actuales de n cuotas constates, igualmente espaciadas y vencidas de $\$c$, diferidas por k unidades de tiempo y a la tasa de interés i.

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrará explicaciones para utilizar las funciones **la calculadora financiera**.

En la fórmula observamos cinco componentes $\left(^{k}/V, k, c, n, i\right)$. Será necesario conocer 4 de ellos para determinar el valor desconocido. Realizando los despejes adecuados y trabajando con la calculadora financiera estaremos en condiciones de calcular cualquiera de los elementos.

Valor Actual de una renta cierta, temporaria, constante, diferida y anticipada

De manera general, podemos graficar una renta diferida con cuotas anticipadas de la siguiente manera:

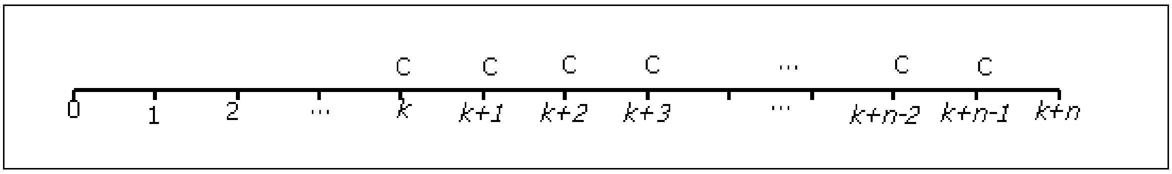


Gráfico 32

$^{k}/\ddot{V}$ = valor actual de un conjunto de cuotas contantes y anticipadas, diferidas en k unidades de tiempo.

El eje temporal del Gráfico 32 muestra las n cuotas anticipadas y constantes, donde el pago de las mismas se encuentra diferido por k unidades de tiempo. Denotaremos con $^{k}/\ddot{V}$ el valor actual de esta renta, que se calcula:

$$^{k}/\ddot{V} = c(1+i)^{-(k+n-1)} + c(1+i)^{-(k+n-2)} + \ldots + c(1+i)^{-(k+3)} + c(1+i)^{-(k+2)} + c(1+i)^{-(k+1)} + c(1+i)^{-k}$$

También:

$$^{k}/\ddot{V} = cv^{(k+n-1)} + cv^{(k+n-2)} + \ldots + cv^{(k+3)} + cv^{(k+2)} + cv^{(k+1)} + cv^{k} = \sum_{t=0}^{n-1} cv^{k+t}$$

Extraemos factor común cv^k :

$$ {}^{k}/\ddot{V} = cv^k \underbrace{\left[v^{(n-1)} + v^{(n-2)} + \ldots + v^3 + v^2 + v^1 + v^0 \right]}_{\ddot{a}_{\overline{n|}i}} $$

Por lo tanto:

$$ {}^{k}/\ddot{V} = cv^k \ddot{a}_{\overline{n|}i} $$

${}^{k}/\ddot{V}$ es la suma de los valores actuales de n cuotas constates, igualmente espaciadas y anticipadas de $\$c$, diferidas por k unidades de tiempo y a la tasa de interés i.

A continuación les proponemos los siguientes ejercicios:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 17

Se ofrece a la venta un artículo del hogar, cuyo precio de contado es de $525, a pagar en 4 cuotas vencidas, cada 30 días, abonando la primera cuota 90 días después de realizada la compra. Determinar el valor de la cuota si la tasa de interés aplicada a la financiación es 0,032 para 30 días.

Rta.: $151,14

EJERCICIO 18

La venta de una computadora se financia en 8 cuotas vencidas de $215 cada una, a pagar cada 30 días. La tasa de interés es 0,023 mensual y la primera cuota se paga a los 120 días. Determinar el precio de contado.

Rta.: $1.455,62

EJERCICIO 19

Indicar el número de cuotas bimestrales y vencidas de $310,30 que permiten amortizar un préstamo personal de $1500 a una tasa nominal anual de 0,30, si el pago de la primera cuota se efectúa al final del cuarto mes.

Rta.: 6

EJERCICIO 20

Se amortiza una deuda de $13.800 en 5 cuotas mensuales y vencidas de $3.182,39. Si la tasa de interés es 0,018 mensual, indicar al final de qué mes se comienzan a pagar las cuotas.

Rta.:Al final del 6° mes

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de estos ejercicios, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

EJERCICIO 21

Una empresa necesita adquirir una nueva máquina para su planta de producción, que tiene un precio de contado de $25.300. El fabricante de dicha máquina le propone, el pago de una entrega inicial de $5.300 y abonar el saldo restante en 7 cuotas iguales y vencidas de $3.745, cada 30 días, pagando la primera a los 60 días de la compra.

Obtener la tasa de interés aplicada por el comerciante.

Rta.: 0,0569036 para 30 días

Valor Actual de una Renta Perpetua

Una renta perpetua es aquella que tiene un número indefinido de pagos o depósitos, que se prolongan a lo largo del tiempo.

Al no tener un número definido de cuotas, no podemos determinar su valor final, pero si es posible calcular su valor actual.

Partiendo del valor actual de una renta temporaria de cuotas constantes y vencidas:

$$V = c a_{\overline{n|}\, i} = c \frac{1 - v^n}{i}$$

Para una renta perpetua consideramos que el número de cuotas tiende a infinito, por lo tanto:

$$V_\infty = \lim_{n \to \infty} c \frac{1 - v^n}{i} = c \lim_{n \to \infty} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{c}{i}$$

Al tomar límite cuando $n \to \infty$, $v^n \to 0$ y obtenemos una expresión sencilla para el cálculo del valor actual de esta renta:

$$\boxed{V_\infty = \frac{c}{i}}$$

Para determinar la cuota:

$$\boxed{c = V_\infty . i}$$

La tasa de interés:

$$\boxed{i = \frac{c}{V_\infty}}$$

Ejemplo 4.7
Determinar el valor actual de una renta perpetua de cuota anual, constante y vencida de \$4.500. La tasa de interés de la operación es 0,14 anual.

$$V_\infty = \frac{4.500}{0{,}14} = 32.142{,}86$$

Este cálculo sencillo de rentas perpetuas puede aplicarse a casos en donde tengamos un número alto de cuotas.
Si en el ejemplo 4.7 trabajáramos con $n = 100$:

$$V = 4.500 a_{\overline{100}|0,14} = 32.142,79$$

Acercándonos al valor que obtuvimos considerando que se trataba de una perpetuidad.

Trabajaremos en los siguientes ejercicios con rentas perpetuas:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 22
Una persona decide legar a una fundación una renta anual a perpetuidad colocando en una entidad financiera la suma de $1.000.000 a una tasa de interés del 0,08 anual.
Determinar el importe que recibirá la fundación al final de cada año.

Rta.: $80.000

EJERCICIO 23
El propietario de un campo decide ceder a perpetuidad la percepción del arrendamiento semestral y vencido de $18.000, a cambio de percibir su valor de contado, aplicándose a la operación una tasa de interés anual de 0,149184.
Calcular el valor actual de la renta a ceder.

Rta.: $250.000

EJERCICIO 24
Una fundación dedicada a estimular la lectura en niños y adolescentes decide establecer un premio anual a la mejor iniciativa propuesta por bibliotecas populares. Para ello deposita en una entidad financiera $250.000, que permitirá un premio anual por $31.250. ¿Cuál es la tasa de interés anual que corresponde a la operación?

Rta.: 0,125 anual

Sistemas de Amortización de Deudas

Comenzaremos indicando que:
"Amortizar una deuda es la operación por la que una parte, que llamaremos deudor se compromete a devolver en un momento posterior, el importe recibido más los intereses correspondientes, en contraprestación a un determinado importe (en efectivo, bienes o servicios), recibido de la otra parte, que llamaremos acreedor."

En toda operación de préstamo tendremos, por lo menos, dos partes:
- El Deudor
- El Acreedor

Llamamos deuda, que simbolizaremos con V, a la suma (en dinero, bienes o servicios) que el acreedor entrega al deudor en el momento cero. El compromiso del deudor es la devolución de ese importe más los intereses, en un momento posterior en el tiempo. Esa devolución puede ser en un importe único, o en importes parciales.

Cualquiera sea la modalidad, para que la operación sea equitativa financieramente se debe verificar la siguiente igualdad:

$$V = \sum_{t=1}^{n} c_t (1+i)^{-t}$$

Simbolizamos con:
$V =$ deuda.
$c_t =$ cuota que deberá abonar el deudor en el momento t.
$i =$ tasa de interés de la operación, que verifica la igualdad planteada.

Esta expresión nos indica que el valor actual de la obligación del acreedor (primer miembro de la igualdad, V) debe ser igual al valor actual de los compromisos del deudor (segundo miembro).

Indicamos anteriormente que el deudor puede cumplir su obligación:
- Con pago único
- Con pagos múltiples

En el primer caso, el importe a pagar por parte del deudor se calcula aplicando la fórmula de monto:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

Remplazando:

$$\text{Importe a pagar} = V(1+i)^n$$

Ejemplo 4.8
Un préstamo bancario por \$5.000 se deberá pagar en 90 días y la tasa de interés de la operación es 0,025 para 30 días.
El importe del pago para amortizar la deuda a los 90 días será:

$$\text{Importe a Pagar} = 5.000(1+0,025)^3$$
$$\text{Importe a Pagar} = 5.384,45$$

El importe a pagar tiene incluido:
- Los \$5.000 destinados a devolver el capital prestado, llamado pago principal o amortización.
- Los \$384,45 destinados a abonar el precio (intereses) por parte del deudor por haber contado con 90 días para devolver el préstamo obtenido.

Y podemos indicar que V es:

$$V = \frac{5.834,45}{(1+0,025)^3} = 5.834,45(1+0,025)^{-3} = 5.000$$

Esta expresión nos indica que el valor de la deuda en el momento cero es igual al valor actual del pago a realizar en el momento n. Es decir, si al pago que realizará el deudor lo actualizamos (deduciéndole los intereses) obtenemos el importe prestado.

En el segundo caso, el importe a pagar por parte del deudor está fraccionado en partes, que se abonarán en distintos momentos del tiempo, y que llamaremos cuotas. Una forma alternativa de expresar esta modalidad es la siguiente:

$$V = c_1(1+i)^{-1} + c_2(1+i)^{-2} + c_3(1+i)^{-3} + ... + c_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + c_n(1+i)^{-n}$$

ó

$$V = c_1 v^1 + c_2 v^2 + c_3 v^3 + \dots + c_{n-1} v^{(n-1)} + c_n v^n = \sum_{t=1}^{n} c_t v^t$$

A lo largo de este módulo y del siguiente, analizaremos distintas variantes: cuotas constantes, cuotas variables, inmediatas o con período de diferimiento, etc.

Sistema de Amortización de Deudas de Cuota Constante Composición de la Cuota

Este es uno de los sistemas de amortización más utilizados, se lo denomina también Sistema Francés y su característica principal es que la deuda se amortiza con el pago de cierta cantidad de cuotas constantes.

Debido a esta característica en el comportamiento de la cuota, y como ya hemos determinado el valor actual de un conjunto de cuotas constantes y vencidas:

$$V = c a_{\overline{n|}\, i}$$

Precisamente, el sistema de amortización de deudas de cuota constante es una de las aplicaciones más comunes de este valor actual.

Ejemplo 4.9
Un préstamo bancario por $5.000 se deberá pagar en tres cuotas constantes y vencidas, cada 30 días y la tasa de interés de la operación es 0,025 para 30 días.
El importe de cada cuota para amortizar la deuda será $1750,69, ya que:

$$5.000 = 1.750,69 a_{\overline{3|}\, 0,025}$$

Características de este sistema de amortización:
V = es la deuda y se obtiene:

$$V = c a_{\overline{n|}\, i} = c \frac{1 - v^n}{i}$$

$c =$ es la cuota

Por definición de este sistema sabemos que las cuotas son iguales:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n$$

Por lo tanto simplemente la simbolizamos con c.

Cada cuota está formada por dos componentes: amortización e interés.

Entonces, una cuota cualquiera c_r será:

$$c_r = t_r + I_r$$

$t_r =$ Amortización contenida en la cuota r
$I_r =$ Interés contenido en la cuota r

$t_r =$ Amortización. Es la parte de la cuota destinada a ir devolviendo el importe original de la deuda.

$I_r =$ Interés. El interés está destinado a abonar el costo financiero de una deuda cuyo pago se realiza en cuotas. El interés contenido en cada cuota se calcula sobre el saldo de la deuda al inicio de la unidad de tiempo respectiva.

Se define como el saldo de una deuda, al importe adeudado en un momento determinado del plazo de amortización. A medida que transcurre el tiempo, el sucesivo pago de cuotas hace que la deuda disminuya.
Simbolizaremos el saldo con S.

Determinación del Interés:
Para determinar el interés contenido en la primera cuota, debemos considerar que el saldo asciende a toda la deuda, porque aún no se ha realizado ningún pago:

$$I_1 = S_0.i = V.i \qquad (6)$$

Para calcular el interés de la segunda cuota, es necesario tener en cuenta que ya se pagó la primera cuota, y esa cuota contenía la primera amortización (t_1), por lo tanto la deuda al inicio de la segunda unidad de tiempo es menor y, en consecuencia, será menor el interés:

$$I_2 = S_1.i = (S_0 - t_1)i$$

Para I_3, debe tenerse en cuenta que ya se pagó primera y segunda cuota, y estas contenían la primera y la segunda amortización $(t_1 \; y \; t_2)$, por lo tanto la deuda al inicio de la tercera unidad de tiempo es menor y también lo es el interés:

$$I_3 = S_2.i = (S_0 - t_1 - t_2)i$$

De la misma manera calculamos los intereses de las cuotas siguientes hasta llegar al interés de la última cuota:

$$I_n = S_{n-1}.i = (S_0 - t_1 - t_2 - t_3 - \ldots - t_{n-1})i = \left(S_0 - \sum_{p=1}^{n-1} t_p\right)i$$

En general, podemos indicar el cálculo del interés contenido en cualquier cuota como:

$$\boxed{I_r = S_{r-1}.i}$$

El interés contenido en c_r es igual al saldo al inicio de la unidad de tiempo r por la tasa de interés de la operación.

Podemos concluir indicando que el interés contenido en las sucesivas cuotas es decreciente:

$$I_1 > I_2 > I_3 > \ldots > I_n$$

Determinación de la amortización:
A continuación, analizaremos el comportamiento de la amortización.
Si el interés es decreciente, la amortización necesariamente será creciente a fin de mantener la cuota constante.
Por lo tanto:

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$$

Veamos como obtenemos la amortización contenida en cada cuota:
Sabemos que:

$$c_r = t_r + I_r$$

Despejando:

$$t_r = c_r - I_r$$

Para la primera cuota:

$$t_1 = c - I_1$$

Remplazando a I_1 por la expresión que obtuvimos en (6):

$$t_1 = c - I_1 = c - (S_0.i) = c - (V.i)$$

Remplazamos a V por su fórmula de cálculo:

$$V = c\frac{1-v^n}{i}$$

Entonces:

$$t_1 = c - (V.i) = c - \left(c\frac{1-v^n}{i}i\right)$$

En el segundo término multiplicamos c por el numerador. Además simplificamos la tasa de interés:

$$t_1 = c - \left(c\frac{1-v^n}{i}i\right) = c - \left(\frac{c-cv^n}{\cancel{i}}\cancel{i}\right) = c - c + cv^n$$

Al restar $c-c$, nos quedará:

$$t_1 = cv^n$$

Esta expresión que hemos obtenido, es la amortización contenida en la primera cuota, que se obtiene multiplicando la cuota por el factor de actualización para n unidades de tiempo.

Revisemos el cálculo que habíamos realizado para el interés contenido en las sucesivas cuotas:

$$I_1 = S_0.i = V.i$$

(recordemos que $V = S_0$)

$$I_2 = S_1.i = (V - t_1)i$$

Distribuyendo *i:*

$$I_2 = Vi - t_1 i$$

Vemos que el interés contenido en la primera cuota es igual al producto de toda la deuda por la tasa de interés y el interés contenido en la segunda cuota es igual al producto entre la deuda, menos la primera amortización, por la tasa de interés.
La diferencia entre ambos es:

$$I_1 - I_2 = Vi - (Vi - t_1 i) = \cancel{Vi} - \cancel{Vi} + t_1 i = t_1 i$$

La diferencia entre el interés contenido en la primera y la segunda cuota es el producto entre la amortización contenida en la primera cuota por la tasa de interés.
Si $t_1 i$ es el importe en que disminuye el interés de la primera a la segunda cuota, ese será el importe en que deberá aumentar la amortización, para que la cuota sea constante. Es decir:

$$t_2 = t_1 + t_1 i$$

Extraemos factor común t_1 en el segundo miembro de la igualdad:

$$t_2 = t_1(1 + i)$$

Por lo tanto, la amortización contenida en la segunda cuota es igual a la amortización contenida en la primera, capitalizada por una unidad de tiempo.
En la tercera cuota:

$$I_3 = (S_0 - t_1 - t_2)i = (V - t_1 - t_2)i = Vi - t_1 i - t_2 i$$

Si sabemos que:

$$I_2 = Vi - t_1 i$$

Remplazamos en el último miembro de la igualdad:

$$I_3 = I_2 - t_2 i$$

Resolvemos la diferencia entre I_2 e I_3:

$$I_2 - I_3 = t_2 i$$

$t_2 i$ es lo que disminuye el interés entre la segunda y tercera cuota, y será el importe en que crecerá la amortización para mantener constante el valor de la cuota.
Por lo tanto:

$$t_3 = t_2 + t_2 i$$

Extraemos factor común t_2 en el segundo miembro de la igualdad:

$$t_3 = t_2\left(1+i\right)$$

La amortización contenida en la tercera cuota es igual a la amortización contenida en la segunda cuota, capitalizada por una unidad de tiempo.

Si:

$$t_3 = t_2\left(1+i\right)$$

Reemplazamos a t_2 por:

$$t_2 = t_1\left(1+i\right)$$

Obtenemos:

$$t_3 = t_1\left(1+i\right)\left(1+i\right) = t_1\left(1+i\right)^2$$

Hemos expresado la amortización contenida en la tercera cuota en función de la primera amortización.

Si ahora queremos indicar la fórmula de cálculo de la amortización contenida en la cuarta cuota, en función de la amortización anterior (t_3):

$$t_4 = t_3\left(1+i\right)$$

Y en función de la primera amortización (t_1):

$$t_4 = t_1\left(1+i\right)^3$$

Al llegar a la última cuota, la amortización (t_n) contenida en ella será:

En función de la amortización anterior (t_{n-1}):

$$t_n = t_{n-1}\left(1+i\right)$$

En función de la primera amortización (t_1):

$$t_n = t_1\left(1+i\right)^{n-1}$$

Generalizando, para una cuota cualquiera c_r,

En función de la amortización anterior (t_{r-1}):

$$t_r = t_{r-1}\left(1+i\right)$$

En función de la primera amortización (t_1):

$$t_r = t_1\left(1+i\right)^{r-1}$$

Hemos arribado a una expresión que nos permite calcular la amortización contenida en cualquier cuota, en función de la amortización contenida en la cuota anterior y en función de la primera cuota.

Anteriormente determinamos que:

$$t_1 = cv^n$$

Y que:

$$t_2 = t_1 (1+i)$$

Reemplazamos t_1 :

$$t_2 = cv^n (1+i)$$

$$t_2 = cv^{(n-1)}$$

Para la amortización contenida en la tercera cuota:

$$t_3 = t_1 (1+i)^2$$

Remplazando t_1 :

$$t_3 = cv^n (1+i)^2 = cv^{(n-2)}$$

Al llegar a la amortización contenida en la última cuota:

$$t_n = t_1 (1+i)^{n-1}$$

Remplazando t_1 :

$$t_n = cv^n (1+i)^{n-1} = cv$$

Generalizando, para una cuota cualquiera:

$$t_r = t_1 (1+i)^{r-1}$$
$$t_r = cv^n (1+i)^{r-1} = cv^{(n-r+1)}$$

En resumen, hemos arribado a tres formas diferentes de encontrar la amortización contenida en una cuota cualquiera:

En función de la primera amortización:

$$\boxed{t_r = t_1 (1+i)^{r-1}}$$

En función de la amortización anterior:

$$\boxed{t_r = t_{r-1}\left(1+i\right)}$$

En función de la cuota:

$$\boxed{t_r = cv^{(n-r+1)}}$$

Al indicar el concepto de "amortización", indicamos que es la parte de la cuota destinada a abonar el valor de la deuda original. Por lo tanto la suma simple de todas las amortizaciones nos permite obtener el valor de la deuda:

$$V = \sum_{p=1}^{n} t_p = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

Podemos expresar cada amortización en función de la primera:

$$V = t_1 + t_1\left(1+i\right) + t_1\left(1+i\right)^2 + \ldots + t_1\left(1+i\right)^{n-2} + t_1\left(1+i\right)^{n-1}$$

O:

$$V = t_1 + t_1\, u + t_1\, u^2 + \ldots + t_1\, u^{n-2} + t_1\, u^{n-1}$$

Extraemos factor común t_1:

$$V = t_1 \underbrace{\left(u^0 + u^1 + u^2 + \ldots + u^{n-2} + u^{n-1}\right)}_{s_{\overline{n}|i}} = t_1\, s_{\overline{n}|i}$$

Una deuda es el valor actual de las n cuotas a pagar y también puede obtenerse como el valor final de n cuotas vencidas e iguales de $\$t_1$, a la tasa de interés i .

Sistema de Amortización de Deudas de Cuota Constante Determinación del Saldo

Indicamos en el punto anterior que el saldo es el importe adeudado en un momento determinado del plazo de la amortización de una deuda. A partir del momento en que se da origen a la deuda, su valor va sufriendo variaciones debido al transcurso del tiempo y el pago de las cuotas.

Siempre que hablamos de saldo, estamos haciendo referencia a lo que falta pagar para terminar de amortizar una deuda, en un momento determinado.

Durante el plazo de amortización pueden producirse:

- Retrasos en el pago de las cuotas.
- Cancelaciones anticipadas, parciales o totales.
- Cambio en alguna de las condiciones originales (número de cuotas, tasa de interés, valor de la cuota).

Saber calcular el saldo de una deuda es de mucha utilidad ya que nos permite resolver estas y otras situaciones.

Definiremos dos tipos de saldos:
- Saldo al inicio de una unidad de tiempo.
- Saldo al final de una unidad de tiempo.

Comencemos por el inicio de la operación, siguiendo la representación gráfica que nos va mostrando la evolución del saldo de una deuda en las sucesivas unidades de tiempo.

Momento 0:
En este momento se encuentra el valor de la deuda (V) que llamamos también como S_0 (S, que significa Saldo y el *0* para indicar en que momento del tiempo se encuentra este valor)

$$V = S_0 = ca_{\overline{n|}i}$$

S_0 : es el saldo al inicio de la primera unidad de tiempo, es lo que se debe en ese momento y se obtiene (observando la fórmula) como la suma de los valores actuales de las cuotas que faltan pagar. Como no se ha abonado ninguna, se adeudan las n cuotas.
Este saldo es el que se toma en cuenta para calcular los intereses contenidos en la primera cuota.

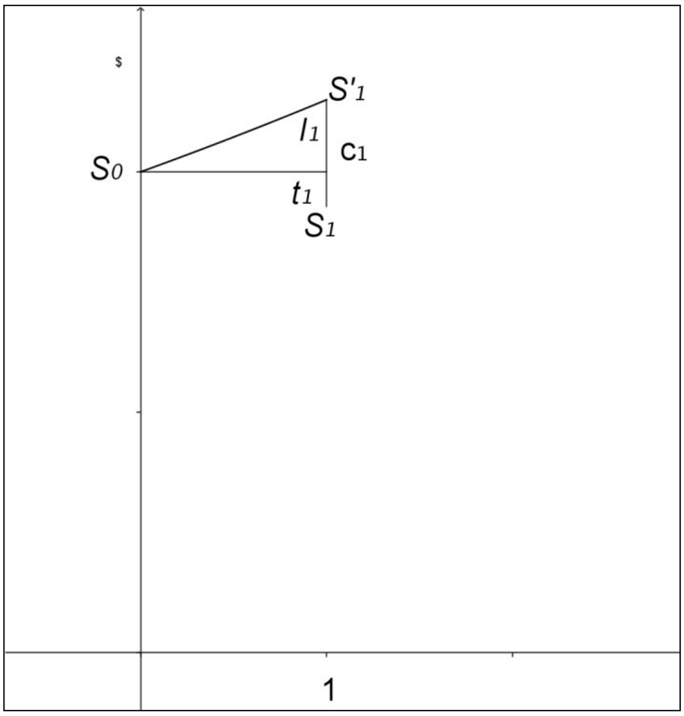


Gráfico 33

1° unidad de tiempo:
Al final de la primera unidad de tiempo la deuda ha crecido (como consecuencia del transcurso del tiempo) asumiendo el valor $S_1^{'}$ (el apóstrofe lo utilizamos para diferenciar un saldo al final de un saldo al inicio) .

Como sólo ha transcurrido tiempo, $S_1^{'}$ se calcula como el capital final del saldo al inicio, es decir, lo obtenemos de la capitalización por una unidad de tiempo:

$$S_1^{'} = S_0(1+i)$$

Remplazando S_0 :

$$S_1^{'} = c a_{\overline{n}|i}\, u = c \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

Se ha obtenido el valor actual de n cuotas constantes y anticipadas, ya que aún no se abonó ninguna cuota, es decir se adeudan las n cuotas y la primera se va a pagar en ese momento. Por ello, a este saldo también lo podemos denominar, además de saldo al final de la primera unidad de tiempo, como el saldo antes de pagar la primera cuota.
Siempre un saldo al final de una unidad de tiempo, va a ser el valor actual de las cuotas que faltan pagar, considerando cuotas anticipadas.
Luego de pagar la primera cuota:

$$S_1 = S_1^{'} - c$$

S_1 es el saldo al inicio de la segunda unidad de tiempo y también podemos indicar que es el saldo al final de la primera unidad de tiempo después de haber pagado la primera cuota.
Como es el saldo al inicio de la segunda unidad de tiempo, implica que se ha pagado la primera cuota, y por lo tanto, faltan pagar $n-1$ cuotas.

Recordemos que:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} - 1 = a_{\overline{n-1}|i}$$

Por lo tanto:

$$S_1 = c a_{\overline{n-1}|i}$$

Es posible determinar S_1 de otra manera. Recordemos que indicamos anteriormente que:

$$V = \sum_{p=1}^{n} t_p = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

Al abonarse la primera cuota, se ha pagado la primera amortización (t_1):

$$S_1 = \sum_{p=2}^{n} t_p = t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

Por lo tanto:

$$S_1 = S_0 - t_1$$

Por último analicemos nuevamente y con detenimiento el Gráfico 33 y verifiquemos las siguientes relaciones:

$$c = I_1 + t_1$$
$$S_1^{'} - S_1 = c$$
$$S_1^{'} - S_0 = I_1$$
$$S_0 - S_1 = t_1$$

2° unidad de tiempo:
Ya indicamos que el saldo al inicio de esta unidad de tiempo es S_1.
El saldo al final de la segunda unidad de tiempo es:

$$S_2^{'} = S_1 (1+i)$$

Remplazando S_1 :

$$S_2^{'} = ca_{\overline{n-1}|i}\, u = c\ddot{a}_{\overline{n-1}|i}$$

donde $S_2^{'}$ es la suma de los valores actuales de las $n-1$ cuotas anticipadas que restan por pagar.
Luego de pagar la segunda cuota, el saldo será:

$$S_2 = S_2^{'} - c$$

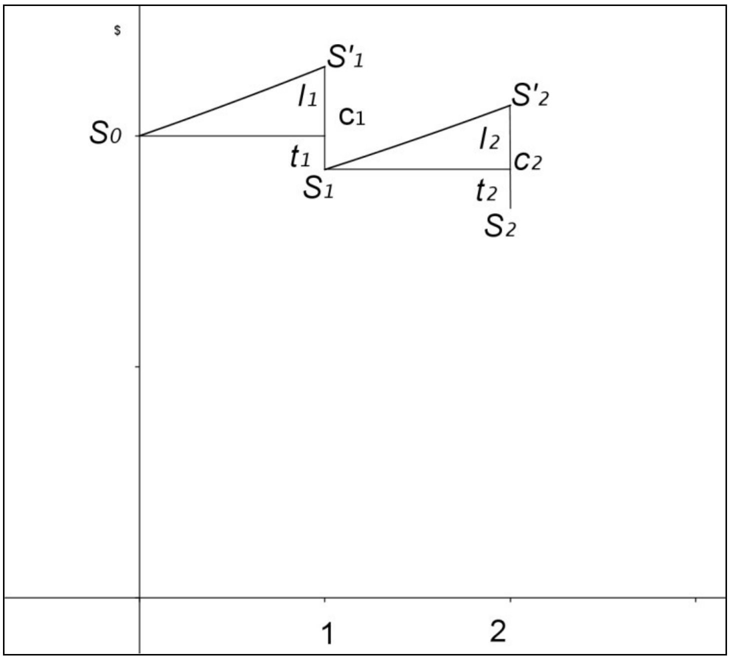


Gráfico 34

S_2 es el saldo al inicio de la tercera unidad de tiempo y también podemos indicar que es el saldo al final de la segunda unidad de tiempo después de haber pagado la segunda cuota.
Aplicando la relación entre valores actuales vencidos y anticipados:

$$\ddot{a}_{\overline{n-1}|i} - 1 = a_{\overline{n-2}|i}$$

El saldo al inicio de la tercera unidad de tiempo, implica que se han pagado las dos primeras cuotas y faltan pagar $n-2$ cuotas:

$$S_2 = ca_{\overline{n-2}|i}$$

Por otra parte, al abonar la primera y la segunda cuota, se ha pagado la primera y la segunda amortización (t_1 y t_2), por lo tanto:

$$S_2 = \sum_{p=3}^{n} t_p = t_3 + t_4 + ... + t_n$$

Por lo tanto, podemos afirmar que:

$$S_2 = S_0 - t_1 - t_2 = S_1 - t_2$$

El Gráfico 34 nos refleja estos elementos y nos permite visualizar las siguientes relaciones:

$$c = I_2 + t_2$$
$$S_2^{'} - S_2 = c$$
$$S_2^{'} - S_1 = I_2$$
$$S_1 - S_2 = t_2$$

3° unidad de tiempo:

Indicamos anteriormente que el saldo al inicio de esta unidad de tiempo es S_2 .

El saldo al final es:

$$S_3^{'} = S_2\left(1+i\right)$$

Remplazando S_2 :

$$S_3^{'} = ca_{\overline{n-2}|\,i}\, u = c\ddot{a}_{\overline{n-2}|\,i}$$

y es la suma de los valores actuales de las $n-2$ cuotas anticipadas que restan por pagar.

Luego de abonar la tercera cuota:

$$S_3 = S_3^{'} - c$$

S_3 es el saldo al inicio de la cuarta unidad de tiempo y también podemos indicar que es el saldo al final de la tercera unidad de tiempo después de haber pagado la tercera cuota.

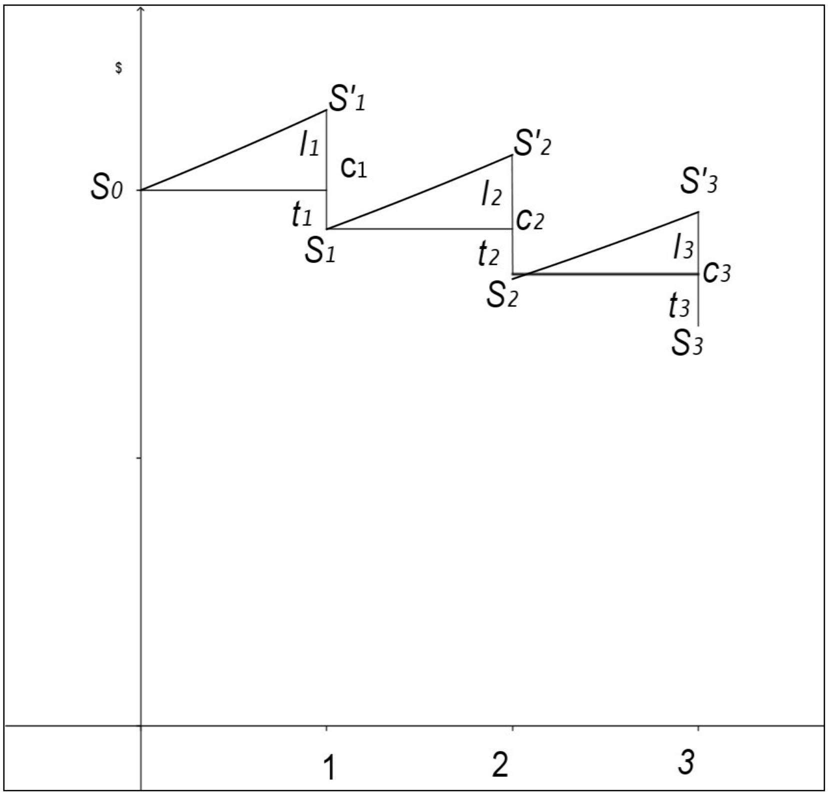


Gráfico 35

Como es el saldo al inicio de la cuarta unidad de tiempo, implica que se han pagado las tres primeras cuotas, y por lo tanto, faltan pagar $n-3$ cuotas:

$$S_3 = ca_{\overline{n-3}|\,i}$$

Al pagar la primera, segunda y tercera cuota, se ha abonado la primera, segunda y tercera amortización (t_1, t_2 y t_3), por lo tanto, puede indicarse que:

$$S_3 = \sum_{p=4}^{n} t_p = t_4 + t_5 + ... + t_n$$

También podemos expresar que:

$$S_3 = S_0 - t_1 - t_2 - t_3 = S_2 - t_3$$

Si revisamos con atención el Gráfico 35, reconoceremos las siguientes relaciones:

$$c = I_3 + t_3$$
$$S_3^{'} - S_3 = c$$
$$S_3^{'} - S_2 = I_3$$
$$S_2 - S_3 = t_3$$

Unidad de tiempo r
El saldo al inicio de esta unidad de tiempo es S_{r-1} :

$$S_{r-1} = ca_{\overline{n-r+1|}i}$$

Representando esta expresión que el saldo S_{r-1} es el valor actual de las $n-r+1$ cuotas que faltan por pagar.

El saldo al final de la unidad de tiempo r es:

$$S_r^{'} = S_{r-1}(1+i)$$

Remplazando S_{r-1} :

$$S_r^{'} = ca_{\overline{n-r+1|}i}(1+i)$$

$$\boxed{S_r^{'} = c\ddot{a}_{\overline{n-r+1|}i}}$$

y es la suma de los valores actuales de las $n-r+1$ cuotas anticipadas que restan por pagar.
Luego de abonar la cuota r:

$$S_r = S_r^{'} - c$$

S_r es el saldo al inicio de la unidad de tiempo $r+1$ y también podemos indicar que es el saldo al final de la unidad de tiempo r después de haber pagado la cuota r.
Como es el saldo al inicio de la unidad de tiempo $r+1$, implica que se han abonado r cuotas, y por lo tanto, faltan pagar $n-r$ cuotas:

$$\boxed{S_r = ca_{\overline{n-r|}i}}$$

S_r = Saldo al inicio de la unidad de tiempo $r+1$, luego de pagar la cuota c_r.

Al pagar las primeras r cuotas, se ha pagado las primeras r amortizaciones (t_1, t_2, ..., t_r), por lo tanto:

$$S_r = \sum_{p=r+1}^{n} t_p = t_{r+1} + t_{r+2} + ... + t_n$$

Por lo tanto:

$$S_r = S_{r-1} - t_r$$

En el Gráfico 36 se pueden comprobar las siguientes relaciones:

$$c = I_r + t_r$$
$$S_r^{'} - S_r = c$$
$$S_r^{'} - S_{r-1} = I_r$$
$$S_{r-1} - S_r = t_r$$

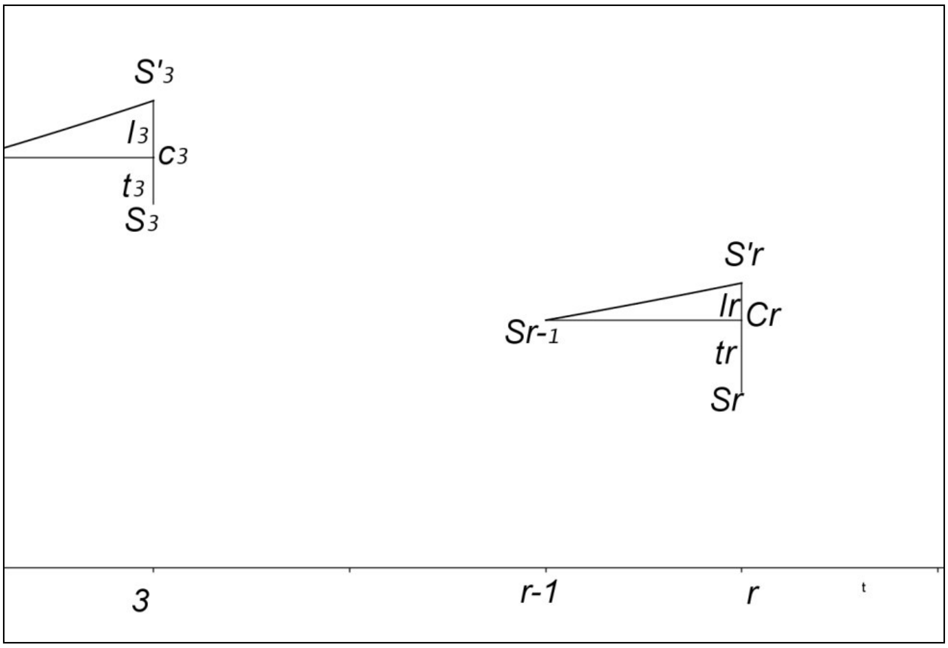


Gráfico 36

Última unidad de tiempo (n)

El saldo al inicio de esta unidad de tiempo es S_{n-1} :

$$S_{n-1} = ca_{\overline{n-n+1}|i} = ca_{\overline{1}|i}$$

y representa el valor actual de las $n-n+1$ cuotas que faltan por pagar. Como son n cuotas y se han pagado $n-1$ cuotas, sólo resta pagar una cuota, la última.

El saldo al final de la última unidad de tiempo es:

$$S_n^{'} = S_{n-1}(1+i)$$

Remplazando S_{n-1} :

$$S_n^{'} = ca_{\overline{1}|i}(1+i) = c\ddot{a}_{\overline{1}|i}$$

y es el valor actual de la última cuota (anticipada) que resta por pagar. Es la única que falta y se va a pagar en ese momento, por lo tanto $S_n^{'}$ es igual a la cuota.

Distribuimos $(1+i)$ en el numerador y resolvemos:

$$S_n^{'} = c a_{\overline{1}|i}\, u = c\frac{1-v}{i}u = c\frac{u-1}{i} = c\frac{i}{i} = c$$

Luego de abonar la cuota n:

$$S_n = S_n^{'} - c$$

Como sabemos que $S_n^{'} = c$:

$$S_n = S_n^{'} - c = 0$$

es cero, ya se ha completado la amortización de la deuda, al haberse pagado todas las cuotas.

En el Gráfico 37 examinemos las siguientes relaciones:

$$c = I_n + t_n$$
$$S_n^{'} = c$$
$$S_n^{'} - S_{n-1} = I_n$$
$$S_{n-1} = t_n$$

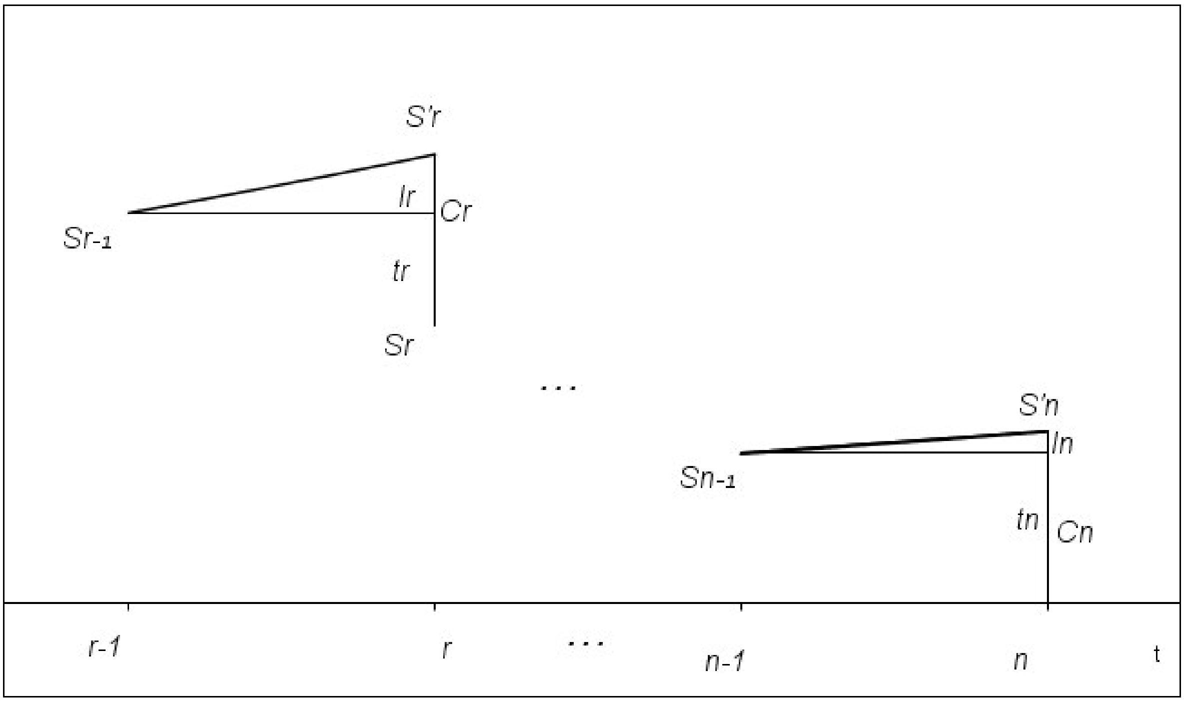


Gráfico 37

Finalmente, el Gráfico 38 nos permite visualizar la evolución del saldo y las cuotas con sus componentes, para una deuda que se amortiza con el sistema de cuota constante:

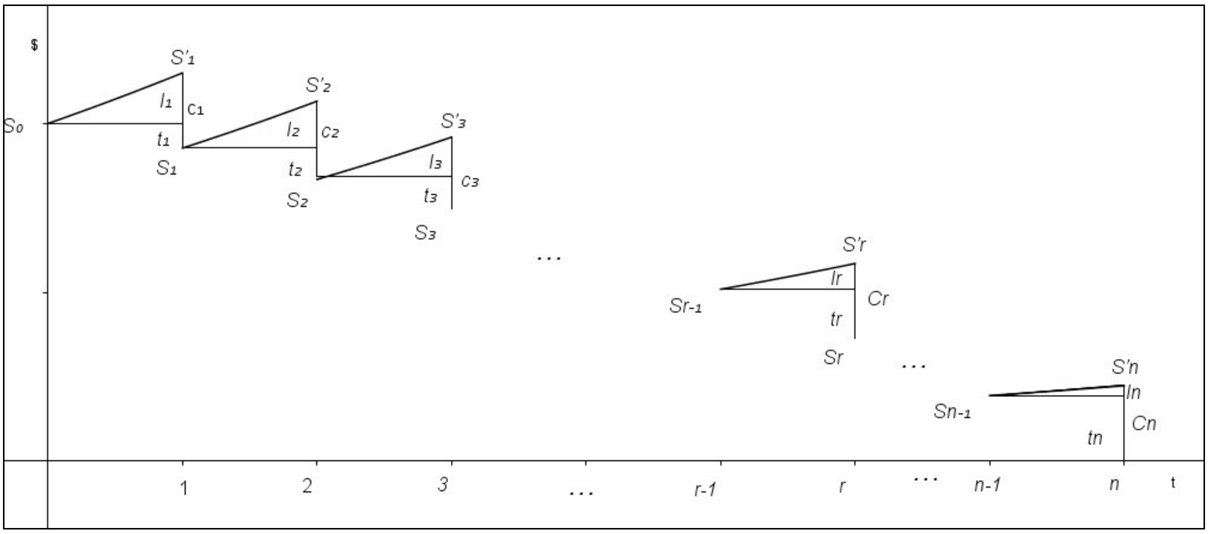


Gráfico 38

A continuación les proponemos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 25

Se ofrece la siguiente financiación para la compra de un automóvil: Entrega inicial de $2.000 y el resto en 10 cuotas iguales, mensuales y vencidas de $960,34 y con una tasa de interés mensual de 0,025.

Complete el siguiente cuadro:

a)	Precio de Contado	
b)	Interés contenido en la cuarta cuota	
c)	Saldo adeudado al inicio del tercer mes	
d)	Amortización abonada en el sexto mes	
e)	Saldo adeudado antes de pagar la segunda cuota	
f)	Total amortizado de la deuda original luego de pagada la quinta cuota	

Rta.: a) $10.404,96; b) $152,44; c) $6.885,77; d) $848,80; e) $7.846,11; f) $3.943,38

EJERCICIO 26

Una entidad financiera otorga créditos personales de $1000 a amortizar en 12 cuotas mensuales y vencidas de $100 cada una (sistema francés).

Determinar:

i	I_5	S_8	t_2	S'_{11}	S_{12}

Rta.: 0,02923 mensual; $20,58; $372,40; $72,84; $197,16; $0

Sistema Francés es la denominación habitual en el mercado financiero, del sistema de amortización de cuota constante.

Sistema de Amortización de Deudas de Cuota Constante. Cuadro de Amortización

Todos los componentes de una deuda que se amortiza a través del sistema de amortización de cuota constante (sistema francés), pueden presentarse en una tabla como la siguiente:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	S_0	$S_1^{'}$	t_1	I_1	c
2	S_1	$S_2^{'}$	t_2	I_2	c
3	S_2	$S_3^{'}$	t_3	I_3	c
...	...	...	...	...	...
r	S_{r-1}	$S_r^{'}$	t_r	I_r	c
...	...	...	...	...	...
$n-1$	S_{n-2}	$S_{n-1}^{'}$	t_{n-1}	I_{n-1}	c
n	S_{n-1}	$S_n^{'}$	t_n	I_n	c

También suele llamarse Tabla de Amortización o Cuadro de Marcha, y nos permite visualizar todos los componentes de una deuda durante su plazo de amortización.

El cuadro de amortización puede construirse de distintas maneras:

a) A través de las fórmulas de cálculo de cada uno de los componentes, de acuerdo a las fórmulas obtenidas:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	$S_0 = ca_{\overline{n}\rceil i}$	$S_1^{'} = c\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i}$	$t_1 = cv^n$	$I_1 = S_0.i$	c
2	$S_1 = ca_{\overline{n-1}\rceil i}$	$S_2^{'} = c\ddot{a}_{\overline{n-1}\rceil i}$	$t_2 = cv^{(n-1)}$	$I_2 = S_1.i$	c
3	$S_2 = ca_{\overline{n-2}\rceil i}$	$S_3^{'} = c\ddot{a}_{\overline{n-2}\rceil i}$	$t_3 = cv^{(n-2)}$	$I_3 = S_2.i$	c
...	...	...	...	...	...
r	$S_{r-1} = ca_{\overline{n-r+1}\rceil i}$	$S_r^{'} = c\ddot{a}_{\overline{n-r+1}\rceil i}$	$t_r = cv^{(n-r+1)}$	$I_r = S_{r-1}.i$	c
...	...	...	...	...	...
n	$S_{n-1} = ca_{\overline{1}\rceil i}$	$S_n^{'} = c\ddot{a}_{\overline{1}\rceil i}$	$t_n = cv$	$I_n = S_{n-1}.i$	c

b) También podemos construirlo por unidad de tiempo, aplicando las relaciones entre los distintos componentes, comenzando con los datos que ya se cuentan (la deuda y la cuota constante para todas las unidades de tiempo) y luego continuando fila por fila:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	$S_0 = V$	$S_1^{'} = S_0(1+i)$	$t_1 = c - I_1$	$I_1 = S_1^{'} - S_0$	c
2	$S_1 = S_0 - t_1$	$S_2^{'} = S_1(1+i)$	$t_2 = c - I_2$	$I_2 = S_2^{'} - S_1$	c
3	$S_2 = S_1 - t_2$	$S_3^{'} = S_2(1+i)$	$t_3 = c - I_3$	$I_3 = S_3^{'} - S_2$	c
…	…	…	…	…	…
r	$S_{r-1} = S_{r-2} - t_{r-1}$	$S_r^{'} = S_{r-1}(1+i)$	$t_r = c - I_r$	$I_r = S_r^{'} - S_{r-1}$	c
…	…	…	…	…	…
$n-1$	$S_{n-2} = S_{n-3} - t_{n-2}$	$S_{n-1}^{'} = S_{n-2}(1+i)$	$t_{n-1} = c - I_{n-1}$	$I_{n-1} = S_{n-1}^{'} - S_{n-2}$	c
n	$S_{n-1} = S_{n-2} - t_{n-1}$	$S_n^{'} = S_{n-1}(1+i)$	$t_n = c - I_n$	$I_n = S_n^{'} - S_{n-1}$	c

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrará explicaciones para utilizar las funciones de la **planilla de cálculo y la calculadora financiera**.

c) En este sistema de amortización podemos trabajar con calculadora financiera y planilla de cálculo, que cuentan con las funciones financieras para calcular los saldos al inicio, la amortización y el Interés. El saldo al final se calcula por relación capitalizando el saldo al inicio por una unidad de tiempo.

Recordemos que, al completar el cuadro, verificamos que:

- El saldo al inicio de la última unidad de tiempo es igual a la última amortización ($S_{n-1} = t_n$)
- El saldo al final de la última unidad de tiempo es igual a la cuota ($S'_n = c$)
- La suma de todas las amortizaciones es igual a la deuda $\left(V = \sum_{p=1}^{n} t_p \right)$

Todo el análisis que hemos realizado para este sistema de amortización como para los que realizaremos en la próxima unidad, ha sido considerando siempre cuotas vencidas.
Esto no significa que no puedan pactarse operaciones con cuotas anticipadas, pero cuando se presenta esta situación, se considera a la primera cuota (que por ser anticipada se cobra/paga en ese mismo momento) como una entrega inicial, obteniéndose una nueva deuda, igual a la original menos la primera cuota, a abonar en $n-1$ cuotas vencidas.

Estamos en condiciones de revisar el cuadro de amortización propuesto al inicio de la unidad.

Se propone un préstamo de \$25.000 a amortizar en 12 cuotas cada 30 días a una tasa de interés para 30 días de 0,02712 (que puede obtenerse a partir de la TNA o la TEA).
Con estos datos calculamos la cuota.

Monto del Préstamo Simulado	\$25.000,00
Destino del Préstamo Simulado	Refacción de vivienda
Gastos de Otorgamiento	\$1.200,00
IVA sobre Gastos de Otorgamiento	\$252,00
Plazo Solicitado	12 meses
TNA	33,00%
TEA	38,49%
Costo Financiero Total	71,35%
Primer Cuota	\$2.661,01

Simulador de Préstamo Personal BBVA Francés

Detalle del préstamo simulado

Cuota Nro.	Cuota Pura	Capital	Interés	Seg.de Vida	IVA S/interés	Cuota Total	Saldo Deuda
1	2.468,62	1.790,54	678,08	50,00	142,40	2.661,01	23.209,46
2	2.468,62	1.839,10	629,52	46,42	132,20	2.647,24	21.370,36
3	2.468,62	1.888,98	579,63	42,74	121,72	2.633,08	19.481,38
4	2.468,62	1.940,22	528,40	38,96	110,96	2.618,54	17.541,16
5	2.468,62	1.992,84	475,77	35,08	99,91	2.603,61	15.548,32
6	2.468,62	2.046,90	421,72	31,10	88,56	2.588,28	13.501,42
7	2.468,62	2.102,41	366,20	27,00	76,90	2.572,52	11.399,01
8	2.468,62	2.159,44	309,18	22,80	64,93	2.556,34	9.239,57
9	2.468,62	2.218,01	250,61	18,48	52,63	2.539,72	7.021,56
10	2.468,62	2.278,17	190,45	14,04	39,99	2.522,65	4.743,39
11	2.468,62	2.339,96	128,66	9,49	27,02	2.505,12	2.403,43
12	2.468,62	2.403,43	65,19	4,81	13,69	2.487,11	0,00

La cuota indicada como pura es la determinada financieramente. La columna Capital indica la amortización contenida en cada cuota, que sumado al interés nos permite verificar el valor de la cuota. El importe de Cuota Total surge de sumar el seguro e IVA. Finalmente, la columna Saldo Deuda, indica el saldo adeudado luego de pagar cada cuota.
Si bien se indica que el plazo es 12 meses, los cálculos están realizados considerando que la unidad de tiempo es 30 días.

El siguiente ejercicio nos propone construir cuadros de amortización:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 27
El Departamento de Compras de la empresa MANUFACTURAS DEL CÓNDOR SA, ha requerido al Directorio la compra de una nueva máquina de soldar. El precio de la misma es $28.000.
Debido a que la empresa no cuenta con fondos disponibles para la compra de contado, el Directorio solicita al Departamento de Finanzas que estudie la propuesta de financiación ofrecida por el proveedor y consulte alguna otra alternativa con los bancos que opera habitualmente la empresa.

Las condiciones propuestas por el proveedor son las siguientes:

TRAXE SA
PRESUPUESTO

CLIENTE: Manufacturas del Cóndor SA
ARTÍCULO: Máquina de Soldar – Mod. MQ-67
(Especificaciones técnicas según folleto adjunto)

Precio de Contado: $28.000
Entrega Inicial: $4.000
Financiación: 12 cuotas cada 30 días, iguales y vencidas
TNA 0,1520833

El Banco Mediterráneo SA, está dispuesto a otorgar un préstamo por los $24.000, a amortizar en 6 cuotas iguales y cada 60 días de $4.313,58.
Ud. debe:

a) Calcular la tasa de interés para 30 días de cada una de las alternativas.
b) Construir el cuadro de amortización para cada alternativa.

Rta.: a) TRAXE SA: 0,0125 para 30 días;
Banco: 0,01094 para 30 días

b) Cuadro de amortización para la propuesta del proveedor

Unidad de Tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	24000,00	24300,00	1866,20	300,00	2166,20
2	22133,80	22410,47	1889,53	276,67	2166,20
3	20244,27	20497,33	1913,15	253,05	2166,20
4	18331,13	18560,27	1937,06	229,14	2166,20
5	16394,07	16598,99	1961,27	204,93	2166,20
6	14432,79	14613,20	1985,79	180,41	2166,20
7	12447,00	12602,59	2010,61	155,59	2166,20
8	10436,39	10566,85	2035,74	130,45	2166,20
9	8400,65	8505,66	2061,19	105,01	2166,20
10	6339,46	6418,70	2086,96	79,24	2166,20
11	4252,50	4305,66	2113,04	53,16	2166,20
12	2139,46	2166,20	2139,46	26,74	2166,20

Cuadro de amortización para la propuesta del Banco

Unidad de Tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	24000,00	24528,00	3785,58	528,00	4.313,58
2	20214,42	20659,13	3868,87	444,72	4.313,58
3	16345,55	16705,15	3953,98	359,60	4.313,58
4	12391,57	12664,18	4040,97	272,61	4.313,58
5	8350,60	8534,31	4129,87	183,71	4.313,58
6	4220,73	4313,58	4220,73	92,86	4.313,58

Sistema de amortización de deudas de cuota constante. Situaciones Especiales

Una vez concretada una operación de préstamo a medida que transcurren las sucesivas unidades de tiempo, el deudor realizará el pago de las cuotas tal cual estaba pactado. Pero puede suceder que se produzcan modificaciones en las condiciones originales de la operación.
Analizaremos algunas de ellas:

Regularización:
Se refiere a la situación en la cual el deudor no ha pagado la cuota correspondiente a una o más unidades de tiempo y se presenta ante el acreedor para el pago de la/s misma/s.
Como el valor de estas cuotas incluyen el interés hasta el momento en que originalmente estaba pactado, al pagar en un momento posterior, se generan nuevos intereses.

Por lo tanto, para calcular el importe a abonar, deberán capitalizarse la/s cuota/s con atraso hasta el momento en que el pago se haga efectivo.

Ejemplo 4.10
Retomando el Ejemplo 4.9, acerca de un préstamo bancario por $5.000 que se abona en tres cuotas constantes y vencidas de $1.750,69, cada 30 días y a la tasa de interés de 0,025 para 30 días.

Unidad de Tiempo	Cuota
1	1.750,69
2	1.750,69
3	1.750,69

Si el deudor se atrasa en el pago de la primera cuota y desea pagarla junto con la segunda, el importe a abonar será:

$$1750{,}69(1+0{,}025)^1 = 1794{,}46$$

Es decir, capitalizamos por una unidad de tiempo (los 30 días de atraso) el valor original de la cuota. Ese nuevo importe incluye 43,77 (1.794,46 – 1.750,69) de intereses generados.

Si a ese valor le agregamos la segunda cuota, que es la que corresponde pagar en ese momento, el total para regularizar su situación será:

$$1.794{,}46 + 1.750{,}69 = 3.545{,}15$$

También puede arribar a este importe calculando:

- el valor final de dos cuotas vencidas (A).
- la diferencia entre dos saldos: se toma el saldo al inicio de la unidad de tiempo desde donde se verifica el incumplimiento (S_0) y se capitaliza hasta el momento en que se regulariza ($S_0 u^2$), y se le resta el saldo que representa el valor actual de las cuotas que restan por pagar (S_2).

Si además se hubiera convenido una tasa de interés por mora, deberá calcularse y adicionarse al importe anterior.

Cancelación anticipada:
Se refiere a la situación en la cual el deudor ofrece al acreedor el pago de toda la deuda en algún momento del plazo.
En este caso corresponde determinar el saldo de la deuda a ese momento (que es el valor actual de las cuotas que restan por pagar) y este será el importe que abonará el deudor para completar la amortización de la deuda.

Ejemplo 4.11
Considerando una deuda de $5.000, que se amortiza con el sistema francés, en tres cuotas de $1.750,69 y con una tasa de interés de 0,025 para 30 días (Ejemplo 4.9):

El deudor ofrece cancelar su deuda al momento de pagar la segunda cuota. El importe a abonar será el saldo adeudado a ese momento (S_2').

En este caso:

$$S_2' = 3.458,67$$

Este importe incluye la cuota que vence en ese momento ($1.750,69) más el valor actual de las cuotas que faltan pagar, en este caso sólo falta una cuota más, la última.

Regularización y cancelación anticipada

Es una combinación de las dos situaciones anteriores. El deudor, además de abonar cuotas ya vencidas con anterioridad, ofrece cancelar toda la deuda en el momento de regularizar.

La forma más sencilla de determinar el importe a pagar en esta situación, es calcular el saldo al inicio de la unidad de tiempo en que se produce el primer incumplimiento en el pago y capitalizarlo hasta el momento en que se regulariza y cancela. Este importe será el que se abonará.

Conversión de deudas

Se refiere a la situación en la cual se modifica alguna/s de las condiciones originales del préstamo. Puede modificarse la tasa de interés, el número y/o el valor de las cuotas. Esto traerá como consecuencia una modificación en algún/algunos de los demás componentes.

Para resolver estas situaciones, será necesario calcular el saldo al momento en donde se producirá el cambio y se volverán a calcular los componentes que se modifican.

Por supuesto, estos cambios sólo podrán realizarse si están permitidos por las cláusulas contractuales que ligan al acreedor y al deudor.

Ejemplo 4.12

Considerando el ejemplo analizado (4.9) con una deuda de $5.000, que se amortiza con tres cuotas de $1.750,69. Al momento de pagar la primera cuota se modifica la tasa de interés para las cuotas siguientes, siendo su nuevo valor de 0,03 para 30 días.

El saldo después de pagada la primera cuota (calculado con la tasa de interés original) asciende a $3.374,31 ($S_1$). Considerando a este valor como la deuda, 2 cuotas y la tasa de interés 0,03, calculamos la cuota.

El valor de la nueva cuota será $1.763,45, mayor a la original por ser mayor la tasa de interés.

Pago extraordinario

Se refiere a la situación en la cual el deudor decide realizar un pago adicional, que puede coincidir o no con el pago de una cuota.

Esta acción producirá una reducción en la deuda, que hará modificar el valor y/o la cantidad de cuotas que restan por pagar.

Para ello deberá calcularse el saldo pendiente después del pago extraordinario y reducir el valor y/o la cantidad de cuotas que restan por pagar.

Ejemplo 4.13

Considerando la deuda de $5.000 que se amortiza con tres cuotas de $1.750,69, el deudor al momento de pagar la primera cuota decide realizar un pago extra de $500.

Luego del pago de la primera cuota, el saldo es $3.374,31 ($S_1$).

Si ahora realiza un pago extra de $500, el saldo adeudado descenderá a:

$$3.374,31 - 500 = 2.874,31$$

Esto obligará a (por ejemplo) disminuir el valor de las dos cuotas siguientes. Considerando este saldo, las 2 cuotas que faltan y la tasa de interés de la operación, la nueva cuota será $1.491,27.

Para poder operar adecuadamente en estas situaciones es necesario saber calcular saldos y es muy útil graficar para poder determinar los pasos a seguir y seleccionar el procedimiento más sencillo de resolución. En muchos casos no hay un único camino para determinar la solución.

Los siguientes ejercicios nos permitirán resolver algunas de estas situaciones especiales:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 28

CASACLUB SA es un comercio dedicado a la venta de artículos del hogar. Hoy tiene de oferta para la venta un TV 29' de precio de contado $1.800. El mismo puede pagarse utilizando la tarjeta propia del comercio, en 6 cuotas mensuales, iguales y vencidas que incluirán un interés nominal anual del 20%.

Ud. debe:

a) Determinar el valor de la cuota.

b) Indicar el importe a pagar por un comprador si no paga la segunda y tercera cuota y se presenta a regularizar su deuda al final del cuarto mes.

c) Calcular el valor de la nueva cuota si el comprador paga la quinta cuota y solicita que la sexta cuota se refinancie en 3 cuotas mensuales y vencidas. Esta refinanciación se realizará con una tasa de interés mensual del 0,03.

Rta.: a)$317,74
b)$969,20
c)$110,49

EJERCICIO 29

En la compra de una máquina, una empresa obtiene la siguiente financiación: Entrega Inicial de $2.500 y el resto en 15 cuotas cada 60 días y vencidas de $1.250, que incluye un interés anual nominal de 0,18. Calcular

a) El precio de contado.

b) El importe a abonar, si no se pagan la segunda y tercera cuota, y la empresa quiere regularizar su deuda junto con el pago de la cuarta cuota.

c) El importe a abonar, si la empresa decide cancelar completamente la deuda 30 días después de pagada la sexta cuota.

Rta.: a) $17.466,88
b) $3.862,05
c) $9.894,53

EJERCICIO 30

Un préstamo hipotecario de $125.800 se abona con 120 cuotas mensuales, iguales y vencidas a la tasa de interés de 0,035 mensual. Una vez pagadas 72 cuotas, se presenta el deudor y solicita disminuir el plazo del mismo en tres años, para ello abonaría en concepto de amortización extraordinaria un importe tal que no modifique el importe de las 12 cuotas restantes. Determinar el importe del pago extraordinario a realizar.

Rta.:$60.091,34

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de este ejercicio en formato video.

EJERCICIO 31

La empresa TRICES SA necesita remplazar una máquina de su planta de producción. El precio de contado es $43.000. Como la empresa cuenta sólo con $15.000, el proveedor acepta esa suma como una entrega inicial, y el resto se financia con cuotas bimestrales, iguales y vencidas de $2.152,53 y a una tasa bimestral de 0,045. Indicar:

a) La cantidad de cuotas a pagar.

b) El importe a pagar junto con la 4° cuota para regularizar la deuda, sino se abonan la 2° y la 3°.

c) El valor de la nueva cuota, si junto con la 8° cuota se realiza un pago extraordinario de $5.000, manteniendo la cantidad de cuotas que faltan por pagar.

Rta.: a) 20 b) $6.752,54 c) $1.604,20

Sistema de amortización de deudas de cuota constante con período de diferimiento

Para analizar este modelo de amortización de deudas, debemos tener presente lo que analizamos anteriormente:

- Valor actual de rentas ciertas, constantes y vencidas, con período de diferimiento.
- Sistema de amortización de deuda con cuota constante.

Cuando determinamos el valor actual de una renta de cuotas contantes, vencidas y diferidas, arribamos a la siguiente expresión:

$${}^{k}/V = c v^{k} a_{\overline{n}|i}$$

Ésta nos permite calcular el valor actual de n cuotas constantes, igualmente espaciadas y vencidas de $\$c$, diferidas en k unidades de tiempo y a la tasa de interés i.

Es importante aclarar que cuando una deuda de determinado importe se amortiza con cuotas, estas serán mayores si existe período de diferimiento que si son inmediatas ya que, cuando hay cierta cantidad de unidades de tiempo entre el momento de concretarse la operación y el momento en que se comienzan a abonar las cuotas, se generan intereses por el transcurso del tiempo y ese interés se agrega a la deuda e incide en el valor de las cuotas, aumentando su valor.

La cuota inmediata se calcula:

$$c = V\, a_{\overline{n}|i}^{-1}$$

La cuota diferida:

$$c = {}^{k}/V\, a_{\overline{n}|i}^{-1}\, v^{-k} = {}^{k}/V\, a_{\overline{n}|i}^{-1}\, u^{k}$$

Para una misma deuda:

$$V = {}^{k}/V$$

La cuota diferida pude expresarse como:

$$c = \underbrace{V\, a_{\overline{n}|i}^{-1}}_{\substack{c \\ inmediata}} \quad u^k =$$

Entonces:

$$c\ diferida = c\ inmediata\,.\,u^k$$

verificando lo indicado anteriormente.

Una vez determinada la cuota que amortizará una deuda, existiendo k unidades de tiempo de diferimiento, analizaremos los distintos componentes:

Composición de la cuota:
Para el cálculo de los componentes de la cuota, aplicaremos las expresiones obtenidas para el sistema de amortización de cuota constante.
Para la amortización contenida en la cuota c_r:

$$t_r = cv^{(n-r+1)}$$

Para el interés:

$$I_r = c - t_r$$

Utilizaremos también las funciones que aprendimos con la planilla de cálculo y la calculadora financiera.

Determinación del Saldo:
Cuando analizamos la evolución de una deuda para el sistema de amortización de cuota constante (Gráfico 38), observamos que en todos los períodos coincide el número de unidad de tiempo con el de la cuota a pagar. Así, al final de la primera unidad de tiempo, se abona la primera cuota, al final de la segunda unidad de tiempo, la segunda cuota, y así sucesivamente.
Cuando existe diferimiento en el pago de la cuota no sucede lo mismo, la primera cuota se abonará al final de la unidad de tiempo $k+1$, la segunda cuota al final de la unidad de tiempo $k+2$, etc.

Por ejemplo en S_2, el subíndice 2 nos indica que se acaba de pagar la cuota correspondiente a la segunda unidad de tiempo. Cuando hay diferimiento, en la segunda unidad de tiempo puede ocurrir que se abone la primera o no se pague ninguna cuota. Para diferenciar un saldo cuando la deuda se amortiza con cuotas diferidas modificaremos la notación para indicar la cantidad de unidades de diferimiento que restan, las unidades de tiempo transcurridas y la cuota a pagar o ya pagada.

Momento 0
Aquí nos encontramos con la deuda ${}^{k}/V$:

$${}^{k}/\,{}_{0}S_0 = {}^{k}/V = cv^k a_{\overline{n}|i}$$

La deuda al inicio de la operación es el saldo adeudado en el momento 0, que lo simbolizamos:

$${}^{k}/\,{}_{0}S_0$$

Donde el subíndice ubicado a la derecha indicará el número de cuota a pagar o pagada, según corresponda. El supra índice a la izquierda señalará la cantidad de períodos de diferimiento que restan y el subíndice de la izquierda la unidad de tiempo en donde el saldo es medido.
En el momento 0, entonces, el supra índice k indica que deben todavía transcurrir esa cantidad de unidades de tiempo de diferimiento, y los ceros, que no han transcurrido ninguna unidad de tiempo y no se ha pagado (ni se abonará en este momento) ninguna cuota.

Momento 1
El saldo en este momento será:

$$^{k-1}/\,_{1}S_0 = {}^{k}/\,_{0}S_0\, u = cv^k a_{\overline{n|}\,i}\, u = cv^{k-1} a_{\overline{n|}\,i}$$

En el símbolo del saldo podemos notar que al haber transcurrido una unidad de tiempo, se modifica el valor donde se indican la cantidad de unidades de tiempo de diferimiento y las transcurridas, manteniéndose en 0 donde se indica cuotas pagadas.
Por otra parte, el importe del saldo se calcula capitalizando el saldo al inicio por una unidad de tiempo.

En el Gráfico 39 podemos observar el saldo en los momentos 0 y 1:

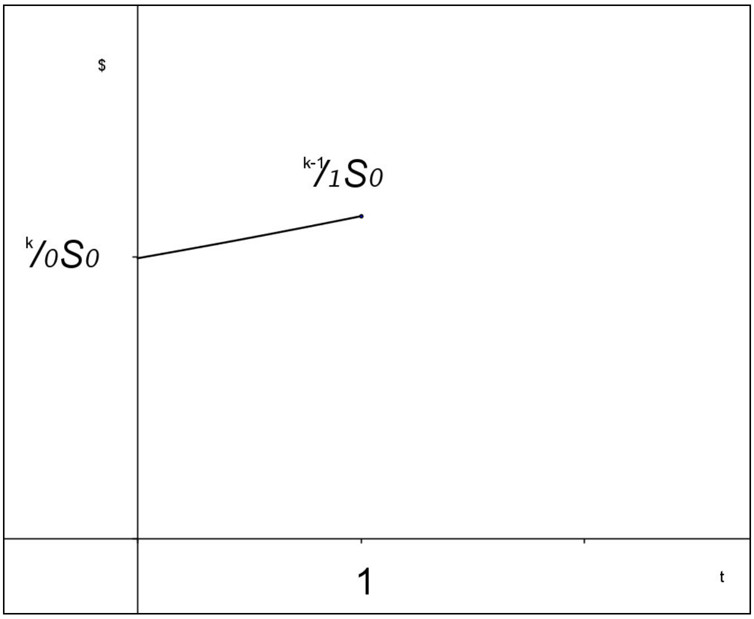


Gráfico 39

Momento 2
Nos encontraremos con:

$$^{k-2}/\,_{2}S_0 = {}^{k}/\,_{0}S_0\, u^2 = {}^{k-1}/\,_{1}S_0\, u = cv^{k-2} a_{\overline{n|}\,i}$$

Han transcurrido dos unidades de tiempo y quedan dos menos de diferimiento y se continúa sin pagar cuotas. Esta situación está reflejada en el símbolo que representa el saldo adeudado en ese momento.
En cuanto a su valor, se determina capitalizando la deuda original por las dos unidades de tiempo transcurridas, o por sólo una, si el cálculo lo realizamos partiendo del saldo obtenido al final de la primera unidad de tiempo.

El Gráfico 40 nos permite visualizar la evolución del saldo:

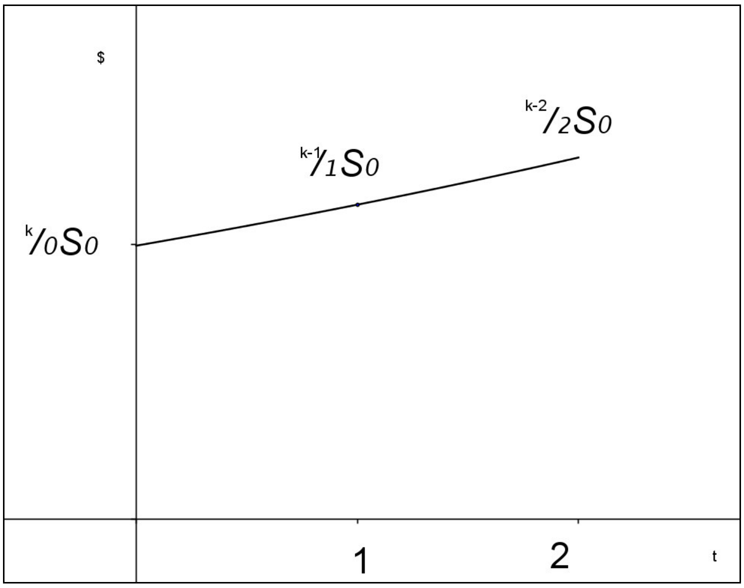


Gráfico 40

De la misma manera continuamos con las unidades de tiempo siguientes hasta llegar a la unidad de tiempo k , donde se completarán las unidades de tiempo de diferimiento.

Momento k
El saldo adeudado en este momento es:

$$ {}^{k-k\longleftarrow---0}/_{k}S_0 = {}^{k}/_{0}S_0\, u^k = cv^k a_{\overline{n|}\,i}\, u^k = ca_{\overline{n|}\,i} $$

Si analizamos el símbolo para el saldo adeudado en ese momento, el 0 nos indica que ya no quedan más unidades de tiempo de diferimiento (ha transcurrido k) y al final de la siguiente se abonará la primera cuota.
Para determinar el valor del saldo a ese momento, se capitalizó la deuda original por k unidades de tiempo, aunque también puede calcularse a partir del saldo al final de la unidad de tiempo anterior:

$$ {}^{0}/_{k}S_0 = {}^{1}/_{k-1}S_0\, u = cv\, a_{\overline{n|}\,i}\, u = ca_{\overline{n|}\,i} $$

Observemos que el saldo obtenido coincide, en cuanto a la fórmula de cálculo, a una deuda que se amortiza con cuotas inmediatas:

$$ V = S_0 = ca_{\overline{n|}\,i} $$

A partir de este momento, todos los saldos podrán ser calculados con las fórmulas que utilizamos para la amortización de una deuda con cuotas inmediatas.

Momento $k+1$
En primer lugar determinaremos el saldo al final de esta unidad de tiempo:

$$ {}_{k+1}S_1^{'} = {}^{0}/_{k}S_0\, u = c\, a_{\overline{n|}\,i}\, u = c\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} $$

Como ya transcurrieron todas las unidades de tiempo de diferimiento no es necesario indicar la cantidad de unidades que aún restan. Y como en ese momento se abonará la primera cuota, aparece 1 como subíndice a la derecha en el símbolo del saldo.
El importe del saldo se obtiene del valor actual de n cuotas anticipadas.

El Gráfico 41 nos permite observar la evolución del saldo de una deuda con período de diferimiento hasta llegar al momento $k+1$

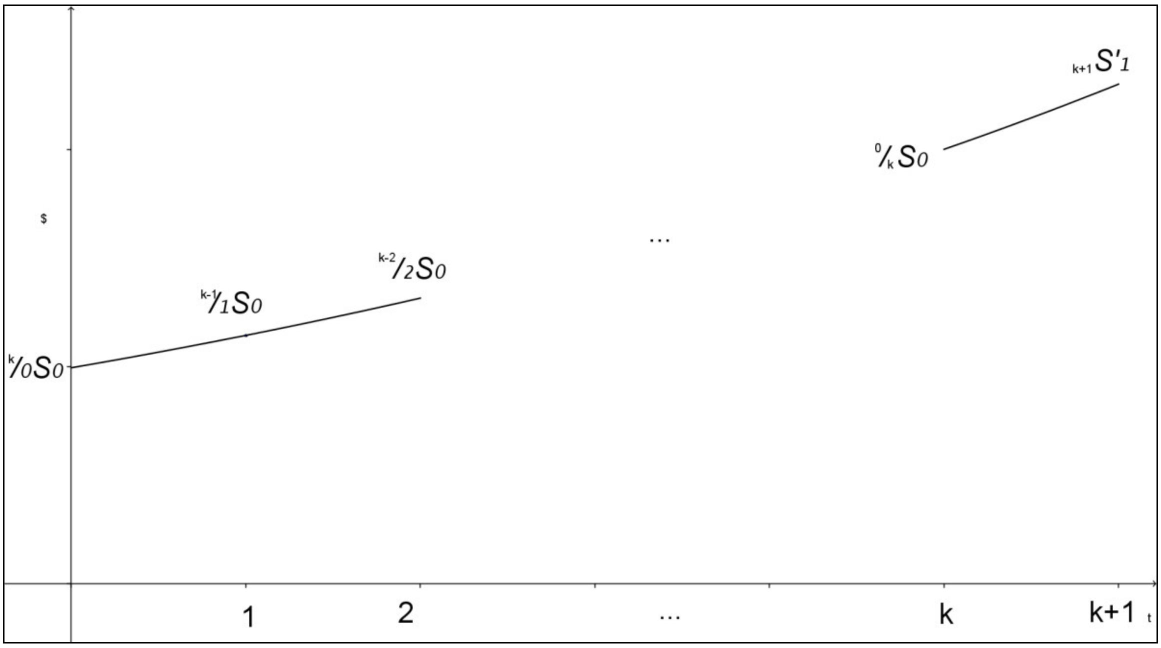


Gráfico 41

Luego de pagar la primera cuota, el saldo es:

$${}_{k+1}S_1 = c\,a_{\overline{n-1}|i}$$

Momento $k+2$
Los saldos al final de esta unidad de tiempo y al inicio del siguiente, son, respectivamente:

$${}_{k+2}S_2^{'} = c\ddot{a}_{\overline{n-1}|i}$$

$${}_{k+2}S_2 = ca_{\overline{n-2}|i}$$

El Gráfico 42 nos muestra los saldos en las unidades de tiempo $k+1$ y $k+2$

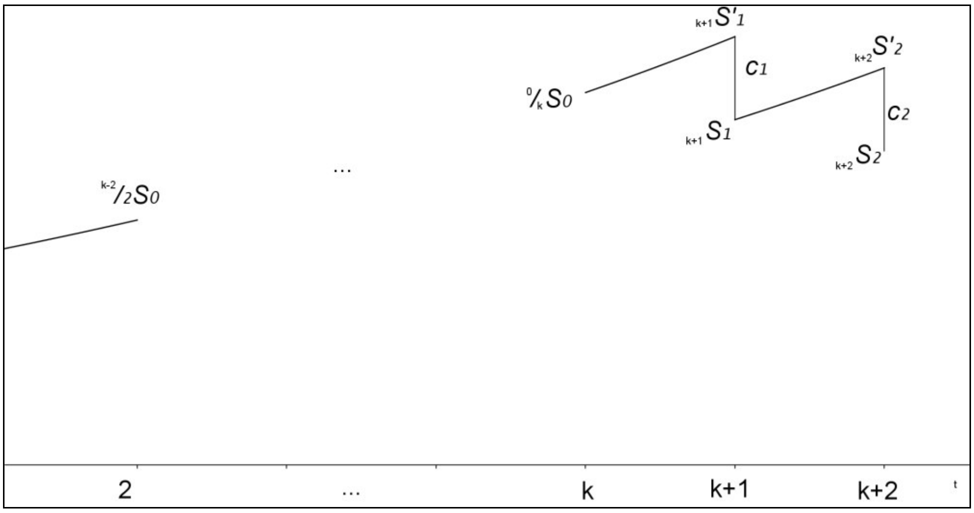


Gráfico 42

Momento $k+r$
El saldo al final de la unidad de tiempo $k+r$ se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$_{k+r}S_r^{'} = c\ddot{a}_{\overline{n-r+1|}i}$$

Nos indica el saldo de una deuda cuando han transcurrido $k+r$ unidades de tiempo, se está por pagar la cuota r y el pago de la primera cuota se difirió por k unidades de tiempo.

Mientras que el saldo al inicio de la unidad de tiempo $k+r+1$ es:

$$_{k+r}S_r = ca_{\overline{n-r|}i}$$

Y se trata del saldo de una deuda al inicio de la unidad de tiempo $k+r+1$, después de pagar la cuota r y el pago de la primera cuota se difirió por k unidades de tiempo.

Veamos estos saldos representados en el Gráfico 43:

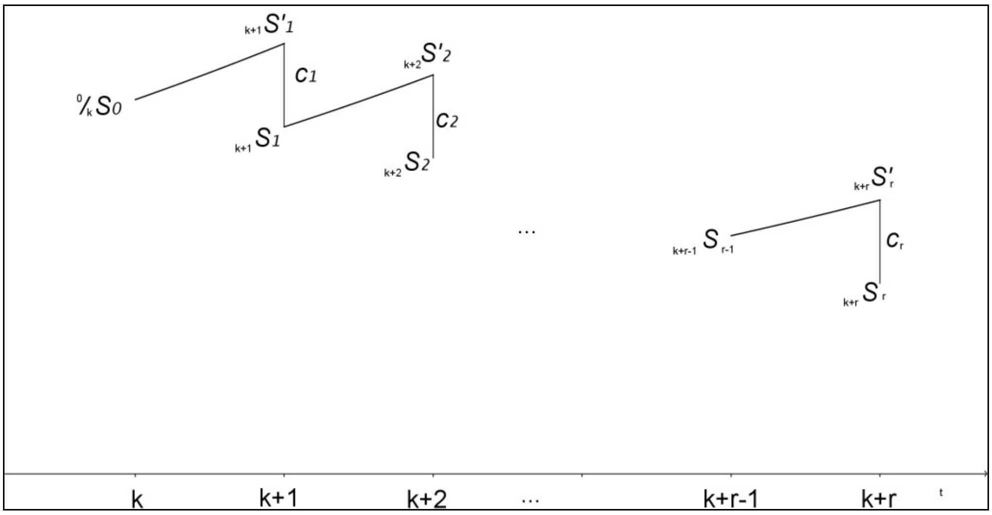


Gráfico 43

Finalmente arribamos a la última unidad de tiempo.

Momento $k+n$
El Saldo al inicio de la última unidad de tiempo es:

$$ {}_{k+n-1}S_{n-1} = ca_{\overline{1|}i} $$

Y el saldo al final:

$$ {}_{k+n}S'_{n} = c\ddot{a}_{\overline{1|}i} $$

Ambos saldos pueden observarse en el Gráfico 44:

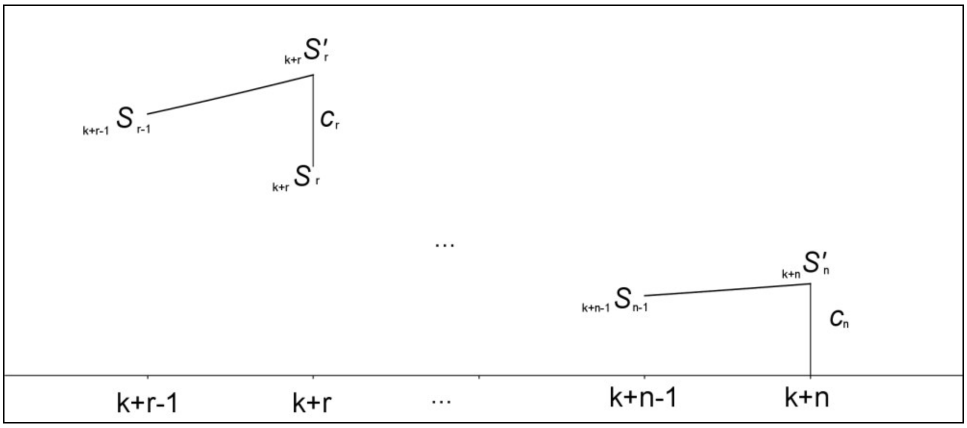


Gráfico 44

Una vez pagada la última cuota, se ha completado la amortización de la deuda.

Cuadro de Amortización
Podemos construir el cuadro de amortización, reflejando los distintos componentes de una deuda que se amortiza a través del sistema de cuota constante que incluye k unidades de tiempo de diferimiento:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	${}^{k}/{}_{0}S_0 = cv^{k}a_{\overline{n\|}i}$	${}^{k-1}/{}_{1}S_0 = cv^{k-1}a_{\overline{n\|}i}$	-	${}^{k-1}/{}_{1}S_0 - {}^{k}/{}_{0}S_0$	-
2	${}^{k-1}/{}_{1}S_0 = cv^{k-1}a_{\overline{n\|}i}$	${}^{k-2}/{}_{2}S_0 = cv^{k-2}a_{\overline{n\|}i}$	-	${}^{k-2}/{}_{2}S_0 - {}^{k-1}/{}_{1}S_0$	-
...					
$k+1$	${}^{0}/{}_{k}S_0 = ca_{\overline{n\|}i}$	${}_{k+1}S'_1 = c\ddot{a}_{\overline{n\|}i}$	$t_1 = c - I_1$	$I_1 = {}_{k+1}S'_1 - {}^{0}/{}_{k}S_0$	c
$k+2$	${}_{k+1}S_1 = c\,a_{\overline{n-1\|}i}$	${}_{k+2}S'_2 = c\ddot{a}_{\overline{n-1\|}i}$	$t_2 = c - I_2$	$I_2 = {}_{k+2}S'_2 - {}_{k+1}S_1$	c
...	...	...	...	...	...
$k+n$	${}_{k+n-1}S_{n-1} = ca_{\overline{1\|}i}$	${}_{k+n}S'_n = c\ddot{a}_{\overline{1\|}i}$	$t_n = c - I_n$	$I_n = {}_{k+n}S'_n - {}_{k+n-1}S_{n-1}$	c

El cuadro de amortización puede construirse de distintas maneras:

- A través de las fórmulas de cálculo de cada uno de los componentes.
- Por unidad de tiempo, operando con las relaciones entre los distintos elementos que intervienen.
- Con calculadora financiera, que cuenta con las funciones para calcular saldo al inicio, amortización e Interés.

Para tener en cuenta:

- Si trabajamos con la calculadora financiera, el valor de la deuda que debe utilizarse es el saldo al inicio de la unidad de tiempo donde se pagará la primera cuota $\left({}^{0}/_{k}S_{0} \right)$.
- Los intereses determinados durante las unidades de tiempo de diferimiento, no significan que se abonan, sólo explican el crecimiento de la deuda.
- El saldo al inicio de la última unidad de tiempo es igual a la amortización contenida en la última cuota $\left({}_{k+n-1}S_{n-1} = t_n \right)$.
- El saldo al final de la última unidad de tiempo es igual a la cuota $\left({}_{k+n}S'_{n} = c \right)$.
- La suma de todas las amortizaciones es igual a la deuda, pero no la original $\left({}^{k}/V \right)$, sino el saldo al inicio de la unidad de tiempo en que se comienzan a pagar las cuotas $\left({}^{0}/_{k}S_{0} \right)$.

Les proponemos que a continuación resolvamos el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 32

Se adquiere un artículo del hogar abonando 5 cuotas mensuales, iguales y vencidas de $78 (sistema francés) a un interés nominal anual del 18% con capitalización mensual. La primera cuota se paga tres meses después de realizada la compra.

Construir el cuadro de amortización

Unidad de Tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	362,10	367,53		5,43	
2	367,53	373,04		5,51	
3	373,04	378,64	72,40	5,60	78,00
4	300,64	305,15	73,49	4,51	78,00
5	227,15	230,56	74,59	3,41	78,00
6	152,56	154,85	75,71	2,29	78,00
7	76,85	78,00	76,85	1,15	78,00

Rta.:

EJERCITACIÓN

Valor final de rentas ciertas de pagos constantes

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de este ejercicio en formato video.

EJERCICIO 33

Carla Alonso es la responsable del área financiera de “LA IMPRENTA SA.” La empresa proyecta la compra de nuevos equipos, que implica una inversión de $70.000. Como no dispone de ese importe y no existen posibilidades de obtener un préstamo por toda esa suma de dinero, se decide constituir un fondo en el

Banco Ciudad, a fin de reunir el importe necesario, con las siguientes condiciones:
Plazo = 2 años
Depósitos iguales y bimestrales
TNA de interés 0,15
Su tarea consiste en:
a) Determinar el importe de la cuota vencida a depositar.
b) Determinar el importe de la cuota anticipada a depositar.
c) Explique la causa de la diferencia entre los valores obtenidos en a) y b)
d) Calcular el importe reunido si, considerando la cuota del inciso b), ocurren los siguientes eventos durante el plazo de la operación:

- Se realiza un depósito extra de $3.000 al final del mes 10
- No se realiza el octavo depósito y en ese momento se extraen $5.000 del fondo
- La tasa de interés se modifica al 0,012 mensual a partir del vigésimo mes.

Rta.:a)$5.074,10
b)$4.950,34 c)$62.208,36

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 34
Pensando en sus próximas vacaciones, una familia decide constituir un fondo, comenzando en el día de la fecha y depositando cada 30 días, 9 cuotas de $525. La tasa de interés que obtiene del banco es el 0,015 para 30 días. Determinar:
a) El importe a reunir al final del plazo.
b) El importe a reunir al final del plazo, si las últimas 4 cuotas son de $600.
c) El importe a reunir al final del plazo si, además de lo indicado en el inciso b), hacen un depósito extra de $390 junto con el segundo depósito.

Rta.: a)$5.093,93
b)$5.405,34 c)$5.844,67

EJERCICIO 35
¿Cuánto dinero reunirá un particular si luego de depositar durante 10 meses $315 al final de cada mes, mantiene el capital reunido por 10 meses más, siendo la tasa de interés para todo el plazo de 0,21 anual nominal con capitalización mensual?

Rta.: $4.056,01

EJERCICIO 36
El padre de un alumno de la facultad decide ahorrar $420 cada 60 días, para adquirir una nueva computadora para su hijo, depositando 8 cuotas por ese importe en un banco a partir de hoy, y a una tasa de interés equivalente anual del 0,1069. Si omite efectuar los depósitos 4° y 5°, indicar el capital al final del plazo.

Rta.: $2.719,24

EJERCICIO 37
Una persona desea reunir cierta cantidad de dinero, para lo cual deposita durante un año y medio $400 al final de cada mes en una entidad que paga el 10% nominal anual de interés.
Al finalizar el año y medio, efectúa un depósito extra de $1.800, dejando el importe total durante 7 meses adicionales, con capitalización mensual y una tasa de interés diferente, obteniendo un monto de $10.385,11.
¿Cuál es la tasa de interés equivalente anual de la segunda operación?

Rta.:0,158 anual

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 38

Una familia decide constituir un fondo para remplazar su actual automóvil, depositando cada 30 días $1.100 en el Banco Nación que aplica una tasa equivalente anual de 0,12.

Responder:

a) ¿Qué capital se obtendrá si se realizan 15 depósitos anticipados?

b) ¿Qué importe se reunirá si además de lo obtenido en el inciso a) se realiza un depósito al inicio de $1.000 adicionales al de esa unidad de tiempo?

c) ¿Cuál será el valor a retirar si luego de transcurridos los 15 unidades de tiempo originales, se mantiene depositado el importe obtenido en b) durante 90 días (en este plazo no se realizan nuevos depósitos)?

Rta.:a)$17.790,91 b)$18.940,86 c)$19.477,61

EJERCICIO 39

La empresa "DURCOR SRL" estudia un proyecto de inversión que tiene por objeto ampliar la capacidad de producción de la empresa. La inversión se realizará dentro de 3 años y, para tener los recursos suficientes, constituye un fondo depositando al inicio de cada mes $4.800 en el Banco de la Empresa SA. La tasa de interés vigente para cada año es:

Año	Tasa de interés Mensual
1	0,011
2	0,015
3	0,008

Obtener el capital reunido al final del plazo de 3 años si la empresa retiró del fondo $5.000 al final del mes 10 y realizó un aporte extra de $4.200 junto con el depósito número 28.

Rta.:$209.806,11

EJERCICIO 40

Una empresa metalúrgica constituye un fondo que le permitirá reunir el importe necesario para realizar una inversión importante, depositando al inicio de cada mes $9.600 durante 2 años.

La operación se realiza en el Banco de la Ciudad, que le reconocerá a la empresa una tasa de interés mensual de 0,024.

Determinar el importe final reunido si al inicio del 5° mes se realiza un depósito extra de $5.100; no se deposita la cuota 14, y además, en ese momento, se extraen del fondo $15.200.

Rta.: $290.103,70

EJERCICIO 41

Con la finalidad de habilitar un nuevo laboratorio, una empresa de productos farmacéuticos constituye un fondo depositando inicialmente $3.900 y colocando $ 8.200 al final de cada mes, durante 2 años.

¿Cuál es el importe reunido al final del plazo, si el banco le reconoce una tasa de interés mensual de 0,012 para el primer año y de 0,015 para el segundo año?

Rta.:$238.051,24

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 42
Una persona decide depositar 24 cuotas, pero solamente depositó 8 cuotas vencidas, iguales y cada 30 días, a la tasa de interés proporcional anual de 0,18615 con capitalización cada 30 días. Las 16 cuotas restantes fueron depositadas regularmente, pero después de transcurridas tres unidades de tiempo sin realizar depósitos.
¿Cuál es el importe de la cuota, si al completarse el último depósito, el importe reunido es $54.822,63?

Rta.:$1.875

Valor actual de rentas ciertas de pagos constantes

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de este ejercicio en formato video.

EJERCICIO 43
Con fecha 07/03, un particular le presta a un familiar $15.000 que lo devolverá en un pago el 25/10 con intereses del 20% anual. Al momento del cobro invierte el importe recibido de tal forma que le genera una renta de 24 cuotas vencidas y cada 30 días, que incluyen un interés del 2,3% para 30 días. Calcule el importe de la cuota.

Rta.: $921,06

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 44
Considerando que cada línea es una operación distinta, complete el siguiente cuadro:

	V	$\ddot{V}$	*i*	*n*	*Cuota*	*TNA*
a)			0,03 bim.	6	500 bim.	
b)	27.569		0,025 p/ 90 d.	10		
c)		10.253,94			1.520 mensual	0,15 anual c/ cap. mensual
d)	715,81			12	78,50 trim.	
e)		6.530	0,017 p/ 60 d.	30		
f)			0,08 cuatrim	4	2.320	

Rta: a) $2.708,60; $ 2.789,85; 0,18 nominal anual c/cap.bim.
b) $ 28.258,23; $3.150; 0,10139 nominal anual c/cap.c/90d.
c) $10.127,34; 0,0125 mensual; 7
d) $748,02; 0,045 trimestral; 0,18 nominal anual c/cap. trim.
e) $6.420,85; $275; 0,103417nominal anual c/cap.c/60d.
f) $7.684,13; $8.298,87; 0,24 nominal anual c/cap.cuat.

Valor actual de rentas ciertas de pagos constantes diferidos

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 45
El 03/07 se adquiere un terreno en un barrio privado por $45.200 que será pagado de la siguiente forma: el 20% al contado y el resto mediante 24 cuotas mensuales, siendo la tasa de interés del 0,035 mensual, venciendo la primera cuota el 03/10 del mismo año. Determinar el valor de la cuota.

Rta.: $2.412,17

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de estos ejercicios en formato video.

EJERCICIO 46

Calcular en qué fecha se deberá pagar la primera cuota resultante de una refinanciación de deuda que al 15/03 ascendía a $12.930, conviniéndose la cancelación en 12 pagos mensuales, iguales y consecutivos de $1.320,36, siendo la tasa de interés de 0,018 mensual.

Rta.: 15/09

EJERCICIO 47

Un comercio que se dedica a la venta de artículos del hogar ofrece a la venta un TV 21' al precio de contado de $990 y que puede pagarse en 12 cuotas mensuales de $99 vencidas e iguales. Indique:

a) La tasa de interés aplicada por el comercio.

b) La tasa de interés cobrada por el comercio si, manteniendo el mismo precio de contado, la misma cantidad de cuotas y el mismo valor, la primera cuota se paga con tres unidades de tiempo de diferimiento.

Rta.: a) 0,02922854 mensual   b) 0,0196183 mensual

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 48

Un comercio dedicado a la venta de electrodomésticos ofrece un modelo económico de microondas. El precio de contado es de $590 y pueden pagarse en 4 cuotas mensuales y vencidas de $162,67. La tasa de interés mensual aplicada a la financiación es 0,0285.

¿Cuántos meses de diferimiento incluye la operación?

Rta.: 1 mes

EJERCICIO 49

Crédito Express ofrece préstamos personales a empleados en relación de dependencia y jubilados. Por cada $1.000 de préstamo se pagarán cuotas vencidas de $128,10 cada 30 días, pagando la primera cuota a los 120 días. La entidad enuncia un interés nominal anual 36,50% ¿Cuántas cuotas deberá pagar un deudor de acuerdo a las condiciones mencionadas por la entidad?

Rta.: 10

EJERCICIO 50

Un comercio del centro de la ciudad ofrece la siguiente promoción para la venta de un colchón y sommier de 2 plazas:

Pago de contado $1.200 ó entrega de $200 y el resto en 6 cuotas de $200, pagando la primera dentro de 3 meses.

Ud. posee una tarjeta de crédito que le permitiría realizar la compra de contado (pagando los $1.200) y luego abonar ese importe en 7 cuotas mensuales y vencidas de $215.

¿Cual es la alternativa que ofrece una tasa de interés menor?

Rta.: La tasa de interés aplicada por el comercio (0,0340115 mensual) es menor a la ofrecida por la tarjeta de crédito (0,06005 mensual)

Valor actual de rentas ciertas de pagos constantes perpetuos

EXPLICANDO
CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de este ejercicio en formato video.

EJERCICIO 51
Un gobierno municipal ha construido un nuevo centro de salud. Previendo las necesidades futuras de mantenimiento del edificio, decide colocar en una entidad financiera, al momento de la apertura del centro, una suma de dinero que permita realizar las tareas de mantenimiento a perpetuidad y por un importe bimestral y vencido de $7.500. Si el interés nominal anual con capitalización bimestral enunciado por la institución es 13,8%, determinar el importe a destinar hoy por parte del municipio, considerando que las tareas de mantenimiento comenzarán luego de transcurridos 2 años desde la apertura del centro de salud.

Rta.: $248.213,74

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 52
Considerando que cada línea es una operación distinta, complete el siguiente cuadro:

	V_∞	*C*	*i*	*Unidad de Tiempo*
a)	140.000		0,06 semestral	semestre
b)	650.000	19.500		trimestre
c)		6.300	0,14 anual	anual

Rta.: a)$8.400 b) 0,03 trimestral c) $45.000

Sistema de amortización con cuota constante e inmediata

EXPLICANDO
COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de este ejercicio utilizando las funciones financieras de la **planilla de cálculo**. Les sugerimos consultarlas una vez que hayan intentado resolverlo.

EJERCICIO 53
La empresa COLAZO HNOS. SRL ha decidido adquirir una nueva máquina para su planta de producción. El precio de contado es de $30.000 y se pagará con una entrega inicial de $5.000 y el resto en 6 cuotas bimestrales, iguales y vencidas, a una TNA de 0,30 con capitalización bimestral.
El siguiente es el cuadro de amortización:

Unidad de Tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	25000,00		4690,89	1250,00	
2			4467,52	1066,23	
3			4254,78	873,27	
4			4052,17	670,66	4925,44
5	4690,89		3859,21	457,92	
6			3675,44	234,54	

Como Ud. puede observar, está incompleto y contiene algunos errores. Ud. debe:
a) Completar el cuadro de amortización, indicar los errores y corregirlos.
b) Calcular el importe a pagar si la segunda cuota no se abona en el momento de su vencimiento y el pago se realiza junto con la tercera.
c) Determinar el valor de las cuotas posteriores, si junto con el pago de la cuarta cuota, se realiza un pago extra de $2.800.

Rta.:b) $10.097,15 c) $3.419,58

a)

Unidad de Tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	25000,00	26250,00	3675,44	1250,00	4.925,44
2	21324,56	22390,79	3859,21	1066,23	4.925,44
3	17465,35	18338,62	4052,17	873,27	4.925,44
4	13413,19	14083,85	4254,78	670,66	4.925,44
5	9158,41	9616,33	4467,52	457,92	4.925,44
6	4690,89	4925,44	4690,89	234,54	4.925,44

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 54

Un comercio de artículos de informática ofrece la venta de una computadora al precio de contado de $2.500. Este importe puede pagarse con una entrega de $500 y el resto en 12 cuotas cada 30 días, vencidas e iguales de $220.

Indicar:

a) La tasa de interés de la operación y su equivalente anual.

b) La composición de la tercera cuota.

c) El importe a pagar por el comprador si no abona la cuarta, quinta y sexta cuota y regulariza su deuda al momento de pagar la séptima cuota.

d) El valor de la cuota a pagar si el comercio ofreciera el pago de la primera cuota a los 90 días de realizada la compra, a la misma tasa de interés.

Rta.: a)0,0455317 p/ 30 días y 0,718974 anual
b)$79,05 y $140,95 c)$941,95 d)$240,49

EJERCICIO 55

El Señor Juan Marquez obtiene un crédito del Banco de la Ciudad para realizar refacciones en su local comercial. El importe del préstamo es de $9.000 y lo devolverá en 8 cuotas mensuales, vencidas e iguales de $1.198,07

Realice los cálculos necesarios y complete:

La tasa de interés mensual de la operación es ....

y su equivalente anual asciende a ....

El interés contenido en la ....cuota es $65,70 y la amortización

contenida en esa misma cuota es ....

El saldo adeudado luego de pagar la .... cuota asciende a $2.346,05, y si

quisiera cancelar su deuda al final del octavo mes, debería abonar ....

Rta.: 0,0142mensual; 0,184359anual;
quinta; $1.132,37; sexta; $1.198,07

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 56

En los siguientes incisos usted deberá responder aplicando las relaciones existentes entre los distintos elementos que componen la amortización de una deuda con cuota constante:

a) Usted está realizando una auditoría externa en una empresa y debe reconstruir las condiciones de una deuda de la cual cuenta con los siguientes datos: Las cuotas son constantes mensuales y vencidas de $117,24, y la amortización contenida en la cuota 2 es $84,70 y la amortización en la cuota 9 es $104,17.
Calcule la tasa de interés, el importe de la deuda inicial y el número de cuotas.

Rta.: 0,03 mensual; $1.167; 12

b) Una deuda se amortiza mediante el pago de cuotas iguales, trimestrales y vencidas. El saldo adeudado luego del pago de la cuota 7 es $3.357,43, el saldo luego de pagada la cuota 8 es $3.248,58 y el saldo luego de pagada la cuota 9 es $3.134,18
Determinar el importe original de la deuda y el número de cuotas.

Rta.:$3.985 y 26

c) En un préstamo a cancelar en 36 cuotas mensuales con un interés del 3% mensual, se sabe que el total amortizado, cuando faltan abonar 16 cuotas, es de $30.000. ¿Cuál es el monto del préstamo?

Rta.: $70.645,68

d) Un préstamo se amortiza mediante el pago de cuotas trimestrales, iguales y vencidas de $2.000 y se aplica a la operación una tasa trimestral de 0,065.
Cuando han transcurrido *r* unidades de tiempo, y pagada la cuota correspondiente a ese momento, el saldo adeudado es $15.378,08. ¿Cuál será el saldo adeudado luego de abonada la cuota *r-1*? ¿Y el saldo luego de abonada la cuota *r +1*?

Rta.:$16.317,45 y $14.377,66

e) La venta de una notebook con un precio de contado $4.000 se financia con el pago de 12 cuotas mensuales, iguales y vencidas. El PTF (Precio Total Financiado) es de $5.263,98. Calcule el valor de la cuota y la tasa de interés mensual de la operación.

Rta.: $438,67 y 0,045 mensual

PTF: se utiliza comercialmente para indicar la suma simple de las cuotas.

EJERCICIO 57

La empresa LA COLOSAL SA obtuvo un préstamo del Banco Nación de $75.000 a devolver en 48 cuotas mensuales, iguales y vencidas. La tasa enunciada por la entidad es de 0,253 nominal anual.
Transcurridos dos años, se han abonado las primeras 18 cuotas, adeudando la empresa las últimas 6 (cuota 19 a 24).
El Banco le propone un plan de refinanciación (para toda la deuda a ese momento), bajo las siguientes condiciones:
- La misma tasa de interés original
- Cuotas mensuales y vencidas de $1.815,94
¿Cuál es la cantidad de cuotas a pagar?

Rta.:62

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 58

El Jefe de Cobranzas de la empresa TEORMUX SA, tiene que resolver las siguientes situaciones referidas a clientes de la empresa:

GOSSGRIX SRL

Hace 210 días se refinanció su deuda de $7.430 en 10 cuotas constantes, vencidas y cada 30 días de $859,06. Luego de abonar la 7° cuota se le otorga una reducción de la tasa de interés en las cuotas siguientes, cambiando a 0,0215 para 30 días. El cliente quiere conocer el valor de las cuotas que faltan para completar el pago de su deuda.

Rta.:$849,47

JULIO PEREZ E HIJOS SH

Con el gerente se acordó, 9 meses atrás, el cobro de su compra de $5.400 en 12 cuotas mensuales, constantes y vencidas, a una tasa de interés del 0,36 anual. A la fecha adeuda la 8° cuota y decide cancelar su deuda. Es necesario determinar el importe que debe abonar.

Rta.: $2.582,11

PRENSGRIX SRL

Por la compra de $12.200 realizada 7 meses atrás se acordó el pago en 12 cuotas mensuales constantes y vencidas de $1.179,28. A la fecha ha abonado sólo la 1° y 2° cuota; propone pagar las cuotas pendientes (incluida la 7°) y el resto abonarlas tal cual estaba fijado originalmente. Es necesario determinar el importe que debe abonar.

Rta.: $6.181,36

JOSÉ LEPE E HIJOS SH

Han transcurrido 150 días desde que se refinanció su deuda de $5.320 en 7 cuotas constantes, vencidas y cada 30 días; a una tasa anual de 0,3799. Al abonar la cuota correspondiente a este momento, realiza un pago extraordinario de $600. El cliente quiere conocer el valor de cada una de las cuotas que faltan para completar el pago de su deuda.

Rta.: $531,56

CÓRCEGA SA

Se acordó 180 días atrás, cuando realizó una compra por $15.750, una financiación en 10 cuotas vencidas y pagaderas cada 60 días; a una tasa de interés de 0,022 para 30 días. Al abonar la cuota correspondiente a este momento, ofrece realizar un pago extra de manera de poder reducir las cuotas restantes a $1.000. Debe determinarse el importe extra a pagarse.

Rta.:$5.817,77

Sistema de amortización con cuota constante y diferida

EJERCICIO 59

Un electrodoméstico cuyo precio de contado es de $1.800 se vende con una entrega inicial de $400 y seis cuotas iguales, mensuales, vencidas y diferidas de $299,35. La tasa de interés aplicada en la operación es 0,034 mensual.

Determinar:

a)	Cantidad de unidades de tiempo de diferimiento	
b)	Interés del primer mes	
c)	Amortización pagada en el quinto mes	
d)	Amortización contenida en la quinta cuota	
e)	Saldo al inicio del quinto mes	
f)	Saldo al final del sexto mes	
g)	Saldo antes de pagar la segunda cuota	
h)	Importe a pagar junto con la cuarta cuota para que las cuotas que faltan se reduzcan a $200	

Rta.: a) 4; b) $47,60; c) $244,94; d) $279,99;
e) $1.600,36; f) $1.401,50; g) $1.401,50; h) $189

EJERCICIO 60

La empresa Calvo Hnos. SRL ha decidido adquirir una nueva máquina para su planta de producción. El precio de contado es de $30.000 y se pagará con una entrega inicial de $5.000 y el resto en 8 cuotas bimestrales, iguales y vencidas, a una TNA de 0,30 con capitalización bimestral. La primera cuota se paga luego de transcurridos 8 meses.

Ud. debe:

a) Calcular el valor de la cuota.
b) Construir el cuadro de amortización.
c) Determinar:

I. El Interés contenido en la primera cuota.
II. El Interés abonado en el cuarto bimestre.
III. El saldo adeudado al final del sexto mes.
IV. La amortización del sexto bimestre.

d) Indicar el importe a desembolsar si la empresa no abona la segunda cuota en término y la paga junto a la tercera.
e) Determinar el nuevo valor de la cuota si junto con el pago de la cuarta cuota, se realiza un pago extra de $2.500.

Rta.:a)$4.477,75 c)I.$1.447,03 II.$1.447,03
III.$28.940,63 IV.$3.341,36 d)$9.179,39 e)$3.772,72

b)

Unidad de Tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	25000,00	26250,00		1250,00	
2	26250,00	27562,50		1312,50	
3	27562,50	28940,63		1378,13	
4	28940,63	30387,66	3030,72	1447,03	4477,75
5	25909,91	27205,40	3182,25	1295,50	4477,75
6	22727,66	23864,04	3341,36	1136,38	4477,75
7	19386,29	20355,61	3508,43	969,31	4477,75
8	15877,86	16671,76	3683,85	793,89	4477,75
9	12194,01	12803,71	3868,05	609,70	4477,75
10	8325,96	8742,26	4061,45	416,30	4477,75
11	4264,52	4477,75	4264,52	213,23	4477,75

DIALOGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios trabajados con **simuladores**.

EJERCICIO 61

Algunos bancos y consultoras financieras poseen en sus páginas web simuladores de préstamos.
A partir del ejemplo del video, ingrese a la página web de un banco y realice una simulación de un préstamo, verificando luego los datos obtenidos.

INTEGRANDO IDEAS

En esta unidad hemos incorporado el uso de cuotas, que representan los depósitos o pagos periódicos que componen una renta. El análisis ha incluido la determinación del valor final y el valor actual de cuotas constantes, vencidas o anticipadas, inmediatas o diferidas. También trabajamos con una de las aplicaciones más habituales de las rentas: la amortización de deudas, definiendo los elementos que intervienen en este tipo de operaciones financieras. Nos detuvimos en uno de los sistemas de amortización de deudas más utilizados: sistema de cuota de constante, identificando los componentes de cada cuota y calculando el saldo adeudado en cualquier momento del tiempo.

El manejo adecuado de estos componentes nos permitió abordar y resolver distintas situaciones que se presentan durante la amortización de una deuda.
Finalizamos la unidad analizando el sistema de amortización para el caso particular de deudas con período de diferimiento.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:

CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Primera Parte. Córdoba Fac. de Cs. Económicas U.N.C. (2001).

U5

BLOQUE 2

UNIDAD 5
RENTAS CIERTAS DE PAGOS VARIABLES

UNIDAD 5:
Rentas Ciertas de pagos variables

CONTENIDOS

Rentas Ciertas de pagos igualmente espaciados y variables en progresión aritmética: Valor Actual y Valor Final. Aplicación a la amortización o extinción de deudas. Caso particular de amortización constante y cuota variable. Composición de la cuota. Saldos.
Rentas Ciertas de pagos igualmente espaciados y variables en progresión geométrica: Valor Actual y Valor Final. Aplicación a la amortización o extinción de deudas. Composición de la cuota. Saldos.

OBJETIVOS

- Distinguir los diferentes tipos de rentas variables.
- Analizar los modelos financieros que permiten obtener el equivalente financiero de una renta variable en progresión aritmética y geométrica.
- Aplicar valor actual de rentas variables en la amortización de deudas.
- Reconocer los componentes de una deuda que se amortiza con el sistema de amortización constante.
- Integrar el análisis de diferentes situaciones que se presentan en la amortización de deudas con cuotas variables.

PRESENTACIÓN

AULA VIRTUAL
SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **Presentación de la Unidad 5.** Allí los profesores proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de los temas abordados en la unidad.

En la unidad 4 obtuvimos el valor final y actual de rentas de cuota constante y aprendimos a calcular los elementos que componen este tipo de operaciones financieras. Con esta característica distintiva de cuota constante, comenzamos el estudio de los sistemas de amortización de deudas, con los que continuaremos trabajando en esta unidad, introduciendo cuotas variables, que pueden crecer o decrecer, según respondan a distintos modelos matemáticos que analizaremos a continuación.

Para comenzar presentamos el siguiente cuadro de amortización correspondiente a un préstamo personal, elaborado en el simulador de un banco:

Cotizador de Préstamos Personales

Ahora puede acceder al préstamo personal que le permitirá concretar todos sus proyectos de la manera más efectiva. Sólo debe ingresar los datos solicitados y elegir la línea que mejor responde a sus necesidades.

¿Dudas?

Ingrese a nuestro Chat y dialogue con un asesor.

Click aquí.

Seleccione el tipo de búsqueda

(•) Por Monto del Crédito $ 50000

( ) Por Cuota Máxima $

Plazo (meses): 6 | Moneda: Pesos | Sistema de Amort: Alemán

¿Acredita su sueldo en Banco Galicia?: SI (•) NO ( )

¿Reside en el interior del país?: SI (•) NO ( )

confirmar

Información detallada del Préstamo seleccionado

Para ingresar nuevos datos **click aquí**

Nombre	Gold Haberes de 6 a 36 meses	TNA	38,00%
Sistema	Alemán	Tipo Tasa	fija
Monto	50000	Moneda	Pesos
Plazo (meses)	6	CFT (Efectivo)	60,65%
Acredita su sueldo en Banco Galicia:	Si	TEA	45,37%

Valores de las Cuotas

>>Ver detalle completo

CUOTA	SALDO	CAPITAL	INTERÉS	CUOTA PURA	SEGURO DE VIDA S/SALDO	IVA	CUOTA TOTAL
Primera Cuota	50.000,00	8.333,33	1.583,33	9.916,67	99,00	332,50	**10.348,17**
Cuota Media	33.333,33	8.333,33	1.055,56	9.388,89	66,00	221,67	**9.676,56**
Última Cuota	8.333,33	8.333,33	263,89	8.597,22	16,50	55,42	**8.669,14**

Gastos Administrativos

CONCEPTO	VALOR	TASA	IVA	TOTAL
Servicio de Análisis y Otorgamiento	0,00	0,00%	0,00	0,00
Total de Gastos estimados	0,00		0,00	0,00

Detalle Completo de Cuotas

CUOTA	SALDO	CAPITAL	INTERÉS	CUOTA PURA	SEGURO DE VIDA S/SALDO	IVA	CUOTA TOTAL
1	50.000,00	8.333,33	1.583,33	9.916,67	99,00	332,50	10.348,17
2	41.666,67	8.333,33	1.319,44	9.652,78	82,50	277,08	10.012,36
3	33.333,33	8.333,33	1.055,56	9.388,89	66,00	221,67	9.676,56
4	25.000,00	8.333,33	791,67	9.125,00	49,50	166,25	9.340,75
5	16.666,67	8.333,33	527,78	8.861,11	33,00	110,83	9.004,94
6	8.333,33	8.333,33	263,89	8.597,22	16,50	55,42	8.669,14

cerrar

RECURSOS A UTILIZAR EN LA UNIDAD 5

- Material Teórico - Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios
- Videos Tutoriales sobre planilla de cálculo
- Videos Tutoriales simuladores
- Instructivo calculadora financiera

Podemos observar en la columna correspondiente a la cuota pura, que se trata de la amortización de una deuda, donde las cuotas son variables.

Rentas Ciertas de Pagos Variables

Cuando en la unidad 4 obtuvimos el valor final y actual de rentas lo hicimos operando con cuotas constantes. Nuestro objetivo será, de ahora en más, trabajar con pagos variables.

Dada una renta formada por n cuotas variables y vencidas de valores $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, para determinar su valor final debemos capitalizar cada una de ellas al momento n:

$$c_1(1+i)^{n-1} + c_2(1+i)^{n-2} + c_3(1+i)^{n-3} + \ldots + c_{n-1}(1+i)^1 + c_n(1+i)^0 = \sum_{t=1}^{n} c_t (1+i)^{n-t}$$

Si buscamos el valor el actual de esta renta variable, actualizamos cada una de ellas al momento 0:

$$c_1(1+i)^{-1} + c_2(1+i)^{-2} + c_3(1+i)^{-3} + \ldots + c_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + c_n(1+i)^{-n} = \sum_{t=1}^{n} c_t (1+i)^{-t}$$

Trabajamos de manera similar si la renta es de cuotas anticipadas. En cualquier caso, al resolver estas situaciones, deberemos realizar el cálculo del valor final (o valor actual) de una cuota por vez.
Pero pueden presentarse rentas variables, en donde el valor de las cuotas siga algún patrón de comportamiento determinado, que permita encontrar expresiones que posibiliten realizar el cálculo del valor actual o final de manera más sencilla. Estos son los casos que analizaremos a continuación, cuando se traten de:

- Rentas de cuotas variables en progresión aritmética
- Rentas de cuotas variables en progresión geométrica

Rentas Ciertas de Pagos Variables en Progresión Aritmética

Una renta es variable en progresión aritmética cuando cada cuota se obtiene a partir de sumarle a la anterior una cantidad constante, llamada razón.

Por lo tanto, las cuotas que componen una renta de este tipo son:

$$c_1 = c$$
$$c_2 = c + h$$
$$c_3 = c + h + h = c + 2h$$
$$c_4 = c + 3h$$
$$\ldots$$
$$c_r = c + (r-1)h$$
$$\ldots$$
$$c_n = c + (n-1)h$$

Donde:

$c =$ importe de la primera cuota

$h =$ razón de variación. Su valor puede ser positivo (la renta será de cuota creciente) o negativo (las cuotas serán decrecientes). Si $h = 0$, la renta es de cuota constante.

Leamos atentamente los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5.1
Una renta está compuesta por 5 cuotas vencidas y mensuales, siendo la primera cuota de $600 y las restantes crecen en $250, por lo que el valor de las cuotas siguientes es:

$$c_2 = 600 + 250 = 850$$
$$c_3 = 600 + 2\ .\ 250 = 1.100$$
$$c_4 = 600 + 3\ .\ 250 = 1.350$$
$$c_5 = 600 + 4\ .\ 250 = 1.600$$

Ejemplo 5.2

La primera cuota de una renta variable en progresión aritmética de 6 cuotas anticipadas es de $5.200 y la última de $2.700.
Para determinar la razón, partimos de la última cuota:

$$c_6 = 5.200 + 5.h = 2.700$$

Despejamos:

$$5.h = -2.500$$
$$h = \frac{-2.500}{5}$$
$$h = -500$$

y verificamos calculando las cuotas:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 5.200\\
c_2 &= 5.200+(-500)=4.700\\
c_3 &= 5.200+2.(-500)=4.200\\
c_4 &= 5.200+3.(-500)=3.700\\
c_5 &= 5.200+4.(-500)=3.200\\
c_6 &= 2.700
\end{aligned}
$$

Dado que ya reconocemos las características de una renta de cuotas variables en progresión aritmética, nos interesa ahora estudiar las fórmulas de cálculo que nos permitan obtener su valor actual y final.

Valor Actual de una renta cierta de pagos variables en progresión aritmética

Comenzaremos determinando el valor actual de una renta de cuotas vencidas como la que observamos en el eje temporal:

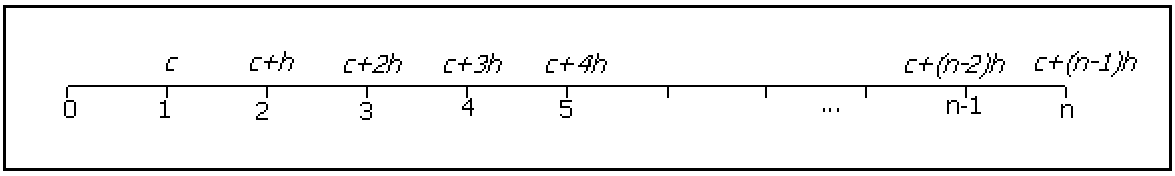


Gráfico 1

Podemos observar en el Gráfico 1, las n cuotas vencidas, pero no se han indicado las mismas como $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$, sino de acuerdo a su fórmula de cálculo a partir de la primera cuota y la razón.

Si deseamos obtener el valor actual de la renta representada, que simbolizaremos V_{VPA} debemos hacer lo siguiente:

$$V_{VPA} = cv + (c+h)v^2 + (c+2h)v^3 + ... + \left[c+(n-2)h\right]v^{n-1} + \left[c+(n-1)h\right]v^n$$

Lo que esta expresión nos indica es que debemos actualizar de a una cuota por vez y luego sumar todos los valores obtenidos.
A continuación deduciremos una fórmula que nos permita calcular este valor actual de una manera más sencilla.
En primer lugar descomponemos cada cuota, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= c\\
c_2 &= c+h\\
c_3 &= c+2h = c+h+h\\
c_4 &= c+3h = c+h+h+h
\end{aligned}
$$

$$\ldots$$

$$c_r = c + (r-1)h = c + \underbrace{h+h+h+\ldots+h}_{r-1 \text{ veces}}$$

$$\ldots$$

$$c_n = c + (n-1)h = c + \underbrace{h+h+h+\ldots+h}_{n-1 \text{ veces}}$$

En el Gráfico 2 se muestra esta descomposición:

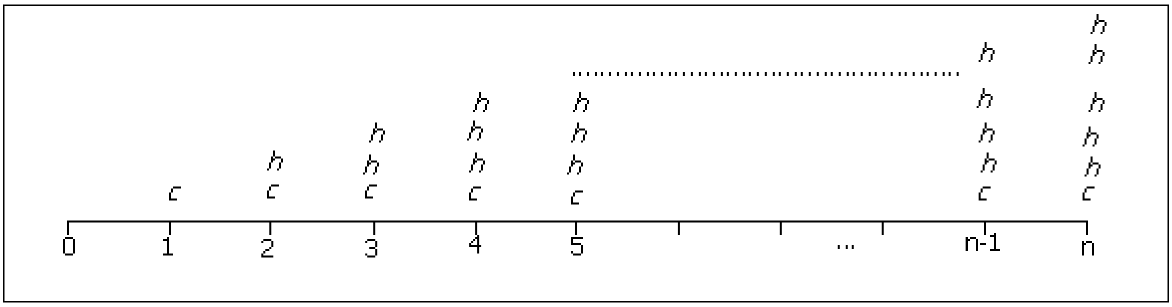


Gráfico 2

En sentido vertical observamos el valor de c más la cantidad de razones que le corresponde.
Al descomponer las cuotas de esta manera cada línea refleja un conjunto determinado de cuotas: la inferior contiene n valores de $\$c$, la anterior (hacia arriba), $n-1$ cuotas de $\$h$, la siguiente $n-2$ cuotas de $\$h$ y así sucesivamente hasta la superior, donde tenemos 1 cuota de $\$h$.

Como cada línea está compuesta por cuotas constantes, podemos calcular el valor actual de cada una de ellas:
Para las n cuotas de $\$c$ haremos:

$$ca_{\overline{n}|i}$$

En el caso de las $n-1$ cuotas de $\$h$:

$$ha_{\overline{n-1}|i}$$

Este valor actual queda ubicado al inicio de la segunda unidad de tiempo, observemos esto en el Gráfico 3:

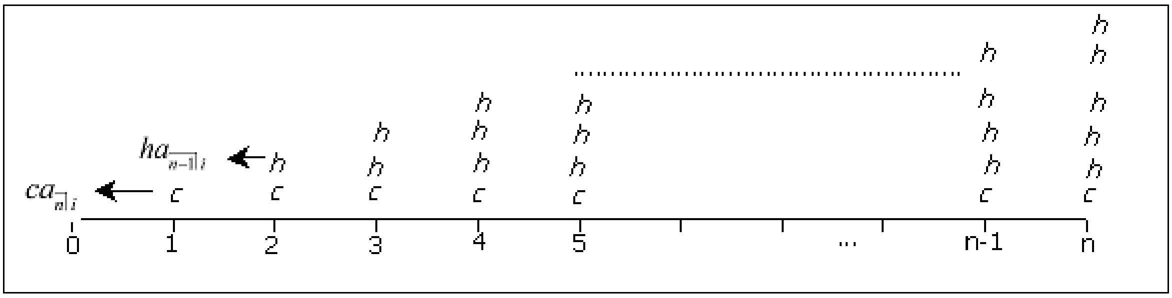


Gráfico 3

Como queremos conocer su valor en el momento 0, es necesario actualizarlo teniendo en cuenta una unidad de tiempo:

$$ha_{\overline{n-1}|i}\, v$$

A continuación, también debemos actualizar $n-2$ cuotas de $\$h$:

$$ha_{\overline{n-2}|i}$$

Tal como lo refleja el Gráfico 4, este valor actual está ubicado al inicio de la tercera unidad de tiempo, y corresponde actualizarlo al momento 0.

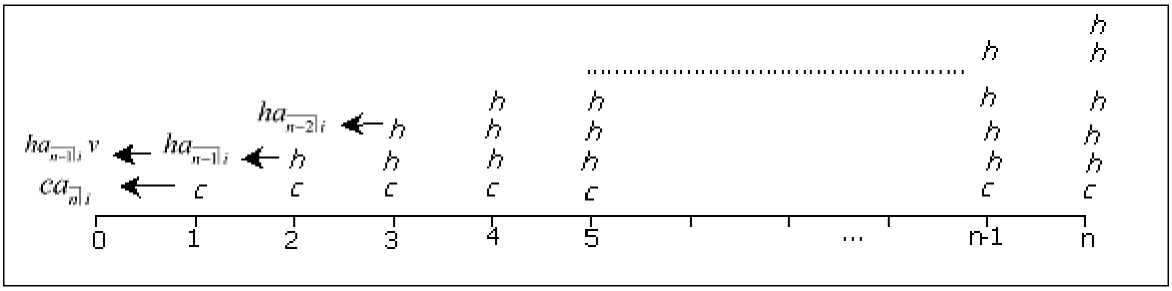


Gráfico 4

Para ello hacemos lo siguiente:

$$ha_{\overline{n-2}|i}\, v^2$$

De la misma manera continuaremos hasta llegar hasta los dos últimos conjuntos de cuotas de $\$h$:

$$ha_{\overline{2}|i}$$

y

$$ha_{\overline{1}|i}$$

Como estos valores no se encuentran ubicados en el momento 0, tienen que actualizarse hasta ese momento:

$$ha_{\overline{2}|i}\, v^{n-2}$$

y

$$ha_{\overline{1}|i}\, v^{n-1}$$

En el Gráfico 5 observaremos las operaciones realizadas:

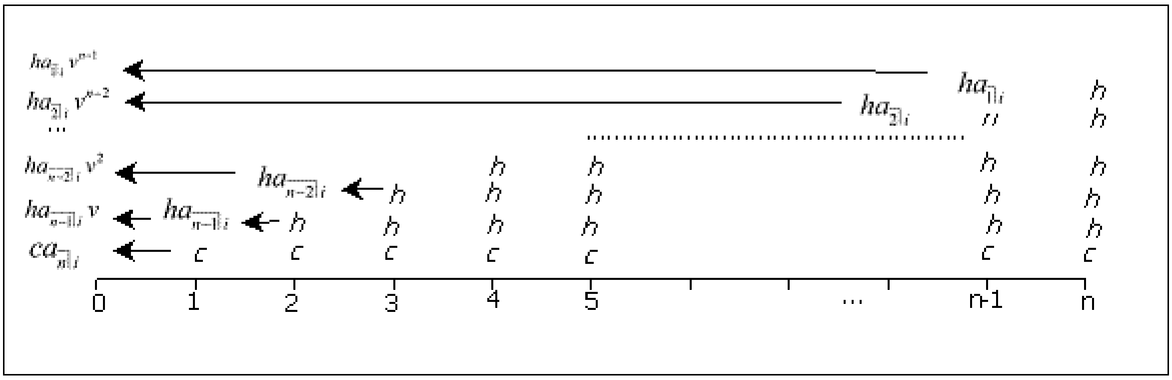


Gráfico 5

Una vez obtenidos estos valores, hay que sumarlos para determinar el valor actual:

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+ha_{\overline{n-1}|i}\,v+ha_{\overline{n-2}|i}\,v^2+...+ha_{\overline{2}|i}\,v^{n-2}+ha_{\overline{1}|i}\,v^{n-1}$$

Salvo en el primer término, en el resto extraemos factor común h:

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\left(a_{\overline{n-1}|i}\,v+a_{\overline{n-2}|i}\,v^2+...+a_{\overline{2}|i}\,v^{n-2}+a_{\overline{1}|i}\,v^{n-1}\right)$$

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\sum_{t=1}^{n-1}a_{\overline{n-t}|i}\,v^t$$

Reemplazamos $a_{\overline{n-t}|i}$:

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1-v^{n-t}}{i}v^t$$

Multiplicamos:

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\sum_{t=1}^{n-1}\frac{v^t-v^{n-t}\,v^t}{i}$$

Resolvemos $v^{n-t}\,v^t$:

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\sum_{t=1}^{n-1}\frac{v^t-v^n}{i}$$

Distribuimos el sumatorio:

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\frac{\sum_{t=1}^{n-1}v^t-\sum_{t=1}^{n-1}v^n}{i}$$

Finalmente:

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\frac{a_{\overline{n-1}|i}-(n-1)v^n}{i}$$

$$V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\frac{a_{\overline{n-1}|i}-nv^n+v^n}{i}$$

Como $a_{\overline{n-1}|i}+v^n=a_{\overline{n}|i}$, reemplazamos:

$$\boxed{V_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}+h\frac{a_{\overline{n}|i}-nv^n}{i}}$$

Donde:

"V_{VPA} es la suma de los valores actuales de n cuotas vencidas, igualmente espaciadas y variables en progresión aritmética, de primera cuota de $\$c$, razón h y a la tasa de interés i."

A partir de la fórmula de V_{VPA}, es posible determinar la fórmula de cálculo de la primera cuota y la razón.

Despejando:

$$\boxed{c=\frac{V_{VPA}-h\dfrac{a_{\overline{n}|i}-nv^n}{i}}{a_{\overline{n}|i}}}$$

Donde c es el valor de la primera de las n cuotas vencidas, igualmente espaciadas y variables en progresión aritmética con razón h que permite obtener un valor actual de $\$V_{VPD}$ y a la tasa de interés i.

$$\boxed{h=\frac{V_{VPA}-ca_{\overline{n}|i}}{\dfrac{a_{\overline{n}|i}-nv^n}{i}}}$$

Si la renta variable en progresión aritmética presentara cuotas anticipadas como la que nos muestra el Gráfico 6:

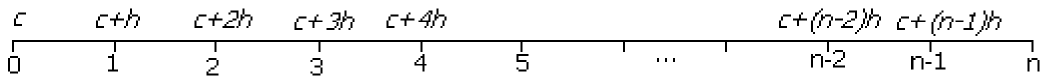


Gráfico 6

Para obtener su valor actual, aplicaremos la relación que conocemos entre los valores actuales de cuotas vencidas y anticipadas, por lo tanto:

$$\ddot{V}_{VPA}=V_{VPA}\,u$$

Remplazando:

$$\ddot{V}_{VPA}=\left(ca_{\overline{n}|i}+h\frac{a_{\overline{n}|i}-nv^n}{i}\right)u$$

Distribuyendo:

$$\ddot{V}_{VPA}=ca_{\overline{n}|i}u+h\frac{a_{\overline{n}|i}u-nv^nu}{i}$$

Finalmente:

$$\ddot{V}_{VPA} = c\ddot{a}_{\overline{n}|i} + h\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^{n-1}}{i}$$

Donde:

"$\ddot{V}_{VPA}$ es la suma de los valores actuales de n cuotas anticipadas, igualmente espaciadas y variables en progresión aritmética, de primera cuota de $\$c$, razón h y a la tasa de interés i."

Para concluir, obtenemos la primera cuota y la razón:

$$c = \frac{\ddot{V}_{VPA} - h\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^{n-1}}{i}}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}}$$

Donde c es el valor de la primera de las n cuotas anticipadas, igualmente espaciadas y variables en progresión aritmética con razón h que permite obtener un valor actual de $\$\ddot{V}_{VPD}$ y a la tasa de interés i.

$$h = \frac{\ddot{V}_{VPA} - c\ddot{a}_{\overline{n}|i}}{\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^{n-1}}{i}}$$

Existe un tipo particular de rentas variables en progresión aritmética en las cuales la razón es igual al valor de la primera cuota :

$c_1 = c$

$c_2 = c + h$

Como $c = h$, entonces

$c_2 = c + c = 2c$

$c_3 = c + 2h = 3c$

$c_4 = 4c$

$\ldots$

$c_r = rc$

$\ldots$

$c_n = nc$

A esta renta se la denomina variable en progresión aritmética incrementada.

Al aplicar un procedimiento similar al que se siguió para determinar el valor actual de una renta variable en progresión aritmética, es posible obtener para este caso particular, una expresión de cálculo más sencilla:

$$\boxed{V_{VPAI} = c\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i}}$$

"V_{VPAI} es la suma de los valores actuales de n cuotas vencidas, igualmente espaciadas y variables en progresión aritmética, de primera cuota y razón igual a $\$c$, y a la tasa de interés i."
A partir de las operaciones apropiadas podemos obtener la expresión que nos permite calcular el valor actual con cuotas anticipadas.

Los ejercicios siguientes nos permitirán aplicar algunas de las fórmulas obtenidas:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 1
Un préstamo hipotecario se amortizará con 60 cuotas mensuales y vencidas que varían en progresión aritmética, de razón $200. Si la primera cuota es de $820 y el interés mensual es 2,5% ¿cuál es el importe del préstamo?

Rta. : $163.518,23

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 2
Una trabajadora recibe una indemnización por despido de $60.000. Decide depositar 2/3 de esa suma en una entidad financiera, y extraer dicho importe en 24 cuotas -cuyos valores van disminuyendo en $120 sucesivamente-, cada 30 días,.
Si se enuncia para la operación una tasa de interés anual nominal de 0,115583, calcular el valor de la primera extracción a realizar a los 30 días.

Rta. : $3.197,43

Valor Final de una renta cierta de pagos variables en progresión aritmética

Para obtener la expresión de cálculo del valor final de una renta variable en progresión aritmética, aplicaremos las relaciones demostradas en la Unidad 4 respecto a los valores actuales y valores finales.

Para el valor final de cuotas vencidas:

$$A_{VPA} = V_{VPA}\, u^n = \left(c a_{\overline{n}|i} + h\frac{a_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} \right) u^n$$

$$A_{VPA} = ca_{\overline{n|}i}\, u^n + h\frac{a_{\overline{n|}i}u^n - nv^n u^n}{i}$$

Finalmente:

$$\boxed{A_{VPA} = cs_{\overline{n|}i} + h\frac{s_{\overline{n|}i} - n}{i}}$$

Donde:

"A_{VPA} es la suma de los valores finales de n cuotas vencidas, igualmente espaciadas y variables en progresión aritmética, de primera cuota de $\$c$, razón h y a la tasa de interés i."

Para el valor final de cuotas anticipadas:

$$\ddot{A}_{VPA} = \ddot{V}_{VPA}\, u^n = \left(c\ddot{a}_{\overline{n|}i} + h\frac{\ddot{a}_{\overline{n|}i} - nv^{n-1}}{i} \right) u^n$$

$$\ddot{A}_{VPA} = c\ddot{a}_{\overline{n|}i}\, u^n + h\frac{\ddot{a}_{\overline{n|}i}u^n - nv^{n-1}u^n}{i}$$

$$\boxed{\ddot{A}_{VPA} = c\ddot{s}_{\overline{n|}i} + h\frac{\ddot{s}_{\overline{n|}i} - nu}{i}}$$

Donde:

"$\ddot{A}_{VPA}$ es la suma de los valores finales de n cuotas anticipadas, igualmente espaciadas y variables en progresión aritmética, de primera cuota de $\$c$, razón h y a la tasa de interés i."

Le proponemos ahora, resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 3

Una persona decide realizar depósitos en el Banco del Ahorrista, que ofrece una tasa de interés nominal anual de 0,09125 con capitalización para 30 días. Comienza con un depósito de $1.500 y los siguientes aumentarán sucesivamente en $100, debido a que espera mejorar sus posibilidades futuras de ahorro.

Indicar el valor que logrará reunir luego de realizar 8 depósitos, considerando que:

a) Los depósitos son vencidos.

b) Los depósitos son anticipados.

Rta. : a) $15.162,17   b)$15.275,88

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 4
Una empresa necesita reunir $25.000 en un plazo de 10 meses. Para alcanzar ese valor, realiza depósitos bimestrales, que se incrementan en $750 en los sucesivos bimestres, a la tasa de interés de 0,024 bimestral. Calcular el valor de la primera y última cuota a depositar si:
a) Los depósitos son vencidos.
b) Los depósitos son anticipados.

Rta. : a) $3.301,26 y $6.301,26
b) $3.189,56 y $6.189,56

Sistema de Amortización de Deudas de Cuota Variable en Progresión Aritmética

Una aplicación del valor actual de una renta variable en progresión aritmética es la amortización de una deuda utilizando este modelo de variación en las cuotas.
Los elementos que intervienen en esta operación son los siguientes:
V = la deuda, en este caso el valor actual de n cuotas vencidas y variables en progresión aritmética.
n = número de cuotas
i = tasa de interés
c = primera cuota
h = razón de variación

Recordemos el valor de las cuotas:

$$c_1 = c$$
$$c_2 = c + h$$
$$c_3 = c + 2h$$
$$c_4 = c + 3h$$
$$\ldots$$
$$c_r = c + (r-1)h$$
$$\ldots$$
$$c_n = c + (n-1)h$$

A continuación determinaremos las fórmulas de cálculo del saldo y los componentes de la cuota.

Determinación del Saldo

El saldo de la deuda al inicio de la primera unidad de tiempo será el valor actual de las n cuotas:

$$S_0 = V_{VPD} = c a_{\overline{n|}i} + h \frac{a_{\overline{n|}i} - n v^n}{i}$$

Al transcurrir la primera unidad de tiempo el saldo se capitalizará:

$$S_1^{'} = S_0 \, u = \left(c a_{\overline{n|}i} + h \frac{a_{\overline{n|}i} - n v^n}{i} \right) u$$

$$S_1^{'} = c\ddot{a}_{\overline{n|}i} + h\frac{\ddot{a}_{\overline{n|}i} - nv^{n-1}}{i}$$

Luego de pagar la primera cuota el saldo se reduce:

$$S_1 = S_1^{'} - c = (c+h)a_{\overline{n-1|}i} + h\frac{a_{\overline{n-1|}i} - (n-1)v^{n-1}}{i}$$

S_1 es el valor actual de las $n-1$ cuotas vencidas y variables en progresión aritmética que restan por pagar, siendo $c+h$ el importe de la primera cuota a abonar.

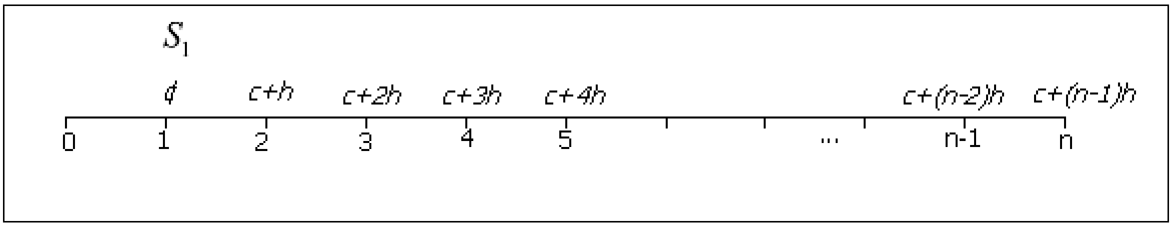


Gráfico 7

El gráfico 10 nos muestra el Saldo al inicio de la segunda unidad de tiempo (S_1), la primera cuota ha sido abonada y la próxima a pagar es la segunda.

El saldo al final de la segunda unidad de tiempo es:

$$S_2^{'} = S_1\,u = \left((c+h)a_{\overline{n-1|}i} + h\frac{a_{\overline{n-1|}i} - (n-1)v^{n-1}}{i}\right)u$$

$$S_2^{'} = (c+h)\ddot{a}_{\overline{n-1|}i} + h\frac{\ddot{a}_{\overline{n-1|}i} - (n-1)v^{n-2}}{i}$$

$S_2^{'}$ es el saldo al final de la segunda unidad de tiempo, antes de abonar la segunda cuota de valor $c+h$.

Después de pagada la segunda cuota:

$$S_2 = (c+2h)a_{\overline{n-2|}i} + h\frac{a_{\overline{n-2|}i} - (n-2)v^{n-2}}{i}$$

Saldo que se obtiene del valor actual de las $n-2$ cuotas que faltan pagar, siendo la primera de importe $c+2h$.

En general, para la unidad de tiempo r, el saldo al final es:

$$S_r^{'} = \left[c+(r-1)h\right]\ddot{a}_{\overline{n-r+1|}i} + h\frac{\ddot{a}_{\overline{n-r+1|}i} - (n-r+1)v^{n-r}}{i}$$

Y el saldo al inicio de la unidad de tiempo $r+1$:

$$S_r = (c+rh)\,a_{\overline{n-r|}\,i} + h\,\frac{a_{\overline{n-r|}\,i} - (n-r)\,v^{n-r}}{i}$$

Composición de la cuota
Una cuota cualquiera estará compuesta por interés y amortización:

$$c_r = t_r + I_r$$

El interés contenido en las sucesivas cuotas va decreciendo ya que se calcula sobre el saldo de la deuda, que va disminuyendo por el pago de las amortizaciones:

$I_1 = S_0\, i$
$I_2 = S_1\, i$
...
$I_r = S_{r-1}\, i$
...
$I_n = S_{n-1}\, i$

La amortización variará teniendo en cuenta la disminución en los intereses y el valor de la razón:

$t_1 = c_1 - I_1 = c_1 - S_0\, i = c_1 - V\, i$

Como demostramos, al analizar el comportamiento de la amortización en el sistema de amortización de cuota constante, las amortizaciones aumentan en contrapartida a la disminución de los intereses:

$$t_r = t_{r-1}(1+i)$$

Por lo tanto:

$t_2 = t_1(1+i) + h$
$t_3 = t_2(1+i) + h$
...
$t_r = t_{r-1}(1+i) + h$
...
$t_n = t_{n-1}(1+i) + h$

Cuando definimos que h es la razón de variación, indicamos que puede asumir valores positivos o negativos. Por lo tanto las amortizaciones contenidas en las sucesivas cuotas pueden ir creciendo o decreciendo o manteniéndose constantes.

Es posible encontrar expresiones de cálculo para el interés y la amortización contenida en cada cuota de una deuda de pagos variables en progresión aritmética, pero con las relaciones planteadas y la fórmula de saldo, pueden calcularse cualquiera de los componentes del sistema.

Otro aspecto interesante a tener en cuenta en este sistema de amortización es que puede ocurrir, cuando los pagos son crecientes, que el importe de la primera cuota (y tal vez de algunas que le sigan) sea menor al interés generado en la primera unidad de tiempo:

$$c_1 < Vi$$

Por lo tanto el saldo de la deuda crecerá por sobre el importe de la deuda original, hasta que en algún momento del plazo el aumento de la cuota (por efecto de la razón) permita que el valor supere al interés de esa unidad de tiempo y la deuda comience a disminuir.

Cuadro de amortización

En la página siguiente se presenta el cuadro de amortización para una deuda que se amortiza con cuotas variables en progresión aritmética:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	$S_0 = V_{VPD} = ca_{\overline{n}\rceil i} + h\dfrac{a_{\overline{n}\rceil i} - nv^n}{i}$	$S_1^{'} = S_0\left(1+i\right)$	$t_1 = c_1 - I_1$	$I_1 = S_0\, i$	$c_1 = c$
2	$S_1 = \left(c+h\right)a_{\overline{n-1}\rceil i} + h\dfrac{a_{\overline{n-1}\rceil i} - \left(n-1\right)v^{n-1}}{i}$	$S_2^{'} = S_1\left(1+i\right)$	$t_2 = c_2 - I_2$	$I_2 = S_1\, i$	$c_2 = c+h$
3	$S_2 = \left(c+2h\right)a_{\overline{n-2}\rceil i} + h\dfrac{a_{\overline{n-2}\rceil i} - \left(n-2\right)v^{n-2}}{i}$	$S_3^{'} = S_2\left(1+i\right)$	$t_3 = c_3 - I_3$	$I_3 = S_2\, i$	$c_3 = c+2h$
…	…	…	…	…	…
r	$S_{r-1} = \left[c+\left(r-1\right)h\right]a_{\overline{n-r+1}\rceil i} + h\dfrac{a_{\overline{n-r+1}\rceil i} - \left(n-r+1\right)v^{n-r+1}}{i}$	$S_r^{'} = S_{r-1}\left(1+i\right)$	$t_r = c_r - I_r$	$I_r = S_{r-1}\, i$	$c_r = c+\left(r-1\right)h$
…	…	…	…	…	…
n	$S_{n-1} = \left[c+\left(n-1\right)h\right]a_{\overline{1}\rceil i} + h\dfrac{a_{\overline{1}\rceil i} - v}{i}$	$S_n^{'} = S_{n-1}\left(1+i\right)$	$t_n = c_n - I_n$	$I_n = S_{n-1}\, i$	$c_n = c+\left(n-1\right)h$

Sistema de Amortización de Deudas de Cuota Variable y Amortización Constante

Este sistema de amortización de deudas, como todo sistema de amortización válido financieramente, verifica que la suma de los valores actuales de las cuotas (a la tasa de interés enunciada y aplicada en la operación) es igual al valor de la deuda. La tasa de interés de la operación será justamente aquella que iguale el compromiso del deudor con el compromiso del acreedor.

Composición de la Cuota

Una de las características distintivas de este sistema, conocido también como Sistema Alemán, es que la amortización contenida en cada una de las cuotas es constante y se obtiene de dividir el valor de la deuda (V) por el número de cuotas a pagar (n):

$$t = \frac{V}{n}$$

Todas las amortizaciones son iguales:

$$t_1 = t_2 = t_3 = ... = t_n$$

El interés contenido en cada cuota se obtiene del producto entre el saldo adeudado al inicio de cada unidad de tiempo y la tasa de interés de la operación.
Para el interés de la primera cuota:

$$I_1 = S_0\, i = Vi$$

ya que el saldo adeudado al inicio de la primera unidad de tiempo es toda la deuda.

Para calcular el interés contenido en la segunda cuota, debemos tener en cuenta que la deuda ha disminuido por el pago de la primera amortización:

$$I_2 = S_1\, i = (V - t_1)\, i$$

Como todas las amortizaciones son iguales:

$$I_2 = (V - t)\, i$$

para calcular el interés contenido en la tercera cuota, debemos tener en cuenta que la deuda ha disminuido por el pago de la primera y segunda amortización:

$$I_3 = S_2\, i = (V - t_1 - t_2)\, i = (V - 2t)\, i$$

De la misma manera continuamos hasta llegar a la unidad de tiempo r:

$$I_r = S_{r-1}\, i = \left[V - (r-1)\, t\right] i$$

Cuando nos encontremos al final del plazo, al momento de pagar la última cuota, teniendo en cuenta que se han pagado $n-1$ cuotas y, por lo tanto, $n-1$ amortizaciones:

$$I_n = S_{n-1}\, i = \left[V-(n-1)t\right]i$$

Es posible afirmar que el interés contenido en cada cuota va decreciendo al disminuir el saldo sobre el cual se calcula, debido a las sucesivas amortizaciones:

$$I_1 > I_2 > I_3 > \ldots > I_n$$

Finalmente, la cuota, que es la suma de amortización e interés, es decreciente:

$$c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > c_n$$

La primera cuota se puede calcular con la siguiente expresión:

$$c_1 = t_1 + Vi$$

Y como todas las amortizaciones son iguales entre sí, e iguales a $\frac{V}{n}$, remplazamos:

$$c_1 = \frac{V}{n} + Vi$$

Las cuotas siguientes serán:

$$c_2 = \frac{V}{n} + \left(V - \frac{V}{n}\right)i$$

$$c_3 = \frac{V}{n} + \left(V - 2\frac{V}{n}\right)i$$

$$\ldots$$

$$c_r = \frac{V}{n} + \left[V - (r-1)\frac{V}{n}\right]i$$

$$\ldots$$

$$c_n = \frac{V}{n} + \left[V - (n-1)\frac{V}{n}\right]i = \frac{V}{n} + \frac{V}{n}i = \frac{V}{n}(1+i)$$

Teniendo en cuenta que los pagos son variables y decrecientes, determinaremos a continuación cuál es el importe en que las cuotas varían. Comenzaremos con la diferencia entre las dos primeras cuotas:

$$c_2 - c_1 = \frac{V}{n} + \left(V - \frac{V}{n}\right)i - \left(\frac{V}{n} + Vi\right)$$

Resolvemos:

$$c_2 - c_1 = \frac{V}{n} + Vi - \frac{V}{n}i - \frac{V}{n} - Vi$$

$$c_2 - c_1 = \cancel{\frac{V}{n}} + \cancel{Vi} - \frac{V}{n}i - \cancel{\frac{V}{n}} - \cancel{Vi} = -\frac{V}{n}i$$

La segunda cuota disminuye, respecto de la primera, en un importe igual a $\frac{V}{n}i$.

Calculemos la diferencia entre la segunda y la tercera:

$$c_3 - c_2 = \frac{V}{n} + \left(V - 2\frac{V}{n}\right)i - \left[\frac{V}{n} + \left(V - \frac{V}{n}\right)i\right]$$

Resolvemos:

$$c_3 - c_2 = \frac{V}{n} + Vi - 2\frac{V}{n}i - \frac{V}{n} - Vi + \frac{V}{n}i$$

$$c_3 - c_2 = \cancel{\frac{V}{n}} + \cancel{Vi} - 2\frac{V}{n}i - \cancel{\frac{V}{n}} - \cancel{Vi} + \frac{V}{n}i = -2\frac{V}{n}i + \frac{V}{n}i = -\frac{V}{n}i$$

Nuevamente nos encontramos que la cuota disminuye en $\frac{V}{n}i$. Podemos continuar con el resto de las cuotas y comprobaremos que se verifica para todas.

Considerando esta característica en el comportamiento de la cuota, podemos afirmar que este sistema de amortización de deuda se encuadra dentro de las rentas variables en progresión aritmética decrecientes, de razón igual a $-\frac{V}{n}i$.

Determinación del Saldo

A partir del análisis que realizamos para la obtención del interés y de la cuota podemos indicar cómo obtenemos los sucesivos saldos en una deuda que se amortiza mediante este sistema.

Identificaremos dos tipos de saldos:

- Saldo al inicio de una unidad de tiempo
- Saldo al final de una unidad de tiempo

Comencemos con el saldo al inicio de la primera unidad de tiempo (momento 0):

$$S_0 = V$$

Al transcurrir la primera unidad de tiempo, nos encontraremos con el saldo al final de la primera unidad de tiempo, que se obtiene de capitalizar el saldo al inicio por una unidad de tiempo:

$$S'_1 = S_0(1+i) = V(1+i)$$

S'_1 es el saldo antes de pagar la primera cuota. Una vez pagada esta cuota, obtenemos S_1, que es el saldo al inicio de la segunda unidad de tiempo:

$$S_1 = S'_1 - c_1$$

También podemos obtener este saldo a partir de la deuda original, sabiendo que esta disminuye por el pago de las amortizaciones:

$$S_1 = V - t_1 = V - \frac{V}{n} \qquad (1)$$

Al final de la segunda unidad de tiempo, determinaremos el saldo correspondiente:

$$S'_2 = S_1(1+i)$$

Reemplazando a S_1 por (1):

$$S'_2 = (V - t_1)(1+i) = \left(V - \frac{V}{n}\right)(1+i)$$

Luego de pagarse la segunda cuota, el saldo será:

$$S_2 = V - 2\frac{V}{n}$$

y a su vez es el saldo al inicio de la tercera unidad de tiempo.

El saldo al final de la tercera unidad de tiempo:

$$S'_3 = S_2(1+i) = \left(V - 2\frac{V}{n}\right)(1+i)$$

De la misma manera continuamos obteniendo los saldos al inicio y al final de cada unidad de tiempo, hasta llegar al inicio de la unidad de tiempo r:

$$S_{r-1} = V - (r-1)\frac{V}{n}$$

El saldo al final es:

$$S'_r = \left[V - (r-1)\frac{V}{n}\right](1+i)$$

En la última unidad de tiempo determinamos en primer lugar el saldo al inicio:

$$S_{n-1} = V - (n-1)\frac{V}{n}$$

Que también podemos expresarlo como:

$$S_{n-1} = \frac{V}{n} \qquad (2)$$

debido a que sólo resta la amortización contenida en la última cuota.
El saldo al final de la última unidad de tiempo es:

$$S'_n = S_{n-1}(1+i) = \left[V - (n-1)\frac{V}{n}\right](1+i)$$

y de acuerdo a lo indicado en (2):

$$S'_n = \frac{V}{n}(1+i)$$

aplicando propiedad distributiva, obtenemos:

$$S'_n = \frac{V}{n} + \frac{V}{n}i = c_n$$

El siguiente gráfico nos muestra en detalle todos los componentes de una deuda amortizada con el sistema alemán. Puede ser de utilidad analizar los distintos componentes visualizándolos simultáneamente en el Gráfico 8:

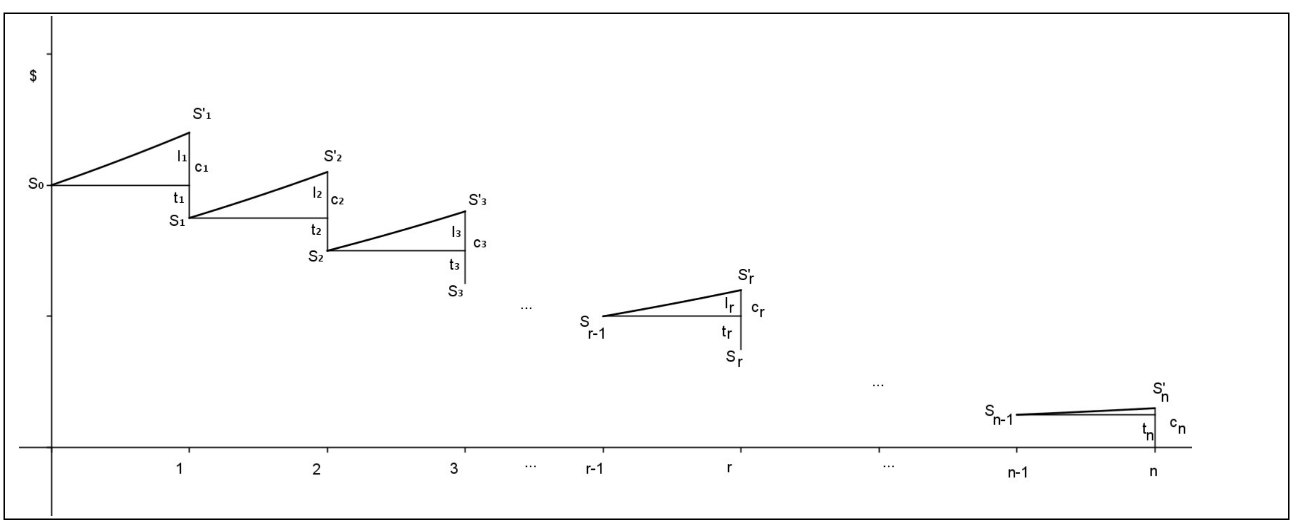


Gráfico 8

Para poner en práctica lo aprendido les sugerimos resolver el ejercicio propuesto a continuación:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 5

Un productor agropecuario adquiere una nueva cosechadora en $400.000 que financiará con una entrega de $50.000 y el resto en 10 cuotas cada 90 días, vencidas y de amortización constante, con un interés del 1,8% para 30 días.

A partir de esta información, completar:

a)	Amortización contenida en la tercera cuota	
b)	Importe de la cuarta cuota	
c)	Interés abonado en la primera unidad de tiempo	
d)	Saldo adeudado al inicio de la sexta unidad de tiempo	
e)	Saldo adeudado al momento de pagar la octava cuota	

Rta.: a) $35.000 b)$48.469,57 c)$19.242,24
d)$175.000 e)$110.772,67

Cuadro de Amortización

Todos los componentes de una deuda que se amortiza a través del sistema de amortización constante (sistema alemán), puede presentarse en una tabla como la siguiente:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	S_0	$S_1^{'}$	t_1	I_1	c_1
2	S_1	$S_2^{'}$	t_2	I_2	c_2
3	S_2	$S_3^{'}$	t_3	I_3	c_3
...	...	...	...	...	...
r	S_{r-1}	$S_r^{'}$	t_r	I_r	c_r
...	...	...	...	...	...
$n-1$	S_{n-2}	$S_{n-1}^{'}$	t_{n-1}	I_{n-1}	c_{n-1}
n	S_{n-1}	$S_n^{'}$	t_n	I_n	c_n

El cuadro de amortización puede construirse de distintas maneras:

a) A través de las fórmulas de cálculo de cada uno de los componentes, de acuerdo a las fórmulas que fuimos obteniendo:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	$S_0=V$	$S_1^{'}=S_0\left(1+i\right)$	$t=\frac{V}{n}$	$I_1=Vi$	$c_1=\frac{V}{n}+Vi$
2	$S_1=V-\frac{V}{n}$	$S_2^{'}=\left(V-\frac{V}{n}\right)\left(1+i\right)$	$t=\frac{V}{n}$	$I_2=\left(V-\frac{V}{n}\right)i$	$c_2=\frac{V}{n}+\left(V-\frac{V}{n}\right)i$
3	$S_2=V-2\frac{V}{n}$	$S_3^{'}=\left(V-2\frac{V}{n}\right)\left(1+i\right)$	$t=\frac{V}{n}$	$I_3=\left(V-2\frac{V}{n}\right)i$	$c_3=\frac{V}{n}+\left(V-2\frac{V}{n}\right)i$
…	…	…	…	…	…
r	$S_{r-1}=V-\left(r-1\right)\frac{V}{n}$	$S_r^{'}=\left[V-\left(r-1\right)\frac{V}{n}\right]\left(1+i\right)$	$t=\frac{V}{n}$	$I_r=\left[V-\left(r-1\right)\frac{V}{n}\right]i$	$c_r=\frac{V}{n}+\left[V-\left(r-1\right)\frac{V}{n}\right]i$
…	…	…	…	…	…
n	$S_{n-1}=\frac{V}{n}$	$S_n^{'}=\frac{V}{n}\left(1+i\right)$	$t=\frac{V}{n}$	$I_n=\left[V-\left(n-1\right)\frac{V}{n}\right]i$	$c_n=\frac{V}{n}\left(1+i\right)$

206

b) También podemos construirlo por unidad de tiempo, aplicando las relaciones entre los distintos componentes, comenzando con los datos que ya se cuentan (la deuda y la amortización constante para todas las unidades de tiempo) y luego continuando con las sucesivas filas:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	$S_0=V$	$S_1^{'}=S_0\left(1+i\right)$	$\frac{V}{n}$	$I_1=S_1^{'}-S_0$	$c_1=t_1+I_1$
2	$S_1=S_0-t_1$	$S_2^{'}=S_1\left(1+i\right)$	$\frac{V}{n}$	$I_2=S_2^{'}-S_1$	$c_2=t_2+I_2$
3	$S_2=S_1-t_2$	$S_3^{'}=S_2\left(1+i\right)$	$\frac{V}{n}$	$I_3=S_3^{'}-S_2$	$c_3=t_3+I_3$
…	…	…	…	…	…
r	$S_{r-1}=S_{r-2}-t_{r-1}$	$S_r^{'}=S_{r-1}\left(1+i\right)$	$\frac{V}{n}$	$I_r=S_r^{'}-S_{r-1}$	$c_r=t_r+I_r$
…	…	…	…	…	…
$n-1$	$S_{n-2}=S_{n-3}-t_{n-2}$	$S_{n-1}^{'}=S_{n-2}\left(1+i\right)$	$\frac{V}{n}$	$I_{n-1}=S_{n-1}^{'}-S_{n-2}$	$c_{n-1}=t_{n-1}+I_{n-1}$
n	$S_{n-1}=S_{n-2}-t_{n-1}$	$S_n^{'}=S_{n-1}\left(1+i\right)$	$\frac{V}{n}$	$I_n=S_n^{'}-S_{n-1}$	$c_n=t_n+I_n$

Recordemos que, al completar el cuadro, podremos verificar que:

- El saldo al inicio de la última unidad de tiempo es igual a la amortización ($S_{n-1} = t$)

- El saldo al final de la última unidad de tiempo es igual a la última cuota ($S'_n = c_n$)

- La suma de todas las amortizaciones es igual a la deuda $\left(V = \sum_{p=1}^{n} t_p \right)$

En este sistema la cuota es variable, y la calculadora financiera opera con cuotas constantes. Por lo tanto no podremos utilizar funciones financieras para la composición de la cuota y cálculo de saldos.

Con lo aprendido hasta aquí les proponemos analizar sobre el caso que presentamos al comienzo de esta unidad

Observando las imágenes podemos extraer los siguientes datos:

$V = 50.000$
$n = 6$
$i^{(m)} = 0,38\ anual$

Calculamos la tasa de interés mensual:

$$i = \frac{0,38}{12} = 0,03167\ mensual$$

Si calculamos la tasa de interés equivalente anual de esta última, verificamos el valor expresado por el banco (45,37%).

La amortización contenida en cada cuota:

$$t = \frac{50.000}{6} = 8.333,33$$

Construimos el cuadro de amortización:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	50.000,00	51.583,33	8.333,33	1.583,33	9.916,66
2	41.666,67	42.986,11	8.333,33	1.319,44	9.652,77
3	33.333,34	34.388,90	8.333,33	1.055,56	9.388,89
4	25.000,00	25.791,67	8.333,33	791,67	9.125,00
5	16.666,67	17.194,45	8.333,33	527,78	8.861,11
6	8.333,33	8.597,22	8.333,33	263,89	8.597,22

Puede observarse que, siguiendo los procedimientos estudiados, llegamos a la conclusión de que los valores del cuadro ofrecido por el banco, en lo que hace a los valores del saldo (al inicio), interés, capital (amortización) y cuota (cuota pura), coinciden.

Les proponemos resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 6
Un préstamo personal ofrecido por el Banco de la Ciudad por $3.000 puede abonarse con 6 cuotas vencidas, variables y cada 30 días, con amortización constante, y una tasa de interés de 0,26 anual nominal con capitalización 30 días. Ud. debe:
a) Calcular el importe de la primera cuota.
b) Construir el cuadro de amortización.

Rta.: a) $564,11

b)

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	3.000,00	3.064,11	500,00	64,11	564,11
2	2.500,00	2.553,42	500,00	53,42	553,42
3	2.000,00	2.042,74	500,00	42,74	542,74
4	1.500,00	1.532,05	500,00	32,05	532,05
5	1.000,00	1.021,37	500,00	21,37	521,37
6	500,00	510,68	500,00	10,68	510,68

Sistema de amortización de deudas de cuota variable y amortización constante. Situaciones Especiales

Concretada una operación de préstamo bajo este sistema, puede suceder que se produzcan ciertos eventos o modificaciones en las condiciones originales de la operación, tal como analizamos en el sistema francés.

Recordemos brevemente estas situaciones:

Regularización:
Se refiere a la situación en la cual el deudor no ha pagado la cuota correspondiente a una o más unidades de tiempo y se presenta ante el acreedor para el pago de la/s misma/s.
Para calcular el importe a abonar, deberán capitalizarse la/s cuota/s con atraso hasta el momento en que el pago se haga efectivo.
También puede calcularse como diferencia de saldos.

Cancelación anticipada:
Se refiere a la situación en la cual el deudor ofrece al acreedor el pago de toda la deuda en algún momento del plazo.
En este caso corresponde determinar el saldo de la deuda a ese momento de la cancelación.

Regularización y cancelación anticipada
Es una combinación de las dos situaciones anteriores. El deudor, además de abonar cuotas ya vencidas con anterioridad, ofrece cancelar toda la deuda en el momento de regularizar.

La forma más sencilla de determinar el importe a pagar en esta situación, es calcular el saldo al inicio de la unidad de tiempo en que se produce el primer incumplimiento en el pago y capitalizarlo hasta el momento en que se regulariza y cancela.

Conversión de deudas

Se refiere a la situación en la cual se modifica alguna/s de las condiciones originales del préstamo. Puede modificarse la tasa de interés, el número y/o el valor de las cuotas. Esto traerá como consecuencia una modificación en algún/algunos de los demás componentes.

Para resolver estas situaciones, será necesario calcular el saldo al momento en donde se producirá el cambio y se volverán a calcular la nueva amortización y el resto de los componentes.

Pago extraordinario

Se refiere a la situación en la cual el deudor decide realizar un pago adicional, que puede coincidir o no con el pago de una cuota.

Esta acción producirá una reducción en la deuda, que hará modificar el valor y/o la cantidad de cuotas que restan por pagar.

Para ello deberá calcularse el saldo pendiente después del pago extraordinario y reducir el valor y/o la cantidad de cuotas que restan por pagar.

Podremos resolver algunas de estas situaciones en los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 7

La empresa TERMOQUAT SRL solicita un crédito de $48.000 al Banco del Sur. El préstamo se amortizará en 12 cuotas mensuales, a una tasa de interés nominal anual de 0,60 con capitalización mensual, utilizando el sistema de amortización alemán (*).

Calcular:

a) El valor de la segunda cuota.

b) El importe a abonar si no se pagan la 3° y 4° cuota y se regulariza la deuda cuando han transcurrido 4 meses y medio.

c) El valor de las cuotas siguientes, si al momento de pagar la décima cuota, el deudor solicita que el saldo que resta se abone en el doble de cuotas que quedan por pagar.

Rta.: a) $6.200   b)$12.398,81

c)$2.400; $2.300; $2.200 y $2.100

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 8

Un empleado solicita un préstamo, en el banco donde percibe sus haberes, de $5.000, a amortizar en cuotas cada 30 días, vencidas, con amortización constante y a un interés anual de 43,28%. La primera cuota es de $400.

Determinar:

a) La cantidad de cuotas a abonar.

b) El interés contenido en la novena cuota.

c) El saldo al final del séptimo mes.

d) El valor de la cuota siguiente y de la última si, junto con la décima segunda cuota, se realiza un pago extra de $400.

e) El importe a abonar junto con la décima segunda cuota, si no se pagaron las décima y undécima cuotas, y se decidiera regularizar la deuda o se decidiera cancelarla.

f) El valor de la cuota si, luego de pagada la séptima cuota, se decide cambiar el valor de las cuotas de manera que sean constantes, manteniendo la misma tasa de interés y el número de cuotas que faltan.
(Resolver los incisos d), e) y f) de manera independiente).

Rta.: a) 20 b)$90 c)$3.605 d)$248 y $206
e)$1.005 y $3.005 f)$305,60

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 9
Un organismo provincial recaudador de impuestos implementa una moratoria con pago de cuotas variables con amortización constante, mensuales y vencidas, a una tasa de interés del 0,03 mensual. Un contribuyente que debe $3.400, decide abonarlo en 10 cuotas. Determinar:
a) El importe del interés contenido en la cuarta cuota.
b) El saldo de la deuda después de pagar la quinta cuota.
c) El importe a pagar, si no abona la sexta y la séptima cuotas y decide regularizar su deuda al final del octavo mes.

Rta.: a) $71,40 b) $ 1.700 c) $1.177,64

Rentas Ciertas de Pagos Variables en Progresión Geométrica

Una renta es variable en progresión geométrica cuando cada cuota se obtiene de multiplicar la anterior por un valor constante, llamada razón.

Por lo tanto, las cuotas que componen una renta de este tipo son:

$$c_1 = c$$
$$c_2 = cq$$
$$c_3 = (cq)q = cq^2$$
$$c_4 = cq^3$$
$$\ldots$$
$$c_r = cq^{r-1}$$
$$\ldots$$
$$c_n = cq^{n-1}$$

Donde:
$c =$ importe de la primera cuota
$q =$ razón de variación. Su valor puede ser mayor que 1 (la renta será de cuota creciente) o menor que 1 (las cuotas serán decrecientes). Si $q = 1$, la renta es de cuota constante.

Ejemplo 5.3
Una renta está compuesta por 5 cuotas vencidas y mensuales, con primera cuota de $600 y las restantes crecen en un 5%.

Las cuotas restantes son:

$$c_2 = 600 + 600.5\% = 600 + 600.0,05 = 600(1+0,05) = 600.1,05 = 630$$

(Si las cuotas crecen un 5%, la razón de variación es 1,05)

$$c_3 = 600.1,05^2 = 661,50$$

$$c_4 = 600.1,05^3 = 694,575$$

$$c_5 = 600.1,05^4 = 729,30$$

Ejemplo 5.4

La última cuota de una renta variable en progresión aritmética de 4 cuotas anticipadas es $3.790,80 y las cuotas disminuyen en un 10%.

¿Cuál es el valor de la primera cuota?

$$c_4 = 3.790,80$$

La razón de variación es 0,90, ya que:

$$c_2 = cq = c - c.0,10 = c(1-0,10) = c.0,90$$

Por lo tanto:

$$c_4 = cq^3 = c\,0,90^3$$

Remplazamos a c_4 por su valor:

$$3.790,80 = c\,0,90^3$$

$$c = \frac{3.790,80}{0,729} = 5.200$$

Por lo tanto:

$$c_1 = 5.200$$

$$c_2 = 5.200\,.\,0,90 = 4.680$$

$$c_3 = 5.200\,.\,0,90^2 = 4.212$$

$$c_4 = 5.200\,.\,0,90^3 = 3.790,80$$

Dado que ya reconocemos las características de una renta de cuotas variables en progresión geométrica, nos ocuparemos ahora de encontrar las fórmulas de cálculo que nos permitan obtener su valor actual y final.

Valor Actual de una renta cierta de pagos variables en progresión geométrica

Nuestro objetivo será encontrar el valor actual de una renta de cuotas vencidas como la representada en el eje temporal del Gráfico 9:

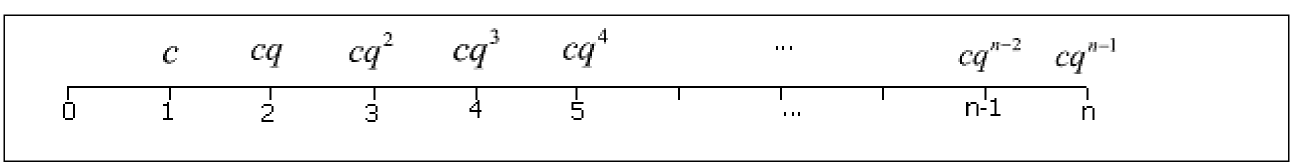


Gráfico 9

Si actualizamos cada una de estas cuotas por el factor de capitalización obtendremos:

$$V_{VPG} = cv + cqv^2 + cq^2v^3 + cq^3v^4 + \ldots + cq^{n-2}v^{n-1} + cq^{n-1}v^n \qquad (3)$$

Donde V_{VPG} será el símbolo que representa el valor actual de una renta de cuotas vencidas y variables en progresión geométrica.

En la expresión anterior, extraemos factor común cv:

$$V_{VPG} = cv\left(1 + qv + q^2v^2 + q^3v^3 + \ldots + q^{n-2}v^{n-2} + q^{n-1}v^{n-1}\right)$$

$$V_{VPG} = cv\left[1 + qv + (qv)^2 + (qv)^3 + \ldots + (qv)^{n-2} + (qv)^{n-1}\right] \qquad (4)$$

A los fines de encontrar una fórmula sencilla de cálculo de este tipo de rentas, realizaremos un artificio que consiste en el siguiente remplazo:

$$qv = v_0 \qquad (5)$$

Donde:

$$v_0 = \frac{1}{1+i_0}$$

Como:

$$qv = \frac{1}{1+i_0}$$

Despejamos i_0:

$$1 + i_0 = \frac{1}{qv}$$

$$1 + i_0 = \frac{1}{q\frac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{q}$$

$$i_0 = \frac{1+i}{q} - 1$$

Siendo i_0 una tasa de trabajo a los fines de la determinación de la fórmula del valor actual.

Remplazamos (5) en la expresión (4):

$$V_{VPG} = cv\left(1 + v_0 + v_0^2 + v_0^3 + \ldots + v_0^{n-2} + v_0^{n-1}\right) = cv\sum_{t=0}^{n-1} v_0^t$$

Como:

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^t = \ddot{a}_{\overline{n|}i}$$

El valor actual resultará:

$$V_{VPG} = cv\, \ddot{a}_{\overline{n|}i_0}$$

Otra expresión alternativa a esta última, se obtiene a partir de extraer factor común $\frac{c}{q}$ en (3):

$$V_{VPG} = \frac{c}{q}\left[qv + (qv)^2 + (qv)^3 + (qv)^4 + \ldots + (qv)^{n-1} + (qv)^n\right]$$

Nuevamente sustituimos:

$$qv = v_0$$

$$V_{VPG} = \frac{c}{q}\left(v_0 + v_0^2 + v_0^3 + v_0^4 + \ldots + v_0^{n-1} + v_0^n\right) = \frac{c}{q}\sum_{t=1}^{n} v_0^t$$

Como:

$$\sum_{t=1}^{n} v^t = a_{\overline{n|}i}$$

Obtenemos:

$$V_{VPG} = \frac{c}{q}\, a_{\overline{n|}i_0}$$

Por lo tanto contamos con dos fórmulas alternativas:

$$\boxed{V_{VPG} = cv\, \ddot{a}_{\overline{n|}i_0} = \frac{c}{q}\, a_{\overline{n|}i_0}}$$

Donde:

"V_{VPG} es la suma de los valores actuales de n cuotas vencidas, igualmente espaciadas y variables en progresión geométrica de primera cuota de $\$c$, razón q y a la tasa de interés i."

Las expresiones de cálculo obtenidas son sencillas de aplicar utilizando calculadora financiera, pero tal como lo indican, debemos operar con una tasa de trabajo, i_0, que será necesario determinar previamente.

Como ya conocemos las relaciones entre valores actuales de cuotas vencidas y anticipadas, podemos recurrir a ellas para obtener $\ddot{V}_{VPG}$, que corresponde al valor actual de una renta de cuotas anticipadas, variables en progresión geométrica.

$$\ddot{V}_{VPG} = V_{VPG}\, u = cv\, \ddot{a}_{\overline{n}|i_0}\, u$$

Como $u.v = 1$

$$\ddot{V}_{VPG} = c\, \ddot{a}_{\overline{n}|i_0}$$

Si partimos de la fórmula alternativa de V_{VPG}:

$$\ddot{V}_{VPG} = V_{VPG}\, u = \frac{c}{q} a_{\overline{n}|i_0}\, u \qquad (6)$$

Indicamos anteriormente que:

$$i_0 = \frac{1+i}{q} - 1$$

Despejando apropiadamente:

$$1+i = (1+i_0)\, q$$
$$1+i = u_0\, q$$

Remplazando en (6):

$$\ddot{V}_{VPG} = \frac{c}{q} a_{\overline{n}|i_0} u_0\, q$$

Simplificamos q y aplicamos la relación entre valores actuales vencidos y anticipados:

$$\boxed{\ddot{V}_{VPG} = c\ddot{a}_{\overline{n}|i_0}}$$

Arribando a la misma expresión que obtuvimos anteriormente:

Por último definimos que:

"$\ddot{V}_{VPG}$ es la suma de los valores actuales de n cuotas anticipadas, igualmente espaciadas y variables en progresión geométrica de primera cuota de $\$c$, razón q y a la tasa de interés i."

Las fórmulas que obtuvimos para el cálculo del valor actual de una renta variable en progresión geométrica nos permiten trabajar con las funciones financieras utilizadas para cuotas constantes, pero teniendo en cuenta que es necesario realizar algunos cálculos previos, incorporando la tasa de trabajo.

Les proponemos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 10
Una persona decide invertir una parte de la suma de dinero recibida por la venta de un inmueble, que le permita obtener una renta mensual durante de 5 años, siendo la primera de $2.500 y las siguientes aumentando sucesivamente en un 1%. Si la tasa de interés mensual que puede obtener es 0,022. Calcular el importe que debe invertir si:
a) Las extracciones son al inicio de cada mes.
b) Las extracciones son al final de cada mes.

Rta.: a) $108.098,07 b) $105.771,18

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 11
Un proveedor acuerda con su cliente el pago de una compra de mercadería por $56.500, a abonar en cuatro cuotas cada 90 días, y con una tasa de interés de 0,01575 para 30 días. Las cuotas son vencidas y variables, y crecen un 4% cada una respecto a la anterior. ¿Cuál es el valor de cada cuota?

Rta.: $14973,57; $15.572,51; $16.195,41 y $16.843,23

Valor Final de una renta cierta de pagos variables en progresión geométrica

Las fórmulas de cálculo del valor final de una renta variable en progresión geométrica, las obtendremos a partir de las relaciones entre valores actuales y valores finales.

Para el valor final de cuotas vencidas:

$$A_{VPG} = V_{VPG}\, u^n = cv\, \ddot{a}_{\overline{n|}\, i_0}\, u^n$$

Considerando que:

$$u^n = q^n u_0^n$$

Reemplazamos:

$$A_{VPG} = cv\, \ddot{a}_{\overline{n|}\, i_0}\, q^n u_0^n$$

Como

$$\ddot{a}_{\overline{n|}\, i_0}\, u_0^n = \ddot{s}_{\overline{n|}\, i_0} \text{ y } v = \frac{v_0}{q}:$$

$$A_{VPG} = c\,\frac{v_0}{q}\,\ddot{s}_{\overline{n}|i_0}\,q^n$$

Simplificamos y aplicamos relaciones entre valores finales vencidos y anticipados:

$$A_{VPG} = cq^{n-1}s_{\overline{n}|i_0}$$

Si partimos de la otra fórmula de cálculo de V_{VPG}:

$$A_{VPG} = V_{VPG}\,u^n = \frac{c}{q}\,a_{\overline{n}|i_0}\,u^n$$

Reemplazamos $u^n = q^n u_0^n$:

$$A_{VPG} = \frac{c}{q}\,a_{\overline{n}|i_0}\,q^n u_0^n$$

Resolvemos y obtenemos la misma expresión:

$$\boxed{A_{VPG} = cq^{n-1}s_{\overline{n}|i_0}}$$

Donde:

"A_{VPG} es la suma de los valores finales de n cuotas vencidas, igualmente espaciadas y variables en progresión geométrica de primera cuota de $\$c$, razón q y a la tasa de interés i."

Para cuotas anticipadas:

$$\ddot{A}_{VPG} = \ddot{V}_{VPG}\,u^n = c\,\ddot{a}_{\overline{n}|i_0}\,u^n$$

$$\ddot{A}_{VPG} = c\,\ddot{a}_{\overline{n}|i_0}\,q^n u_0^n$$

Resolviendo:

$$\boxed{\ddot{A}_{VPG} = c\,q^n\ddot{s}_{\overline{n}|i_0}}$$

"$\ddot{A}_{VPG}$ es la suma de los valores finales de n cuotas anticipadas, igualmente espaciadas y variables en progresión geométrica de primera cuota de $\$c$, razón q y a la tasa de interés i."

A continuación les recomendamos resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 12
Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es Verdadera o Falsa:

a) El valor final de 10 depósitos mensuales, anticipados, de primera cuota de $680, razón 1,03 y tasa de interés mensual de 0,05 es $10.173,72.

b) El depósito de 8 cuotas cada 30 días y vencidas, a una tasa de interés anual equivalente de 0,1843, de primera cuota de $1.420 y las siguientes incrementándose en un 4%, permite reunir un capital final de $14.252,52.

c) Se depositan cuotas adelantadas y trimestrales durante 3 años, la primera cuota es de $500 y las siguientes se incrementan en un 5%. Si la tasa nominal anual de interés con capitalización trimestral enunciada es 0,20, el valor final a obtener será $6.300.

Rta. : a) Verdadero, b) Falso ($13.704,35)
c) Falso ($10.755,14)

Valor Actual de una renta cierta de pagos variables en progresión geométrica. Caso Particular

Cuando determinamos el valor actual de una renta variable en progresión geométrica, recurrimos a un artificio que nos permitió llegar a una expresión sencilla de cálculo.
Al remplazar:

$$qv = v_0$$

Y:

$$v^0 = \frac{1}{1+i_0}$$

Donde:

$$i_0 = \frac{1+i}{q} - 1$$

Finalmente obtuvimos la fórmula de cálculo de valor actual:

$$V_{VPG} = cv\,\ddot{a}_{\overline{n|}\,i_0} = \frac{c}{q} a_{\overline{n|}\,i_0}$$

Existe un caso particular que se presenta cuando el factor de capitalización para una unidad de tiempo es igual a la razón:

$$1+i = q$$

Por lo tanto:

$$i_0 = \frac{1+i}{q} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Entonces, al remplazar en la fórmula de valor actual:

$$V_{VPG} = cv\left(1 + v_0 + v_0^2 + v_0^3 + \ldots + v_0^{n-2} + v_0^{n-1}\right)$$

Como:

$$v_0 = \frac{1}{1+i_0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Resultará:

$$V_{VPG} = cv\underbrace{\left(1+1+1+1+\ldots+1+1\right)}_{n \text{ veces}} = cvn$$

Como podemos notar, se trata de una fórmula de cálculo más sencilla que para el caso general.

A partir de:

$$V_{VPG} = cvn$$

Despejamos el valor de la primera cuota vencida:

$$c = \frac{V_{VPG}}{vn}$$

Si se tratara de cuotas anticipadas, el valor actual resulta:

$$\ddot{V}_{VPG} = c\ddot{a}_{\overline{n|}i_0} = c\left(1 + v_0 + v_0^2 + v_0^3 + \ldots + v_0^{n-2} + v_0^{n-1}\right)$$

Con:

$$1 + i = q$$

Se obtiene:

$$\ddot{V}_{VPG} = c\ddot{a}_{\overline{n|}i_0} = c\underbrace{\left(1+1+1+1+\ldots+1+1\right)}_{n \text{ veces}} = cn$$

Conociendo que:

$$\ddot{V}_{VPG} = cn$$

El importe de la primera cuota anticipada es:

$$c = \frac{\ddot{V}_{VPG}}{n}$$

Y las cuotas siguientes:

$c_2 = cu$
$c_3 = cu^2$
$c_4 = cu^3$
...
$c_r = cu^{r-1}$
...
$c_n = cu^{n-1}$

Sistema de Amortización de Deudas de Cuota Variable en Progresión Geométrica

El valor actual de una renta variable en progresión geométrica puede ser aplicado en la amortización de una deuda utilizando este modelo de variación en las cuotas.
Los elementos que intervienen son:
V = la deuda, en este caso el valor actual de n cuotas vencidas y variables en progresión geométrica.
n = número de cuotas
i = tasa de interés
c = primera cuota
q = razón de variación

Recordemos el valor de las cuotas:
$c_1 = c$
$c_2 = cq$
$c_3 = cq^2$
$c_4 = cq^3$
$\dots$
$c_r = cq^{r-1}$
$\dots$
$c_n = cq^{n-1}$

Determinación del Saldo

Comenzaremos calculando los saldos de una deuda que se amortiza con pagos variables en progresión geométrica, considerando que el mismo está constituido por el valor actual de las cuotas que faltan pagar, por lo tanto:

$$S_0 = V_{VPG} = \frac{c}{q} a_{\overline{n|}i_0} = c \frac{a_{\overline{n|}i_0}}{q}$$

S_0 es el saldo al inicio de la primera unidad de tiempo y se obtiene como el valor actual de las n cuotas que amortizarán la deuda, siendo la primera cuota a pagar de $\$c$.

$$S_1 = cq \frac{a_{\overline{n-1|}i_0}}{q}$$

S_1 es el saldo al inicio de la segunda unidad de tiempo y se obtiene como el valor actual de las $n-1$ cuotas que restan por pagar, siendo la primera cuota a abonar de $\$cq$.

$$S_2 = cq^2 \frac{a_{\overline{n-2|}i_0}}{q}$$

S_2 es el saldo al inicio de la tercera unidad de tiempo y se obtiene como el valor actual de las $n-2$ cuotas que faltan pagar, siendo la primera cuota a abonar de $\$cq^2$.

Continuamos de manera similar para las unidades de tiempo siguientes:

$$S_r = cq^r \frac{a_{\overline{n-r|}i_0}}{q}$$

S_r es el saldo al inicio de la unidad de tiempo $r+1$ que se obtiene calculando el valor actual de las $n-r$ cuotas que faltan pagar, siendo la primera cuota a abonar de $\$cq^r$.

Finalmente, al llegar al inicio de la última unidad de tiempo:

$$S_{n-1} = cq^{n-1} \frac{a_{\overline{1|}i_0}}{q}$$

S_{n-1} es el saldo al inicio de la última unidad de tiempo que se obtiene con el valor actual de la única cuota que falta pagar, siendo su valor de $\$cq^{n-1}$.

Composición de la Cuota

Cada cuota estará compuesta por interés y amortización. Es posible obtener fórmulas de cálculo para estos componentes, pero propondremos para su determinación las relaciones con los otros elementos que intervienen en este sistema de amortización.

Por lo tanto, para calcular los intereses multiplicaremos el saldo al inicio de cada unidad de tiempo por la tasa de interés:

$$I_1 = S_0\, i$$
$$I_2 = S_1\, i$$
$$\dots$$
$$I_r = S_{r-1}\, i$$
$$\dots$$
$$I_n = S_{n-1}\, i$$

Una vez calculados los intereses, las amortizaciones se determinan restando de la cuota, los intereses correspondientes:

$$t_1 = c_1 - I_1$$
$$t_2 = c_2 - I_2$$
$$\dots$$
$$t_r = c_r - I_r$$
$$\dots$$
$$t_n = c_n - I_n$$

Todos estos elementos que hemos analizado pueden exponerse en el cuadro de amortización.

Cuadro de Amortización
Para construir el cuadro se exponen las fórmulas que obtuvimos y las relaciones que planteamos entre los distintos elementos:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	$S_0 = c\,\dfrac{a_{\overline{n}\rceil i_0}}{q}$	$S_1' = S_0(1+i)$	$t_1 = c_1 - I_1$	$I_1 = S_0 i$	$c_1 = c$
2	$S_1 = cq\,\dfrac{a_{\overline{n-1}\rceil i_0}}{q}$	$S_2' = S_1(1+i)$	$t_2 = c_2 - I_2$	$I_2 = S_1 i$	$c_2 = cq$
3	$S_2 = cq^2\,\dfrac{a_{\overline{n-2}\rceil i_0}}{q}$	$S_3' = S_2(1+i)$	$t_3 = c_3 - I_3$	$I_3 = S_2 i$	$c_3 = cq^2$
…	…	…	…	…	…
r	$S_r = cq^r\,\dfrac{a_{\overline{n-r}\rceil i_0}}{q}$	$S_r' = S_{r-1}(1+i)$	$t_r = c_r - I_r$	$I_r = S_{r-1} i$	$c_r = cq^{r-1}$
…	…	…	…	…	…
$n-1$	$S_{n-2} = cq^{n-2}\,\dfrac{a_{\overline{2}\rceil i_0}}{q}$	$S_{n-1}' = S_{n-2}(1+i)$	$t_{n-1} = c_{n-1} - I_{n-1}$	$I_{n-1} = S_{n-2} i$	$c_{n-1} = cq^{n-1}$
n	$S_{n-1} = cq^{n-1}\,\dfrac{a_{\overline{1}\rceil i_0}}{q}$	$S_n' = S_{n-1}(1+i)$	$t_n = c_n - I_n$	$I_n = S_{n-1} i$	$c_n = cq^{n-1}$

Sistema de Amortización de Deudas de Interés Periódico y Amortización al Final

En este sistema, la amortización total de la deuda se abona al final del plazo convenido, pagándose intereses en cada unidad de tiempo.
La amortización es única, igual al total de la deuda y se abona al final del plazo (momento n):

$t_n = V$

Los intereses son iguales y se abonan al final de cada unidad de tiempo ya que se calculan sobre el saldo adeudado y, como no hay amortización hasta el final del plazo, la deuda no disminuye:

$I_1 = V i$
$I_2 = V i$
$I_3 = V i$
...
$I_r = V i$
...
$I_n = V i$

Por lo tanto:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots = I_r = \ldots = I_n = Vi$$

La cuota es constante, a excepción de la última:

$c_1 = I_1 = Vi$
$c_2 = I_2 = Vi$
$c_3 = I_3 = Vi$
...
$c_r = I_r = Vi$
...
$c_n = I_n + t = Vi + V$

Esta última cuota contiene el interés y la amortización de toda la deuda.

El saldo al inicio de cada unidad de tiempo es toda la deuda:

$$S_0 = S_1 = S_2 = \ldots = S_{r-1} = \ldots = S_{n-1} = V$$

El saldo al final de cada unidad de tiempo es:

$$S_1^{'} = S_2^{'} = \ldots = S_r^{'} = \ldots = S_n^{'} = V\left(1+i\right)$$

Todos estos elementos se reflejan en el siguiente gráfico :

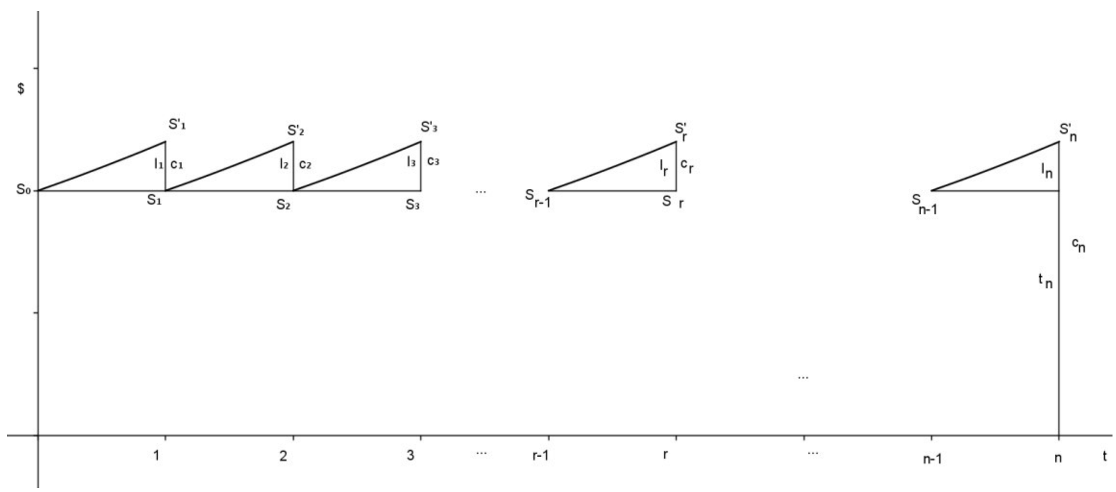


Gráfico 10

También podemos reflejar en un Cuadro de Amortización los distintos componentes de una deuda que se amortiza a través de este sistema:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	$S_0 = V$	$S_1^{'} = V(1+i)$		$I_1 = Vi$	$c_1 = Vi$
2	$S_1 = V$	$S_2^{'} = V(1+i)$		$I_2 = Vi$	$c_2 = Vi$
3	$S_2 = V$	$S_3^{'} = V(1+i)$		$I_3 = Vi$	$c_3 = Vi$
...	...	...		...	...
r	$S_{r-1} = V$	$S_r^{'} = V(1+i)$		$I_r = Vi$	$c_r = Vi$
...	...	...		...	...
n	$S_{n-1} = V$	$S_n^{'} = V(1+i)$	$t_n = V$	$I_n = Vi$	$c_n = V + Vi$

Como podemos observar es muy sencilla su construcción, y son muy pocos los cálculos a realizar.

Se verifica que:

- El saldo al inicio de la última unidad de tiempo es igual a la amortización ($S_{n-1} = V$)
- El saldo al final de la última unidad de tiempo es igual a la última cuota ($S'_n = c_n$)
- La suma de todas las amortizaciones es igual a la deuda.

Le proponemos ahora, resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 13
Una empresa con producción estacional, obtiene un préstamo para reforzar su capital de trabajo por $150.000. El mismo se devolverá a los 120 días, abonándose el importe total. Además se pagarán intereses cada 30 días, calculados sobre el importe de la deuda con una tasa de interés de 0,0275 para 30 días. Calcular:
a) El valor de las cuotas a abonar cada 30 días.
b) El importe a abonar junto con la última cuota si la empresa no abona la tercera al momento de su vencimiento.

Rta: a) 3 cuotas de $4.125 y una de $154.125
b) $158.363,44

Otras alternativas en la amortización de deudas

En la unidad 4 y en lo que va del desarrollo de esta unidad, hemos analizado distintos sistemas de amortización de deudas cada uno con sus componentes y características particulares. Pero no son las únicas posibilidades que se pueden plantear. Mientras las partes intervinientes respeten las condiciones para que un sistema de amortización sea financiero, es decir, la sumatoria de los valores actuales de las n cuotas de un préstamo es igual al importe del préstamo y el importe de los intereses se calcule sobre el saldo, es decir sobre el importe que aún no se ha abonado, son múltiples las variantes respecto a la forma de devolver el préstamo recibido.
Esto quiere decir que puede convenirse no sólo el pago de cuotas constantes o, cuotas variables en progresión aritmética o geométrica, o amortización única y pago periódico de intereses, sino que también se puede presentar la amortización de deudas en donde las cuotas sean variables y no respondan a ningún comportamiento que podamos asociar a algún modelo de los analizados.
También puede suceder que el intervalo del tiempo que hay entre las cuotas no sea constante.
Para estas situaciones el procedimiento de cálculo de la tasa de interés será el que utilizamos oportunamente para determinarla en las operaciones con período de diferimiento.
Ya conocemos que la tasa de interés de la operación será la tasa de interés que verifique que:

$$V = \frac{c_1}{(1+i)^1} + \frac{c_2}{(1+i)^2} + \frac{c_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{c_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{c_n}{(1+i)^n}$$

Ejemplo 5.5:
Un proveedor propone pagar el precio de una máquina de $28.000, con una entrega inicial de $5.000, un pago de $6.500 a 30 días, $8.200 a 60 días y $11.700 a 90 días.

Observemos en el siguiente gráfico los pagos a realizar por el comprador para amortizar la deuda en la siguiente línea de tiempo:

Gráfico 11

Como el precio es \$28.000 y se realiza una entrega de \$5.000, la deuda es:

Precio de contado	28.000
Entrega Inicial	(5.000)
Deuda (V)	23.000

Por lo tanto, la deuda de \$23.000 se pagará de la siguiente manera (Gráfico 12):

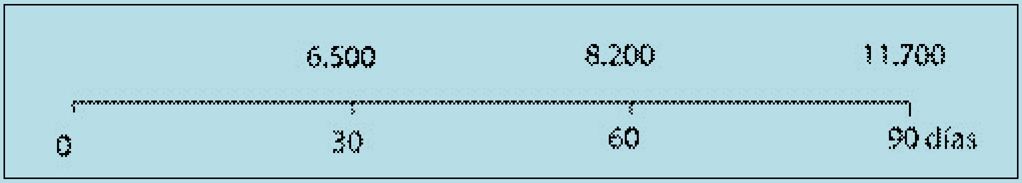


Gráfico 12

La tasa de interés de la operación será la que iguale el valor actual de las n cuotas con el valor del préstamo. En este caso:

$$23000 = \frac{6500}{(1+i)^1} + \frac{8200}{(1+i)^2} + \frac{11700}{(1+i)^3}$$

En el primer miembro de la igualdad esta el importe del préstamo y en el segundo miembro cada una de las cuotas actualizadas por la cantidad de unidades de tiempo que hay, entre el momento de concertarse la operación y el momento en que cada cuota debe pagarse. En este caso la unidad de tiempo es 30 días, ya que ese es el período de tiempo que existe entre cuota y cuota.
En este caso, la tasa de interés es 0,06454 para 30 días.

Para resolverla utilizaremos el procedimiento previsto en la Planilla de Cálculo o calculadora financiera.

Este procedimiento nos permite determinar la tasa de interés aplicada en la amortización de cualquier deuda, incluso podemos utilizarlo para cuotas constantes. Pero será mucho más útil en los casos como el que estamos analizando, donde las cuotas no tienen ningún comportamiento predeterminado.
La única condición es que el tiempo que transcurre entre cuota y cuota sea constante, como en este caso, que es 30 días, y por lo tanto la tasa de interés obtenida es para esa unidad de tiempo.
¿Qué sucede si se presenta alguna situación donde no se cumpla esta condición?

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.6
Una deuda de \$10.000 se amortizará con los siguientes pagos:
\$2.600 a los 60 días
\$6.360 a los 90 días
\$4.100 a los 150 días

En el gráfico 13 reflejamos los pagos:

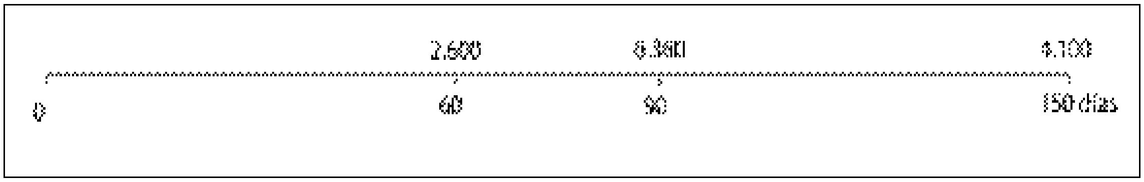


Gráfico 13

Como podemos observar, el período de tiempo entre las cuotas no es constante. Entre el momento de inicio de la operación y la primera cuota transcurren 60 días, entre la primera y segunda cuota 30 días, entre la segunda y tercera cuota 60 días.
En estos casos es necesario fijar una unidad de tiempo homogénea, que será el período de tiempo menor entre las cuotas, que en este caso es de 30 días, siendo además divisor de la otra unidad de tiempo (60 días), tal como se refleja en el siguiente gráfico:

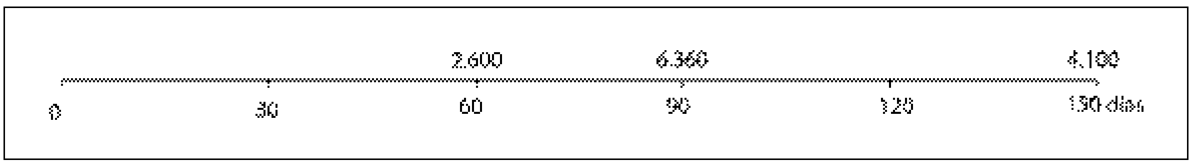


Gráfico 14

Para introducir los datos en la planilla de cálculo o calculadora financiera, es necesario considerar que, por ejemplo, a los 30 días del inicio de la operación ya se encuentra el primer pago. Si después de ingresar el valor de la deuda, introducimos los $2.600, la calculadora considera de que ese es el valor a pagar a los 30 días (y no a los 60 días, como corresponde) y por lo tanto lo actualizará por 30 días y no por 60.
Para ello, indicamos con $0 en el Gráfico 15, los momentos en que no se deban pagar cuotas:

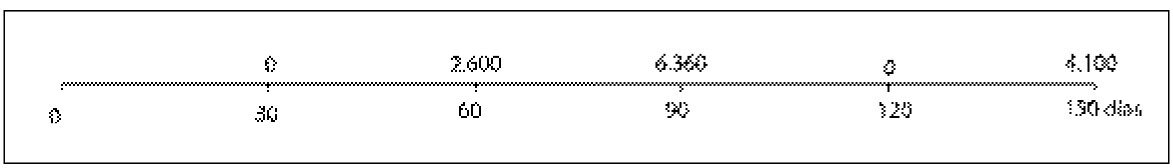


Gráfico 15

Finalmente, obtenemos como resultado la tasa de interés que es de 0,08221 para 30 días.
En conclusión, cuando los intervalos de tiempo entre las cuotas sean diferentes, hay que determinar una unidad de tiempo que será la que corresponde al período menor que hay entre las cuotas, siempre que esta unidad de tiempo sea divisor exacto de cada período entre cuota y cuota.

Para resolver esta situación, también contamos con procedimientos en la calculadora financiera y en la planilla de cálculo cuando la incógnita sea el valor de la deuda. Es decir, cuando tenemos como datos sólo el valor de las cuotas y la tasa de interés.

Les proponemos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 14
¿Cuál es la tasa de interés nominal anual con capitalización cada 30 días que se está enunciando en la financiación de un préstamo bancario de $15.800, si los pagos a realizar son: a los 180 días, $4.000 a los 210 días $4.500 a los 240 días $4.500 y a los 270 días $5.000?

Rta.: 0,21126 nominal anual con cap. 30 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 15
Para la compra de materia prima por $22.700, el frigorífico NOVILLO SA obtiene la siguiente financiación:

4 cuotas cuatrimestrales y vencidas de $5.800
1 pago adicional con la segunda cuota de $1.600
1 pago adicional con la cuarta cuota de $2.000

Determinar la tasa de interés equivalente anual aplicada en la operación.

Rta. : 0,216566 anual

EJERCITACION

Rentas Ciertas de Pagos Variables en Progresión Aritmética

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 16
Una familia decide ahorrar durante 180 días una parte de sus ingresos para lograr reunir $4.000 que necesita para comprar una nueva computadora. Depositará el dinero cada 30 días en una entidad financiera, comenzando en el día de la fecha con el primer depósito, a una tasa de interés anual de 0,156191. Si se disminuirá cada depósito en $200 respecto al anterior, responder:

a) ¿Cuál será el importe de la primera cuota?
b) ¿Cuánto dinero habrán ahorrado a los 120 días, antes de depositar la cuota correspondiente a ese momento?

Rta. : a) $1.132,32 b) $3.442,66

EXPLICANDO
COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de estos ejercicios, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

EJERCICIO 17
Dos hermanos deciden ahorrar dinero durante un año. Martín depositará 4 cuotas trimestrales por los siguientes importes: $450, $900, $1.350 y $1.800. Gastón depositará 6 cuotas bimestrales, la primera de $650 y las siguientes aumentado en $100. Si el interés mensual, para ambos, es 1,8% y los depósitos son anticipados ¿quién obtendrá el mayor valor final?

*Rta. : Gastón ($6.058,80) obtendrá
un valor mayor que Martín ($5.015,68)*

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 18

Complete con los elementos faltantes, a partir de la información suministrada:

a)

c_3	***Unidad de tiempo***	***i***	$\ddot{V}_{VPA}$	***Plazo***	***n***	***h***
\$480	trimestre	0,036 trimestral		3 años		\$80

b)

c_1	***i***	V_{VPA}	c_6	***n***	***Unidad de tiempo***	***h***
\$2.000		\$12.000	\$3.250	6	90 días	

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de estos ejercicios, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

c)

c_1	***i***	V_{VPAI}	***n***	***Unidad de tiempo***	***TNA***
\$500			8	45 días	0,247 c/cap. 45 días

Rta. : a) \$7.229,39 y 12
b) 0,07687 p/90 días y \$250
c) 0,03045 p/ 45 días y \$15.213,23

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 19

En el siguiente cuadro se muestran los componentes de la amortización de una deuda con pagos mensuales que varían en progresión aritmética.

A partir de la información suministrada por el cuadro de amortización indique:

a) La tasa de interés de la operación.

b) La razón de variación.

c) El total amortizado al final del primer año.

d) El importe necesario para cancelar la deuda cuando faltan de pagar 16 cuotas.

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	970.294,82	989.700,72	-17.405,90	19.405,90	2.000,00
2	987.700,72	1.007.454,73	-16.254,01	19.754,01	3.500,00
3	1.003.954,73	1.024.033,83	-15.079,09	20.079,09	5.000,00
4	1.019.033,83	1.039.414,50	-13.880,68	20.380,68	6.500,00
5	1.032.914,50	1.053.572,79	-12.658,29	20.658,29	8.000,00

6	1.045.572,79	1.066.484,25	-11.411,46	20.911,46	9.500,00
7	1.056.984,25	1.078.123,93	-10.139,68	21.139,68	11.000,00
Unidad de tiempo	**Saldo al Inicio**	**Saldo al Final**	**Amortización**	**Interés**	**Cuota**
8	1.067.123,93	1.088.466,41	-8.842,48	21.342,48	12.500,00
9	1.075.966,41	1.097.485,74	-7.519,33	21.519,33	14.000,00
10	1.083.485,74	1.105.155,45	-6.169,71	21.669,71	15.500,00
11	1.089.655,45	1.111.448,56	-4.793,11	21.793,11	17.000,00
12	1.094.448,56	1.116.337,53	-3.388,97	21.888,97	18.500,00
13	1.097.837,53	1.119.794,29	-1.956,75	21.956,75	20.000,00
14	1.099.794,29	1.121.790,17	-495,89	21.995,89	21.500,00
15	1.100.290,17	1.122.295,97	994,20	22.005,80	23.000,00
16	1.099.295,97	1.121.281,89	2.514,08	21.985,92	24.500,00
17	1.096.781,89	1.118.717,53	4.064,36	21.935,64	26.000,00
18	1.092.717,53	1.114.571,88	5.645,65	21.854,35	27.500,00
19	1.087.071,88	1.108.813,32	7.258,56	21.741,44	29.000,00
20	1.079.813,32	1.101.409,59	8.903,73	21.596,27	30.500,00
21	1.070.909,59	1.092.327,78	10.581,81	21.418,19	32.000,00
22	1.060.327,78	1.081.534,33	12.293,44	21.206,56	33.500,00
23	1.048.034,33	1.068.995,02	14.039,31	20.960,69	35.000,00
24	1.033.995,02	1.054.674,92	15.820,10	20.679,90	36.500,00
25	1.018.174,92	1.038.538,42	17.636,50	20.363,50	38.000,00
26	1.000.538,42	1.020.549,19	19.489,23	20.010,77	39.500,00
27	981.049,19	1.000.670,17	21.379,02	19.620,98	41.000,00
28	959.670,17	978.863,57	23.306,60	19.193,40	42.500,00
29	936.363,57	955.090,85	25.272,73	18.727,27	44.000,00
30	911.090,85	929.312,66	27.278,18	18.221,82	45.500,00
31	883.812,66	901.488,92	29.323,75	17.676,25	47.000,00
32	854.488,92	871.578,70	31.410,22	17.089,78	48.500,00
33	823.078,70	839.540,27	33.538,43	16.461,57	50.000,00
34	789.540,27	805.331,07	35.709,19	15.790,81	51.500,00
35	753.831,07	768.907,70	37.923,38	15.076,62	53.000,00
36	715.907,70	730.225,85	40.181,85	14.318,15	54.500,00
37	675.725,85	689.240,37	42.485,48	13.514,52	56.000,00
38	633.240,37	645.905,17	44.835,19	12.664,81	57.500,00
39	588.405,17	600.173,28	47.231,90	11.768,10	59.000,00
40	541.173,28	551.996,74	49.676,53	10.823,47	60.500,00
41	491.496,74	501.326,68	52.170,07	9.829,93	62.000,00
42	439.326,68	448.113,21	54.713,47	8.786,53	63.500,00
43	384.613,21	392.305,48	57.307,74	7.692,26	65.000,00
44	327.305,48	333.851,59	59.953,89	6.546,11	66.500,00
45	267.351,59	272.698,62	62.652,97	5.347,03	68.000,00
46	204.698,62	208.792,59	65.406,03	4.093,97	69.500,00
47	139.292,59	142.078,44	68.214,15	2.785,85	71.000,00
48	71.078,44	72.500,01	71.078,43	1.421,57	72.500,00

Rta.: a) 0,02 mensual b) $1.500 c) $0 d) $ 839.540,27

Rentas Ciertas de Pagos variables en Progresión Geométrica

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

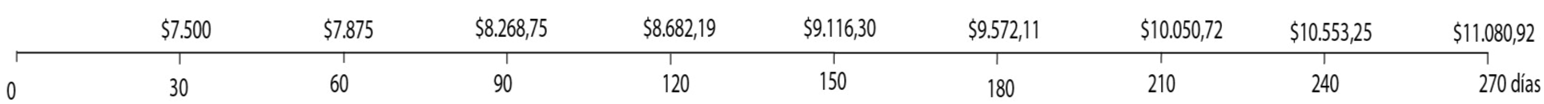
EJERCICIO 20

Determinar el valor final de una serie de depósitos anticipados y cada 60 días: los primeros 5 son variables en progresión geométrica cuyo primer importe es de $830 y cada uno de los restantes aumentan en un 10% con respecto al anterior. A continuación deposita 7 cuotas constantes y anticipadas de igual importe al último depósito variable. La tasa de interés aplicada en la operación es 0,042 para 30 días.

Rta : $23.418,30

EJERCICIO 21

El siguiente gráfico refleja las cuotas variables que se abonarán cada 30 días, para amortizar una deuda de $75.000.



Indicar:

a) La razón de variación.

b) La tasa de interés de la operación.

Rta.: a) 1,05 b) 0,018742 para 30 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 22

Dos personas deciden depositar 5 cuotas vencidas y cada 30 días. La tasa de interés de la operación es de 0,01 para 30 días y la primera cuota será igual para ambos depositantes. Las cuotas de la primera persona se irán incrementando en $300 y para la segunda persona aumentarán en un 4%. Calcular el valor de la primera cuota si entre ambos logran reunir un capital final de $120.000

Rta.: $11.011,59

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 23

El siguiente cuadro muestra los componentes de la amortización de una deuda con pagos vencidos y cada 90 días, que varían en progresión geométrica:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	12.000,00	12.600,00	450,00	600,00	1.050,00
2	11.550,00	12.127,50	525,00	577,50	1.102,50
3	11.025,00	11.576,25	606,38	551,25	1.157,63
4	10.418,63	10.939,56	694,58	520,93	1.215,51
5	9.724,05	10.210,25	790,08	486,20	1.276,28
6	8.933,97	9.380,67	893,40	446,70	1.340,10
7	8.040,57	8.442,60	1.005,07	402,03	1.407,10
8	7.035,50	7.387,28	1.125,68	351,78	1.477,46
9	5.909,82	6.205,31	1.255,84	295,49	1.551,33
10	4.653,98	4.886,68	1.396,20	232,70	1.628,89
11	3.257,79	3.420,68	1.547,45	162,89	1.710,34
12	1.710,34	1.795,86	1.710,34	85,52	1.795,86

Indicar:
a) La tasa de interés de la operación.
b) La razón de variación.
c) El porcentaje amortizado luego de pagarse las primeras 6 cuotas.
d) Cuál hubiera sido el importe de la primera cuota, si el valor de cada una decrece en un 5%.

Rta.: a)0,05 para 90 días
b)1,05 c)33% d)$1.716,47

Sistema de Amortización de Deudas con Cuotas Variables de Amortización Constante

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 24

La compra de un automóvil cuyo precio de contado es de $18.000, se financia con una entrega inicial de $4.000, y el resto en 20 cuotas bimestrales, vencidas y con amortización constante. El importe de la primera cuota es de $1.031,10
Indicar:
a) La tasa de interés de la operación.
b) El importe de la tercera cuota.
c) El importe a pagar si no se abonan las primeras cinco cuotas y el deudor decide cancelar su deuda al final del mes once.
d) El importe de las dos cuotas siguientes si junto con el pago de la cuota doce, realiza un pago extraordinario de $4.000, y se modifica la tasa de interés a 0,02 bimestral.
(Resolver los incisos c) y d) de manera independiente).

Rta.: a) 0,02365 bimestral b) $997,99
c) $15.920,67 d) $232 y $228

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 25

JOSÉ LÓPEZ E HIJOS SRL solicita un préstamo de $12.500 en el Banco de la Provincia. El mismo debe devolverse en 10 cuotas mensuales, vencidas y se aplica el sistema de amortización alemán. La tasa de interés es 0,30 anual:
Trabaje con cuatro decimales en la tasa de interés y seleccione la alternativa correcta:

I. El valor de la segunda cuota es:

a) $1.526,25 b) $1.498,63 c) $1.250 d) $1.406,92 e) $1.531,25

II. El saldo adeudado después de pagar la cuarta cuota es:

a) $6.250 b) $7.825,19 c) $7.500 d) $7.544,89 e) $5.000

III. Si se decide cancelar la deuda junto con el pago de la octava cuota deberá abonarse:

a) $3.525,50 b) $3.750 c) $4.126,32 d) $10.000 e) $2.500

Rta.: I.b) II.c) III.e)

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 26

Una empresa solicita un préstamo bancario que abonará en 6 cuotas variables, cada 60 días y vencidas, a una tasa de interés de 0,24 anual. La amortización contenida en cada cuota es constante e igual a $4.750 (sistema alemán). A partir de esta información:

a) Determinar el importe del préstamo.
b) Construir el cuadro de amortización.
c) Calcular el importe del pago extra a realizar junto con la tercera cuota que reduce el valor de la última cuota a $4.144.

Rta.: a) $28.500 c) $2.250
b)

Unidad de Tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	28.500	29.526	4.750	1.026	5.776
2	23.750	24.605	4.750	855	5.605
3	19.000	19.684	4.750	684	5.434
4	14.250	14.763	4.750	513	5.263
5	9.500	9.842	4.750	342	5.092
6	4.750	4.921	4.750	171	4.921

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 27

La empresa LA COSTA SRL obtuvo un préstamo en el Banco del Caribe SA, que se amortizará con cuotas vencidas y cada 60 días.

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1			10.500,00		
2			10.500,00	1.030,05	
3			10.500,00		
4			10.500,00		

A partir de la información del cuadro de amortización, Usted debe:

a) Completarlo.
b) Indicar la tasa de interés nominal anual con capitalización para 60 días enunciada en la operación.

Rta.: a)

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	42.000,00	43.373,40	10.500,00	1.373,40	11.873,40
2	31.500,00	32.530,05	10.500,00	1.030,05	11.530,05
3	21.000,00	21.686,70	10.500,00	686,70	11.186,70
4	10.500,00	10.843,35	10.500,00	343,35	10.843,35

b) 0,198925 anual nominal con cap. 60 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 28

Una empresa necesita adquirir una máquina para su planta de producción, cuyo precio es $32.000. Como no cuenta con dicho importe, solicita al proveedor alguna alternativa de financiación.

El proveedor le ofrece abonar el valor de la máquina en 12 cuotas mensuales, constantes y vencidas de $3.025,91.

La empresa también consulta con dos de los bancos que opera habitualmente, la posibilidad de obtener un préstamo por el valor de la máquina:

El Banco Sur SA, le ofrece un préstamo a pagar en 10 cuotas mensuales, variables de amortización constante (sistema alemán), con primera cuota igual a $4.000

El Banco del Plata SA, le ofrece un préstamo a amortizar en 8 cuotas constantes, mensuales de $4.500, pagando la primera cuota a los 3 meses.

Ud. debe calcular la tasa de interés de cada alternativa, indicando la menor.

Rta.: 0,02 mensual (proveedor), 0,025 mensual (Banco Sur)
y 0,0184227 mensual (Banco del Plata)

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 29

En los siguientes incisos usted deberá responder aplicando las relaciones existentes entre los distintos elementos que componen la amortización de una deuda con cuota variable y amortización constante:

a) Determinar el valor del préstamo y la tasa de interés aplicada, si para su amortización se pagan 12 cuotas vencidas y cada 45 días, siendo el valor de las dos últimas cuotas de $924 y $899,50, respectivamente.

Rta.:$10.500 y 0,028 para 45 días

b) ¿Cuál es la cantidad de cuotas que deben pagarse para amortizar una deuda de \$86.400, con cuotas de amortización constante, vencidas y cada 90 días, a la tasa de interés de 0,076 para 90 días, conociendo que la octava cuota es de \$7.689,60?

Rta.: 36

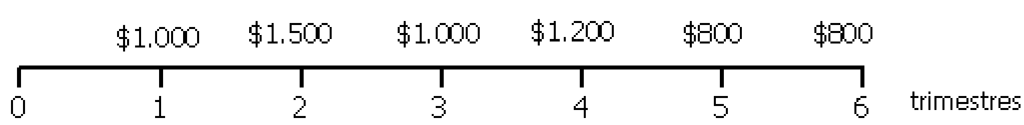
c) Calcular el total amortizado luego de pagar la cuarta cuota, de una deuda que se amortiza en 5 cuotas cada 30 días, vencidas y de amortización constante. La tasa de interés nominal anual con capitalización a 30 días enunciada para la operación es 0,352833 y el interés contenido en la primera cuota es \$365,40.

Rta.: \$10.080

Rentas Ciertas de Pagos Variables

EJERCICIO 30

Calcule el valor final de la renta que se representa gráficamente en el siguiente eje temporal, considerando una tasa anual nominal con capitalización trimestral de 0,12:



Rta.: \$6.837,34

EJERCICIO 31

Una familia decide colocar sus ahorros mensuales, para destinarlos a sus próximas vacaciones, realizando depósitos cada 30 días, comenzando en el día de la fecha con \$900 a una tasa de interés de 0,01 para 30 días:

Calcular el valor final obtenido a los 30 días del último depósito, considerando que los depósitos siguientes fueron por:

Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4	Depósito 5	Depósito 6	Depósito 7	Depósito 8	Depósito 9
\$900	\$1.200	\$1.100	\$1.000	\$1.000	\$900	\$1.400	\$700

Rta.: \$9.567,15

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 32

JUAN TERRENO E HIJOS SA, empresa de servicios informáticos, realiza un trabajo a uno de sus clientes por \$7.000. Dicho importe se financia con la entrega de tres cheques diferidos: el primero por \$2.300, el segundo por \$2.000 y el último por \$3.000. El primero vence a los 30 días, el segundo a los 60 días y el tercero a los 90 días.

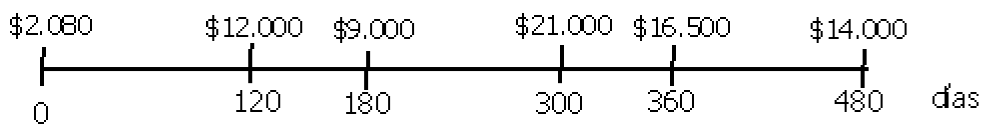
¿Cuál es la tasa de interés para 30 días de la operación?

Rta.: 0,0202944 para 30 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 33

El siguiente gráfico refleja los pagos a realizar acordados por la empresa ZUTTACA SRL al Banco de la Patagonia por la refinanciación de un préstamo impago, que asciende a $62.580



Indicar la tasa equivalente anual de interés aplicada a la refinanciación.

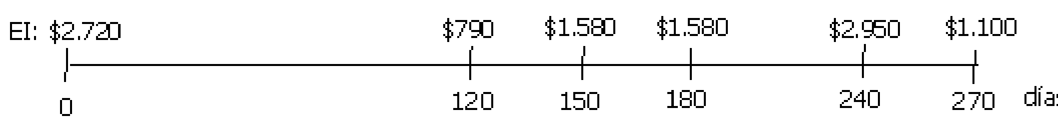
Rta.: 0,24679 anual

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de estos ejercicios, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

EJERCICIO 34

El siguiente esquema muestra los pagos que se realizarán en el financiamiento otorgado para la compra de una máquina



La tasa de interés enunciada por el fabricante en esta financiación es de 0,20 anual nominal con capitalización 30 días. ¿Cuál es el precio de contado de la máquina?

Rta.: $9.888,29

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 35

Una empresa adquiere mercadería para su proceso de producción. El proveedor le ofrece la siguiente financiación:

Entrega inicial: $7.500

Primer a los 60 días por $2.000

Segundo pago a los 180 días por $3.000

Tercer pago a 240 días por $5.000

Si la tasa de interés que aplica el proveedor es del 0,15 anual, indicar el importe a pagar si la compra se realizara de contado.

Rta. : $16.815,76

Sistema de Amortización de Deudas con Cuotas de Interés Constante y Amortización Única al Final del Plazo

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 36

Un empleado de una empresa de servicios, obtiene un préstamo en el banco donde percibe mensualmente sus haberes. El banco debitará al final de cada mes los intereses de la cuenta del deudor y para su determinación enuncia una tasa nominal anual de interés de 0,30 con capitalización mensual; y en el sexto mes, junto con los intereses también deducirá el importe total del préstamo.

El importe del préstamo es $2.000 y el plazo de 6 meses.

A partir de esta información:

a) Calcular la tasa de interés.

b) Construir el cuadro de amortización.

c) Determinar el importe a pagar si el deudor desea cancelar su deuda al final del cuarto mes.

Rta: a) 0,025 mensual c) $2.050

b)

DIALOGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

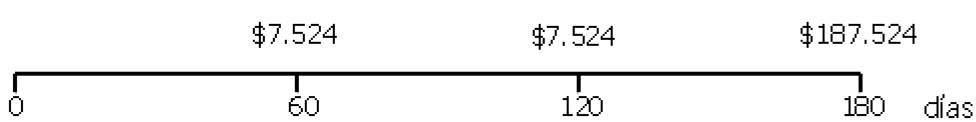
Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	2.000	2.050		50	50
2	2.000	2.050		50	50
3	2.000	2.050		50	50
4	2.000	2.050		50	50
5	2.000	2.050		50	50
6	2.000	2.050	2.000	50	2.050

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 37

El siguiente gráfico refleja los pagos de intereses cada 60 días y de la deuda al final del plazo, que deberá realizar un productor agropecuario que obtuvo un préstamo de $180.000 en el Banco del Agro, para ser aplicados a la próxima campaña:



Responder:

a) ¿Cuál es la tasa de interés para 60 días que cobra el banco?

b) ¿Cuál es el importe del pago extraordinario a realizar junto con la segunda cuota, si la última se reduce a $161.479?

Rta: a) 0,0418 para 60 días b) $25.000

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios trabajados con **simuladores**.

EJERCICIO 38

Algunos bancos y consultoras financieras poseen en sus páginas web simuladores de préstamos con cuotas variables.
A partir del ejemplo del video, ingrese a la página web de un banco y realice una simulación de un préstamo, verificando luego los datos obtenidos.

INTEGRANDO IDEAS

BIBLIOTECA

Aquí podrán consultar otros recursos que los docentes pondrán a disposición.

En esta unidad continuamos con el estudio de las rentas ciertas, deteniéndonos en aquellas en las cuales las cuotas son variables.
Determinamos el valor final y actual de las rentas variables en progresión geométrica y aritmética y su aplicación en la amortización de deudas. De las rentas variables en progresión aritmética analizamos el caso particular en donde las cuotas son decrecientes y las amortizaciones constantes, características del sistema de amortización denominado sistema alemán.
También incorporamos otras posibilidades en la amortización de deudas, como el sistema de interés periódico y amortización al final y la posibilidad de amortizar deudas con cuotas que no responden a ningún comportamiento de los analizados.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:

CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Primera Parte. Córdoba Fac. de Cs. Económicas U.N.C. (2001).

U6

BLOQUE 3

UNIDAD 6

OPERACIONES FINANCIERAS EQUIVALENTES

UNIDAD 6:

Valuación de Operaciones Financieras en decisiones de Inversión y Financiación

CONTENIDOS

Métodos de cálculo donde la tasa enunciada en la operación no es la aplicada al financiamiento. Valuación de operaciones financieras. Usufructo. Nuda Propiedad. Corrección monetaria en el ámbito financiero. Tasa de inflación. Ajuste por inflación. Tasa de rendimiento.

OBJETIVOS

- Identificar los métodos de financiamiento que se utilizan en la realidad en las operaciones financieras
- Determinar la tasa de interés de la operación y compararla con las tasas enunciadas por las entidades que otorgan créditos.
- Realizar el análisis crítico y ético de las operaciones financieras valorando la importancia de que sus conocimientos sean utilizados con responsabilidad social
- Valorar las operaciones financieras utilizando una tasa de valuación en distintas situaciones, para los distintos sistema de amortización
- Determinar el Usufructo y la Nuda propiedad en la valuación de las operaciones financieras como componentes del valor una deuda
- Comprender la importancia del análisis de las operaciones financieras en un contexto inflacionario
- Utilizar las herramientas financieras para efectuar la corrección monetaria determinando la tasa de rendimiento o realizando el ajuste por inflación, según corresponda

PRESENTACIÓN

AULA VIRTUAL
SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **Introducción al Bloque III**, donde los profesores explican la relación entre contenidos temáticos de las unidades 6 y 7 y la **presentación de la Unidad 6** donde se proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de los temas abordados.

En las unidades 4 y 5 analizamos operaciones de rentas y sistemas de amortización de deudas. En esta unidad continuaremos profundizando sobre aspectos vinculados a operaciones financieras de amortización de deudas donde las condiciones enunciadas no se corresponden a las verdaderamente aplicadas.

También utilizaremos herramientas ya trabajadas para evaluar una operación financiera, en vistas a su cesión o transferencia.

Hasta aquí hemos realizado el análisis de las operaciones financieras en un contexto de perfecta estabilidad de precios. Incorporaremos la inflación en nuestro análisis y, entre otros aspectos, mediremos el impacto que esta tiene sobre el rendimiento de una operación.

Macro

Fecha	Hora	Operación
18/3/2013	07:39	957661286

Nro. de certificado	30108050010094611
Tipo de plazo fijo	INTRANSFERIBLE MACRONLINE
Moneda	PESOS
Capital	42,000.00
Plazo	30
Tasa (T.N.A.)	15.3
Interés a pagar	528.16
Fecha emisión	18/03/2013
Fecha vencimiento	17/04/2013

Con los datos del certificado es posible determinar el rendimiento financiero de la operación, pero no se está seguro de que esa tasa refleje la rentabilidad económica, considerando que durante la vigencia de la misma, ha existido cierto nivel de inflación, según los índices publicados por el organismo nacional que se ocupa de su determinación:

Cuadro 1. Índice de Precios al Consumidor GBA, base abril 2008=100
Índices y variaciones respecto del mes anterior y de diciembre de 2012, según capítulos.

Nivel General y Capítulos	Índice		Variación porcentual	
	Marzo 2013	Febrero 2013	respecto del mes anterior	respecto de dic. 2012
Nivel general	153,95	152,84	0,7	2,4

Cuadro 1. Índice de Precios al Consumidor GBA, base abril 2008=100
Índices y variaciones respecto del mes anterior y de diciembre de 2012, según capítulos.

Nivel General y Capítulos	Índice		Variación porcentual	
	Abril 2013	Marzo 2013	respecto del mes anterior	respecto de dic. 2012
Nivel general	155,07	153,95	0,7	3,1

RECURSOS A UTILIZAR EN LA UNIDAD 6

- Material Teórico - Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios

Cómo dar respuesta a esta consulta respecto al rendimiento de esta operación de depósito a plazo fijo y otras cuestiones ligadas a operaciones financieras serán abordadas en esta unidad..

PRIMERA PARTE
Métodos de cálculo donde la tasa enunciada en la operación no es la aplicada al financiamiento

Cuando detallamos los distintos sistemas de amortización, todos coincidieron ellos en que el valor actual del compromiso del acreedor (V) es igual al valor actual de los compromisos del deudor, actualizados a la tasa de interés enunciada y aplicada en la operación, y que en todos los casos, los intereses abonados por el deudor son calculados sobre el saldo adeudado al inicio de cada unidad de tiempo.
Estas consideraciones son importantes porque nos encontraremos con propuestas de amortización en donde la fórmula de cálculo de la cuota no respeta esta última condición y entonces la tasa de interés enunciada en la operación no es la efectivamente aplicada.
Frente a estas situaciones quizás no quede otra alternativa para el deudor que aceptarlas ya que no puede pretender que se cambien las condiciones ofrecidas por el acreedor, pero nada impide que, por lo menos, se determine la verdadera tasa de interés y poder conocer el costo financiero que posee la operación.
A continuación analizaremos algunos de estos métodos, sin ser este listado exhaustivo, pero nos ilustrará acerca de cómo detectarlos, analizar las razones de la distorsión y determinar la tasa de interés que verdaderamente corresponde a la operación.

Método Directo o Cargado

Este método es uno de los más utilizados al momento de ofrecer operaciones de préstamo o financiación de compras con la característica de que la tasa de interés enunciada no es la tasa de interés efectivamente aplicada.

En primer lugar identificaremos los elementos que intervienen en este método:
V = deuda.
n = cantidad de cuotas.
i_e = tasa de interés enunciada. La identificamos de esta manera ya que no es la tasa que efectivamente se cobra en la operación.
c = cuota.
i = tasa de interés de la operación.
La cuota es constante, vencida y se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{c = \frac{V + V.i_e.n}{n}}$$

Podemos obtener una fórmula alternativa, si distribuimos el denominador y simplificamos:

$$c = \frac{V}{n} + \frac{V.i_e.n}{n} = \frac{V}{n} + \frac{V.i_e.\cancel{n}}{\cancel{n}} = \frac{V}{n} + V.i_e$$

Finalmente, extraemos V como factor común:

$$c = V\left(\frac{1}{n} + i_e\right)$$

Si observemos $c = \frac{V}{n} + V.i_e$ podremos identificar dónde se encuentra la distorsión de este método:

- El primer término de la suma es $\frac{V}{n}$, es decir, cada cuota tiene, aparentemente, amortización constante (tal cual lo vimos en el sistema alemán)
- El interés contenido en cada cuota es el producto entre la deuda V por la tasa de interés enunciada. Y aquí está el error. Los intereses de cada cuota deben calcularse sobre el saldo adeudado al inicio de cada unidad de tiempo y, como el saldo disminuye por el pago de las amortizaciones, son decrecientes.

Por lo tanto es errónea la fórmula de cálculo de la cuota, ya que no puede tener intereses constantes si la deuda es decreciente.
Frente a esta situación, lo que puede hacerse es calcular cuál es la tasa de interés que verdaderamente se está cobrando en la operación.
Tenemos como datos:
V = deuda.
n = cantidad de cuotas.

c = cuota, que es constante y vencida.
Aplicamos la fórmula del valor actual de una deuda de cuotas constantes y vencidas:

$$V = c a_{\overline{n|}\, i}$$

y calculamos la tasa de interés, que es la incógnita en este caso.
Esta tasa de interés será mayor a la tasa enunciada en la operación:

$$i > i_e$$

y como i es la tasa de interés de la operación, cada uno de los componentes de la deuda deben calcularse con ella (saldos, intereses y amortizaciones), y se construirá el cuadro de amortización como si se tratara del sistema de amortización francés.
Cuando se trata de una deuda a amortizar con cuotas constantes, sabemos que:

$$c = V\, a^{-1}_{\overline{n|}\, i}$$

Mientras que para el método directo:

$$c = V\left(\frac{1}{n} + i_e\right)$$

Si igualamos ambas expresiones:

$$V\left(\frac{1}{n}+i_e\right)=V\,a_{\overline{n|}\,i}^{-1}$$

$$\frac{1}{n}+i_e = a_{\overline{n|}\,i}^{-1}$$

Finalmente:

$$i_e = a_{\overline{n|}\,i}^{-1}-\frac{1}{n}$$

Cuando la cantidad de cuotas sea 1, es decir, $n=1$:

$$i_e = a_{\overline{1|}\,i}^{-1}-\frac{1}{1}$$

Como $a_{\overline{1|}\,i}=v$:

$$i_e = u-1$$

Por lo tanto:

$$i_e = i$$

Cuando $n=1$ la tasa de interés cobrada es igual a la tasa de interés enunciada, si se paga una única cuota, el interés se calcula sobre toda la deuda.

En la medida que crece n la diferencia entre ambas tasas crece, siendo $i>i_e$, hasta un valor de n para el cual la desigualdad entre ambas tasas se hace máxima (en ningún caso la tasa de interés de la operación duplica la tasa de interés enunciada), valor a partir del cual la diferencia disminuye, para valores cada vez más grandes de n.

Para cuando $n\to\infty$:

$$i_e = a_{\overline{\infty|}\,i}^{-1}-\frac{1}{\infty}$$

Por valor actual de una renta perpetua sabemos que $a_{\overline{\infty|}\,i}=\frac{1}{i}$, por lo tanto:

$$i_e = i-0$$

$$i_e = i$$

verificándose lo indicado.

En el Gráfico 1 se observa que, a partir de una tasa de interés enunciada de 0,01 mensual, se obtienen las distintas tasas de interés que efectivamente se aplica en la operación para distintos valores de n, cuando es 1, ambas tasas son iguales, crece la diferencia a medida que aumenta n alcanzando una diferencia máxima para $n=18$, valor a partir del cual la diferencia comienza a disminuir:

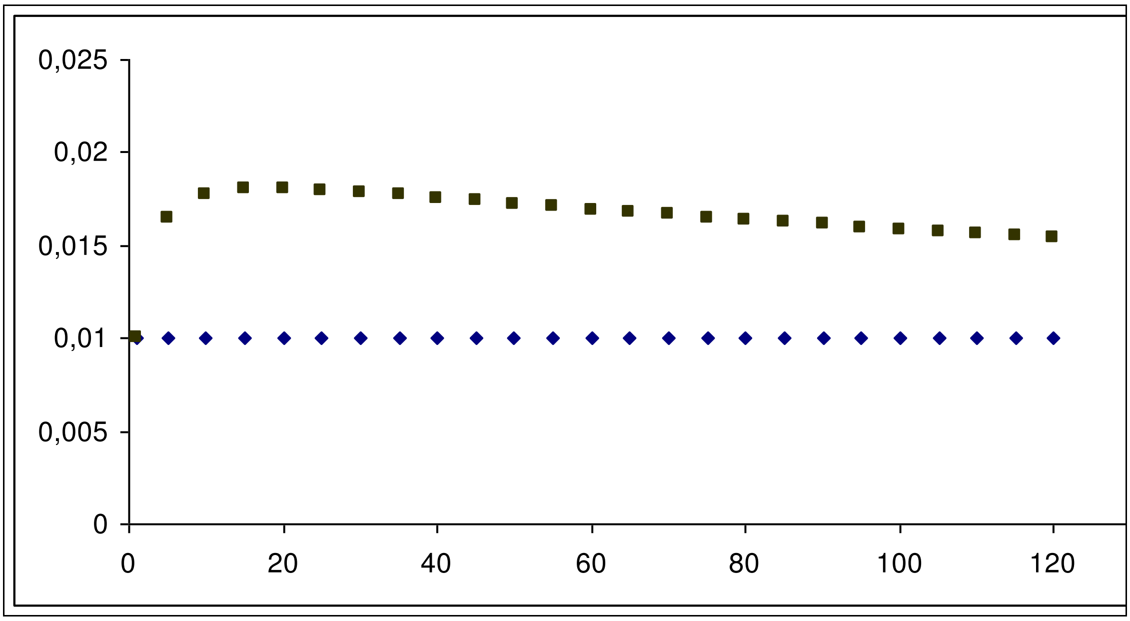


Gráfico 1

Cuanto mayor es la tasa de interés enunciada, más rápido se alcanza el valor de n para el cual la diferencia es máxima. Si $i_e = 0,10$ mensual, el número de cuotas que hace mayor la brecha entre ambas tasas es 7, mientras que, como indicamos anteriormente, si $i_e = 0,01$ mensual, será para 18 cuotas.

Les proponemos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 1

SOLUCIÓN YA SA es una entidad financiera que otorga préstamos personales, a pagar en 6 cuotas cada 30 días a una tasa de interés directa de 0,025 para 30 días.

Para una persona que solicita un préstamo de \$1.800, responder:

a) ¿Cuál es el valor de la cuota?

b) ¿Cuál es la tasa de interés para 30 días cobrada por SOLUCIÓN YA SA?

c) Explique por qué la tasa enunciada no es la tasa de interés efectivamente cobrada.

Rta. : a) \$345   b) 0,041455 para 30 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 2

Un comercio de artículos de informática ofrece a la venta una computadora escolar cuyo precio de contado es de \$1.500 indicando dos alternativas de financiación:

I. En 10 cuotas mensuales y vencidas de \$172,50.

II. En 12 cuotas mensuales y vencidas con un interés directo del 2,3% mensual

Ud. debe:

a) Calcular la cuota de la segunda alternativa.

b) Calcular la tasa de interés de cada una de las propuestas de financiación.

c) Indicar la alternativa que ofrece una menor tasa de interés.

Rta. : a) \$159,50   b) I. 0,026253 mensual;

II. 0,039646 mensual c) Alternativa I

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 3

Un préstamo personal en CASH YA! por $5.000 deberá amortizarse con cuotas mensuales y vencidas de $375, calculadas con el método cargado. La entidad enuncia para la operación una tasa de interés mensual directa de 0,025.

Determinar:

a) El número de cuotas a pagar y la tasa de interés efectivamente cobrada por la entidad.

b) Al inicio de qué mes el saldo adeudado es de $1.952,01.

c) El interés y la amortización contenidos en la tercera cuota.

Rta. : a) 20 y 0,042166 mensual

b) Al inicio del decimoquinto mes c) $196,69 y $178,31

Método de Interés Descontado

Este método tiene su aplicación en préstamos y la diferencia entre la tasa de interés enunciada y aplicada es mayor que en el método directo.

Los elementos que intervienen en este método:

N = importe solicitado en préstamo.

V = deuda, importe recibido en préstamo.

n = cantidad de cuotas.

i_e = tasa de interés enunciada.

c = cuota.

i = tasa de interés de la operación.

Este método se aplica en operaciones de préstamo, en el cual, el deudor solicita cierto importe en préstamo (N). El acreedor le indicará que le restará del importe solicitado los intereses, recibiendo el deudor un importe menor (V) que se obtiene de:

$$V = N - N\, i_e\, n$$

Extraemos factor común N :

$$\boxed{V = N(1 - i_e\, n)}$$

El deudor deberá abonar una cuota constante y vencida, que se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{c = \frac{N}{n}}$$

Para obtener la tasa de interés efectivamente cobrado en la operación, por tratarse de una deuda que se amortiza con cuotas constantes y vencidas, aplicaremos:

$$V = c a_{\overline{n|}i}$$

Remplazando los valores de n y los de V y c obtenidos a través del método, se determina la tasa de interés que verdaderamente corresponde a la operación, donde se verifica que:

$$i > i_e$$

Si partimos de:

$$V = N\left(1 - i_e\, n\right)$$

Despejamos N:

$$N = \frac{V}{1 - i_e\, n}$$

Remplazamos N en la formula de la cuota:

$$c = \frac{N}{n} = \frac{\frac{V}{1 - i_e\, n}}{n}$$

$$c = \frac{V}{n - i_e\, n^2}$$

Cuando tenemos una deuda a amortizar con cuotas constantes, sabemos que:

$$c = V\, a_{\overline{n|}i}^{-1}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{V}{n - i_e\, n^2} = V\, a_{\overline{n|}i}^{-1}$$

$$\frac{1}{n - i_e\, n^2} = a_{\overline{n|}i}^{-1}$$

$$n - i_e\, n^2 = a_{\overline{n|}i}$$

Despejamos:

$$i_e = \frac{n - a_{\overline{n|}i}}{n^2}$$

Cuando la cantidad de cuotas sea 1, es decir, $n = 1$:

$$i_e = \frac{1 - a_{\overline{1|}i}}{1^2}$$

$$i_e = 1 - v = d$$

la tasa de interés enunciada será igual a la tasa de descuento, y como $i > d$, para $n = 1$:

$$i > i_e$$

A medida que el valor de n aumenta, la diferencia entre la tasa de interés enunciada y la tasa de interés de la operación crece, tal como lo refleja el Gráfico 2:

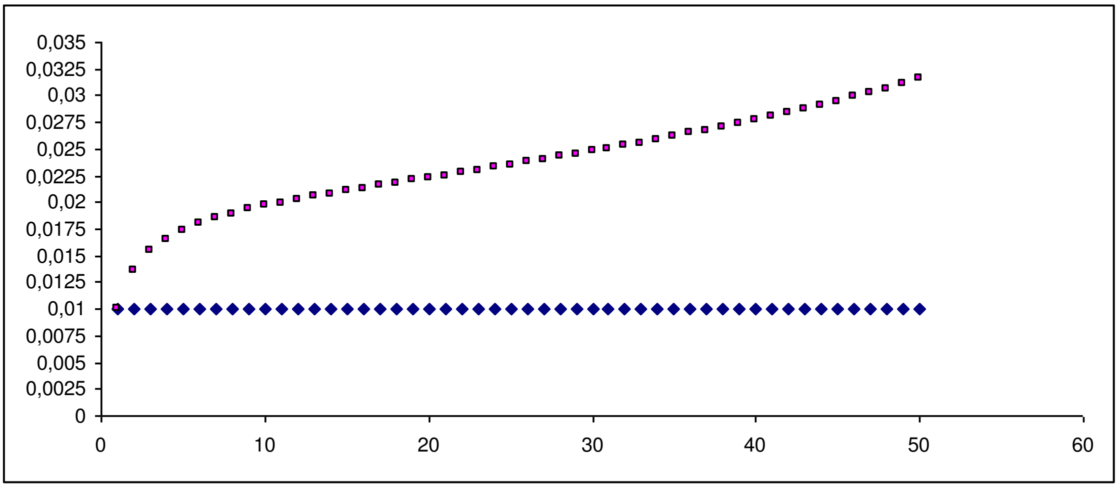


Gráfico 2

donde se representa el valor que va asumiendo la tasa de interés de la operación para una $i_e = 0,01\,mensual$. La diferencia crece teniendo como único límite que el valor de V no se anule al calcularse:

$$V = N\left(1 - i_e\, n\right)$$

Para esto es necesario que:

$$1 - i_e\, n > 0$$

Despejando:

$$-i_e\, n > -1$$

La condición es entonces que:

$$i_e < \frac{1}{n}$$

o:

$$n < \frac{1}{i_e}$$

Para una $i_e = 0,01\,mensual$:

$$n < \frac{1}{0,01}$$

$$n < 100$$

Como hemos analizado, la tasa de interés aplicada en la operación es mayor a la tasa que se enuncia, debido a que los intereses son calculados sobre toda la deuda y por todo el plazo, y son cobrados antes de que comience a transcurrir el plazo de la operación.

Antes de continuar con otros métodos, resolvemos los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 4
Una entidad financiera otorga créditos personales presentando el último recibo de sueldo. Para su amortización aplica el método de interés descontado en 10 cuotas mensuales e iguales; enunciando una tasa de interés de 0,022 mensual descontada.
Para un importe solicitado de $3.600, indicar:
a) El valor de la cuota.
b) El importe recibido por el solicitante.
c) La tasa de interés de la operación.
d) El saldo al inicio del tercer mes.

Rta. : a) $360 b) $2.808
c) 0,04793 mensual d) $2.346,36

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 5
Una persona solicita un préstamo a una mutual a la que está asociado, que propone una financiación en 12 cuotas vencidas y cada 30 días. La entidad aplica el método de interés descontado y enuncia una tasa de interés de 0,02 para 30 días.
Si el asociado necesita recibir $4.800:
a) ¿Cuál es el importe que debe solicitar?
b) ¿Cuál es la tasa de interés de la operación?
c) Construir el cuadro de amortización para las primeras 4 unidades de tiempo.

Rta. : a) $6.315,79 b) 0,044974 p/30 días

c)

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	4.800,00	5.015,88	310,44	215,88	526,32
2	4.489,56	4.691,47	324,41	201,91	526,32
3	4.165,15	4.352,47	339,00	187,32	526,32
4	3.826,15	3.998,23	354,24	172,08	526,32

Otros métodos de cálculo donde la tasa enunciada en la operación no es la aplicada al financiamiento

Describiremos a continuación, brevemente, otros métodos en los cuales la tasa de interés enunciada no es la verdaderamente aplicada en la operación:

A. Método de la cuota calculada vencida y cobrada anticipada
En la Unidad 4 analizamos que, dado un determinado valor actual, el importe de la cuota constante calculada vencida es mayor al de la cuota anticipada.

Por lo tanto, para que la tasa de interés enunciada sea la que efectivamente se aplica en una operación es necesario que se respete el cálculo de la cuota utilizando la fórmula que corresponde en cada caso.
Si se determina la cuota vencida (que será mayor) y se cobra anticipada, se estará produciendo una distorsión en el cálculo, arrojando como resultado una tasa de interés mayor.
Los elementos que intervienen son:

$\ddot{V}$ = valor de la deuda a pagar con cuotas anticipadas.
V = importe recibido en préstamo.
n = cantidad de cuotas.
i_e = tasa de interés enunciada.
c = cuota.
i = tasa de interés de la operación.

En primer lugar se calcula la cuota de la siguiente manera:

$$c = \ddot{V}\, a_{\overline{n|}\, i_e}^{-1}$$

Como la primera cuota se abona en el momento 0, el importe que se adeuda es:

$$V = \ddot{V} - c$$

importe que se abonará en $n-1$ cuotas constantes y vencidas de $\$c$.

Para calcular la tasa de interés que corresponde a la operación haremos:

$$V = c a_{\overline{n-1|}\, i}$$

donde verificaremos que:

$$i > i_e$$

B. Método de la cuota constante con una tasa de interés enunciada anual y aplicada como proporcional
En esta modalidad, se enuncia una tasa de interés anual (i_e) pero al momento de determinar la tasa de interés para la unidad de tiempo (menor a un año) de la operación, el cálculo que se realiza es:

$$i = \frac{i_e}{m}$$

Por lo tanto, la tasa de interés equivalente anual de la operación será:

$$i_{(m)} = (1+i)^m - 1$$

siendo esta tasa mayor a la tasa de interés anual enunciada:

$$i_{(m)} > i_e$$

C. Préstamo con cuota constante fraccionada

En este método debemos considerar los siguientes elementos:

V = deuda.

n = plazo de la operación indicado en años.

i_e = tasa de interés anual enunciada

c = cuota.

i = tasa de interés de la operación.

$$m = \frac{año}{unidad\ de\ tiempo\ de\ la\ operacion}$$

La cuota se calcula:

$$c = \frac{V\, a^{-1}_{\overline{n}|\, i_e}}{m}$$

Como notamos, la cuota se calcula anual, y luego se fracciona en unidades de tiempo menores al año (meses, bimestres, trimestres, etc.). Esto es inequitativo para el deudor, ya que la cuota anual incluye intereses anuales, pero en realidad irá realizando pagos a lo largo del año.

La determinación de la tasa de interés que se aplica en la operación deberá realizarse a partir de la siguiente expresión:

$$V = c a_{\overline{n.m}|\, i}$$

La tasa de interés así obtenida corresponderá a la unidad de tiempo de la cuota, por lo tanto, se calculará una tasa de interés equivalente anual, que nos permitirá constatar que:

$$i_{(m)} > i_e$$

En los siguientes ejercicios reconoceremos algunos de estos métodos:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 6

Para la venta de un terreno, cuyo precio de contado es \$70.000 se propone la siguiente financiación.

Entrega inicial: \$20.000. El resto, a pagar en el plazo de cuatro años a una tasa de interés anual de 0,24, pagándose en cuotas iguales y al final de cada bimestre.

El valor de la cuota se determina de la siguiente manera:

$$c = \frac{50.000\, a^{-1}_{\overline{4}|\, 0,24}}{6}$$

Determinar:

a) El importe de la cuota.

b) La tasa de interés de la operación y su equivalente anual. Compare con la tasa de interés anual enunciada en la operación.

Rta.: a) \$3.466,05

b) 0,04548 bimestral y 0,305887 anual > 0,24 anual

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 7

SUPERHOGAR es un comercio de electrodomésticos y publica una oferta especial de TV más un reproductor de DVD:

Precio de contado $2.500
8 cuotas cada 30 días de $333,96
Pagando la primera en el momento de la compra

El comercio enuncia una tasa de interés de 0,015 para 30 días y calcula la cuota de la siguiente manera:

$$c = 2.500\ a^{-1}_{\overline{8|}\,0,015}$$

A partir de esta información, debe Ud. calcular:
a) El importe financiado.
b) La tasa de interés de la operación.

Rta.: a) $2.166,04 b) 0,019441 para 30 días

SEGUNDA PARTE

Valuación de Operaciones Financieras. Usufructo y Nuda Propiedad.

Cuando en la Unidad 1 definimos las operaciones financieras, indicamos que implica la existencia de dos partes con intereses opuestos. Uno de ellos es el que tiene el derecho de recibir una o varias sumas de dinero en el futuro (el acreedor o el depositante) debiendo esperar hasta el momento pactado originalmente. Pero en algunos casos el acreedor se reserva el derecho o tiene la posibilidad de hacerlo efectivo antes del vencimiento, transfiriéndolo a un tercero a cambio de un determinado precio.
Para determinar el importe de esa operación de transferencia es necesario calcular el valor de los importes pendientes de percibir, a una determinada tasa de interés que no será, necesariamente, la tasa de interés de la operación original.
Como nos encontramos en un momento diferente al del inicio, las condiciones del mercado hacen probable que la tasa de interés pretendida por las partes sea distinta, la denominaremos tasa de interés de valuación.
Para nuestro análisis, incorporamos la siguiente simbología:
p = momento de la valuación.
i' = tasa de interés para la valuación.
V_p' = valuación de la operación financiera en el momento p a la tasa de interés de valuación.
El importe a valuar puede tratarse de un importe único, es decir, un capital final $\left[f(n)\right]$ o un conjunto de cuotas pendientes de pago.

En algunos casos puede transferirse sólo el derecho al cobro de las amortizaciones o de los intereses.
En estas situaciones diferenciamos:

Simbólicamente:
$K_p^{'}$ = nuda propiedad en el momento p a la tasa de interés de valuación.
$U_p^{'}$ = usufructo en el momento p a la tasa de interés de valuación.

Nuda Propiedad: valor actual de las amortizaciones contenidas en el importe único o en las cuotas pendientes de cobro.

Usufructo: valor actual de los intereses contenidos en el pago único o en las cuotas pendientes de cobro.

La suma de ambos valores nos permiten obtener el valor de la operación financiera en el momento p:

$$V_p^{'} = K_p^{'} + U_p^{'}$$

Valuación de una operación de pago único
Se trata de una operación pactada en el momento 0, a amortizarse en un único pago en el momento n, que debe ser valuada en el momento p. Si es una deuda, equivale a un capital inicial:

$$V = f(0)$$

y el importe a pagar al final del plazo:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

tal como lo refleja el Gráfico 3:

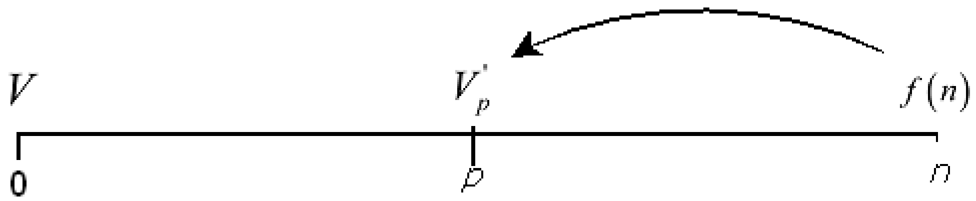


Gráfico 3

Para valuar en el momento p será necesario calcular el valor actual de los importes pendientes de pago (que es único en este caso):

$$V_p^{'} = \frac{f(n)}{(1+i')^{n-p}}$$

Para valuar el usufructo y la nuda propiedad al momento p debemos considerar que la amortización es única y se abona al final de plazo y el interés es la diferencia entre el capital final e inicial:

$$K_p^{'} = \frac{f(0)}{(1+i')^{n-p}}$$

$$U_p^{'} = \frac{f(n) - f(0)}{(1+i')^{n-p}}$$

Valuación de una operación de pago en cuotas

Se presenta en esta situación una operación pactada en el momento 0 a amortizarse en n cuotas, a la cual queremos valuar en el momento p, por lo tanto deberemos actualizar cada cuota no vencida, a la tasa de interés de valuación:

$$V_p^{'} = \frac{c_{p+1}}{(1+i')^1} + \frac{c_{p+2}}{(1+i')^2} + \frac{c_{p+3}}{(1+i')^3} + \ldots + \frac{c_n}{(1+i')^{n-p}}$$

También podemos expresarlo:

$$V_p^{'} = c_{p+1}v'^1 + c_{p+2}v'^2 + c_{p+3}v'^3 + \ldots + c_n v'^{n-p} = \sum_{r=p+1}^{n} c_r v'^{r-p}$$

Este valor considera que realizamos la valuación en p, después de pagar la cuota correspondiente a ese momento, y el valor está al inicio de la unidad de tiempo $p+1$, tal como se observa en el Gráfico 4:

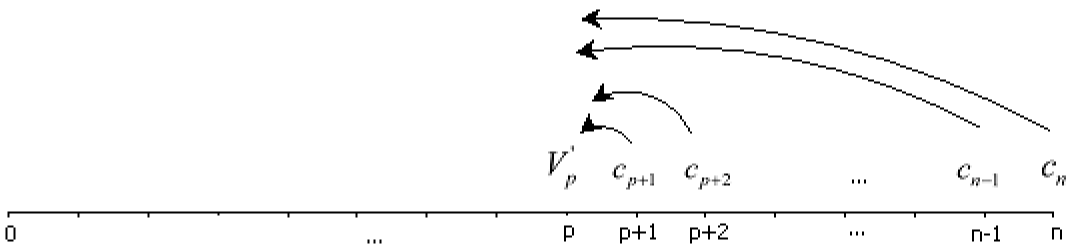


Gráfico 4

Determinaremos el usufructo haciendo:

$$U_p^{'} = I_{p+1}v'^1 + I_{p+2}v'^2 + I_{p+3}v'^3 + \ldots + I_n v'^{n-p} = \sum_{r=p+1}^{n} I_r v'^{r-p}$$

y la nuda propiedad:

$$K_p^{'} = t_{p+1}v'^1 + t_{p+2}v'^2 + t_{p+3}v'^3 + \ldots + t_n v'^{n-p} = \sum_{r=p+1}^{n} t_r v'^{r-p}$$

Lo planteado hasta aquí se aplica a cualquier sistema de amortización de deudas. Analizaremos a continuación cómo realizar la valuación en algunos de los sistemas de amortización estudiados en las unidades anteriores.

A. Sistema de amortización de cuota constante

Al tratarse de cuotas constantes, el cálculo del valor actual de las cuotas es más sencillo:

$$V_p^{'} = cv'^{1} + cv'^{2} + cv'^{3} + ... + cv'^{n-p} = c\sum_{r=p+1}^{n} v'^{r-p}$$

Sabemos que $a_{\overline{n|}i} = \sum_{t=1}^{n} v^t$, por lo tanto:

$$V_p^{'} = ca_{\overline{n-p|}i'}$$

Para el cálculo del usufructo y la nuda propiedad será necesario calcular los intereses y amortizaciones contenidas en las cuotas que restan por pagar y actualizarlas según lo indicado en la en las fórmulas generales de $U_p^{'}$ y $K_p^{'}$

B. Sistema de amortización de cuota variable y amortización constante

Como la amortización contenida en cada cuota es constante, el cálculo de la nuda propiedad puede expresarse:

$$K_p^{'} = tv'^{1} + tv'^{2} + tv'^{3} + ... + tv'^{n-p} = t\sum_{r=p+1}^{n} v'^{r-p}$$

$$K_p^{'} = ta_{\overline{n-p|}i'}$$

Para el cálculo de $U_p^{'}$ y $V_p^{'}$ utilizaremos las fórmulas generales

C. Sistema de amortización de interés constante y amortización al final

En este sistema, los intereses son constantes, por lo tanto, la determinación del usufructo es:

$$U_p^{'} = Iv'^{1} + Iv'^{2} + Iv'^{3} + ... + Iv'^{n-p} = I\sum_{r=p+1}^{n} v'^{r-p}$$

$$U_p^{'} = I\,a_{\overline{n-p|}i'}$$

Como la amortización es única y al final del plazo de la operación original:

$$K_p^{'} = \frac{V}{(1+i')^{n-p}} = Vv'^{n-p}$$

Por lo tanto, la valuación de la operación al momento p , es:

$$V_p^{'} = U_p^{'} + K_p^{'} = I\,a_{\overline{n-p|}i'} + Vv'^{n-p}$$

Resolvemos los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 8

La firma LANZI Y JUNCOS SA recibió el 18 de marzo un cheque diferido de uno de sus clientes por $34.850 con vencimiento el 14 de setiembre. La operación de origen es la venta de una máquina cuyo precio de contado es de $31.100.

El día 6 de junio la empresa estudia la posibilidad de negociar este cheque. El interesado en recibirlo, desea obtener una tasa de interés anual de 0,28.

Determinar el valor del cheque al 6 de junio, de acuerdo a la tasa de interés de valuación propuesta, incluyendo su descomposición en usufructo y nuda propiedad.

Rta.: $V_p' = \$32.570,09$, $K_p' = \$29.065,42$ *y* $U_p' = \$3.504,67$

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 9

LA FRESCA SA es un comercio mayorista que obtiene un préstamo de uno de sus socios para realizar reformas y mejoras en su establecimiento. El importe del préstamo es de $100.000 y se amortizará en 6 cuotas cuatrimestrales, iguales y vencidas, a una tasa de interés de 0,08 cuatrimestral.

Luego de pagadas dos cuotas, el socio transferirá su derecho a seguir cobrando el crédito a un tercero, aplicándose a la operación una tasa de interés de 0,02 mensual.

Determinar:

a) El importe por el cual se realizará la cesión del derecho a seguir cobrando el préstamo.

b) El valor de la nuda propiedad, si sólo se transfiere el derecho al cobro de las amortizaciones faltantes.

Rta.: a) $71.260,23 b) $58.558,19

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 10

El 15 de octubre de 2.008 se realizó la venta de un local comercial por U$S 50.000 y se financió con una entrega del 10% y el resto con el pago de 8 cuotas variables y vencidas, cada 90 días, de amortización constante y que incluyeron un interés anual de 25,594%. El día 8 de enero de 2.010 se presenta la posibilidad de transferir el derecho sobre las cuotas pendientes de cobro.

a) ¿Cuál será el importe a solicitar por la transferencia si la tasa de interés para 90 días con la que se realiza la valuación es 0,06? ¿Cuánto corresponde a Usufructo y cuánto a Nuda Propiedad?

b) Si el interesado en adquirir el derecho ofrece U$S16.500 ¿cuál es la tasa de interés de valuación?

Rta.: a) $V_p' = U\$S16.807,56$, $U_p' = U\$S1.771,87$ *y* $K_p' = U\$S15.035,69$

b) 0,070226 para 90 días

TERCERA PARTE

Corrección monetaria en el ámbito financiero

Nuestro análisis de las operaciones financieras realizadas hasta aquí ha sido considerando perfecta estabilidad de precios. Esto permite afirmar que el rendimiento (costo) financiero reflejado por la tasa de interés también indica el rendimiento real o económico de la operación financiera.
A continuación incorporaremos en el estudio de las operaciones financieras la inflación para determinar el impacto que esta tiene sobre ellas.

Tasa de Inflación

En general, se coincide en definir la inflación como *"el aumento sostenido en el nivel general de precios"*.
La inflación se refleja en la pérdida del poder adquisitivo de la moneda. Es decir, cada vez se necesita un importe mayor de moneda para adquirir un mismo bien o servicio, o con la misma suma de dinero se pueden adquirir cada vez cantidades menores de un bien o servicio.
Las medidas que frecuentemente se utilizan para medir la inflación son los Índices de Precios y la tasa de inflación.
Los índices de precios miden a través del tiempo la variación en los precios del conjunto o subconjunto de bienes y servicios de una economía y son determinados por entidades públicas o privadas.
A partir de estos índices será posible calcular la tasa de inflación para una unidad de tiempo determinada.

Definiremos la tasa de inflación, que simbolizaremos con α , como:

"el incremento de una unidad de capital inicial en una unidad de tiempo por efecto de la inflación"

Consideremos un bien A, cuyo precio en el momento 0 es P_0 y luego de transcurrida una unidad de tiempo su precio es P_1, tal como se observa en el Gráfico 5:

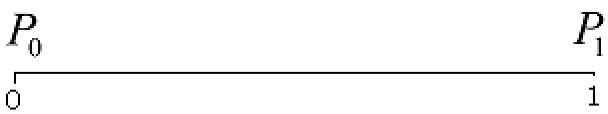


Gráfico 5

Puede ocurrir que:

a) $P_1 > P_0$

b) $P_1 < P_0$

c) $P_1 = P_0$

Simbolizaremos con Δ el incremento en el precio, que se obtiene de la diferencia entre ambos precios:

$$\Delta = P_1 - P_0$$

Por lo tanto:

$$P_1 = P_0 + \Delta$$

Para determinar la variación unitaria del precio del bien en la unidad de tiempo haremos:

$$\alpha = \frac{\Delta}{P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} - 1$$

Donde α nos está indicando la tasa de variación del precio del bien A en la unidad de tiempo.

Analicemos cada una de los posibles escenarios que se pueden presentar:

a) $P_1 > P_0$
Por lo tanto:
$\Delta > 0$
y $\alpha > 0$

b) Si $P_1 < P_0$
entonces:
$\Delta < 0$
y $\alpha < 0$

c) Finalmente, si $P_1 = P_0$,
$\Delta = 0$
y
$\alpha = 0$

Si el análisis lo extendemos a un conjunto de bienes y servicios, será necesario considerar que no todos aumentan o disminuyen en la misma cuantía, por lo tanto, las variaciones se reflejan a través de un Índice de Precios que considera una canasta de bienes representativos de la economía con determinadas ponderaciones.

Consideremos las variaciones presentadas por un Índice de Precios para un determinado período:

Mes	Índice de Precios
Enero	106.98
Febrero	119.03
Marzo	134.58
Abril	161.36
Mayo	181.24
Junio	196.72
Julio	205.83
Agosto	216.64

Los índices toman como base un mes de un determinado año, partiendo de 100, y van acumulando las variaciones en los precios. Para determinar la tasa de inflación (α) para el mes de Marzo, deberá hacerse:

$$\alpha = \frac{Indice\ de\ Marzo - Indice\ de\ Febrero}{Indice\ de\ Febrero} = \frac{Indice\ de\ Marzo}{Indice\ de\ Febrero} - 1$$

Como podemos observar hicimos lo mismo que cuando trabajamos con el precio de un bien, aunque en aquel caso teníamos el precio de bien y en este caso, índices de precios.

Si necesitamos determinar la tasa de inflación del bimestre Marzo-Abril:

$$\alpha = \frac{Indice\ de\ Abril - Indice\ de\ Febrero}{Indice\ de\ Febrero} = \frac{Indice\ de\ Abril}{Indice\ de\ Febrero} - 1$$

de esta manera estamos considerando la inflación conjunta de ambos meses.
Tal como lo indicamos, los índices son acumulativos, de la misma manera que lo es un capital inicial sometido a una operación a interés compuesto. En este caso se acumulan las variaciones de precios en vez de los intereses.
Por lo tanto, podemos calcular tasas de inflación equivalentes o promedios con las mismas fórmulas que lo hicimos para la tasa de interés.
Por ejemplo, para calcular una tasa de inflación equivalente, debemos aplicar:

$$\alpha_{(m)} = (1+\alpha)^m - 1$$

Finalmente, y de acuerdo al resultado de la tasa de inflación, afirmaremos que si:

$\alpha > 0$ hay inflación
$\alpha = 0$ hay perfecta estabilidad de precios
$\alpha < 0$ hay deflación

La siguiente tabla refleja la evolución del Índice de Precios al Consumidor, elaborado por el INDEC, y será utilizada en algunos de los ejercicios de esta unidad:

Tabla del Índice de Precios al Consumidor (IPC)

Serie histórica del Índice de Precios al Consumidor (IPC) en el Gran Buenos Aires. Nivel general. Serie Base abril 2008=100						
Mes	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**
1	97,61	104,26	112,85	124,79	136,91	152,09
2	98,07	104,71	114,25	125,71	137,92	152,84
3	99,18	105,38	115,56	126,77	139,21	153,95
4	100,00	105,73	116,52	127,83	140,37	155,07
5	100,56	106.08	117,39	128,77	141,51	156,14
6	101,20	106,53	118,25	129,69	142,53	157,44
7	101,57	107,19	119,20	130,72	143,66	158,90
8	102,05	108,08	120,08	131,81	144,94	160,23
9	102,57	108,88	120,95	132,91	146,22	161,56
10	103,01	109,75	121,97	133,75	147,45	
11	103,36	110,66	122,86	134,54	148,83	
12	103,71	111,69	123,89	135,67	150,38	

Considerando la tabla del IPC, resolvemos el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 11
A partir de la información suministrada por la tabla del IPC, complete el siguiente cuadro:

a)	Tasa de inflación del año 2.012	
b)	Tasa de inflación de enero de 2.010	
c)	Tasa de inflación para el cuarto bimestre del año 2.009	
d)	Tasa de inflación mensual promedio del año 2.011	

Rta.: a) 0,10842 p/el año 2.012 b) 0,01039 p/enero de 2.010
c) 0,01455 p/julio-agosto de 2.009 d) 0,0076 promedio mensual

Ajuste por Inflación

Al definir la inflación indicamos que esta provoca la pérdida del poder adquisitivo del dinero. Por lo tanto, para comprar un bien, necesitaremos más dinero en el momento futuro que hoy, o si con una suma de dinero compro cierta cantidad de un bien, en el futuro, con esa misma suma de dinero compraré menor cantidad del bien.

Para que una suma de dinero tenga el mismo poder adquisitivo en un momento del tiempo deberá ser ajustado a ese momento considerando la tasa de inflación para el plazo correspondiente. Como el momento que se toma en referencia para el ajuste puede ser anterior o posterior, puede realizarse a "moneda constante" o a "moneda corriente".

Ajuste a moneda constante
En este caso nos encontraremos con una suma de dinero C, ubicada en el momento 1, la simbolizaremos con C_1 y lo ajustaremos a un momento anterior en el tiempo (Gráfico 6):

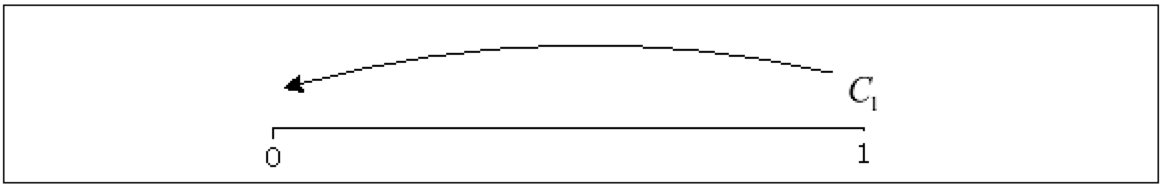


Gráfico 6

Para obtener su valor ajustado al momento 0, considerando una tasa de inflación α :

$$C_1^{'} = \frac{C_1}{(1+\alpha)}$$

El importe obtenido, $C_1^{'}$, representa el valor C_1, expresado en moneda de poder adquisitivo del momento 0.

Si se trataran de n unidades de tiempo y una tasa de inflación constante:

$$C_n^{'} = \frac{C_n}{(1+\alpha)^n}$$

Cuando la tasa de inflación es variable:

$$C_n^{'} = \frac{C_n}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots(1+\alpha_n)} = \frac{C_n}{\prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t)}$$

Ajuste a moneda corriente

En esta situación, tendremos una suma de dinero C, ubicada en el momento 0, la simbolizaremos con C_0 y lo ajustaremos a un momento posterior en el tiempo (Gráfico 7):

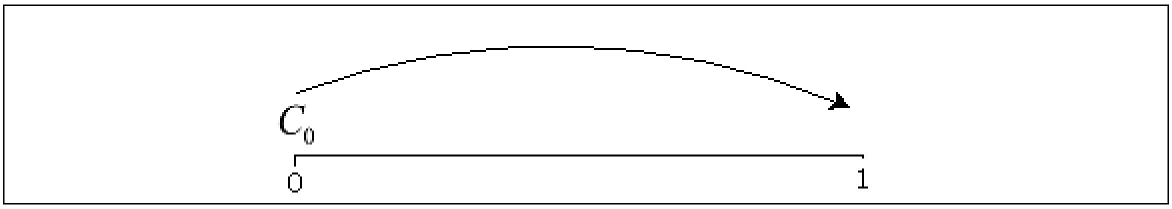


Gráfico 7

Para obtener su valor ajustado al momento 1, considerando una tasa de inflación α:

$$C_0^{'} = C_0(1+\alpha)$$

El importe obtenido, $C_0^{'}$, representa el valor C_0, expresado en moneda de poder adquisitivo del momento 1.

Si se trataran de n unidades de tiempo y una tasa de inflación constante:

$$C_0^{'} = C_0(1+\alpha)^n$$

Cuando la tasa de inflación es variable:

$$C_0^{'} = C_0(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots(1+\alpha_n) = C_0\prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t)$$

Les proponemos continuar, resolviendo el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 12

La tabla que se encuentra a la derecha refleja la evolución del salario mínimo vital y móvil (SMVyM), legislado en la Ley de Contrato de Trabajo y que el Consejo Nacional del Empleo, la Productividad y el Salario Mínimo, Vital y Móvil ajusta periódicamente.

Responder:

a) Durante el año 2.009 ¿El SMVyM, tuvo un crecimiento mayor o menor a la inflación de ese año? Realice el análisis en moneda constante.
b) ¿Qué sucedió en el año 2.012? Realice el análisis en moneda corriente.
(Considere, para la inflación, la Tabla del IPC)

Vigencia Desde	Salario mínimo vital y móvil
01/12/2008	1.240,00
01/08/2009	1.400,00
01/10/2009	1.440,00
01/01/2010	1.500,00
01/08/2010	1.740,00
01/01/2011	1.840,00
01/08/2011	2.300,00
01/09/2012	2.670,00
01/02/2013	2.875,00
01/08/2013	3.300,00

Rta.: a) y b) El crecimiento del SMVyV fue mayor a la inflación.

Tasa de Rendimiento

Analizaremos a continuación el efecto que tiene la inflación en las operaciones financieras. Tomaremos una operación donde sólo consideramos un capital inicial y su capital final correspondiente.
Sabemos que:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

El interés obtenido es:

$$I = f(n) - f(0)$$

Si la operación se realizó en una economía bajo un contexto inflacionario, el valor inicial y el final obtenido están expresados en moneda de distinto poder adquisitivo ya que ha transcurrido el tiempo y ha actuado la desvalorización monetaria.
Para determinar cuál ha sido el rendimiento de la operación en este contexto, es necesario que ambos capitales estén expresados en monedas del mismo poder adquisitivo.

Para expresar el capital final en moneda constante (momento 0) debemos ajustarlo al momento 0 (Gráfico 8):

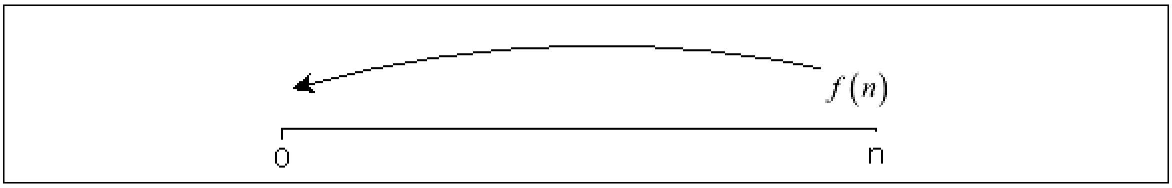


Gráfico 8

Haremos:

$$f^{'}(n)=\frac{f(n)}{(1+\alpha)^{n}}$$

Donde:

$f^{'}(n)$ = es el capital final expresado en moneda del momento 0.

Con el capital final así ajustado podemos determinar el rendimiento (R) de la operación, neto del efecto inflacionario:

$$R=f'(n)-f(0)$$

También es posible determinar la tasa de rendimiento (r), es decir, el rendimiento por cada unidad de capital inicial, expresado en moneda constante, por unidad de tiempo.

Para ello, remplazamos $f^{'}(n)$:

$$R=\frac{f(n)}{(1+\alpha)^{n}}-f(0)$$

Lo mismo hacemos con $f(n)$:

$$R=\frac{f(0)(1+i)^{n}}{(1+\alpha)^{n}}-f(0)$$

$$R=f(0)\frac{(1+i)^{n}}{(1+\alpha)^{n}}-f(0)$$

Si:

$f(0)$ = \$1 y n = 1:

$$\boxed{r=\frac{(1+i)}{(1+\alpha)}-1}$$

O:

$$r=\frac{(1+i)-(1+\alpha)}{(1+\alpha)}$$

$$r=\frac{i-\alpha}{(1+\alpha)}$$

obteniendo así la tasa de rendimiento de una operación financiera en un contexto inflacionario.

Para calcular r, es necesario contar con la tasa de interés y la tasa de inflación y esta última se conoce luego de transcurrido el plazo al cual corresponde, por lo tanto, podremos determinar el rendimiento después de concretarse la operación financiera, constituyendo un análisis “expost”.

Sabemos, por definición que:

$$i > 0$$

y la tasa de inflación puede ser:

$\alpha > 0$ inflación
$\alpha = 0$ perfecta estabilidad de precios
$\alpha < 0$ deflación

Teniendo esto en cuenta, la tasa de rendimiento será:

$r > 0$ cuando $i > \alpha$
$r = 0$ cuando $i = \alpha$
$r < 0$ cuando $i < \alpha$

A partir de la expresión que obtuvimos para encontrar r:

$$r = \frac{(1+i)}{(1+\alpha)} - 1$$

podemos despejar:

$$i = (1+\alpha)(1+r) - 1$$

$$\alpha = \frac{1+i}{1+r} - 1$$

Recordemos la situación planteada al inicio de la unidad acerca de la rentabilidad obtenida en una operación de depósito a plazo fijo. Debemos determinar en primer lugar la tasa de interés, a partir de la TNA enunciada en la operación. La tasa de interés es:

$$i = \frac{0{,}153}{365/30} = 0{,}012575\ p/30d.$$

Macro

Fecha	Hora	Operación
18/3/2013	07:39	957661286

Nro. de certificado	30108050010094611
Tipo de plazo fijo	INTRANSFERIBLE MACRONLINE
Moneda	PESOS
Capital	42,000.00
Plazo	30
Tasa (T.N.A.)	15.3
Interés a pagar	528.16
Fecha emisión	18/03/2013
Fecha vencimiento	17/04/2013

Luego, a partir de la información de los índices calcularemos la tasa de inflación de los meses de marzo y abril, ya que la operación transcurre en esos meses:

Nivel General y Capítulos	Índice		Variación porcentual	
	Marzo 2013	Febrero 2013	respecto del mes anterior	respecto de dic. 2012
Nivel general	153,95	152,84	0,7	2,4

Para la tasa de inflación de marzo:

$$\alpha = \frac{Indice\ de\ Marzo}{Indice\ de\ Febrero} - 1 = \frac{153,95}{152,84} - 1 = 0,007262\ p/31d.$$

La tasa de inflación obtenida es para 31 días ya que esa es la cantidad de días del mes de marzo.

Para abril:

Nivel General y Capítulos	Índice		Variación porcentual	
	Abril 2013	Marzo 2013	respecto del mes anterior	respecto de dic. 2012
Nivel general	155,07	153,95	0,7	3,1

$$\alpha = \frac{Indice\ de\ Abril}{Indice\ de\ Marzo} - 1 = \frac{155,07}{153,95} - 1 = 0,007275\ p/30d.$$

Determinamos la cantidad de días de cada mes que corresponden a la operación de depósito:

18 al 31 de marzo $\rightarrow$ 14 días
1 al 16 de abril $\rightarrow$ 16 días
30 días

A partir de la tasa de inflación de marzo y abril calculamos las tasas de inflación equivalentes:

$$\alpha_{(m)} = (1+\alpha)^m - 1$$

$$(1+0,007262)^{\left(14/31\right)} - 1 = 0,003273\ p/14d.$$

$$(1+0,007275)^{\left(16/30\right)} - 1 = 0,003873\ p/16d.$$

A continuación determinamos la tasa de inflación para los 30 días que corresponden a la operación de plazo fijo:

$$(1+0,000,003273)\,(1+0,000,003873) - 1 = 0,007159\ p/30d.$$

Finalmente determinamos la tasa de rendimiento:

$$r = \frac{(1+i)}{(1+\alpha)} - 1 = \frac{1+0,012575}{1+0,007159} - 1 = \boxed{0,005378\ p/30d.}$$

A continuación, resolvemos los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 13

Un particular deposita el 21 de diciembre de 2.009 \$5.320 a plazo fijo por 30 días, a una tasa de interés nominal anual de 0,125. Calcular:
a) El importe del capital final y la fecha de vencimiento.
b) La tasa de rendimiento para el inversor. (Utilice la tabla del IPC)

Rta.: a) \$5.374,66 y 20/01/2010 b) 0,0006 para 30 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 14

Una empresa ha obtenido de su proveedor 45 días de plazo para abonar su compra, debiendo pagar el día 31 de octubre de 2.009 de \$27.604. El proveedor le recargó el 3% sobre el importe de la compra.
Indique cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones es FALSA:

a) La fecha de la compra fue el 16 de setiembre de 2.009.
b) El importe de la compra fue \$26.775,88.
c) La tasa de inflación para el plazo de la operación fue 0,011454.
d) -0,018 para 45 días es la tasa de costo para la empresa.
e) La tasa de interés anual equivalente de la operación es 0,27094.
(Utilice la tabla del IPC)

Rta.: Son falsas: b) (\$26.800) y d) (0,018336 para 45 días)

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 15

Un comerciante mayorista que financia sus ventas a 90 días, espera obtener un rendimiento del 0,025 para 30 días y estima que la inflación anual alcanzará el 40%. ¿Qué tasa de interés para 90 días debe enunciar para sus clientes?

Rta.: 0,17 p/90 días

Ajuste por Inflación en la amortización de deudas

Cuando dos partes acuerdan una operación de préstamo, los cálculos de los distintos componentes (deuda, cuotas, amortizaciones, intereses) están expresados en moneda del momento en que se pacta la operación. Pero es posible establecer entre las partes condiciones que permiten mantener el poder adquisitivo del dinero a medida que transcurre el tiempo, especialmente en períodos inflacionarios. Para ello es necesario "ajustar" al momento de pago cada uno de los valores considerando la inflación por el tiempo transcurrido.
A continuación profundizaremos el proceso de ajuste aplicado a distintas situaciones:

Deudas a amortizar con un pago único
En primer lugar, analizaremos el ajuste de deudas cuando la amortización del mismo se realizará en un pago único y el importe a abonar al vencimiento se ajustará de acuerdo a la inflación del plazo de la operación.

Conocidos:
V = deuda.
n = número de unidades de tiempo de la operación.
i = tasa de interés para la unidad de tiempo de la operación.

Determinemos el importe a pagar por el deudor. Como se trata de una deuda a amortizar en un único pago, calculamos el mismo a través de la fórmula de cálculo de un capital final:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

$$f(n) = V(1+i)^n$$

$f(n)$ es la suma que el deudor debe pagar, en el caso en que hubiera perfecta estabilidad de precios $(\alpha = 0)$, o, existiendo inflación, no se ha pactado ajuste alguno.
Como se pactó realizar un ajuste que permite mantener el poder adquisitivo de la moneda, necesitamos determinar un coeficiente para dicho ajuste.

Cuando la inflación es constante para todo el plazo:

$$(1+\alpha)^n$$

Cuando la inflación es variable durante el plazo:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)...(1+\alpha_n) = \prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t)$$

Aplicamos el coeficiente que corresponde a $f(n)$:

$$f(n)(1+\alpha)^n$$

o:

$$f(n)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots(1+\alpha_n)=f(n)\prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t)$$

Siendo el valor obtenido el importe que deberá abonar el deudor para amortizar su deuda, y que incluye los intereses y el ajuste por inflación. El valor se encuentra expresado en moneda corriente y en poder adquisitivo del momento 0.

Deudas a amortizar con pago de cuotas

Cuando se pacta un préstamo a amortizar en pagos periódicos, el valor de la deuda, de las cuotas, saldos, intereses y amortizaciones están expresados en moneda de ese momento y será necesaria ajustar su valor para reflejar el efecto de la inflación por la pérdida del poder adquisitivo del dinero.

El procedimiento consiste en aplicar un coeficiente que va acumulando la inflación que se va produciendo en las sucesivas unidades de tiempo

A partir de:

V = deuda.

n = número de cuotas.

i = tasa de interés para la unidad de tiempo de la operación.

Se calcula la cuota según el sistema de amortización aplicado:

$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$

El cuadro de amortización de la deuda es el siguiente:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	S_0	$S_1^{'}$	t_1	I_1	c_1
2	S_1	$S_2^{'}$	t_2	I_2	c_2
3	S_2	$S_3^{'}$	t_3	I_3	c_3
...	...	...	...	...	...
r	S_{r-1}	$S_r^{'}$	t_r	I_r	c_r
...	...	...	...	...	...
n	S_{n-1}	$S_n^{'}$	t_n	I_n	c_n

Este cuadro de amortización nos muestra la evolución de la deuda considerando que no se realiza ningún tipo de ajuste por inflación. Si incorporamos la inflación en el caso planteado, se deben corregir o ajustar los valores que están ubicados en los distintos momentos, utilizando la tasa de inflación correspondiente. Para ello, se aplica a cada importe del cuadro el coeficiente correspondiente al momento donde se encuentra.

Analicemos los siguientes casos:

a) Tasa de inflación constante:
Al momento de pagar la primera cuota, ha transcurrido una unidad de tiempo desde el inicio de la operación y por lo tanto aplicaremos un coeficiente de ajuste a moneda corriente que refleje la inflación de esa unidad de tiempo:

$$\text{Coeficiente} = (1+\alpha)$$

Los valores que deben ajustarse son los que se encuentran al final de esa unidad de tiempo: $S_1, C_1, I_1, t_1 \ y \ S'_1$. En cambio, S_0 no debe ajustarse porque se encuentra ubicado al inicio de la primera unidad de tiempo (momento 0)

El cuadro de amortización quedará:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	S_0	$S_1'(1+\alpha)$	$t_1(1+\alpha)$	$I_1(1+\alpha)$	$c_1(1+\alpha)$
2	$S_1(1+\alpha)$				

Al momento de pagar la segunda cuota, han transcurrido dos unidades de tiempo desde el inicio de la operación, y el coeficiente será $(1+\alpha)^2$:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1					
2		$S_2'(1+\alpha)^2$	$t_2(1+\alpha)^2$	$I_2(1+\alpha)^2$	$c_2(1+\alpha)^2$
3	$S_2(1+\alpha)^2$				

Al momento de pagar la tercera cuota, el coeficiente será $(1+\alpha)^3$:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1					
2					
3		$S_3'(1+\alpha)^3$	$t_3(1+\alpha)^3$	$I_3(1+\alpha)^3$	$c_3(1+\alpha)^3$
4	$S_3(1+\alpha)^3$				

Finalmente, el cuadro de amortización completo resultará:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	S_0	$S_1^{'}(1+\alpha)$	$t_1(1+\alpha)$	$I_1(1+\alpha)$	$c_1(1+\alpha)$
2	$S_1(1+\alpha)$	$S_2^{'}(1+\alpha)^2$	$t_2(1+\alpha)^2$	$I_2(1+\alpha)^2$	$c_2(1+\alpha)^2$
3	$S_2(1+\alpha)^2$	$S_3^{'}(1+\alpha)^3$	$t_3(1+\alpha)^3$	$I_3(1+\alpha)^3$	$c_3(1+\alpha)^3$
…	…	…	…	…	…
r	$S_{r-1}(1+\alpha)^{r-1}$	$S_r^{'}(1+\alpha)^r$	$t_r(1+\alpha)^r$	$I_r(1+\alpha)^r$	$c_r(1+\alpha)^r$
…	…	…	…	…	…
n	$S_{n-1}(1+\alpha)^{n-1}$	$S_n^{'}(1+\alpha)^n$	$t_n(1+\alpha)^n$	$I_n(1+\alpha)^n$	$c_n(1+\alpha)^n$

b) Tasa de inflación variable
En este caso el coeficiente acumulará la tasa de inflación de cada una de las unidades de tiempo que componen el plazo de la operación. Observemos el cuadro de amortización en la página siguiente:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	S_0	$S_1^{'}(1+\alpha_1)$	$t_1(1+\alpha_1)$	$I_1(1+\alpha_1)$	$c_1(1+\alpha_1)$
2	$S_1(1+\alpha_1)$	$S_2^{'}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$	$t_2(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$	$I_2(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$	$c_2(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$
3	$S_2(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$	$S_3^{'}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)$	$t_3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)$	$I_3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)$	$c_3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)$
...	...	...	...	...	...
r	$S_{r-1}\prod_{t=1}^{r-1}(1+\alpha_t)$	$S_r^{'}\prod_{t=1}^{r}(1+\alpha_t)$	$t_r\prod_{t=1}^{r}(1+\alpha_t)$	$I_r\prod_{t=1}^{r}(1+\alpha_t)$	$c_r\prod_{t=1}^{r}(1+\alpha_t)$
...	...	...	...	...	...
n	$S_{n-1}\prod_{t=1}^{n-1}(1+\alpha_t)$	$S_n^{'}\prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t)$	$t_n\prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t)$	$I_n\prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t)$	$c_n\prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t)$

c) Deuda con período de diferimiento.

En este caso, deberán considerarse al momento de ajuste, la inflación correspondiente a las k unidades de tiempo de diferimiento. Por lo tanto el cuadro de amortización ajustado a moneda corriente del momento en que cada valor se encuentra será:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	${}^{k}/_{0}S_0$	${}^{k-1}/_{1}S_0(1+\alpha)$	-	-	-
2	${}^{k-1}/_{1}S_0(1+\alpha)$	${}^{k-2}/_{2}S_0(1+\alpha)^2$	-	-	-
…	…	…	-	-	-
$k+1$	${}^{0}/_{k}S_0(1+\alpha)^k$	${}_{k+1}S'_1(1+\alpha)^{k+1}$	$t_1(1+\alpha)^{k+1}$	$I_1(1+\alpha)^{k+1}$	$c_1(1+\alpha)^{k+1}$
$k+2$	${}_{k+1}S_1(1+\alpha)^{k+1}$	${}_{k+2}S'_2(1+\alpha)^{k+2}$	$t_2(1+\alpha)^{k+2}$	$I_2(1+\alpha)^{k+2}$	$c_2(1+\alpha)^{k+2}$
…	…	…	…	…	…
$k+n$	${}_{k+n-1}S_{n-1}(1+\alpha)^{k+n-1}$	${}_{k+n}S'_n(1+\alpha)^{k+n}$	$t_n(1+\alpha)^{k+n}$	$I_n(1+\alpha)^{k+n}$	$c_n(1+\alpha)^{k+n}$

El cuadro se ha construido considerando una tasa de inflación constante, pudiendo aplicarse también coeficientes con tasas de inflación variables.

Para poner en práctica lo aprendido, le sugerimos resolvamos los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 16

Un préstamo personal obtenido en el Banco del Plata por $8.500 se amortiza en 5 cuotas mensuales, iguales y vencidas, tal como se detalla en el siguiente cuadro de amortización, entregado al deudor por la entidad financiera al momento de concretarse la operación:

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	8.500,00	8.623,25	1.651,41	123,25	1.774,66
2	6.848,59	6.947,89	1.675,36	99,30	1.774,66
3	5.173,24	5.248,25	1.699,65	75,01	1.774,66
4	3.473,59	3.523,95	1.724,29	50,37	1.774,66
5	1.749,29	1.774,66	1.749,29	25,37	1.774,66

Se establece, además, que las cuotas se ajustarán mensualmente a la tasa de inflación de cada uno de los meses del plazo de la operación.
A medida que transcurre el plazo de la operación, se conoce que la inflación de cada uno de los meses es la siguiente:

Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4	Mes 5
1,1%	0,75%	1,02%	0,95%	1,15%

Ud. debe:
a) Calcular la tasa de interés de la operación.
b) Construir el cuadro de amortización con los valores ajustados a moneda corriente, incorporando una columna con los coeficientes de ajuste.
c) Determinar la tasa de inflación mensual promedio, vigente durante el plazo de la operación.

Rta.: a) 0,0145 mensual c) 0,009939 mensual
b) Cuadro de amortización ajustado a moneda corriente

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota	Coeficiente de ajuste
1	8.500,00	8.718,11	1.669,58	124,61	1.794,18	1,0110
2	6.923,92	7.077,00	1.706,49	101,15	1.807,64	1,0186
3	5.269,37	5.400,30	1.748,89	77,19	1.826,08	1,0290
4	3.574,22	3.660,50	1.791,10	52,32	1.843,42	1,0387
5	1.817,08	1.864,62	1.837,97	26,65	1.864,62	1,0507

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 17
DINERO YA otorga préstamos personales de $4.000 a pagar en cuotas mensuales, iguales y vencidas de $561,60. La tasa de interés enunciada es 0,0154 mensual directa.
Calcular:
a) La cantidad de cuotas a pagar.
b) El importe a pagar en concepto de amortización extraordinaria junto con el pago de la 4° cuota que permita mantener el mismo valor de cuota a pesar de reducir a la mitad el número de cuotas que faltan pagar.
c) El interés contenido en la 3° cuota ajustado por inflación (1,20% es la inflación mensual promedio).

Rta.: a) 8 b) $1.024,80 c) $84,72

CUARTA PARTE
Otras alternativas de financiamiento

Continuando con el estudio de las distintas posibilidades que se pueden presentar en cuanto a operaciones de crédito, agrupamos aquí algunas de ellas que, en algunos casos, constituyen variantes de las analizadas en las unidades 4 y 5.

Leasing

El leasing es una herramienta de financiación de bienes de capital. A través de él una persona llamada “Dador” adquiere un bien determinado y acuerda en transferir a otra persona llamada “Tomador” la tenencia del mismo para su uso, contra el pago de un “Canon” y otorgándole, una opción de compra por cierto monto, al finalizar el plazo del alquiler.
Se ha convertido en un instrumento muy utilizado como opción para obtener financiamiento, permitiendo a las empresas mantenerse actualizadas tecnológicamente.

A continuación presentamos sus principales ventajas:

- Financiación del 100% del bien.
- Incorporación de bienes necesarios para la producción sin necesidad de inmovilizar capital de trabajo.
- Las cuotas se pagan con los ingresos generados por la explotación del bien.
- Permite la actualización tecnológica.
- Beneficios impositivos, dado que el canon es deducible para la determinación del impuesto a las ganancias. En el impuesto a la ganancia mínima presunta, el bien no se encuentra gravado, por no ser de propiedad de la empresa.

Cálculo del Canon o Cuota

El canon contiene el recupero de la inversión más los intereses pactados. Generalmente es de pago mensual. Algunos elementos a tener en cuenta para determinar este valor son:

- El valor del bien objeto del leasing
- El plazo
- Los gastos
- La tasa de interés
- Los seguros
- El valor residual del bien
- El momento del pago del valor residual.

En el caso de pago de cuota vencida y valor residual (opción de compra) al momento del pago de la última cuota, el precio del bien es igual a:

$$P=\frac{c_1}{(1+i)^1}+\frac{c_2}{(1+i)^2}+\frac{c_3}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{c_n+O}{(1+i)^n}$$

Siendo:

P = valor de origen o precio del bien.
O = valor residual del bien ubicado junto con la última cuota (opción).
c = importe del canon o cuota.
n = cantidad de cuotas.
i = tasa de interés.

En relación a lo anteriormente explicado les proponemos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 18

KRAUTIR SA adquiere nueva maquinaria para su planta de producción a través de un contrato de leasing con uno de los bancos con los que opera habitualmente.

La empresa deberá pagar durante 60 meses un canon de $1.051 mensual y vencido y tendrá la opción a comprar el bien, al momento de pagar el último canon, abonando $5.000. La tasa de interés enunciada para la operación es 0,12 nominal anual con capitalización mensual.

Determinar el precio contado de la maquinaria adquirida.

Rta.: $50.000

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 19
Una empresa de transportes renueva parte de su flota a través de una operación de leasing financiero. El precio de contado de los rodados, objeto del contrato, asciende a $360.000 y el canon mensual a abonar durante 3 años y a una tasa de interés de 0,015 mensual es de $12.634,12.
Calcular el importe de la opción de compra al final del plazo e indicar el porcentaje que representa del precio de contado.

Rta.: $18.000; 5%

Determinación de la tasa de costo al incorporar impuestos, gastos, seguros y otros conceptos no financieros en las operaciones de préstamos

Al momento de convenirse operaciones de préstamo, es común que no sólo se incorporen los intereses como parte del precio que se paga, sino que se suelen incorporar otros conceptos como por ejemplo:

- Impuestos (IVA, Impuesto a los Sellos, etc.)
- Seguros (de vida, por incobrables, etc.)
- Gastos Varios (administrativos, de constitución de hipotecas o prendas, etc.)
- Honorarios (de escribanos, etc.)

La inclusión de estos conceptos, disminuirá el importe recibido efectivamente en préstamo y/o aumentará el valor de las cuotas a pagar por el deudor.
Respecto al importe recibido en préstamo, si al momento de concretarse el desembolso del mismo, se descuentan gastos (por ejemplo, en el caso de créditos con garantía hipotecaria o prendaria) u otros conceptos, que darán como resultado un importe a recibir menor al originalmente solicitado en préstamo.
En el caso que no se deduzcan directamente, pasarán estos gastos a aumentar el valor de la deuda y se trasladarán al importe de las cuotas.

No es posible generalizar la forma en que cada uno de estos conceptos se aplica pues existen muchas variantes. Por ejemplo, el seguro puede ser un importe fijo, o un porcentaje sobre el saldo adeudado, y por lo tanto, un valor decreciente.
Otro concepto relevante es el IVA, que se calcula sobre los intereses incluidos en cada cuota, y como estos son generalmente decrecientes (por ejemplo, sistemas alemán y francés), el IVA también lo será.

Considerar todos estos aspectos nos llevará a distinguir en una operación de préstamo:

- La tasa de interés, aplicada para la determinación de las cuotas.
- La tasa de costo de la operación, que es la que incluye, además de los intereses financieros, los demás conceptos a pagar.

Es común observar en publicidades sobre créditos bancarios, que se enuncia la TNA (Tasa Nominal Anual de la operación), la TEA (Tasa Equivalente Anual) y una tasa de costo total anual (a veces simbolizada con CFT), mayor a la TEA, y que es una tasa que surge de agregar los demás conceptos que hemos mencionado. Distinguir y determinar estas tasas es fundamental para tomar decisiones de financiación adecuadas.

Puede suceder que al comparar dos entidades financieras una ofrezca préstamos a una tasa de interés menor que otra y parezca una alternativa más atractiva, pero al momento de analizar la tasa de costo del préstamo deje de serlo. Como conocedores de estos aspectos debemos saber diferenciar las distintas tasas enunciadas para la toma de decisiones óptimas.

Retornando el préstamo propuesto al iniciar la unidad 5, en el cuadro de amortización, se agrega a la cuota pura, el IVA (21%) calculado sobre los intereses que corresponden a cada cuota, y el seguro que se calcula sobre el saldo adeudado al inicio de cada unidad de tiempo (0,198%).

Detalle Completo de Cuotas

CUOTA	SALDO	CAPITAL	INTERÉS	CUOTA PURA	SEGURO DE VIDA S/SALDO	IVA	CUOTA TOTAL
1	50.000,00	8.333,33	1.583,33	9.916,67	99,00	332,50	10.348,17
2	41.666,67	8.333,33	1.319,44	9.652,78	82,50	277,08	10.012,36
3	33.333,33	8.333,33	1.055,56	9.388,89	66,00	221,67	9.676,56
4	25.000,00	8.333,33	791,67	9.125,00	49,50	166,25	9.340,75
5	16.666,67	8.333,33	527,78	8.861,11	33,00	110,83	9.004,94
6	8.333,33	8.333,33	263,89	8.597,22	16,50	55,42	8.669,14

cerrar

Para la primera cuota:

$$IVA = 1.583,33\,.\,0,21 = 332,50$$
$$Seguro = 50.000\,.\,0,00198 = 99$$
$$Cuota\ Total = 9.916,67 + 332,50 + 99 = 10.347,17$$

Para la segunda cuota:

$$IVA = 1.319,44\,.\,0,21 = 277,08$$
$$Seguro = 41.666,67\,.\,0,00198 = 82,50$$
$$Cuota\ Total = 9.652,78 + 277,08 + 82,50 = 10.012,36$$

De manera similar determinamos la cuota total para las siguientes unidades de tiempo.
La tasa de interés de la operación es la que obtuvimos a partir de la TNA enunciada en la operación pero la tasa de costo para el deudor, incluirá el impuesto y el seguro, y será la que iguale el importe recibido en préstamo y el valor actual de las cuotas totales a abonar:

$$50.000 = \frac{10.348,17}{(1+\text{tasa de costo})^1} + \frac{10.012,36}{(1+\text{tasa de costo})^2} + \frac{9.676,56}{(1+\text{tasa de costo})^3} + \frac{9.340,75}{(1+\text{tasa de costo})^4} + \frac{9.004,94}{(1+\text{tasa de costo})^5} + \frac{8.669,14}{(1+\text{tasa de costo})^6}$$

$$\text{tasa de costo} = 0,040297\ mensual$$

Si de esta tasa de costo, calculamos su equivalente anual, obtenemos una tasa de costo equivalente anual de 0,6065, coincidiendo con la indicada por el banco (CFT 60,65%)

Información detallada del Préstamo seleccionado		Para ingresar nuevos datos **click aquí**	
Nombre	Gold Haberes de 6 a 36 meses	TNA	38,00%
Sistema	Alemán	Tipo Tasa	fija
Monto	50000	Moneda	Pesos
Plazo (meses)	6	CFT (Efectivo)	60,65%
Acredita su sueldo en Banco Galicia:	Si	TEA	45,37%

A continuación, resolvemos el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 20

El Señor Lucas Estrada es un comerciante monotributista que solicita un crédito a corto plazo al Banco América SA de $6.800.

El Banco acuerda prestarle esa suma, que deberá devolverse en 4 cuotas cada 30 días y vencidas a una tasa nominal anual de interés con capitalización cada 30 días de 0,4867.

La cuota incluirá, además de intereses y amortizaciones, el IVA del 21% sobre los intereses y un seguro del 0,1% (más IVA) sobre el saldo adeudado.

Ud. debe:

a) Construir el cuadro de amortización.

b) Determinar la tasa de interés y la tasa de costo para el Señor Estrada.

Rta.: b) 0,04 p/30 días y 0,04961 p/30 días

a)

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Seguro	IVA	Cuota
1	6.800,00	7.072,00	1.601,33	272,00	6,80	58,55	1.938,68
2	5.198,67	5.406,61	1.665,39	207,95	5,20	44,76	1.923,29
3	3.533,28	3.674,61	1.732,00	141,33	3,53	30,42	1.907,29
4	1.801,28	1.873,33	1.801,28	72,05	1,80	15,51	1.890,64

Para poner en práctica todo lo estudiado en esta unidad y en la anterior, les proponemos resolver los siguientes ejercicios.

MÉTODOS DE CÁLCULO DONDE LA TASA ENUNCIADA NO ES LA DE LA FINANCIACIÓN

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 21

PRÉSTAMOS YA otorga préstamos personales a jubilados por $3.500 a pagar en 12 cuotas mensuales, iguales y vencidas de $353,97, utilizando el método directo (cargado) para determinar el valor de la cuota.

a) Calcular la tasa de interés enunciada en la operación.

b) Determinar la tasa de interés de la operación.

c) Indicar el Saldo adeudado al inicio del séptimo mes.

d) Construir el cuadro de amortización para los tres primeros meses.

Rta. : a) 0,0178 mensual b) 0,031119 mensual

c) $1.910,43 d)

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	3.500,00	3.608,92	245,05	108,92	353,97
2	3.254,95	3.356,24	252,68	101,29	353,97
3	3.002,27	3.095,69	260,54	93,43	353,97

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 22

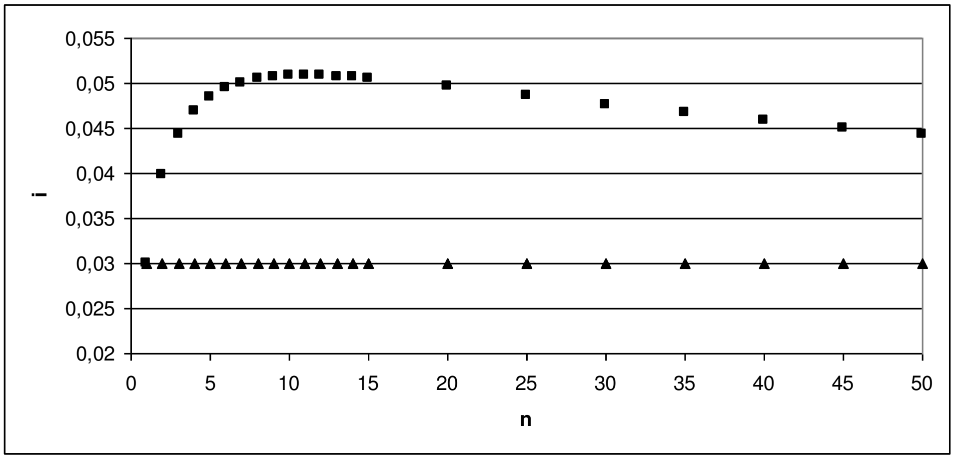
La Tabla que se observa a la derecha muestra las tasas de interés que efectivamente se obtienen utilizando el método directo o cargado.

La primera columna contiene la cantidad de cuotas; la segunda columna indica la tasa de interés enunciada de 0,03 para 60 días. La última columna muestra la evolución en el comportamiento de la tasa de interés para 60 días que efectivamente se cobra en cada caso.

Su tarea consiste en analizar el comportamiento de la tasa de interés realmente cobrada en la operación, indicando para qué cantidad de cuotas se produce la mayor distorsión.

Rta.: Para $n=1$, la tasa de interés enunciada y efectivamente cobrada es la misma, a medida que n aumenta la tasa de interés efectivamente cobrada es mayor, haciéndose máxima la diferencia para $n=11$, comenzando a descender. Cuando $n \to \infty$, la tasa de interés efectivamente cobrada tiende al valor de la tasa de interés enunciada. Puede observarse el comportamiento en el siguiente gráfico:

n	i_e	i
1	0,03	0,030000
2	0,03	0,039742
3	0,03	0,044358
4	0,03	0,046925
5	0,03	0,048472
6	0,03	0,049443
7	0,03	0,050060
8	0,03	0,050445
9	0,03	0,050672
10	0,03	0,050787
11	0,03	0,050822
12	0,03	0,050797
13	0,03	0,050728
14	0,03	0,050626
15	0,03	0,050498
20	0,03	0,049643
25	0,03	0,048656
30	0,03	0,047669
35	0,03	0,046727
40	0,03	0,045845
45	0,03	0,045025
50	0,03	0,044267
100	0,03	0,039140
500	0,03	0,032000
1000	0,03	0,031000



Ejercicio a resolver

EJERCICIO 23

Un comercio dedicado a la venta de electrodomésticos ofrece a la venta algunos de sus artículos en 10 cuotas mensuales y vencidas enunciando una TMD (tasa de interés mensual directa) de 0,01.

Un cliente consulta sobre un modelo de TV que tiene un precio de contado de $3.400.

Determinar:

a) El valor de la cuota.

b) El importe a abonar si el deudor quiere cancelar su deuda al momento de pagar la quinta cuota.

Rta. : a) $374 b) $2.148,58

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 24

MEGAHOGAR SA ofrece una heladera con la siguiente financiación: entrega inicial de $500 y el resto en 15 cuotas vencidas y cada 30 días de $203,20. La tasa de interés directa enunciada en la operación es de 0,018 para 30 días.

Indicar:

a) El precio de contado de la heladera.

b) La tasa de interés de la operación.

c) El valor de la nueva cuota, si el deudor propone, al pagar la segunda, reducir las cuotas faltantes a sólo 5.

Rta. : a) $2.900 b) 0,031481 para 30 días
c) $469,41

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 25

La siguiente muestra las tasas de interés que efectivamente se obtienen utilizando el método de interés descontado.

La primera columna contiene la cantidad de cuotas; la segunda columna indica la tasa de interés enunciada de 0,03 para 60 días. La última columna muestra la evolución en el comportamiento de la tasa de interés que efectivamente se cobra en cada caso.

Su tarea consiste en:

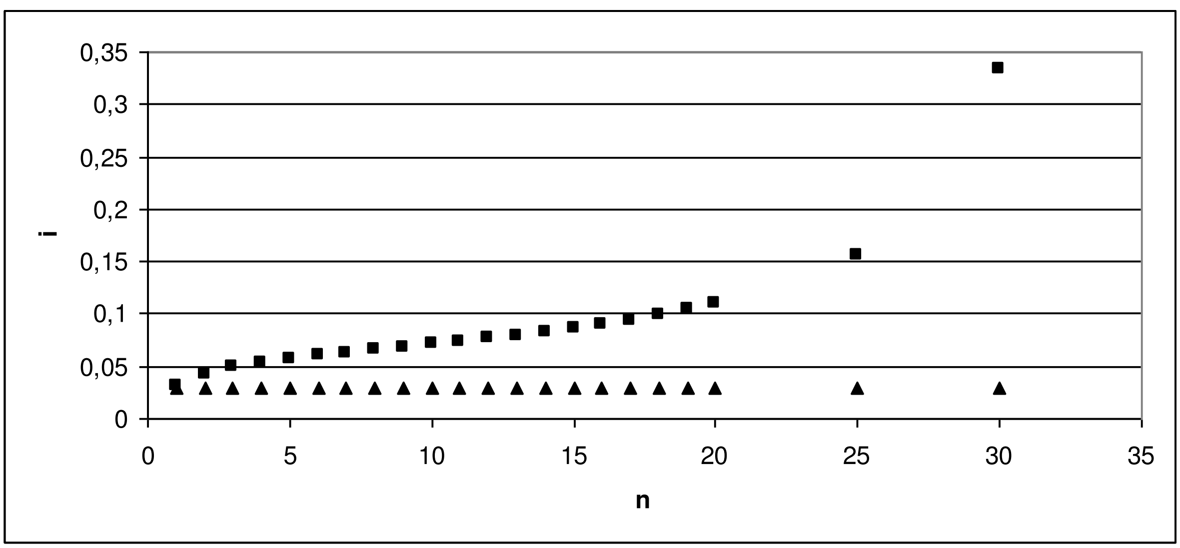
a) Analizar el comportamiento de la tasa de interés realmente cobrada en la operación, indicando para qué cantidad de cuotas se produce la mayor distorsión.

b) Comparar con los resultados que se observan en la tabla del ejercicio 5.

c) Indicar qué sucede si $n \geq 34$.

n	i_e	i
1	0,03	0,030928
2	0,03	0,042262
3	0,03	0,048680
4	0,03	0,053169
5	0,03	0,056739
6	0,03	0,059827
7	0,03	0,062659
8	0,03	0,065367
9	0,03	0,068037
10	0,03	0,070728
11	0,03	0,073491
12	0,03	0,076367
13	0,03	0,079398
14	0,03	0,082625
15	0,03	0,086093
16	0,03	0,089855
17	0,03	0,093971
18	0,03	0,098517
19	0,03	0,103586
20	0,03	0,109298
25	0,03	0,155705
30	0,03	0,333270

Rta.: a) Desde $n = 1$, la tasa de interés efectivamente cobrada es mayor a la tasa de interés enunciada y a medida que n aumenta la diferencia entre ambas es mayor, tal como puede observarse en el siguiente gráfico:



b) A diferencia del método cargado que presenta un n que hace que la distorsión sea máxima y para n mayores la diferencia disminuye, en el método de interés descontado, a medida que n aumenta, la distorsión también.
c) En el método de interés descontado, existe un valor de n que hace que el método sea inconsistente, ese valor n es el valor que hace que $(1-i_d.n)\leq 0$.
Para la tasa de interés enunciada de 0,03, esto ocurre cuando $n\geq 34$.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 26
SU DINERO YA! ofrece préstamos a jubilados y empleados a pagar en 6 cuotas cada 60 días. Enuncia en la operación una tasa de 0,032 para 60 días y aplica el método de interés descontado.
Juan Lozada se presenta en la entidad a solicitar un préstamo, y le informan que, de acuerdo al importe solicitado, la cuota que deberá pagar es $700.
A partir de la información suministrada, complete:

a)	Importe solicitado	
b)	Importe recibido por el solicitante	
c)	Tasa de interés de la operación	
d)	Porcentaje de la deuda amortizada con las primeras cuatro cuotas	

Rta. : a) $4.200 b) $3.393,60
c) 0,064537 p/60 días d) 62,42%

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 27
Julia González solicita un préstamo en CRÉDITO FÁCIL POR $6.000. La entidad le indica que deberá abonar cuotas de $400 vencidas y cada 30 días y que se aplica una tasa de interés descontado de 0,014 para 30 días.
Obtener:
a) El número de cuotas que deberá pagar.
b) El importe recibido.
c) La tasa de interés para 30 días cobrada en la operación.
Rta. : a) 15 b) $4.740
c) 0,031024 para 30 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 28
Una agencia de turismo ofrece un precio especial por temporada baja a Cuba, por U$S1.500. El importe puede ser financiado en 3, 6 ó 12 cuotas mensuales, iguales y vencidas. Para el cálculo de las cuotas, se agrega al precio de contado un 10%, y el importe obtenido se divide por el total de cuotas a pagar.
Determine la tasa de interés mensual de cada una de las alternativas de financiación.
Rta.: 0,04921 mensual; 0,027931 mensual y 0,01498 mensual

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 29

La venta de una computadora, cuyo importe de contado es de $4.500, se financia en 24 cuotas vencidas, mensuales e iguales, enunciándose una tasa de interés de 0,18 anual. Las cuotas se calculan anuales (dos en este caso), pero se pagarán cuotas iguales y mensuales que se obtienen de dividir por 12 la cuota anual.

Indicar:

a) El importe de la cuota mensual.

b) La tasa de interés mensual de la operación y su equivalente anual.

c) El importe de la cuota, si se calcula correctamente.

Rta.: a) $239,52 b) 0,020593 mensual y 0,27712 anual c) $221,77

EJERCICIO 30

Un empresario adquiere equipamiento para su planta de producción por $38.000, abonando ese importe en 15 cuotas mensuales e iguales. La tasa de interés mensual enunciada es 0,021 y las cuotas son calculadas vencidas, pero la primera se abona en el momento de la compra.

Indicar:

a) El valor de la cuota.

b) El importe financiado.

c) La tasa de interés de la operación.

d) El valor de la cuota, para que la tasa de interés enunciada sea la tasa de interés de la operación.

Rta.: a) $2.979,54 b) $35.020,46 c) 0,024228 mensual d) $2.918,25

VALUACIÓN DE OPERACIONES FINANCIERAS A UNA TASA DISTINTA A LA QUE ORIGINÓ LA OPERACIÓN.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 31

TRAJE SA, fabricante de indumentaria masculina, realiza una venta a uno de sus clientes minoristas para la próxima temporada por $65.000. Dicha compra se financia con la entrega de tres cheques diferidos: el primero por $20.000 y los otros dos de $26.000 cada uno. El primero vence a los 90 días, el segundo a los 120 días y el tercero a los 150 días de realizada la operación de compra

Faltando 20 días para el vencimiento del último cheque, existe la posibilidad de negociar dicho valor, aplicándose una tasa de interés de 0,034 para 30 días.

Responder:

a) ¿Cuál será el importe recibido si concreta la operación?

b) Si TRAJE SA pretende recibir $ 25.500 ¿cuál sería la tasa de interés de valuación para 30 días?

Rta.: a) $25.426,88 b) 0,02956 para 30 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 32

Una empresa otorga un crédito prendario por $40.000 como saldo de la venta de un rodado, aplicando una tasa nominal anual con capitalización cada 30 días de 0,37. El crédito se amortizará en cuotas cada 30 días, iguales y vencidas de $4.028,35 cada una.

Si se presenta la posibilidad de transferir el derecho a seguir cobrando las cuotas pendientes cuando han transcurrido 285 días, determinar el valor de la deuda y su descomposición en usufructo y nuda propiedad, a una tasa de valuación de 0,04 para 30 días.

Rta.: $V_p{}' = \$11.400,43$, $U_p{}' = \$668,20$ *y* $K_p{}' = \$10.732,23$

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 33

Una empresa adquiere una máquina por $20.500.-, realizando una entrega inicial de $4.500 y el resto se amortiza con el pago de 6 cuotas mensuales, iguales y vencidas aplicando a la operación un interés mensual cargado (directo) de 2,7%.

Determinar:

a) El importe a abonar al final del 4° mes para regularizar la deuda, si no se han pagado la 2° y la 3° cuotas.

b) El Usufructo y la Nuda Propiedad si al inicio del 5° mes se transfiere la deuda, siendo la tasa de interés pactada de 0,058 mensual

Rta.: a) $9.717,35 b) $U_p{}' = \$363,43$ *y* $K_p{}' = \$5.333,61$

EJERCICIO 34

Una entidad financiera otorga créditos personales presentando el recibo de sueldo. Para su amortización aplica el método de interés descontado en 8 cuotas mensuales y constantes; enunciando una tasa de 0,023 mensual

Para un importe solicitado de $4.800, completar:

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

a)
Tasa de interés de la operación

b)
Valor de la deuda cuando han transcurrido 5 meses y medio a la tasa de interés de valuación de 0,07 mensual

c)
Valor del Usufructo a la tasa de interés de valuación de 0,068 mensual, luego de pagadas 6 cuotas

d)
Valor de la Nuda Propiedad cuando falta medio mes para completarse el plazo de la operación, a la tasa de interés de valuación de 0,049 mensual

Rta.: a) 0,047539 mensual b) $1.628,77 c) $73,71 d) $559,23

CORRECCIÓN MONETARIA EN LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 35

El presupuesto nacional del año en curso incluye una pauta inflacionaria del 18% anual. Si hasta el mes de mayo (incluido) la inflación acumulada alcanza el 8,7%, ¿cuál debería ser la inflación mensual promedio del resto del año, para alcanzar el nivel inflacionario previsto?

Rta.: 1,18% promedio mensual

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 36

La Señora Marisa Rivera depositó el 1 de setiembre de 2.009 $12.500 a plazo fijo retirando al 1 de diciembre $12.781,25.

Obtener:

a) La tasa de interés de la operación.

b) La tasa de inflación para el plazo de la operación y la tasa de rendimiento para Marisa Rivera. (Utilice la tabla del IPC)

c) El capital final ajustado a moneda constante.

Rta.: a) 0,0225 para 91 días b) 0,023871 para 91 días y -0,0013392 para 91 días c) $12.483,26

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 37

Se coloca cierta suma de dinero por 60 días en un depósito a plazo fijo en el Banco de la Ciudad. La tasa de interés enunciada por la entidad fue de 0,10 nominal anual con capitalización cada 60 días.

Calcular:

a) La tasa de rendimiento de la operación si la inflación fue del 2,5% para todo el plazo de la operación.

b) La tasa de interés para 60 días que debería haber ofrecido el banco para que, dada la inflación del 2,5%, la tasa de rendimiento para el inversor sea de 0,01 para 60 días.

Rta.: a) -0,008353 p/60 días b) 0,03525 p/60 días.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 38

Complete el siguiente cuadro, a partir de la información suministrada:

	Tasa de interés	Tasa de inflación	Tasa de rendimiento
a)	0,09 para 180 días	0,09 anual	**p/ 180 días**
b)	**trimestral**	0,009 mensual	0,09 anual
c)	0,009 para 30 días	**anual**	0,009 para 30 días
d)	0,0009 diaria	0,009 para 30 días	**anual**

Rta.: a) 0,044647 p/180 días
b) 0,049615 trimestral c)0 d) 0,24526 anual

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 39

A partir de los siguientes datos de un préstamo:

V = $12.000
Cuatro cuotas bimestrales
i = 0,034 bimestral
Sistema alemán

Y las siguientes tasas de inflación mensuales:

Mes 1	0,0078	**Mes 5**	0,0088
Mes 2	0,0097	**Mes 6**	0,0107
Mes 3	0,0100	**Mes 7**	0,0086
Mes 4	0,0098	**Mes 8**	0,0092

Ud. debe construir el cuadro de amortización en moneda constante y a continuación, el cuadro de amortización ajustado al momento de pago de cada una de las cuotas.

Rta.:

Cuadro de amortización en moneda constante

Unidad de tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota
1	12.000	12.408	3.000	408	3.408
2	9.000	9.306	3.000	306	3.306
3	6.000	6.204	3.000	204	3.204
4	3.000	3.102	3.000	102	3.102

Cuadro de amortización ajustado a moneda corriente

Unidad De tiempo	Saldo al Inicio	Saldo al Final	Amortización	Interés	Cuota	Coeficiente de ajuste
1	12.000,00	12.626,08	3.052,73	415,17	3.467,90	1,0176
2	9.158,18	9.657,98	3.113,47	317,57	3.431,04	1,0378
3	6.226,94	6.564,82	3.174,48	215,86	3.390,34	1,0582
4	3.174,48	3.341,09	3.231,23	109,86	3.341,09	1,0771

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 40

La venta de un automóvil usado, cuyo precio de contado es de $40.000, se financia de la siguiente manera:
Entrega inicial de $15.000 y el resto en 12 cuotas mensuales, iguales, vencidas y diferidas de $2.727,43. La tasa de interés mensual es 0,024.
Indicar:
a) La cantidad de meses de diferimiento.
b) El valor de la tercera cuota y sus componentes si se ajusta por inflación, y la tasa promedio mensual de inflación es 0,018.

Rta.: a) 5 b) Cuota: $3.145,83;
Interés: $664,21 y Amortización: $2.481,63

OPERACIONES DE LEASING

EXPLICANDO
CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 41

Un productor agropecuario decide modernizar el equipamiento de su establecimiento a través de leasing financiero. El precio de contado asciende a $120.000 y las condiciones pactadas establecen el pago de un canon trimestral y vencido, durante 48 meses, a una tasa de interés trimestral de 0,036. La opción de compra a ejercerse en el momento del pago del último canon, se fija en un 7,5% del precio de contado.

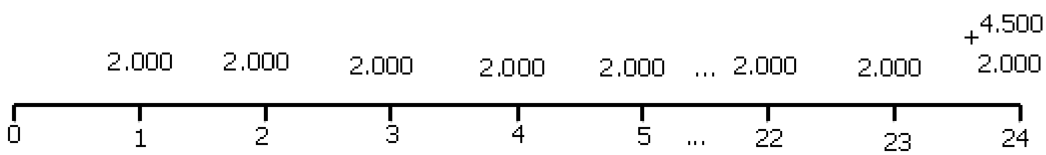
Ud. debe calcular el importe del canon trimestral que deberá abonar el productor.

Rta.: $9.571,08

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 42

La siguiente línea de tiempo refleja los pagos realizados para un contrato de leasing. El precio de contado del bien objeto del contrato es de $45.000.



Determinar la tasa de interés bimestral de la operación.

Rta.: 0,011775 bimestral

INCORPORACIÓN DE GASTOS, IMPUESTOS Y OTROS CONCEPTOS EN LA AMORTIZACIÓN DE DEUDAS.

EJERCICIO 43

Un empresario de la construcción obtiene un préstamo prendario en el Banco Privado SA, por $130.000 a devolver en 8 cuotas vencidas y cada 90 días, calculadas con el sistema alemán y una tasa anual de 0,234.

El banco incluye los siguientes costos en cada una de las cuotas:

Cuota	Gastos Prendarios	Seguro
1	575	240
2	150	220
3	150	200
4	150	180
5	125	160
6	125	140
7	100	120
8	100	100

Además se deduce del importe del préstamo $1.300 en concepto de gastos de otorgamiento.
Calcular:
a) El valor de cada cuota a pagar.
b) La tasa de costo para 90 días y su equivalente anual.

Rta.: a)

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
23.982,64	22.672,94	21.788,23	20.903,53	19.993,82	19.109,13	18.199,42	17.314,71

b) 0,060695 p/90 días y 0,26994 anual

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 44
Observe la información que se presenta a continuación, e indique:
a) Tasa de interés de la operación.
b) Unidad de tiempo de la operación.
c) Tasa de costo de la operación.

Cuota Promedio:
$ 1022,41

- Monto del préstamo: 10.000
- Moneda: Pesos
- Tipo de préstamo: Personal
- Plazo: 12 meses
- Tipo de Tasa: Fija
- T.N.A: 27,50%
- Comisión Administrativa: 3,00% (mensual sobre el valor de la cuota)
- Seguro de Vida: Bonificado en un 100%
- Sistema de Amortización: Francés
- C.F.T.T.E.A.: Costo Financiero Total expresado en Tasa Efectiva Anual, I.V.A. incluido

Nº	SALDO DE CAPITAL	INTERÉS	AMORT. DE CAPITAL	CUOTA PURA	SEGURO DE VIDA	COMISIÓN	IVA	A PAGAR
Año 1								
1	10000,00	226,03	734,75	960,78	0,00	28,82	53,52	1043,12
2	9265,25	209,42	751,36	960,78	0,00	28,82	50,03	1039,63
3	8513,90	192,44	768,34	960,78	0,00	28,82	46,46	1036,06
4	7745,56	175,07	785,70	960,78	0,00	28,82	42,82	1032,42
5	6959,85	157,31	803,46	960,78	0,00	28,82	39,09	1028,69
6	6156,39	139,15	821,62	960,78	0,00	28,82	35,27	1024,87
7	5334,76	120,58	840,20	960,78	0,00	28,82	31,37	1020,97
8	4494,57	101,59	859,19	960,78	0,00	28,82	27,39	1016,99
9	3635,38	82,17	878,61	960,78	0,00	28,82	23,31	1012,91
10	2756,78	62,31	898,46	960,78	0,00	28,82	19,14	1008,74
11	1858,31	42,00	918,77	960,78	0,00	28,82	14,87	1004,47
12	939,54	21,24	939,54	960,78	0,00	28,82	10,51	1000,11

Rta.:a) 30 días b) 0,022603 p/30 días
c) 0,033204 p/30 días

INTEGRANDO IDEAS

A lo largo de esta unidad hemos enriquecido nuestros conocimientos a los fines de realizar un estudio más integral de las operaciones financieras, incorporando el efecto de la inflación y el impacto de gastos e impuestos sobre el costo y el rendimiento.
Para poder medir el impacto de la pérdida del poder adquisitivo de la moneda, aprendimos a identificar los índices y calcular la tasa de inflación.
También analizamos diferentes métodos de amortización donde la tasa de interés enunciada no es la efectivamente cobrada y aprendimos cómo valuar una operación financiera en un momento cualquiera a diferentes tasas de interés.
Finalmente, estamos en condiciones de realizar ajuste a moneda corriente de los componentes del cuadro de amortización de una deuda.

DIALGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:

CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Primera Parte. Córdoba Fac. de Cs. Económicas U.N.C. (2001).

YASUKAWA, Alberto M. *Matemática Financiera.* Córdoba. LDM Editorial (2007).

U7

BLOQUE 3

UNIDAD 7

APLICACIÓN DE HERRAMIENTAS FINANCIERAS EN LAS DECISIONES DE INVERSIÓN Y FINANCIAMIENTO

UNIDAD 7:

Aplicación de Herramientas Financieras en las Decisiones de Inversión y Financiamiento

CONTENIDOS

Proyectos de inversión: elementos. Rentabilidad. Criterios que consideran el valor del capital en el tiempo para la aceptación o rechazo de los proyectos de inversión. Período de Recupero de la Inversión Inicial. Valor capital (VC) o valor actual Neto (VAN). Tasa interna de rendimiento (TIR). Consistencia de la Tasa Interna de Rendimiento. Aceptación o rechazo de un proyecto de Inversión. Orden de selección de los proyectos aceptados.
Aplicación a Títulos de Deuda (Empréstito). Introducción, elementos. Evaluación de títulos de deuda desde el punto de vista del emisor y del inversor. Paridad. TIR.

OBJETIVOS

- Conocer los criterios de análisis en las decisiones de inversión y financiamiento referidas a proyectos de inversión y a títulos de deuda.
- Diferenciar la utilidad de cada criterio de selección de proyecto de inversión, observando sus particularidades.
- Realizar el análisis comparativo entre distintos proyectos inversión.
- Diferenciar en el análisis de títulos de deuda, la utilidad de las distintas herramientas
- Integrar los conocimientos de las herramientas financieras en el análisis de las decisiones de inversión y financiamiento, verificando e interpretando los valores numéricos en aplicaciones y/o publicaciones en medios especializados

AULA VIRTUAL
SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **presentación** de la **Unidad 7**. Allí los profesores proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de los temas abordados en la unidad.

RECURSOS A UTILIZAR EN LA UNIDAD 6

- Material Teórico - Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios
- Videos Tutoriales sobre planilla de cálculo
-Instructivo calculadora financiera

PRESENTACIÓN

Podemos indicar que invertir consiste en sacrificar un consumo actual aplicando recursos en la adquisición de activos reales o financieros aptos para generar un beneficio en el futuro. Es decir, al invertir, estaremos intercambiando un capital presente por otro u otros en el futuro con la expectativa de que esos valores futuros sean mayores a la suma invertida.
Al momento de invertir, será necesario evaluar que los beneficios que se van a obtener sean los esperados, analizando detalladamente todo lo referente al desembolso a realizar.
Por ello, aplicando modelos financieros que hemos estudiado en las unidades anteriores, analizaremos una serie de indicadores que nos permitirán contar con información cuantitativa para tomar decisiones de inversión.

En la siguiente imagen podemos observar las principales características de un título de deuda emitido por la municipalidad de la ciudad de Córdoba:

Municipalidad de Córdoba
Bonos de Deuda 2013 Serie I
Monto y Moneda de Emisión: hasta U$S35.0000.000
Fecha de Emisión: 16 de Octubre de 2.013
Fecha de Vencimiento: a los 48 meses contados desde la fecha de intereses
Moneda de Emisión: Dólares Estadounidenses
Moneda de Pago: El capital y los intereses se abonarán en pesos al tipo de cambio aplicable
Amortización: los pagos de capital serán realizados trimestralmente a partir del mes 12, exclusive, contado desde la fecha de emisión, en 11 pagos del 8,33% del valor nominal y el último del 8,37% del valor nominal.
Intereses: devengarán desde la fecha de emisión una tasa fija anual a licitar, pagadera en forma trimestral.

Proyectos de Inversión. Concepto. Clasificación. Elementos.

Podemos encontrar tantas definiciones de Proyecto de Inversión como autores han abordado este tema.
En la presentación indicamos que invertir consiste en sacrificar un consumo presente adquiriendo bienes reales o financieros con la expectativa de obtener alguna compensación o satisfacción futura. Por otra parte, el término “proyecto” generalmente es concebido como un plan de acción, una ruta o un camino pensado hacia el futuro, con el fin de alcanzar algún objetivo.
Considerando estos aspectos, podemos citar como definición de Proyecto de Inversión la propuesta por Ángel Ginestar:

“Proyecto es un emprendimiento productivo-financiero concebido como una unidad de administración, cuyo objetivo es proveer bienes para satisfacer necesidades de ciertas personas localizadas en un contexto determinado, dado un espacio y un tiempo referencial, en condiciones de escasez, con orientación comercial o social, que puede ser privado o estatal”[1].

Esta definición nos ayuda a entender las múltiples implicancias que tiene el desarrollo y evaluación de un proyecto, tales como: la necesidad de realizar un trabajo multidisciplinario y considerar el carácter sistémico del mismo.
Acotaremos nuestro estudio al análisis de los indicadores que nos permitan evaluar la conveniencia económica-financiera de un proyecto de inversión.

A los fines de completar nuestra introducción acerca de lo que consideramos un proyecto de inversión, presentamos algunas posibilidades de clasificación:

- Proyectos de inversión reales: aquellos en donde el objetivo está ligado a la producción de bienes y servicios (desarrollar un nuevo producto, apertura de un nuevo punto de ventas, etc).

[1] Ángel Ginestar, Pautas para identificar, formular y evaluar proyectos, Ediciones Macchi. 2004

- Proyectos de inversión financieros: en donde el objeto es adquirir activos financieros (títulos públicos, obligaciones negociables, etc.).

También podemos diferenciar:
- Proyectos de inversión que generan una nueva empresa.
- Proyectos de inversión en empresas en marcha.

Otra forma de clasificarlos:
- Proyectos independientes: cuando su realización no depende de la ejecución de otros proyectos.
- Proyectos dependientes: cuando su realización está sometida o relacionada con la ejecución de otro/s proyectos.
- Proyectos mutuamente excluyentes: cuando se trata de proyectos que compiten entre sí, ya que la ejecución de uno hace innecesario al otro.

Existen otras clasificaciones, por ejemplo:
Según el sector de la economía: agropecuario, industrial, minero, comercial, etc.
Según el objetivo: de innovación, modernización, reemplazo, etc.
Según el tipo de bienes a producir: de consumo o de capital.

Es interesante también mencionar que los aspectos a analizar, al momento de la elaboración de un proyecto de inversión, se suelen agrupar en los siguientes estudios:

- Estudio de Mercado
- Estudio Técnico
- Estudio Organizacional
- Estudio Legal
- Estudio Financiero

El estudio financiero reunirá toda la información monetaria generada por el resto de los estudios y elaborará el Flujo de Fondos del proyecto.
Además recopilará información, evaluará las distintas alternativas para financiar el proyecto y aplicará los criterios de evaluación.

A los fines de evaluar un proyecto de inversión a través de los indicadores que desarrollaremos, es necesario identificar los siguientes elementos:

- La duración o plazo del proyecto, denominado también "horizonte del proyecto" que nos indica el tiempo a transcurrir entre el inicio y finalización del mismo. Este plazo será dividido en n unidades de tiempo igualmente espaciadas.

- El flujo de fondos o flujos netos de caja, diferenciando:

a) La inversión o desembolso inicial, que representa el monto a erogar al comienzo para dotar al proyecto de su capacidad productiva. También se puede denominar "tamaño de la inversión" y la simbolizaremos a_0.
Como representa una salida de dinero, su valor es negativo:

$$a_0 < 0$$

b) Los flujos posteriores a la inversión inicial que corresponden a cada una de las unidades de tiempo en que se divide el horizonte del proyecto y que simbolizaremos con a_t, donde $t = 1, 2, 3, \ldots, n$. Cada uno de estos flujos se obtiene de la diferencia entre los ingresos y egresos de fondos que se producen a lo largo de cada unidad de tiempo:

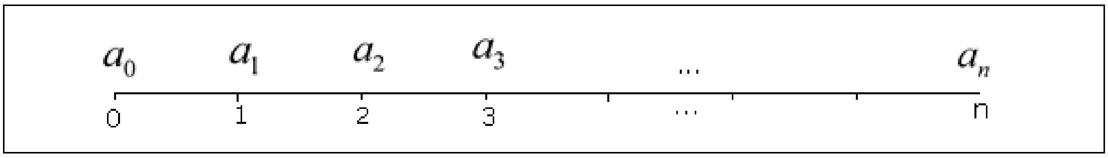


Gráfico 1

En el Gráfico 1, se observan los flujos netos de caja de un proyecto a los largo del horizonte económico.
Los flujos netos de caja, posteriores a la inversión, pueden ser positivos, negativos o nulos, salvo el último que deberá ser distinto de cero $(a_n \neq 0)$.

- Tasa de costo de capital, que definimos como "el costo por unidad de capital invertido por unidad de tiempo", y representa el costo de oportunidad de invertir a_0 en el proyecto. Se la suele denominar tasa de rentabilidad mínima esperada y existen distintas metodologías para su determinación. A los fines de nuestro análisis solo representará un dato a considerar debido a que, en asignaturas posteriores, se profundizará acerca de cómo determinar esta tasa, que simbolizaremos con k, siendo su valor positivo:

$$k > 0$$

En resumen, hemos definido:
a_0 = inversión inicial
a_t = flujos de fondos
k = tasa de costo de capital

Criterios de Evaluación de Proyectos de Inversión

Una vez elaborado el Flujo de Fondos, el siguiente paso consiste en realizar la evaluación del proyecto de inversión. Podemos identificar tres tipos de evaluación:

Evaluación Económica: consiste en determinar la capacidad del proyecto de generar beneficios independientemente de la forma en que se financia la inversión. Se considera que todo el capital necesario para invertir en el proyecto es propio y el flujo de fondos es denominado operativo o económico.

Evaluación Financiera: se realiza en base al flujo de fondos que se obtiene por agregar al operativo el efecto de financiar total o parcialmente el proyecto a través de fondos que no pertenecen al inversor. De esta manera se obtiene el flujo de fondos financiero.
Las evaluaciones económica y financiera suelen denominarse también "evaluación privada" de un proyecto.

Evaluación Social: consiste en agregar a la evaluación los efectos que el proyecto de inversión produce sobre la sociedad en que se inserta.

Indicamos anteriormente que, para evaluar el proyecto debemos contar con el flujo de fondos (o flujos netos de caja) para poder aplicar los criterios de evaluación cuantitativos que desarrollaremos a continuación.
Cada uno de los flujos se han obtenido de restarle a todos los ingresos proyectados los egresos previstos, por lo tanto, los flujos resultantes deberán alcanzar para recuperar la inversión inicial, cubrir el costo de oportunidad de invertir a_0 en el proyecto (y no en otra alternativa) y además, obtener un beneficio. Es por ello, que los criterios que analizaremos contemplan estos aspectos y en su cálculo observaremos que deducirán la inversión inicial, considerarán el costo de oportunidad del capital inmovilizado por el tiempo previsto (por eso se afirma que estos criterios consideran el valor del capital en el tiempo, postulado fundamental del campo financiero) y nos indicarán si el proyecto debe aceptarse o no, de acuerdo a si podrá generar beneficios.

Valor Actual Neto

El criterio del Valor Actual Neto (VAN), denominado también Valor Capital (VC) o Valor Presente Neto (VPN) *mide, en el momento 0, la ganancia (o pérdida) que el proyecto genera al inversor*.
El VAN se obtiene de la suma de los valores de los flujos netos de caja actualizados a la tasa de costo de capital. En símbolos:

VAN = Valor Actual Neto

$$VAN = a_0 + \frac{a_1}{(1+k)} + \frac{a_2}{(1+k)^2} + \frac{a_3}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+k)^n}$$

También:

$$VAN = a_0 + a_1 v^1 + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \ldots + a_n v^n$$

$$\boxed{VAN = a_0 + \sum_{t=1}^{n} a_t v^t = \sum_{t=0}^{n} a_t v^t}$$

Donde $v = \dfrac{1}{1+k}$

Si los flujos netos de caja son iguales:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$$

El VAN es:

$$VAN = a_0 + a.a_{\overline{n|}k}$$

Y si, además de iguales, son infinitos:

$$VAN = a_0 + a.a_{\overline{\infty|}k} = a_0 + \frac{a}{k}$$

La fórmula general de cálculo del VAN nos permite observar que: al sumar la inversión inicial (recordemos que es un valor negativo) estamos considerando el recupero de dicha inversión y al actualizar los flujos netos de caja, de acuerdo a su distancia respecto del momento cero, disminuimos los flujos considerando el valor del capital en el tiempo.

Los resultados posibles del VAN son:

$VAN > 0$	El proyecto se acepta, ya que se cubre la inversión inicial y el costo del capital invertido y se obtiene una ganancia por el valor del VAN.
$VAN < 0$	El proyecto se rechaza, ya que no cubre toda la inversión inicial ni el costo del capital invertido, arrojando una pérdida por el valor del VAN.
$VAN = 0$	El proyecto es indiferente o marginal, se cubre exactamente la inversión inicial y el costo del capital invertido, sin generar ganancias ni provocar pérdidas.

Cuanto más alto sea el valor del VAN mayor es la ganancia obtenida, por lo tanto, al comparar entre distintos proyectos con VAN positivos, elegiremos aquel de importe superior.

Es importante mencionar que existe una relación inversa entre el VAN y k, a medida que aumenta la tasa de costo de capital, el valor actual neto disminuye:

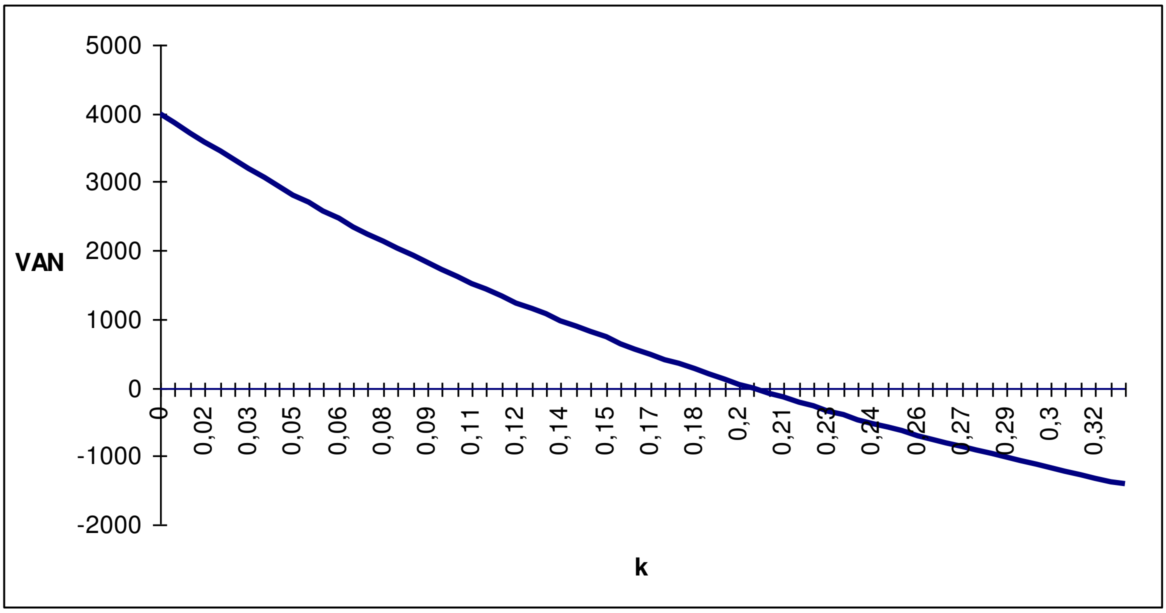


Gráfico 2

En el Gráfico 2, observamos que a medida que el valor de k crece, el valor del VAN decrece. Si comenzamos con $k = 0$:

$$VAN = a_0 + \frac{a_1}{(1+0)} + \frac{a_2}{(1+0)^2} + \frac{a_3}{(1+0)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+0)^n}$$

$$VAN = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

El valor del VAN es la suma de los flujos netos de caja en sus valores originales. A medida que k crece, el VAN disminuye hasta que, para un determinado valor de la tasa de costo capital, se anula y a partir de allí será negativo.
Esto ocurre debido a que, como aumenta k, los flujos netos de caja deben cubrir mayor costo de oportunidad, obteniéndose una ganancia cada vez inferior, hasta que esta se anula y se sufren pérdidas.

Tasa Interna de Rendimiento

La tasa interna de rendimiento, conocida también como tasa interna de retorno, y que simbolizaremos con r, se define como *el rendimiento por unidad de capital invertido por unidad de tiempo*. Su valor se obtiene del cálculo de la tasa que iguala la inversión inicial al valor actual del flujo de fondos, o de manera equivalente, la que hace que el VAN sea igual a cero:

$$\boxed{-a_0 = \frac{a_1}{(1+r)} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \frac{a_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+r)^n}}$$

$$0 = a_0 + \frac{a_1}{(1+r)} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \frac{a_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+r)^n}$$

O:

$$0 = a_0 + a_1 v^1 + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \ldots + a_n v^n$$

$$0 = a_0 + \sum_{t=1}^{n} a_t v^t = \sum_{t=0}^{n} a_t v^t$$

Donde $v = \frac{1}{1+r}$

Si los flujos netos de caja son iguales:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$$

La TIR se obtiene:

$$0 = a_0 + a.a_{\overline{n|}r}$$

Y si, además de iguales, son infinitos:

$$0 = a_0 + a.a_{\overline{\infty|}r} = a_0 + \frac{a}{r}$$

Despejando:

$$r = \frac{a}{-a_0}$$

Indicamos al analizar el VAN que su valor disminuye a medida que k aumenta, reflejando el mayor costo de oportunidad a cubrir hasta que el VAN se anula, por lo tanto, esa tasa nos estará indicando hasta qué valor el proyecto puede soportar para no tener pérdidas, determinándonos, justamente la tasa de rentabilidad.

Para decidir según este criterio es necesario comparar el resultado con la tasa de costo de capital, por lo tanto puede suceder que:

$TIR(r) > k$	El proyecto se acepta, ya que la tasa de rendimiento obtenido por el proyecto es mayor que su tasa de costo de capital.
$TIR(r) < k$	El proyecto se rechaza, ya que el rendimiento esperado del proyecto es menor que su tasa de costo de capital.
$TIR(r) = k$	El proyecto es indiferente o marginal, el rendimiento obtenido es igual al costo del capital invertido.

Cuanto más alto sea el valor de la TIR mayor es el rendimiento esperado, por lo tanto, al comparar entre distintos proyectos con $TIR > k$, elegiremos aquel de r superior.

Período de Recupero del Capital Invertido

Este criterio nos mide *el tiempo necesario para cubrir la inversión inicial del proyecto con el valor actualizado de los flujos netos de caja* o también, *la cantidad de flujos netos de caja actualizados necesarios para cubrir el valor de la inversión inicial.*

Para determinar el período de recupero de la inversión inicial, que simbolizaremos PR, es necesario ir actualizando cada uno de los flujos netos de caja al momento 0 con la tasa de costo de capital.

PR = período de recupero de la inversión inicial

Por lo tanto haremos lo siguiente:

$$a_1' = \frac{a_1}{(1+k)} = a_1 v^1$$

El importe a_1' representa el valor actual del flujo neto de caja de la primera unidad de tiempo actualizado al momento 0, a la tasa k.
Si:

$$a_1' < -a_0$$

significará que con el flujo actualizado de la primera unidad de tiempo no se cubre la inversión inicial y deberemos agregar el flujo de la unidad de tiempo siguiente:

$$a_2' = \frac{a_1}{(1+k)} + \frac{a_2}{(1+k)^2} = a_1 v^1 + a_2 v^2$$

donde $a_2^{'}$ constituye la suma de los valores actuales de los flujos netos de caja de las dos primeras unidades de tiempo. Si:

$$a_2^{'} < -a_0$$

debemos actualizar el flujo neto de caja siguiente, es decir, el tercero:

$$a_3^{'} = a_1 v^1 + a_2 v^2 + a_3 v^3$$

De la misma manera continuamos hasta llegar a la unidad de tiempo $r -$ ésima:

$$a_r^{'} = a_1 v^1 + a_2 v^2 + a_3 v^3 + ... + a_r v^r$$

$a_r^{'}$ es la suma de los valores actuales de los flujos netos de caja de las primeras r unidades de tiempo, a la tasa de costo de capital.
Si:

$$a_r^{'} = -a_0$$

Podemos afirmar que la inversión inicial se recupera en la unidad de tiempo r :

$$PR = r$$

Pero si ocurre que:

$$a_r^{'} < -a_0$$

y:

$$a_{r+1}^{'} > -a_0$$

donde:

$$a_{r+1}^{'} = a_1 v^1 + a_2 v^2 + a_3 v^3 + ... + a_r v^r + a_{r+1} v^{r+1}$$

En esta situación, con $a_r^{'}$ no se alcanza a cubrir la inversión inicial, pero $a_{r+1}^{'}$ supera ese valor, el período de recupero será r más una fracción de la unidad de tiempo $r+1$:

$$PR = r + f$$

En estos casos podemos indicar que la inversión inicial se recupera durante la unidad de tiempo $r+1$, o precisar el momento de la unidad de tiempo $r+1$ en el cual se cubre de manera completa el desembolso inicial.
Entonces:

$$a_r^{'} < -a_0 < a_{r+1}^{'}$$

$$r \ < \ r + f < \ r + 1$$

Si despejamos f :

$$0 \ < \ f < \ 1$$

Planteamos las diferencias en unidades de tiempo entre:

$$\begin{aligned} a'_{r+1} - a'_r &\rightarrow 1 \\ -a_0 - a'_r &\rightarrow f \end{aligned}$$

Resolvemos:

$$f = \frac{-a_0 - a'_r}{a'_{r+1} - a'_r}$$

Indicamos previamente que:

$$a'_r = a_1 v^1 + a_2 v^2 + a_3 v^3 + ... + a_r v^r$$

$$a'_{r+1} = a_1 v^1 + a_2 v^2 + a_3 v^3 + ... + a_r v^r + a_{r+1} v^{r+1}$$

La diferencia entre ambos es:

$$a'_{r+1} - a'_r = a_{r+1} v^{r+1}$$

Remplazando:

$$f = \frac{-a_0 - a'_r}{a_{r+1} v^{r+1}}$$

Finalmente:

$$\boxed{PR = r + f = r + \frac{-a_0 - a'_r}{a_{r+1} v^{r+1}}}$$

Al obtener la fracción a través de la fórmula indicada estamos suponiendo que el flujo neto de caja de la unidad de tiempo $r+1$ se distribuye de manera homogénea a lo largo de dicha unidad de tiempo.

En general, se considera que el criterio del período de recupero evalúa la liquidez de un proyecto al decirnos qué tan rápido puede recuperarse la inversión inicial.

Los resultados posibles del período de recupero de la inversión inicial son:

$PR < n$	El proyecto recupera la inversión inicial antes de finalizar el proyecto y este será aceptado.
No recupera	En este caso la suma de los valores actuales de los flujos netos de caja no logra alcanzar el monto de la inversión inicial, por lo tanto, el proyecto se rechaza.
$PR = n$	En este caso, el valor actual de los flujos netos de caja alcanza exactamente el valor de la inversión inicial. Se dice que el proyecto es marginal o indiferente

Si hay que elegir entre varios proyectos cuyo $PR < n$, se elegirá aquel cuyo período de recupero sea menor, porque indicará que se alcanza a cubrir más rápidamente la inversión inicial.
La principal crítica a este criterio es que sólo considera los flujos netos de caja hasta que se logra cubrir la inversión Inicial, sin tener en cuenta el valor que puedan tener los flujos siguientes. Puede suceder que se prefiera un proyecto que recupere antes la inversión inicial que otro que tarde más en cubrirla, pero con rendimiento mayor. Se recomienda entonces, que según cuál sea el objetivo, se aplique acompañando a los otros dos criterios analizados.

Ejemplo 7.1
La siguiente tabla nos indica los valores que componen el flujo de fondos del proyecto de inversión a evaluar:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
-6000	1000	2000	4000	3000

Los flujos netos de caja presentados son anuales y consideraremos una tasa de costo de capital de 0,15 anual.

Calcularemos en primer lugar el VAN:

$$VAN = -6.000 + \frac{1.000}{(1+0,15)} + \frac{2.000}{(1+0,15)^2} + \frac{4.000}{(1+0,15)^3} + \frac{3.000}{(1+0,15)^4}$$

$$VAN = -6.000 + 869,57 + 1.512,29 + 2.630,06 + 1.715,26$$

$$VAN = 727,18$$

$VAN > 0$, el proyecto se acepta.

Determinaremos la TIR:

$$0 = -6.000 + \frac{1.000}{(1+r)} + \frac{2.000}{(1+r)^2} + \frac{4.000}{(1+r)^3} + \frac{3.000}{(1+r)^4}$$

$$r = 0,1988\ anual$$

$r > k,\ \ 0,1988 > 0,15$, el proyecto se acepta.

Por último, el período de recupero de la inversión inicial:

$$a_1^{'} = \frac{1.000}{(1+0,15)} = 869,57$$

$$a_1^{'} < 6.000$$

$$a_2^{'} = \frac{1.000}{(1+0,15)} + \frac{2.000}{(1+0,15)^2} = 869,57 + 1.512,29 = 2.381,86$$

$$a_2^{'} < 6.000$$

$$a_3^{'} = \frac{1.000}{(1+0,15)} + \frac{2.000}{(1+0,15)^2} + \frac{4.000}{(1+0,15)^3} = 869,57 + 1.512,29 + 2.630,06 = 5.011,92$$

$$a_3^{'} < 6.000$$

$$a_4^{'} = \frac{1.000}{(1+0,15)} + \frac{2.000}{(1+0,15)^2} + \frac{4.000}{(1+0,15)^3} + \frac{3.000}{(1+0,15)^4} = 6.727,18$$

$$a_4^{'} > 6.000$$

Por lo tanto:

$$PR = 3 + f$$

y :

$$f = \frac{6.000 - 5.011,92}{1.715,26} = 0,576$$

$$PR = 3,576$$

Si deseáramos expresar este resultado en tiempo:

$$0,576x365 \cong 210$$

Lo que resulta tres años y 210 días (aproximadamente)

$PR < n, \quad 3,576 < 4$, el proyecto se acepta.

Puede observarse que los tres criterios son coincidentes para aceptar el proyecto analizado.

Relación entre los criterios de evaluación VAN, TIR y PR en la aceptación o no de un proyecto de inversión.

Al aplicar los tres criterios de evaluación a un proyecto de inversión y, considerando una determinada tasa de costo de capital, coincidirán en aceptarlo o rechazarlo.
Al analizar el VAN y el PR, podemos notar que se actualizan los flujos netos de caja de la misma manera y a la misma tasa de interés (k), en el primero para ver si el proyecto aporta beneficios y en el segundo para determinar el momento de recupero, pero en ambos casos, para que el proyecto se acepte, deberá superarse el valor de la inversión inicial.

También afirmamos que la TIR es la tasa que hace que el VAN sea cero, por lo tanto cuando el proyecto arroje un VAN positivo, la tasa que hará que el VAN sea igual a cero, será mayor, es decir, la TIR será mayor que k .
En resumen, podemos afirmar que si:

Situación 1:

$$VAN > 0 \qquad TIR > k \qquad PR < n$$

El proyecto se acepta

Situación 2:

$$VAN = 0 \qquad TIR = k \qquad PR = n$$

El proyecto es indiferente

Situación 3:

$$VAN < 0 \qquad TIR < k \qquad No\ recupera$$

El proyecto se rechaza

Los tres criterios coinciden en aceptar o rechazar un proyecto de inversión. Más adelante veremos que algo distinto sucede cuando tenemos que ordenar varios proyectos ya aceptados, del más al menos conveniente , debido a que los criterios no siempre serán coincidentes.

Les proponemos ahora, resolver los siguientes ejercicios:

EXPLICANDO COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrollados los procedimientos para la resoluciones de estos ejercicios, haciendo uso de algunas funciones de la **calculadora financiera.**

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 1
Se está proyectando invertir \$40.000 en un emprendimiento, el cual producirá ingresos netos de \$10.000 en el primer año, \$20.000 en el segundo año y \$30.000 en el tercero. El costo del capital estimado es el 12% anual. Calcule el Período de Recupero, VAN y TIR e indique si la inversión debería realizarse.

Rta: 2,71 años; \$6.225,86; 0,1944 anual.
Sí conviene

EJERCICIO 2
Dados los siguientes proyectos:

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Proyecto A	-5.000	1.800	1.800	1.800	1.800	1.800
Proyecto B	-2.000	1.000	1.000	4.000	1.000	1.000
Proyecto C	-3.000	1.000	1.000	0	1.000	1.000

Si la tasa de costo de capital es el 0,15 anual, responda:
a) ¿Qué proyectos tienen un VAN positivo?
b) Calcule el período de recupero de cada proyecto.
c) ¿Qué proyectos aceptaría la empresa que utilice el criterio del período de recupero si el período máximo fuese de 3 años?

Rta: a) \$1.033,88 (A); \$3.324,70 (B); -\$305,36 (C);
b) 3,86 años (A); 2,14 años (B); No recupera (C)

c) Proyecto B.

EXPLICANDO
COMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios utilizando las funciones financieras de la **planilla de cálculo**. Les sugerimos consultarlas una vez que hayan intentado resolverlos.

EJERCICIO 3
Dados los siguientes proyectos:

	Año 0	Año 1	Año 2
Proyecto X	-4.000	2.410	2.930
Proyecto Y	-2.000	1.310	1.720

El costo del capital es del 13% anual. Utilice el criterio TIR para determinar qué proyecto o proyectos deberían ser aceptados si:
a) pueden emprenderse ambos;
b) sólo uno puede emprenderse, por ser mutuamente excluyentes.

Rta: *a) ambos proyectos; b) proyecto Y*
0,2086 anual (proyecto X); 0,3110 anual (proyecto Y).

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 4
Una empresa farmacéutica está considerando ampliar sus equipos e instalaciones. Existen dos opciones: el equipo M y el equipo P. La tasa de costo de capital estimada es del 0,12 semestral y los flujos netos de caja proyectados son:

	Inversión	Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3
Proyecto M	-10.000	4.000	4.000	5.200
Proyecto P	-10.000	3.000	3.000	6.900

a) Calcule el VAN de cada proyecto.
b) ¿Cuál es la TIR de cada proyecto?
c) ¿Qué proyecto debería ser aceptado?

Rta: a) $461,46 (M); -$18,56 (P);
b) 0,1455 semestral (M); 0,119 semestral (P); c) Proyecto M.

Inconsistencia de la TIR

El cálculo de la TIR presenta algunos problemas que es necesario considerar desde el punto de vista matemático y financiero.
En general, los proyectos de inversión consisten en uno o varios desembolsos iniciales, seguidos por una serie de flujos netos positivos. La existencia de un flujo de fondos con estas características facilita el proceso de toma de decisiones basándonos en el criterio de la TIR, pero no todas las propuestas de inversión generan flujos de fondos de este tipo.

Si observamos nuevamente la fórmula de cálculo de la TIR:

$$0 = a_0 + \frac{a_1}{(1+r)} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \frac{a_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+r)^n}$$

se trata de una ecuación de grado n, que admite n soluciones o valores que la verifican, valores reales o no, iguales o distintos.
Cuando todos los flujos son negativos, porque se trata de un proyecto donde sólo se consideran egresos, no existirá ningún valor que verifique la ecuación planteada. Puede tratarse del caso donde se estudian alternativas que generan el mismo ingreso y únicamente se consideran las inversiones y costos asociados a cada propuesta, determinándose el VAN (que será el valor actual de las inversiones y egresos). La TIR no se podrá calcular en estos casos.
Tampoco consideraremos los proyectos en donde la suma simple de los flujos netos de caja, incluyendo la inversión inicial, sea nula o negativa:

$$\sum_{t=0}^{n} a_t \leq 0$$

ya que no serán aceptados en ningún caso proyectos con TIR negativa o nula.

Por lo tanto, nos quedan para considerar los proyectos que tienen flujos negativos y positivos y cuya suma simple de los flujos netos de caja que los componen arrojan un valor positivo.
Aún así, sólo podremos garantizar que el resultado de la TIR será único cuando el o los flujos negativos estén al inicio del proyecto, seguidos de flujos solamente positivos o nulos.

Tal como indicamos más arriba el cálculo de la TIR consiste en una ecuación de grado n, que admite n soluciones o valores, que pueden ser reales o no, iguales o distintos y, considerando la regla de los signos de Descartes la cual establece que ninguna ecuación polinómica puede tener más raíces reales positivas que la cantidad de cambios de signo de positivo a negativo o de negativo a positivo, afirmamos que siendo:

$$a_0 < 0 \text{ y } a_t \geq 0 \text{, para } t = 1, 2, 3, ..., n$$

o que, existiendo algunos flujos negativos, estos se encuentren antes que los flujos netos de caja positivos, garantiza un único cambio de signo y por lo tanto una sola raíz real positiva y que es la TIR del proyecto.
Pero no es suficiente con observar y contar los cambios de signo de un flujo de fondos para aplicar la regla de los signos de Descartes, ya que el flujo de fondos puede tener más cambios de signos que los que tiene el polinomio al que hace referencia la regla.
Recordando que un polinomio es una expresión algebraica entera en donde la variable o incógnita debe estar vinculada por las operaciones de suma, multiplicación y potenciación con exponente entero no negativo, debe transformarse la ecuación de cálculo de la TIR en un polinomio y observar en él los cambios de signo que se presentan.
Entonces, y de acuerdo a las características que pueden presentar los flujos de fondos de proyectos de inversión, los clasificaremos de la siguiente manera:

$$\text{Proyectos}\begin{cases}\text{a) Simples}\\ \text{b) No Simples}\begin{cases}\text{b.1) Puros}\\ \text{b.2) Mixtos}\end{cases}\end{cases}$$

a) Los proyectos simples son aquellos en donde, debido a que el flujo de fondos cumple con la condición de que la inversión inicial es el único flujo negativo, o que, existiendo otros flujos negativos, estos se encuentran antes de los flujos positivos, el valor positivo que verifica la ecuación es único y es la TIR del proyecto.

b) Los proyectos no simples son los proyectos en donde se alternan los flujos negativos y positivos. A su vez estos pueden clasificarse en:
b.1) Puros: a pesar del comportamiento de sus flujos, se verifica la existencia de una única raíz positiva como solución de la ecuación, siendo este valor la TIR del proyecto.
b.2) Mixtos: existen múltiples soluciones positivas de la ecuación y no puede indicarse una TIR para el proyecto.

Para los proyectos simples, el cálculo y análisis de la TIR no presenta ninguna dificultad.
El problema se manifiesta en los proyectos no simples, donde, basándonos en la simple observación, no podremos saber si es puro (lo que significará que tiene una TIR y puede ser analizado como si se tratara de un proyecto simple) o si es mixto.
Como se mencionó la Regla de los signos de Descartes permite determinar la cantidad máxima de raíces reales y positivas mediante la transformación de la ecuación de cálculo de la TIR en un polinomio de grado n. Así, puede suceder que el polinomio obtenido a partir de la fórmula de cálculo de la TIR tenga un solo cambio de signo a pesar de que los flujos de fondos tengan varios cambios. Pero en otros proyectos puede ocurrir que, a pesar de que el polinomio tenga más de un cambio de signo, la TIR sea única.

Frente a esta dificultad, que es lo que en general se denomina “inconsistencia de la TIR” podemos considerar distintas maneras de abordarla:

1) Algunos proponen que, frente a proyectos no simples, habría que descartar la TIR para la evaluación de proyectos y considerar los otros criterios analizados, en especial, el VAN.

2) Analizar el perfil del VAN para cada proyecto en particular. Para ello podremos trabajar con una planilla de cálculo de modo muy sencillo y visualizar si el proyecto tiene una TIR o múltiples TIR.

Ejemplo 7.2
Representaremos el perfil del VAN de los siguientes tres proyectos con flujos de fondos para cinco años:

Proyecto A

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-6000	1000	1500	3000	2500	2000

Proyecto B

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-30000	15000	-1000	-5000	15000	19000

Proyecto C

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-21000	90000	-124000	68000	-40000	30000

La tabla que se presenta en la página siguiente muestra los resultados del VAN para cada proyecto y según cada tasa de costo de capital anual utilizada:

k	*VAN Proyecto A*	*VAN Proyecto B*	*VAN Proyecto C*
0,00	$ 4.000,00	$ 13.000,00	$ 3.000,00
0,03	$ 3.076,63	$ 8.761,68	$ 2.065,16
0,06	$ 2.272,00	$ 5.142,16	$ 1.374,21
0,09	$ 1.567,43	$ 2.033,95	$ 869,90
0,12	$ 947,64	$ -649,36	$ 508,24
0,15	$ 400,07	$ -2.977,59	$ 255,33
0,18	$ -85,68	$ -5.007,57	$ 84,94
0,21	$ -518,26	$ -6.785,76	$ -23,27
0,24	$ -904,89	$ -8.350,38	$ -85,09
0,27	$ -1.251,67	$ -9.733,02	$ -112,81
0,30	$ -1.563,72	$ -10.959,92	$ -115,95
0,33	$ -1.845,41	$ -12.052,98	$ -101,96
0,36	$ -2.100,45	$ -13.030,55	$ -76,57
0,39	$ -2.332,02	$ -13.908,09	$ -44,25
0,42	$ -2.542,85	$ -14.698,67	$ -8,40
0,45	$ -2.735,29	$ -15.413,36	$ 28,34
0,48	$ -2.911,38	$ -16.061,61	$ 64,00
0,51	$ -3.072,89	$ -16.651,50	$ 97,09
0,54	$ -3.221,37	$ -17.189,94	$ 126,53
0,57	$ -3.358,16	$ -17.682,90	$ 151,53
0,60	$ -3.484,44	$ -18.135,53	$ 171,57
0,63	$ -3.601,25	$ -18.552,29	$ 186,29
0,66	$ -3.709,50	$ -18.937,05	$ 195,51
0,69	$ -3.810,01	$ -19.293,20	$ 199,14
0,72	$ -3.903,50	$ -19.623,69	$ 197,19
0,75	$ -3.990,60	$ -19.931,10	$ 189,74
0,78	$ -4.071,88	$ -20.217,71	$ 176,92
0,81	$ -4.147,85	$ -20.485,53	$ 158,90
0,84	$ -4.218,95	$ -20.736,31	$ 135,86
0,87	$ -4.285,61	$ -20.971,64	$ 108,02
0,90	$ -4.348,18	$ -21.192,90	$ 75,61
0,93	$ -4.407,00	$ -21.401,33	$ 38,85
0,96	$ -4.462,36	$ -21.598,03	$ -2,02
0,99	$ -4.514,53	$ -21.783,99	$ -46,76
1,02	$ -4.563,75	$ -21.960,10	$ -95,16
1,05	$ -4.610,24	$ -22.127,14	$ -146,98
1,08	$ -4.654,21	$ -22.285,83	$ -202,00
1,11	$ -4.695,84	$ -22.436,80	$ -260,01
1,14	$ -4.735,30	$ -22.580,65	$ -320,81
1,17	$ -4.772,72	$ -22.717,89	$ -384,20
1,20	$ -4.808,27	$ -22.849,00	$ -449,99

Los siguientes gráficos permitirán realizar una mejor apreciación en la evolución del VAN para las distintas tasas de costo de capital:

Proyecto A

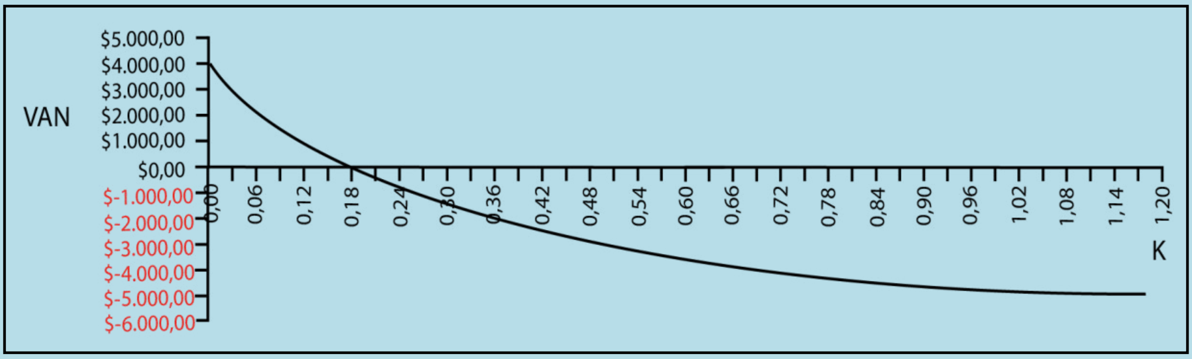


Gráfico 3

El Gráfico 3 nos muestra el perfil del VAN del proyecto A. De acuerdo a los flujos netos de caja es un proyecto simple (sólo hay un cambio de signo), por lo tanto es posible obtener la TIR y esta será única. Para este proyecto la TIR es 0,1744 anual.

Proyecto B

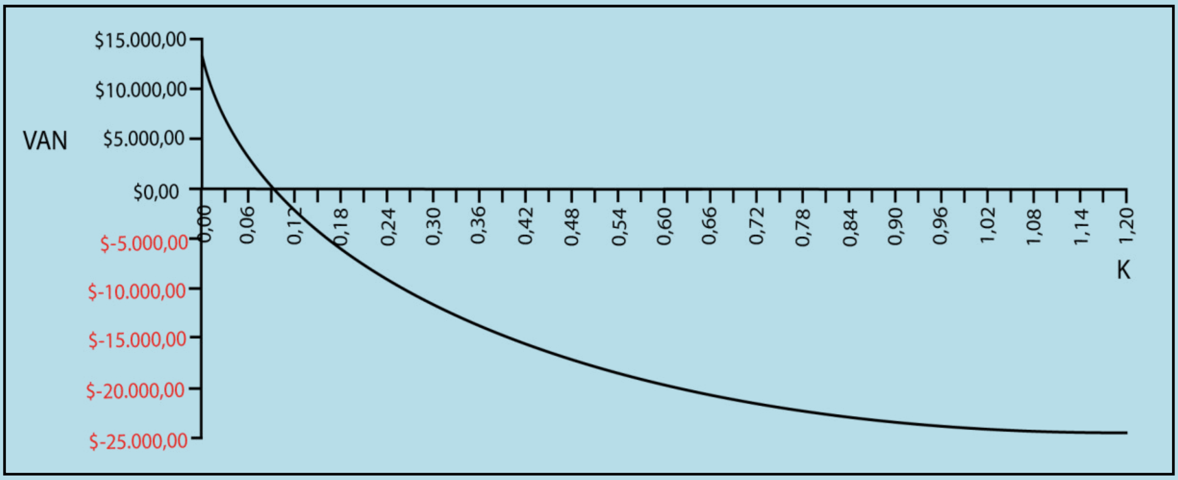


Gráfico 4

El perfil del VAN del proyecto B está representado en el Gráfico 4. El flujo de fondos alterna valores positivos y negativos lo que nos indica que el proyecto es no simple, pero al tener una única TIR (0,1123 anual) podemos decir que es puro, según la clasificación propuesta anteriormente.

Proyecto C

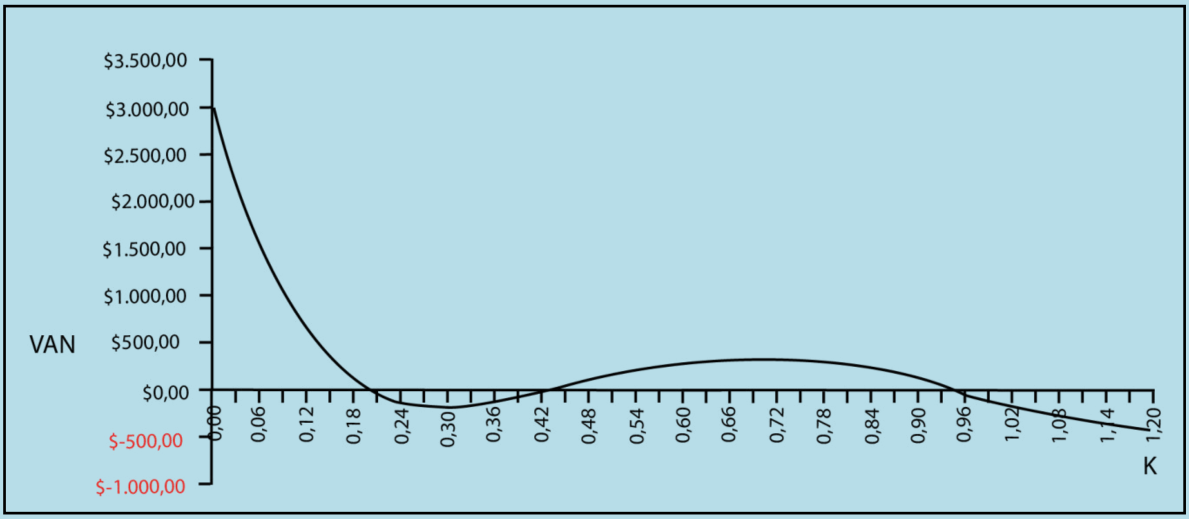


Gráfico 5

Finalmente, en el Gráfico 5 vemos cómo queda representado el perfil de un proyecto que, por su flujo de fondos es no simple y es mixto. Se verifica que el $VAN = 0$ para tres valores (0,2021; 0,4269 y 0,9586). En este caso se hace imposible interpretar económica y financieramente un proyecto que posea tres rentabilidades distintas.

De esta manera, podemos establecer para cada proyecto de inversión en particular la existencia o no de una única TIR.

3) Transformar un proyecto no simple en simple, eliminando los flujos netos de caja negativos. Esto se justifica considerando que los flujos netos de caja se obtienen de los ingresos y egresos en efectivo que se producen durante la unidad de tiempo considerada y es imposible que pueda extraerse más dinero que el que ingresa, por lo tanto debería preverse (es decir, reservarse) del flujo resultante de la unidad de tiempo anterior (si este fue positiva) o aumentando la inversión inicial, si los flujos negativos son los posteriores al desembolso del momento 0.
Es importante tener presente que los flujos netos de caja que el proyecto va generando están disponibles en el momento en que estos se producen, se retiran y serán consumidos o aplicados a nuevas inversiones. Si en unidades de tiempo determinadas el flujo neto de caja es negativo, debería reservarse parte (o llegado el caso, todo el importe) del flujo positivo inmediato anterior para cubrir el déficit.
Como se reserva la unidad de tiempo anterior, puede hacerse por un importe menor ya que existirá la posibilidad de colocar el importe retenido en una operación financiera y alcanzar la suma necesaria en la unidad de tiempo siguiente.

Si:

$$a_r > 0$$

y:

$$a_{r+1} < 0$$

debe retenerse todo o parte de a_r para cubrir el déficit que se genera en la unidad de tiempo $r+1$. El importe a reservar se obtiene de actualizar, a la tasa de costo de capital, el importe correspondiente:

$$\frac{a_{r+1}}{(1+k)^{1/2}} = a_{r+1} v^{1/2}$$

La tasa de interés utilizada para actualizar es la tasa de costo de capital y por un plazo equivalente a la mitad de la unidad de tiempo, debido a que consideramos que los desembolsos se producen a lo largo del año, unos al principio, otros promediando el año y otros al final.

A continuación, obtenemos el nuevo valor del flujo para la unidad de tiempo r:

$$a_r + \frac{a_{r+1}}{(1+k)^{1/2}}$$

Si el valor obtenido es positivo, es decir:

$$a_r + \frac{a_{r+1}}{(1+k)^{1/2}} > 0$$

el nuevo valor del flujo neto de caja correspondiente a la unidad de tiempo r, será el resultado de la operación:

$$a_r + \frac{a_{r+1}}{(1+k)^{1/2}}.$$

Si el resultado es exactamente 0, el valor del flujo neto de caja de la unidad de tiempo r será 0.

Por último, si:

$$a_r + \frac{a_{r+1}}{(1+k)^{1/2}} < 0$$

será necesario actualizar por una unidad de tiempo y sumárselo a a_{r-1}:

$$a_{r-1} + \left[a_r + \frac{a_{r+1}}{(1+k)^{1/2}} \right] v$$

De ser necesario se continuará con los flujos netos de caja hasta absorber completamente los flujos negativos.

De esa manera, los flujos negativos se transforman en flujos de $0 eliminando, por un lado el problema de los cambios de signos, y por otro, cubriendo los déficits de caja que se presenten.
Si los flujos netos de caja negativos se presentaran a continuación de la inversión inicial, se considerarán que son una continuación del desembolso del momento 0 y por lo tanto se agregarán a ese valor. Si el flujo negativo es el de la primera unidad de tiempo:

$$\frac{a_1}{(1+k)^{1/2}} = a_1 v^{1/2}$$

el valor de la inversión inicial aumentará a:

$$a_0 + \frac{a_1}{(1+k)^{1/2}}$$

y el flujo neto de caja de la primera unidad de tiempo será cero.

A fin de aplicar lo abordado hasta aquí, le proponemos resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 5

La empresa de CALZADOS RIO está evaluando la compra de una maquinaria para la fabricación de calzados, y cuenta con dos alternativas mutuamente excluyentes: la máquina A y la máquina B. Para una tasa de costo de capital de 0,08 anual, ¿qué máquina le conviene comprar?

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3
Máquina A	-8.000	1.000	3.000	5.000
Máquina B	-7.000	4.000	-1.000	5.520

Rta: -$532,90 (A); $194,69 (B);
0,0496 anual (A); 0,09348 anual (B);
Proyecto A no recupera; 2,96 años (B).
Máquina B

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 6

Un laboratorio de productos farmacéuticos estudia la posibilidad de desarrollar y lanzar al mercado un nuevo fármaco. Los estudios de mercado y los cálculos financieros indican que la inversión inicial será de $10.000.
Si el nuevo fármaco tiene éxito durante los dos primeros años, los flujos de fondos netos serán de $5.000 anuales, existiendo la posibilidad de ampliar la inversión en $3.000 durante el año 3, y los flujos netos de caja del año 4 al año 6, serán de $3.500 anuales. Si la tasa de costo de capital es de 0,10 anual, el VAN del proyecto es (indique la alternativa correcta):

a) $ 2.963,17 b) $ 2.853,16 c) $599,22 d) $ 877,50

Rta: b)

Orden de selección de los proyectos de inversión aceptados

Como mencionamos anteriormente, Cuando comparamos los distintos criterios de evaluación concluimos que los tres coinciden en la aceptación o rechazo de un proyecto de inversión.
Pero cuando se trata de darle un orden de preferencia entre proyectos ya aceptados no siempre los criterios coinciden. En nuestro análisis nos concentraremos en VAN y TIR por ser lo criterios más importantes. Veamos esto con un ejemplo:

Ejemplo 7.3
Si debiéramos establecer el orden de preferencia entre los siguientes proyectos:

PROYECTO D

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
-6000	4000	1000	2500	3000

PROYECTO E

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
-6000	1000	2000	4000	3000

En primer lugar, comparamos los resultados de la TIR:

Proyecto	***TIR***
D	0,2847
E	0,1988

Luego, para el VAN, observamos en el Gráfico 6 el perfil para cada proyecto:

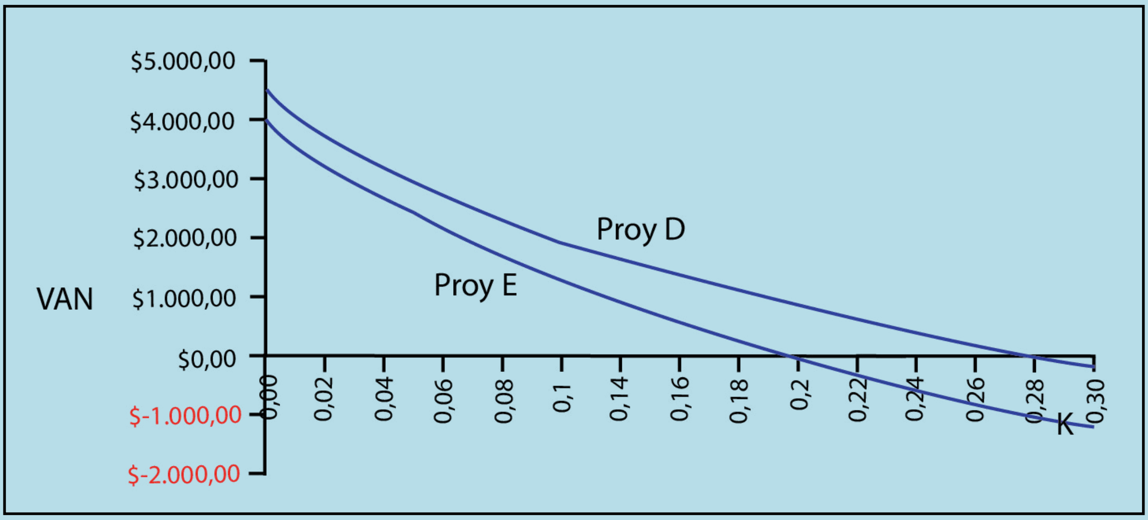


Gráfico 6

Notamos que para cualquier tasa de costo de capital (dentro del intervalo donde el VAN es positivo para ambos proyectos) es mejor el proyecto D que el proyecto E, coincidiendo con el criterio de la TIR. Resumiendo:

	VAN	**TIR**
1°	D	D
2°	E	E

Si se agrega un nuevo proyecto:

PROYECTO F

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
-6000	1000	1500	2000	6000

Comparamos los resultados de la TIR, para los proyectos D y F:

Proyecto	*TIR*
D	0,2847
F	0,1951

Vemos en el Gráfico 7 el perfil del VAN para cada proyecto:

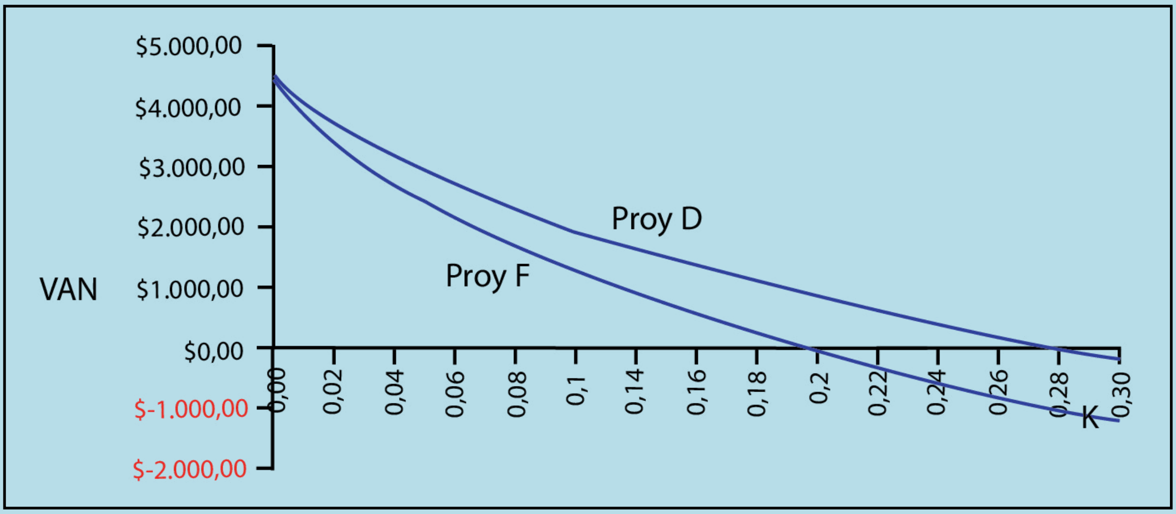


Gráfico 7

Salvo cuando $k = 0$, donde el VAN de ambos proyectos son iguales ($4.500), el VAN del proyecto D es más alto que el del F, resultando entonces más conveniente:

	VAN	TIR
1°	D	D
2°	F	F

Incorporaremos ahora otro proyecto:

PROYECTO G

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
-6000	2000	2000	1500	6000

Calculamos la TIR:

Proyecto	*TIR*
D	0,2847
G	0,2582

No hay duda, según el criterio de la TIR que es mejor el proyecto D.

El Gráfico 8 nos muestra el perfil del VAN para cada proyecto:

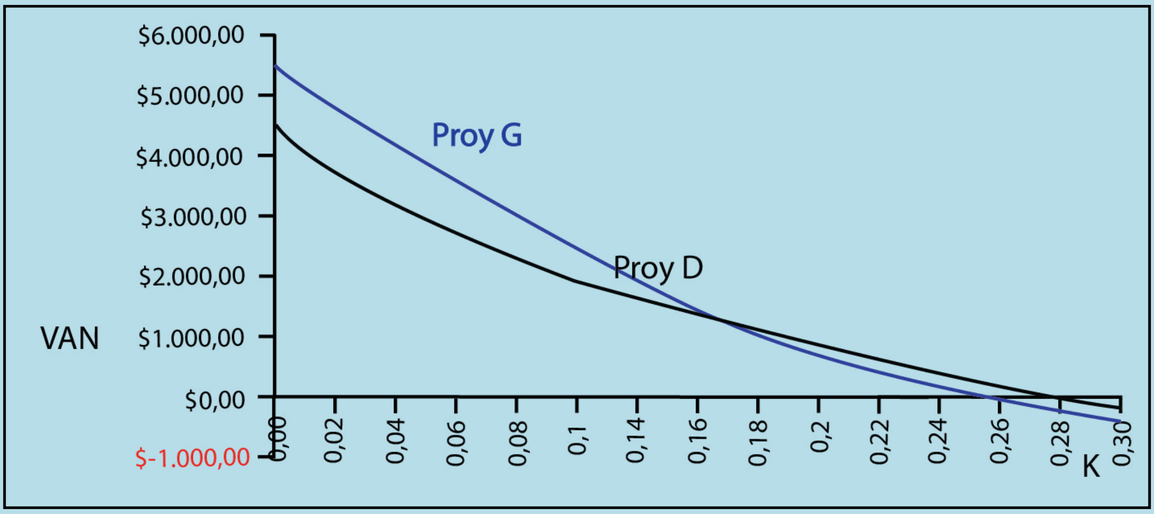


Gráfico 8

Los perfiles se cruzan, para algunos valores de k el VAN del proyecto G es más alto, para otros valores, es mayor el del D.
El punto en que ambos proyectos se cruzan, denominado *punto de intersección de Fisher*, el VAN de ambos proyectos es igual ($1.319,80), para una tasa de costo de capital de 0,16937 anual.

Por lo tanto:

	VAN $k < 0{,}16937$	VAN $k = 0{,}16937$	VAN $k > 0{,}16937$	TIR
1°	G	D y G	D	D
2°	D		G	G

Desde el punto de vista de la TIR es mejor el proyecto D. Desde el punto del VAN, si la tasa de costo de capital a la que se realiza la evaluación es menor a 0,16937 anual, es mejor el proyecto G (contradice a lo indicado por la TIR) y si la tasa de costo de capital a la que se evalúan los proyectos es mayor a 0,16937 anual, es mejor el D (coincidiendo con la TIR).

Los siguientes ejercicios nos permitirán aplicar lo aprendido hasta aquí:

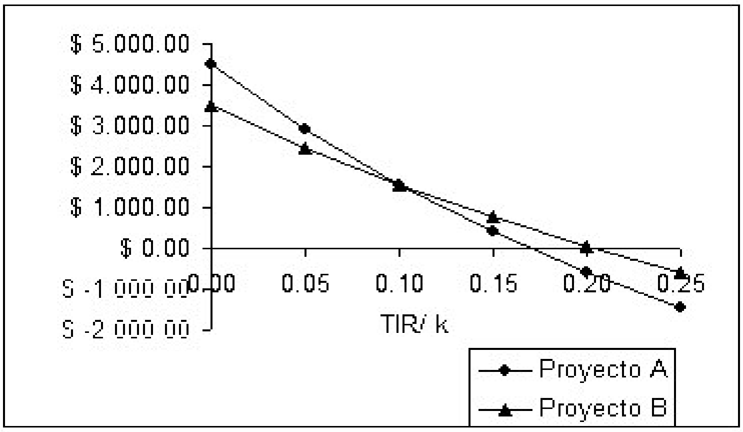
Ejercicio a resolver

EJERCICIO 7
Un inversionista debe elegir uno entre dos proyectos independientes, A y B, cuyos flujos de caja son los siguientes:

	Año 0	*Año 1*	*Año 2*	*Año 3*
Proyecto A	-10.000	1.000	6.500	7.000
Proyecto B	-12.000	10.000	4.500	1.000

a) Utilizando los criterios VAN y TIR, determine qué proyecto conviene llevar a cabo, si la tasa de costo de capital es:
I. 0,05 anual.
II. 0,12 anual.
b) Grafique el comportamiento del VAN para ambos proyectos. ¿Qué conclusiones obtiene?

Rta: a) I. $2.894.94 (A); $2.469,28 (B);
II. $1.057,08 (A); $1.227,72 (B);
0,1687 anual (A); 0,2027 anual (B);
b)



Ejercicio a resolver

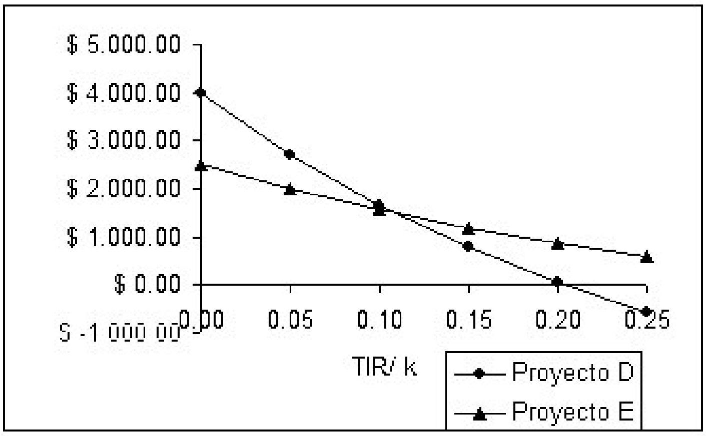
EJERCICIO 8
El señor Alberto García, presidente de la empresa NEUMÁTICOS GARCÍA SA, tiene que elegir entre dos posibles inversiones independientes:

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Proyecto D	-6.000	1.000	2.500	3.500	3.000
Proyecto E	-3.000	2.000	2.000	1.000	500

Estimando un costo del capital del 9% anual, el Sr. García está considerando adoptar el proyecto E, cuya TIR es mayor.

a) Grafique el perfil del VAN de ambos proyectos.
b) Si el Sr. García puede disponer de $6.000 para invertir, ¿qué proyecto le conviene llevar a cabo? ¿Por qué?

Rta:a)



$1.849,55 (D); $1.644,62 (E);
0,2031 anual (D); 0,3847 anual (E);

Títulos de Deuda. Títulos Públicos.

A lo largo de la asignatura hemos analizados operaciones financieras de préstamo, en donde el acreedor se obliga a la entrega de una suma de dinero o valor equivalente y el deudor se compromete a devolver ese capital y los intereses correspondientes, de acuerdo a las condiciones que se establezcan.
Cuando los gobiernos o las empresas necesitan importantes cantidades de dinero para financiar sus erogaciones (ya sea en obras de infraestructura, gasto público, proyectos de inversión, que requieren grandes desembolsos), no siempre les es posible obtener un préstamo, debido a la dificultad de encontrar un solo acreedor dispuesto a hacerlo o el costo financiero o el plazo son poco convenientes. Por tal motivo, suelen recurrir al mercado de capitales dividiendo las operaciones de crédito en cuota-partes representadas por títulos que reciben el nombre de bonos u obligaciones, que son adquiridos por ahorristas o inversores.
Algunas características de los títulos de deuda que los diferencian de las operaciones de préstamos tradicionales son:

- Poseen plazos largos de vencimiento.
- Las condiciones están fijadas por el deudor.
- Existe una pluralidad de acreedores que el deudor no individualiza ya que los títulos se negocian en el mercado de capitales.
- Cada obligación tiene un valor nominal y pueden ser emitidas a la par, bajo la par, o sobre la par, según su precio de colocación.
- Existe una tasa de interés de emisión que no necesariamente coincide con la tasa de costo para el emisor y la tasa de rendimiento para el inversor.

Denominamos títulos públicos o bonos a los emitidos por el estado y obligaciones negociables a los emitidos por las empresas. En esta unidad el análisis se centrará para los títulos públicos, pero los procedimientos para la confección del flujo de fondos, la valuación y el cálculo del rendimiento pueden aplicarse a los títulos privados.

A continuación enunciaremos algunas clasificaciones de los Títulos Públicos:

Según la jerarquía del emisor

- Títulos Públicos nacionales
- Títulos Públicos provinciales
- Títulos Públicos municipales

Según la moneda de emisión

- Títulos públicos emitidos en moneda doméstica
- Títulos públicos emitidos en moneda extranjera

Según la forma de colocación

- Deuda pública voluntaria
- Deuda pública obligatoria o forzosa: compulsivamente el Estado toma activos de personas y los transforma en títulos públicos. Por ejemplo, el canje de plazos fijos bancarios en bonos.

Según la forma en que se ajusta el rendimiento

- Títulos de renta fija: el rendimiento está establecido ex-ante.

- Títulos de renta variable: el rendimiento se ajusta de acuerdo a algún índice. Por ejemplo puede ser la tasa LIBOR, un coeficiente que refleje la tasa de inflación o el crecimiento del producto bruto interno.

Según los tenedores de los títulos públicos
- Deuda interna
- Deuda externa

Los bonos pueden estar representados por una lámina que tiene adheridos cupones (modalidad cartular), aunque en los últimos años se utilizan, mayormente, certificados de propiedad representativos de dichos títulos (modalidad escritural).

Títulos Públicos: elementos.

Los siguientes elementos formarán parte de un empréstito, desde el punto de vista del *emisor*:
- Fecha de emisión.
- Fecha de vencimiento.

(Ambas fechas determinan el plazo del título).
- Valor Nominal (V): representa el monto total por el cual el emisor se endeuda y que servirá de base para el cálculo de los pagos a realizar.
- Valor Efectivo (V'): representa lo que el deudor obtiene por la emisión, una vez colocados todos los títulos.
- Número de títulos (N)
- Tasa de interés de emisión (i). Puede ser fija (constante o variable) o flotante (por ejemplo LIBOR, BADLAR)
- Cuota (a_t): representa las erogaciones periódicas que en concepto de amortizaciones e interés deberá desembolsar el emisor.
- Servicio de intereses: pueden ser periódicos o abonados al final. En algunos títulos se capitalizan.
- Sistema de amortización. La amortización puede realizarse en un pago único al vencimiento o con pagos periódicos. Pueden existir unidades de tiempo de diferimiento.
- Cláusula de ajuste (CER, PBI).
- Cláusulas de rescate, cuando el emisor se reserva la opción de realizar el rescate (pago) del título anticipadamente.

Existe un bono con características particulares, llamado bono cupón cero, que es aquel que no paga intereses y el emisor se compromete a devolver el capital emitido al vencimiento. La tasa de interés que el emisor paga queda implícita en el precio al que se emite el bono. Usualmente estos títulos son emitidos por la tesorería de los distintos gobiernos y se aplica una tasa de descuento. En nuestro país podemos mencionar las Nobac (Notas del Banco Central) y las Lebac (Letras del Banco Central).

Cuando un inversor adquiere un bono, tendrá el derecho a cobrar un flujo de importes compuestos de intereses y amortizaciones, a lo largo de un período de tiempo.
Para *el inversor*, consideraremos los siguientes elementos al momento del análisis (además de la tasa de interés de emisión, fecha de emisión y vencimiento, ya mencionados para el emisor):

- Valor efectivo (VE) que representa el valor de compra pagado por el inversionista. Será el valor o precio de emisión si lo compra al momento de emisión o precio de cotización si lo compra en un momento posterior.
- Valor nominal (VN): es el que figura impreso en el título, o el importe nominal por el cual se hace la escrituración al momento de la compra.
- Servicio (a_t): importe periódico en concepto de intereses o intereses y amortización que recibirá el tenedor del título. Puede ser mensual, trimestral, semestral, u otra unidad de tiempo, establecida en las condiciones de emisión.
- Valor residual (VR): valor pendiente de amortizar, se obtiene de la diferencia entre el valor nominal y las amortizaciones ya pagadas.
- Valor técnico (VT): es el valor residual más los intereses devengados a un momento determinado, desde el último pago de intereses.

Para poder realizar el análisis de un título en lo que respecta a su valuación y la determinación de la tasa de rendimiento y de costo, es necesario, en primer lugar, construir el flujo de fondos del bono, que refleja, a modo de un cuadro de amortización, los pagos en concepto de renta (interés) y capital (amortización) a desembolsarse o cobrarse a lo largo del plazo del título.
En general la información que tendremos será:

FF n°	**Fecha**	**Amortización**	**Interés**	a_t	**Valor Residual**
1		t_1	I_1	a_1	
2		t_2	I_2	a_2	
3		t_3	I_3	a_3	
…		…	…	…	
r		t_r	I_r	a_r	
…		…	…	…	
n		t_n	I_n	a_n	

Retomando el caso inicial

Considerando los Bonos emitidos por la Municipalidad de Córdoba, cuyos datos fueron detallados al inicio de la unidad, construiremos el flujo de fondos correspondiente. Para ello utilizaremos una tasa de interés nominal anual de 0,05.
Al tratarse de intereses trimestrales, la tasa de interés es:

$$i = \frac{0,05}{4} = 0,0125\ trimestral$$

Para U$S1.000 de valor nominal:

FF nº	Fecha	Amortización	Interés	a_t	Valor Residual
1	16/01/2014		1.000x0,0125=12,5	12,5	1.000
2	16/04/2014		1.000x0,0125=12,5	12,5	1.000
3	16/07/2014		1.000x0,0125=12,5	12,5	1.000
4	16/10/2014		1.000x0,0125=12,5	12,5	1.000
5	16/01/2015	1.000x0,0833=83,30	1.000x0,0125=12,5	83,30+12,5=95,80	1.000-83,30=916,70
6	16/04/2015	1.000x0,0833=83,30	916,70x0,0125=11,46	83,30+11,46=94,76	916,70-83,30=833,40
7	16/07/2015	1.000x0,0833=83,30	833,40x0,0125=10,42	83,30+10,42=93,72	833,40-8,30=750,10
8	16/10/2015	1.000x0,0833=83,30	750,10x0,0125=9,38	83,30+9,38=92,68	750,10-83,30=666,80
9	16/01/2016	1.000x0,0833=83,30	666,80x0,0125=8,34	83,30+8,34=91,64	666,80-83,30=583,50
10	16/04/2016	1.000x0,0833=83,30	583,50x0,0125=7,29	83,30+7,29=90,59	583,50-83,30=500,20
11	16/07/2016	1.000x0,0833=83,30	500,20x0,0125=6,25	83,30+6,25=89,55	500,20-83,30=416,90
12	16/10/2016	1.000x0,0833=83,30	416,90x0,0125=5,21	83,30+5,21=88,51	416,90-83,30=333,60
13	16/01/2017	1.000x0,0833=83,30	333,60x0,0125=4,17	83,30+4,17=87,47	333,60-83,30=250,30
14	16/04/2017	1.000x0,0833=83,30	250,30x0,0125=3,13	83,30+3,13=86,43	250,30-83,30=167,00
15	16/07/2017	1.000x0,0833=83,30	167,00x0,0125=2,09	83,30+2,09=85,39	167,00-83,30=83,70
16	16/10/2017	1.000x0,0837=83,70	83,70x0,0125=1,05	83,70+1,05=84,75	83,70-83,70=0

Las fechas se determinan trimestralmente, comenzando a los tres meses de la emisión.
Las amortizaciones se calculan a partir de lo establecido en las condiciones de emisión.
Los intereses se obtienen de multiplicar el valor residual por la tasa de interés trimestral.
El valor residual se obtiene del correspondiente a la unidad de tiempo anterior menos el importe de la amortización.

Evaluación de Títulos Públicos desde el punto de vista del Emisor. Tasa de Costo.

A partir de los elementos definidos en el apartado anterior:
V : valor total de la emisión
i : tasa de interés de emisión
y los servicios de renta y amortización previstos en la ley de emisión:
$a_t = a_1, a_2, \ldots, a_n$,
se verifica que:

$$V = \frac{a_1}{(1+i)^1} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+i)^n}$$

ó

$$V = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{-t}$$

Es decir, la tasa de interés de emisión es la que iguala el compromiso del acreedor (los inversionistas) con el valor actual de los compromisos del deudor (el emisor).

Pero indicamos anteriormente que no siempre el monto de la emisión $\left(V\right)$ será el importe efectivamente recibido $\left(V^{'}\right)$. En situaciones en donde estos importes no sean iguales, la tasa de emisión no representará el costo financiero para el emisor, sino que será necesario determinar la tasa de costo. Esta tasa, que simbolizaremos con x, representa el costo por cada unidad de capital recibido en préstamo por unidad de tiempo y se determina a partir del valor efectivamente recibido y los servicios que el emisor se ha comprometido a abonar, por lo que:

$$V^{'} = \frac{a_1}{\left(1+x\right)^1} + \frac{a_2}{\left(1+x\right)^2} + \frac{a_3}{\left(1+x\right)^3} + \ldots + \frac{a_n}{\left(1+x\right)^n}$$

$$V^{'} = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{\left(1+x\right)^t} = \sum_{t=1}^{n} a_t \left(1+x\right)^{-t}$$

A partir del valor de $V^{'}$ pueden presentarse las siguientes situaciones:

a) ***Colocación A LA PAR***

En este caso, coinciden el monto emitido y el importe recibido:

$$V^{'} = V$$

es decir:

$$\sum_{t=1}^{n} a_t \left(1+x\right)^{-t} = \sum_{t=1}^{n} a_t \left(1+i\right)^{-t}$$

y se verifica que:

$$x = i$$

Como el importe efectivamente recibido coincide con el monto de emisión, la tasa de costo asume el mismo valor que la tasa de interés de emisión y el valor actual de los servicios con ambas tasas es idéntico.

b) ***Colocación BAJO LA PAR***

Cuando la emisión se realiza en esta condición el importe recaudado por el emisor es menor al monto de emisión:

$$V^{'} < V$$

Como las obligaciones asumidas por el emisor son sobre el monto de emisión:

$$\sum_{t=1}^{n} a_t \left(1+x\right)^{-t} < \sum_{t=1}^{n} a_t \left(1+i\right)^{-t}$$

provoca que su tasa de costo sea mayor:

$$x > i$$

En conclusión, el emisor está dispuesto a asumir un costo mayor, recaudando un monto menor al momento de la emisión.

*c) **Colocación SOBRE LA PAR***

El emisor asume un costo menor, debido a a que ha recibido un importe mayor al de emisión, siendo sus compromisos sobre un importe menor:

$$V^{'} > V$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_t (1+x)^{-t} > \sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{-t}$$

$$x < i$$

Al utilizar una tasa de actualización menor, el valor actual obtenido con x es mayor.
Entonces, a partir de:

$$V^{'} = \frac{a_1}{(1+x)^1} + \frac{a_2}{(1+x)^2} + \frac{a_3}{(1+x)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+x)^n}$$

es posible determinar el valor de la tasa de costo (x) conociendo $V^{'}$ o determinar el importe a recibir si el emisor está dispuesto a asumir determinado costo representado por x.

A continuación se presentan una serie de ejercicios, sugerimos resolverlos antes de continuar con la lectura de los próximos apartados:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 9

Un estado provincial emite el 15/01/2008 títulos de deuda, que serán amortizados en 20 cuotas semestrales de $500 cada una. La primera cuota será abonada el 15/07 del año de emisión. ¿Cuál será el importe máximo que un inversor podrá ofrecer el mismo día del lanzamiento por dicho título si desea obtener un rendimiento del 10% anual?

Rta: $6.294,52

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 10

El estado emite el 30/03/2010 títulos de deuda, que se amortizarán semestralmente a partir del 30/09 del próximo año, recibiendo por cada VN $1000 una suma constante de $300 en concepto de capital e interés. El título vence a los 5 años de emitido. ¿Cuál será la cantidad que usted estaría dispuesto a ofrecer el día de la emisión si desea ganar una rentabilidad del 0,08 semestral?

Rta: $1.478,04

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 11

Se emite un bono con un plazo de 3 años y servicio de renta y amortización anuales, calculados por el sistema de amortización francés, a una tasa de emisión de 0,12 anual de interés.

Si el mercado espera obtener una rentabilidad de 0,15 anual,

a) ¿A qué precio deberá negociarse en el mercado primario?

b) ¿Dicho título se emitió:

I. A la par　　II. Bajo la par　　III. Sobre la par

Rta: a) $95,06 por c/ VR $100;
b) II. bajo la par al 95,06%

Evaluación de Títulos Públicos desde el punto de vista del Inversor. Tasa de Rendimiento.

Identificando la tasa de interés de emisión (i), el VN adquirido por el inversor y los servicios de renta y capital conseguidos por dicha inversión, podemos afirmar que:

$$VN = \frac{a_1}{(1+i)^1} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+i)^n} = \sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{-t}$$

Para el caso particular de un título que abone intereses periódicos constantes y amortización al final:

$$VN = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+i)^t} + \frac{VN}{(1+i)^n} = (VN.i)\, a_{\overline{n|}i} + \frac{VN}{(1+i)^n}$$

Si el inversor desembolsa el importe VN, i la tasa de interés de emisión será el rendimiento para el inversor.

Definiremos con r la tasa de rendimiento financiero que indica justamente el rendimiento por unidad de tiempo y por cada unidad de capital invertido; siendo este el precio efectivo o valor de cotización (VE):

$$VE = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{n} a_t (1+r)^{-t}$$

Si el título se adquiere A LA PAR:

$$VE = VN$$

$$r = i$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_t (1+r)^{-t} = \sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{-t}$$

Pero si la operación se realiza BAJO LA PAR:

$$VE < VN$$

$$r > i$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_t (1+r)^{-t} < \sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{-t}$$

En este último caso, el inversor está exigiendo un rendimiento financiero mayor a la tasa de emisión y estará dispuesto a pagar un precio menor.

Finalmente, si la operación se realiza SOBRE LA PAR:

$$VE > VN$$

$$r < i$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_t (1+r)^{-t} > \sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{-t}$$

En este caso, el rendimiento es menor a la tasa de interés de emisión por abonarse un precio mayor al importe que se devuelve y sobre el que se aplica la tasa de interés de emisión.
Entonces, a partir de la expresión:

$$VE = \frac{a_1}{(1+r)^1} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \frac{a_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{a_n}{(1+r)^n}$$

es posible determinar la tasa de rendimiento si conocemos el precio efectivo. O conocido el rendimiento pretendido por el inversor, determinar el precio que está dispuesto a pagar. Esto es muy importante ya que los precios de los títulos en el mercado se fijan a partir de las tasas de rendimiento esperada por los inversionistas.

El análisis realizado al momento de emisión, y considerando que el inversor mantiene en su cartera el título hasta el vencimiento (de allí que suele denominarse como tasa de rendimiento al vencimiento), puede extenderse a cualquier momento del plazo del título.

Puede que el inversor lo adquiera en un momento posterior p (momento comprendido entre la emisión y el vencimiento) y lo mantenga hasta su vencimiento:

$$VE = \sum_{t=1}^{n-p} \frac{a_{p+t}}{(1+r)^t}$$

O puede ser que el inversor decida adquirirlo en un momento p posterior a la emisión y transferirlo en el momento m, posterior a p pero antes del vencimiento:

$$VE = \frac{a_{p+1}}{(1+r)^1} + \frac{a_{p+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(1+r)^{m-p}} + \frac{VE_m}{(1+r)^{m-p}} = \sum_{t=1}^{m-p} \frac{a_{p+t}}{(1+r)^t} + \frac{VE_m}{(1+r)^{m-p}}$$

Donde VE_m representa el valor efectivo del momento m.

Por lo tanto pueden plantearse diversas situaciones de acuerdo al momento de compra del título así como el momento de venta, sin esperar a su vencimiento.

Tanto para la determinación de la tasa de rendimiento para el inversor como la de costo para el emisor se aplica el procedimiento estudiado anteriormente de la determinación de la TIR. También se aplica el procedimiento del VC o VAN para la determinación del VE o del importe recibido por la emisión.

A continuación, les sugerimos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 12

El 15/09/2009 usted pagó $285 por la compra de obligaciones negociables de la empresa LA ESMERALDA SA, las cuales devengan intereses semestrales. En la siguiente tabla se muestran los cupones aún no vencidos:

Fecha	$a_{(t)}$
15/03/10	45
15/09/10	45
15/03/11	45
15/09/11	345

Calcule la tasa de rendimiento que obtendrá.

Rta: 0,16816 semestral

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 13

Un título de deuda a cinco años de plazo, con reembolso único al vencimiento, devenga un interés de 9% nominal anual, con pago semestral de intereses. Considerando un VN $1.000, determine el precio máximo de compra cuando ha transcurrido dos años y medio desde la emisión, si un inversor compra el título y desea un rendimiento de 0,12 anual.

Rta: $943,72

Relación de Paridad

A lo largo del análisis hemos utilizado expresiones tales como “a la par” “bajo la par”, “sobre la par”. Estas expresiones hacen referencia a la *paridad*. Afirmaremos que en un título existe paridad cuando el precio de cotización (es decir el valor de mercado) es igual al valor técnico.
Por lo tanto, definimos a la *relación de paridad* como el cociente entre el precio de mercado (valor de cotización) y el valor técnico.

$$\text{Relación de Paridad} = \frac{VE}{VT}$$

Ó:

$$\boxed{RP = \frac{VE}{VT}}$$

Donde:

VE es el valor de cotización del título (su valor según el mercado)

VT es el valor técnico del título (su valor según las condiciones de emisión) y se calcula a partir del valor residual más los intereses devengados al momento de su determinación, desde el último pago de intereses.

Si se determina el valor técnico inmediatamente después del pago de un servicio de renta, este será igual al valor residual:

$$VT = VR$$

Si la determinación del valor técnico es es en otro momento, se agregarán los intereses devengados:

$$VT = VR + \text{Intereses devengados}$$

$$VT = VR\left(1+i\right)^{\frac{\text{dias transcurridos}}{\text{unidad de tiempo de } i}}$$

teniendo en cuenta que el valor residual en el momento r es:

$$VR_r = VN - \sum_{p=1}^{r} t_p$$

A partir del cálculo de la relación de paridad, podemos obtener 3 resultados posibles

$RP = 1$, $VE = VT$ El título se cotiza a la par.

$RP < 1$, $VE < VT$ El título se cotiza bajo la par.

$RP > 1$, $VE > VT$ El título se cotiza sobre la par.

Generalmente, la paridad de un título se expresa en porcentaje, multiplicando el resultado de la relación de paridad por 100:

$$\frac{VE}{VT} x100$$

Resolvamos ahora los siguientes ejercicios:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 14

El Estado emite un bono a 5 años con amortización única al vencimiento y pago del servicio de renta en forma anual. Se emite pagando intereses a una tasa de 0,09 anual. Calcule, para un VN $1.000:

a) ¿Cuál debe ser el precio de compra al momento de emisión para obtener un rendimiento anual del 13%?

b) ¿Cuál será el valor técnico antes del pago del tercer cupón de renta?

Rta: a) $859,31; b) $1.090

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 15

Un inversor está interesado en adquirir un bono emitido en dólares a un plazo de dos años, con amortización única al vencimiento y pago semestral de intereses, cuando faltan 14 días para el vencimiento del segundo semestre. La tasa de interés de emisión es de 0,06 nominal anual. ¿Cuál es el valor técnico considerando un VN U$S 1.000?

Rta: U$S 1.027,67

Para poner en práctica todo lo estudiado en esta unidad y en la anterior, les proponemos resolver los siguientes ejercicios. Los mismos han sido organizados bajo títulos que permiten identificar a qué tema corresponden:

EJERCITACIÓN

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y SELECCIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 16

Usted está estudiando la posibilidad de construir un edificio de departamentos, para lo cual necesita invertir $3.000.000, pudiéndolo vender en $4.000.000 cuando el mismo esté terminado. Si la empresa constructora le dice que tardará 2 años en terminar la obra y exige que se le pague de la siguiente manera:

a) Un pago al contado de $1.000.000.

b) Un pago de $2.000.000 cuando el edificio esté listo para su ocupación, al final del segundo año.

Y Considerando una tasa de costo de capital de 0,15 anual, evalúe según los criterios VAN y TIR si conviene llevar adelante el proyecto.

Rta: $512.287,33; 0,4142 anual. Sí conviene.

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 17

La empresa SAURA SA está estudiando invertir dinero en una cadena de pizzerías que le requiere una inversión inicial de $500 y de $200 durante el primer año , y genera flujos de fondos netos de $500 durante el segundo y tercer año y $700 al final de su vida, momento en el que se liquidan las instalaciones y el capital de trabajo, estimándose recibir $100 por la venta de los bienes de uso. Si la tasa de costo de capital es de 0,18 anual. Calcular el VAN, TIR y el Período de Recupero del proyecto, considerando que los datos están expresados en miles de pesos.

Rta: $391.923,82; 0,3726 anual; 3,05 años.

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 18

Alberto es un arquitecto que analiza los flujos de fondos de un proyecto de construcción de viviendas, en miles de pesos, de acuerdo con los siguientes datos:

Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	TIR	VAN (k=0,15 anual)
-10.000	5.000	10.000	-2.000	4.000	5.000	0,394 anual	$5.367,13

Verifique si los valores de VAN y TIR son correctos.

Rta: VAN: $5.271,94 (en miles de $); TIR: 0,3798 anual

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 19

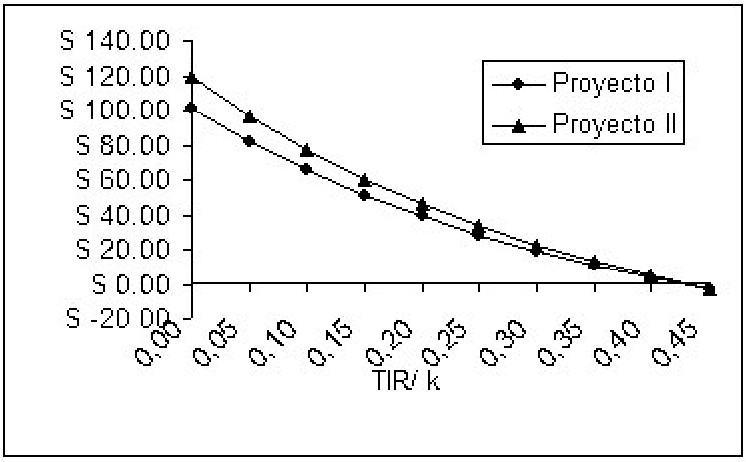
Examine los siguientes flujos netos de caja para dos inversiones (expresados en miles de pesos):

Año	*Inversión I*	*Inversión II*
0	-100	-100
1	60	45
2	64	60
3	77	115

Si la tasa de costo de capital es de 0,15 anual, responda:

a) ¿Cuál es el período de recupero, expresado en días, de cada una de las inversiones?

b) Si para aceptar una inversión se requiere un plazo máximo de recupero de dos años. ¿Cuál de estas dos es aceptable? ¿Es ésta necesariamente la mejor inversión?
c) Calcule VAN y TIR de ambas inversiones. ¿Cuál debería aceptarse según estos criterios?



Rta: a) 726 días (I); *805 días (I);*
b) Por PR se elige la Inv. I. No es la mejor.
c) $51.195,86 (I); $60.113,42 (II);
0,4268 anual (I); 0,4309 anual (II);
Inversión II.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 20

Teniendo en cuenta los criterios de selección de proyectos de inversión (PR, VAN y TIR), elija cuál de las siguientes alternativas de inversión es más conveniente, teniendo en cuenta que los proyectos son mutuamente excluyentes y usted cuenta con $8.000 para invertir. La tasa de costo de capital es de 0,20 anual.

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3
A	-8.000	2.000	6.000	9.000
B	-8.000	6.000	2.000	9.000
C	-4.000	1.500	2.000	4.500
D	-4.000	2.500	3.800	2.000

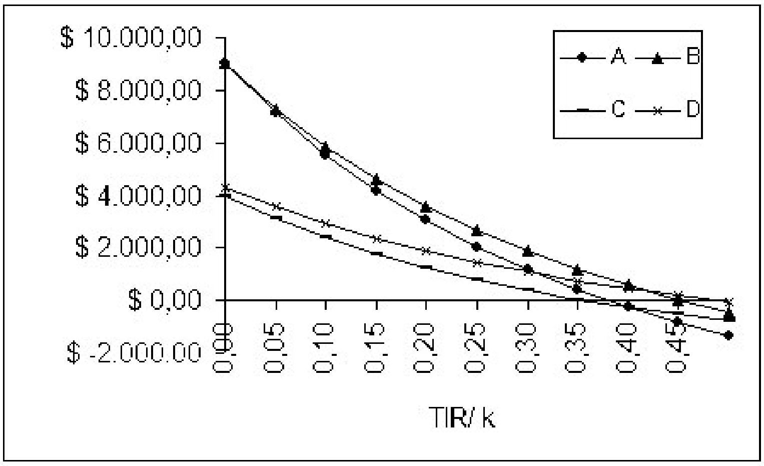
Grafique el comportamiento del VAN de estos proyectos y extraiga conclusiones.

Rta

	A	*B*	*C*	*D*
VAN	*$3.041,67*	*$3.597,22*	*$1.243,06*	*$1.879,63*
TIR	*0,3819 anual*	*0,454 anual*	*0,3558 anual*	*0,4887 anual*
PR	*2,42 años*	*2,31 años*	*2,52 años*	*1,73 años*

Ordenamiento

VAN	*TIR*	*PR*
B	*D*	*D*
A	*B*	*B*
D	*A*	*A*
C	*C*	*C*



Ejercicio a resolver

EJERCICIO 21

Se quiere invertir en un proyecto de inversión, para el cual se realizará un desembolso inicial de $40.000; siendo la tasa de costo de capital del 0,25 anual y los ingresos y egresos estimados del proyecto los siguientes:

Año	Ingresos	Egresos
1	$ 30.000	$ 5.000
2	$ 30.000	$ 10.000
3	$ 30.000	$ 15.000
4	$ 50.000	$ 20.000

Calcular:

a) Los Flujos de Fondos anuales.

b) El período de recupero.

c) El valor capital o VAN del proyecto.

d) Indicar si el proyecto se acepta o no.

Rta: a) $25.000; $20.000; $15.000 y $ 30.000
b) 2,94 años; c) $12.768; d) Sí se acepta.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 22

Una empresa ha contratado una consultora para que formule y evalúe un proyecto de inversión, para el cual se realizará una erogación inicial de $100.000. Si la tasa de costo de capital es de 0,28 anual y los ingresos y egresos estimados del proyecto son los siguientes:

Año	Ingresos	Egresos
1	$ 50.000	$ 20.000
2	$ 80.000	$ 30.000
3	$ 70.000	$ 30.000
4	$ 80.000	$ 10.000

Además, está previsto un ingreso de $15.000 al final del 4º año, por la venta de los bienes de uso.
Se pide:
a) Los Flujos de Fondos anuales.
b) El período de recupero.
c) La tasa interna de rendimiento.
d) Indicar si el proyecto se acepta o no.

Rta: a) $ 30.000; $50.000; $40.000; $85.000;
b) 3,85 años; c) 0,3032 anual; d) Sí se acepta

Ejercicio a resolver

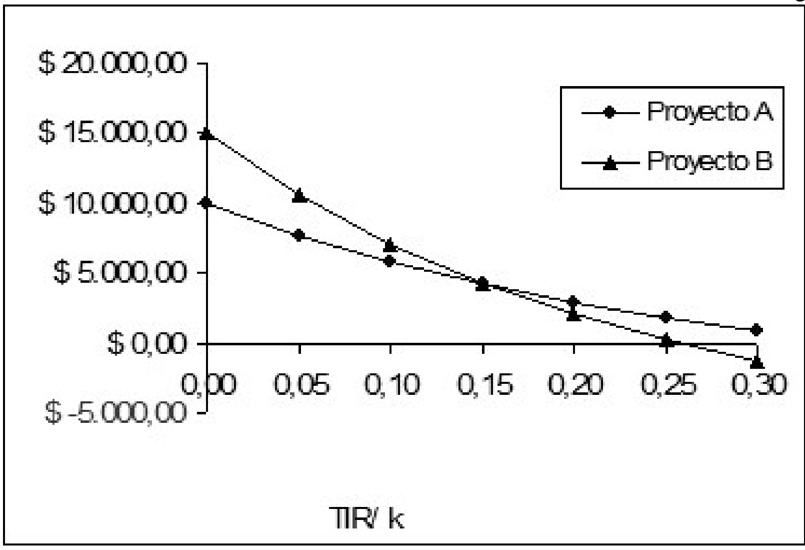
EJERCICIO 23
Dos proyectos mutuamente excluyentes tienen los siguientes flujos de efectivo proyectados:

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
P A	-10.000	5.000	5.000	5.000	5.000
P B	-10.000	0	0	0	25.000

a) Determine la tasa interna de rendimiento para cada proyecto.
b) Suponiendo una tasa de costo de capital de 0,10 anual, calcule el VAN para cada proyecto.
c) ¿Qué proyecto seleccionaría?

Rta: a) 0,3490 anual (A); 0,2574 anual (B);
b) $5.849,33 (A); $7.075,34 (B)
c) Ordenamiento:

VAN	*TIR*
B	*A*
A	*B*



EVALUACIÓN DE TÍTULOS DE DEUDA.

EJERCICIO 24
El 10/12 /08 se invirtieron $56.000 en:
I) compra de 6 bonos emitidos el 10/04/04, por VN $15.000. Cada bono da derecho al cobro de dos cupones: el cupón anteúltimo por intereses de $50 que vence el 10/06/09 y el último cupón que vence el 10/12/09 por intereses de $50 y amortización de $5.000. La tasa de rendimiento es de 0,11 semestral.

II) por el resto se deposita una suma que generará una renta mensual, constante y vencida de $3.000 durante un año, a partir del mes próximo.

Determine cuál de las dos alternativas de inversión fue más ventajosa.

Rta: Alt. II (i = 0,1466 semestral > i = 0,11 semestral)

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 25

El 05/01/2010 el Estado Nacional emitió un título de deuda que se amortizará mediante 6 cuotas trimestrales, cuya amortización es constante y la tasa de emisión es del 0,01 trimestral. El primer servicio de interés y amortización se realizará el 05/04/2010.

Determinar:

a) Los Flujos de Fondos, para un VN de $1.500;

b) El valor técnico, si con fecha 05/06/2010 se adquiere ese bono;

c) Si un inversor desea una rentabilidad del 0,6% mensual, ¿a qué precio compraría el 05/07/2010 después del pago de los servicios de renta y amortización?

d) ¿A qué paridad se realizó la operación del punto anterior?

Rta: a)

FF nº	Fecha	Amortización	Interés	$a_{(t)}$	Valor residual
1	05/04/10	250,00	15,00	265,00	1.250,00
2	05/07/10	250,00	12,50	262,50	1.000,00
3	05/10/10	250,00	10,00	260,00	750,00
4	05/01/11	250,00	7,50	257,50	500,00
5	05/04/11	250,00	5,00	255,00	250,00
6	05/07/11	250,00	2,50	252,50	-

b) $ 1.258,32; c) $980,44; d) 98,04%

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 26

Se emite un título de deuda a un año y medio de plazo con pagos de renta semestral al 0,10 nominal anual de interés, y amortización única al vencimiento. Para un VN $1.000, determine:

a) Los Flujos de Fondos.

b) ¿Cuál será el precio de compra al momento de la emisión, si el rendimiento deseado por un inversor es del 11% anual?

c) ¿Qué tasa mínima de rendimiento semestral se espera obtener si su precio fuera de $960?

Rta: a)

FF nº	Amortización	Interés	$a_{(t)}$	Valor residual
1		50,00	50,00	1.000,00
2		50,00	50,00	1.000,00
3	1.000,00	50,00	1.050,00	-

b) $990,36; c) 0,065106 semestral

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 27

Se emite un título con las siguientes características:

- plazo: 4 años

- pago de renta y amortización: semestrales
- tasa de interés: 0,02 semestral
- Amortización: sistema alemán.

Calcular, para un VN $1.000:
a) Los Flujos de Fondos.
b) La tasa de costo para el emisor, si el precio, al momento de la emisión, es de $ 875.

Rta: a)

FF nº	Amortización	Interés	***a*** $_{(t)}$	Valor residual
1	125,00	20,00	145,00	875,00
2	125,00	17,50	142,50	750,00
3	125,00	15,00	140,00	625,00
4	125,00	12,50	137,50	500,00
5	125,00	10,00	135,00	375,00
6	125,00	7,50	132,50	250,00
7	125,00	5,00	130,00	125,00
8	125,00	2,50	127,50	-

b) 0,05281 semestral.

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 28

¿Cuál será el valor técnico 15 días antes del vencimiento del tercer cupón, para un VN $100 de un bono emitido a un año de plazo, con pagos trimestrales de amortización, mediante sistema alemán y tasa de emisión de 0,10 nominal anual?

Rta: $51,04

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 29

Dado el siguiente título de deuda, emitido con las siguientes características:
- plazo: 2 años
- pago de servicio de renta: trimestral. Se enuncia un interés del 12% nominal anual.
- Amortización del capital: trimestral, por sistema alemán.

Para un VN $100, calcular:
a) Los Flujos de Fondos.
b) El valor de venta si al momento de la emisión del título, el emisor acepta un costo de 0,045 trimestral.
c) El precio máximo al que se negociará el bono al inicio del séptimo trimestre, si a partir de ese momento el mercado exige una rentabilidad del 4% trimestral.

Rta: a)

FF nº	Amortización	Interés	$a_{(t)}$	Valor residual
1	12,50	3,00	15,50	87,50
2	12,50	2,63	15,13	75,00
3	12,50	2,25	14,75	62,50
4	12,50	1,88	14,38	50,00
5	12,50	1,50	14,00	37,50
6	12,50	1,13	13,63	25,00
7	12,50	0,75	13,25	12,50
8	12,50	0,38	12,88	-

b) $94,15; c) $24,64

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 30

Un bono de VN $100 amortiza su capital en dos períodos anuales e iguales y ofrece servicios de renta de 0,05 semestral. Determine:

a) Los Flujos de Fondos.

b) El precio de venta al momento de la emisión del título, si el rendimiento esperado por los inversores es del 0,06 semestral.

Rta: a)

FF nº	Amortización	Interés	$a_{(t)}$	Valor residual
1		5,00	5,00	100,00
2	50,00	5,00	55,00	50,00
3		2,50	2,50	50,00
4	50,00	2,50	52,50	-

b) $97,35

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 31

Una empresa emite obligaciones negociables con un plazo de 3 años, y servicio de renta anual y amortización única al vencimiento, bajo las siguientes condiciones:

- Tasa de emisión: 0,11 anual
- Valor efectivo: $910

Determine, para un VN de $1.000:

a) La rentabilidad ofrecida al inversor.

b) Si el mercado ofrece para alternativas de inversión de semejante plazo y riesgo una tasa de 0,16 anual, ¿qué opción resulta más ventajosa?

c) Si la tasa del inciso a) disminuye en un punto porcentual anual, ¿cuál será el valor efectivo?

Rta: a) 0,149377 anual;
b) Conviene la alternativa a la tasa de 0,16 anual;
c) $931,73.

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las resoluciones de estos ejercicios en **formato video**.

EJERCICIO 32

Un inversor particular solicita su asesoramiento a los fines de invertir $50.000 en títulos públicos. Una de las alternativas es invertir en un bono de valor nominal $1.000 con fecha de emisión el 15/05/10 y fecha de vencimiento el 15/05/14. Se amortiza en partes anuales iguales e intereses semestrales, a la tasa de interés semestral de 0,04.

Calcular:

a) La TIR, considerando la fecha de valuación el 15/05/12, después del pago de servicio de renta y amortización, siendo el precio de cotización de $880 por cada $1.000 de valor residual.
b) La paridad al 29/05/13, siendo la cotización de $750 por cada $1.000 de valor residual.

Rta: a) 0,08781 semestral; b)74,77%

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 33
Dado el siguiente título de deuda:

Los siguientes títulos de deuda fueron extraídos de www.bolsar.com. Por razones didácticas, algunos datos fueron simplificados.

Símbolo:	**BP15**
Emisor:	Provincia de Buenos Aires
Denominación:	"TITULOS DE DEUDA PUBLICA DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES AL 11,75% CON VENCIMIENTO EN 2015"
Tipo de Especie:	Títulos Públicos
Tipo:	Títulos Provinciales
Fecha de Emisión:	05/10/2010
Fecha de vencimiento:	05/10/2015
Moneda de emisión:	Dólares
Interés:	Tasa fija anual del 11,75% desde fecha de emisión, pagadera semestralmente el 5 de abril y el 5 de octubre de cada año, comenzando el 05/04/11. Los intereses se calcularán sobre la base de un año de 360 días integrado por 12 meses de 30 días cada uno.
Forma de amortización:	Integra al vencimiento.

Determine, para un VN U$S100, los Flujos de Fondos.

Rta:

FF nº	Fecha	Amortización	Interés	$a_{(t)}$	Valor residual
1	05/04/2011		5,88	5,88	100,00
2	05/10/2011		5,88	5,88	100,00
3	05/04/2012		5,88	5,88	100,00
4	05/10/2012		5,88	5,88	100,00
5	05/04/2013		5,88	5,88	100,00
6	05/10/2013		5,88	5,88	100,00
7	05/04/2014		5,88	5,88	100,00
8	05/10/2014		5,88	5,88	100,00
9	05/04/2015		5,88	5,88	100,00
10	05/10/2015	100,00	5,88	105,88	-

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 34
Si un inversor compró el siguiente título el 15/04/2013 a $157,75 antes de los servicios de renta y amortización y lo vende el 15/08/2013 a $ 103,80, después de los servicios de renta y amortización, ¿cuál es la tasa de rendimiento para 30 días?

Símbolo	PRE9
Denominación	BONOS DE CONSOLIDACION DE DEUDAS PREVISIONALES - CUARTA SERIE
Emisor	Gobierno Nacional
Fecha de emisión	15/03/2004
Fecha de vencimiento	15/03/2014
Moneda de emisión	Pesos
Interés	Devengarán intereses sobre saldos ajustados[2] a partir de la fecha de emisión, a la tasa del 2% anual. Los intereses se capitalizarán mensualmente hasta el 15 de marzo de 2008 y se pagarán conjuntamente con las cuotas de amortización. Se calcularán hasta el día de vencimiento de cada servicio, tomándose como base del cálculo meses de 30 días divididos por un año de 360 días (30/360).
Primer servicio de interés	15/04/2008
Forma de amortización	Se efectuará en 72 cuotas mensuales, iguales y sucesivas, equivalentes las 70 primeras al 1,35% y las dos últimas equivalentes al 2,75% del monto emitido, más los intereses capitalizados hasta el 15 de marzo de 2008. La primera cuota vencerá el 15 de abril de 2008.

La parte correspondiente del cuadro de amortización del bono es la siguiente:

	Fecha	Amortización	Interés	$a_{(t)}$	Valor residual
	15/03/2013				180,40
	15/04/2013	15,03	0,30	15,33	165,37
	15/05/2013	15,03	0,27	15,30	150,34
	15/06/2013	15,03	0,25	15,28	135,31
	15/07/2013	15,03	0,22	15,25	120,28
	15/08/2013	15,03	0,20	15,23	105,25

Rta: 0,04369 para 30 días

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 35

El siguiente título de deuda corresponde a Obligaciones Negociables. Si un inversor lo compra el 19/04/2011 a $558, ¿a qué paridad se realizó la operación?

Código	OEDS7
Empresa	EMPRESA DISTRIBUIDORA SUR S.A. (EDESUR)
Fecha de emisión	19/06/2007
Fecha de vencimiento	19/06/2012

[2] Los intereses se calculan sobre el saldo a partir de la fecha de emisión, acumulando los mismos, al 2% anual, hasta la fecha del primer servicio de renta.

Interés	Tasa Fija Anual del 11,75% desde la fecha de emisión, con pago trimestral. Primer pago el 19/09/2007
Primer servicio de interés	19/09/2007
Forma de amortización	Serán amortizadas en cinco cuotas semestrales, iguales y consecutivas. La primera cuota será pagadera a los 36 meses de la fecha de emisión (19/06/2010) -
Primer servicio de amortización	19/06/2010
Moneda de emisión	Pesos

Rta: 92,09%

DIALOGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

INTEGRANDO IDEAS

El estudio de los contenidos de esta unidad nos permite adquirir nuevas herramientas para el estudio de alternativas de inversión y financiamiento. En primer lugar, definimos diferentes criterios que nos permiten evaluar la conveniencia y el rendimiento de proyectos de inversión: Valor Actual Neto, Tasa Interna de Rentabilidad y Período de Recupero de la Inversión Inicial, determinamos sus fórmulas de cálculo y la interpretación de los resultados obtenidos.
Posteriormente analizamos las características de los títulos de deuda, enunciando sus componentes y realizando su análisis financiero desde el punto de vista del emisor y del inversor, aplicando los criterios que aprendimos al evaluar los proyectos de inversión. Construimos también, el flujo de fondos de un título de deuda y determinamos la relación de paridad.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:

CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Primera Parte. Córdoba Fac. de Cs. Económicas U.N.C. (2001).

YASUKAWA, Alberto M. *Matemática Financiera.* Córdoba. LDM Editorial (2007).

U8

BLOQUE 4

UNIDAD 8
CONCEPTOS DEMOGRÁFICOS BÁSICOS

UNIDAD 8:
Conceptos demográficos básicos

CONTENIDOS

Funciones biométricas elementales. Cantidad de personas vivas de edad exacta. Cantidad de personas fallecidas entre dos edades. Cantidad de personas vivas entre dos edades. Probabilidad de vida y de muerte para una persona. Tasa de mortalidad. Tasa central de mortalidad. Tablas de mortalidad: principales elementos para su construcción

OBJETIVOS

- Reconocer y calcular las principales funciones biométricas.
- Comprender la importancia de la tasa central de mortalidad para la construcción de una tabla de mortalidad.
- Utilizar distintas tablas de mortalidad en las aplicaciones propuestas.

PRESENTACIÓN

AULA VIRTUAL
SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **presentación de la Unidad 8**. Allí los profesores proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de los temas abordados en esta unidad.

Una de las aplicaciones de los conceptos financieros son las operaciones de seguro. Consideramos, desde el punto de vista legal, que un seguro es un contrato por el cual un asegurador, a cambio del cobro de una prima, se obliga a indemnizar el daño producido por la ocurrencia de determinado siniestro. Todo seguro tiene por objetivo cubrir el riesgo de que se produzca un evento de carácter negativo como puede ser un accidente, una enfermedad o la muerte.
Nos interesa su análisis desde el punto de vista financiero porque un contrato de seguro implica un intercambio no simultáneo de capitales a título oneroso, lo que define una operación financiera. Pero necesitamos incorporar conceptos vinculados a los riesgos a cubrir por el seguro contratado para poder comprender y resolver este tipo de operaciones. Para ello trabajaremos a partir del siguiente ejemplo:

La señora Julieta Coppa tiene exactamente 38 años e hijos pequeños. Preocupada en que pueda sucederle algún hecho grave y no poder asistir a sus hijos, estudia la posibilidad de contratar algún tipo de seguro. En primer lugar quiere conocer cuáles son las probabilidades de que fallezca el los próximos 10 años y cuál es la posibilidad de que llegue con vida a los 60 años, edad en la que considera que sus hijos podrán valerse por si mismos.

RECURSOS A UTILIZAR
EN LA UNIDAD 8

- Material Teórico – Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios

Poder determinar la probabilidad de supervivencia o la de fallecimiento de una persona, serán algunos de los aspectos que aprenderemos en esta unidad y que, combinados con los conocimientos financieros acerca de rentas que ya aprendimos, nos serán útiles para abordar el estudio de algunos tipos de seguros.

Matemática Actuarial

La matemática actuarial tiene por objetivo el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro a fin de la toma de decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas.
Forman parte de este objetivo:

- El cálculo de primas, tarifas y reservas en las operaciones de seguro,
- El análisis de los sistemas actuariales en los seguros colectivos y planes de jubilaciones y pensiones,
- La determinación de las magnitudes de estabilidad de las entidades aseguradores y el análisis de su solvencia.

La base de la actividad aseguradora reside en la existencia de un equilibrio entre las prestaciones que realizará la compañía de seguros y la contraprestación que ella recibe del asegurado.
Para alcanzar sus objetivos se ayuda de la matemática financiera, la demografía, la biometría y la bioestadística.
La **demografía** tiene como objeto el estudio de la población, su volumen, composición y estructura, entre otros aspectos.
Por su parte la **biometría** estudia cuantitativamente el fenómeno de la vida y de la supervivencia, ayudándose de la **bioestadística**, que es la rama de la estadística que se ocupa de analizar las distintas leyes que rigen las agrupaciones humanas en cuanto a natalidad, mortalidad, migraciones, supervivencia, etc.

Funciones biométricas elementales

Cada persona tiene su línea de vida que comienza en el momento de su nacimiento y termina en la de su fallecimiento, habiendo transcurrido n años.
Consideraremos personas de edad exacta x, a todos aquellos que, en un momento dado, han cumplido x años de edad.
Mediante estadísticas demográficas adecuadas se pretende seguir la evolución a lo largo del tiempo de un grupo de personas nacidas simultáneamente y determinar cuántas de ellas cumplen 1, 2, 3, ..., ω años, siendo ω la edad máxima a la que puede llegar una persona. La cantidad de éstas que van llegando a cada edad, así como las que fallecen, se reflejan en las llamadas tablas de mortalidad. Para resolver los ejemplos y ejercicios de esta unidad y de la siguiente, trabajaremos con las Tablas Actuariales para Argentina del año 1991-1992 de la SAFJP, que se encuentran al final de la unidad.

Denominaremos l_0 el grupo inicial de personas, que constituye una cantidad arbitraria fijada por el constructor de la tabla en valores múltiplos de 10. Por lo tanto:
l_1 = representa la cantidad de personas de edad exacta 1.
l_{20} = representa la cantidad de personas de edad exacta 20.

En general:

l_x = representa la cantidad de personas de edad exacta x .

Esta función comenzará, entonces, con un valor múltiplo de 10, (10.000, 100.000) e irá disminuyendo por los fallecimientos de las personas a las diferentes edades, hasta llegar a la edad ω , en donde no quedarán sobrevivientes, es decir:

$l_\omega = 0$

Los valores de l_x en las Tablas de Mortalidad para Argentina 1990-1992, para ambos sexos, se observan en el siguiente Gráfico:

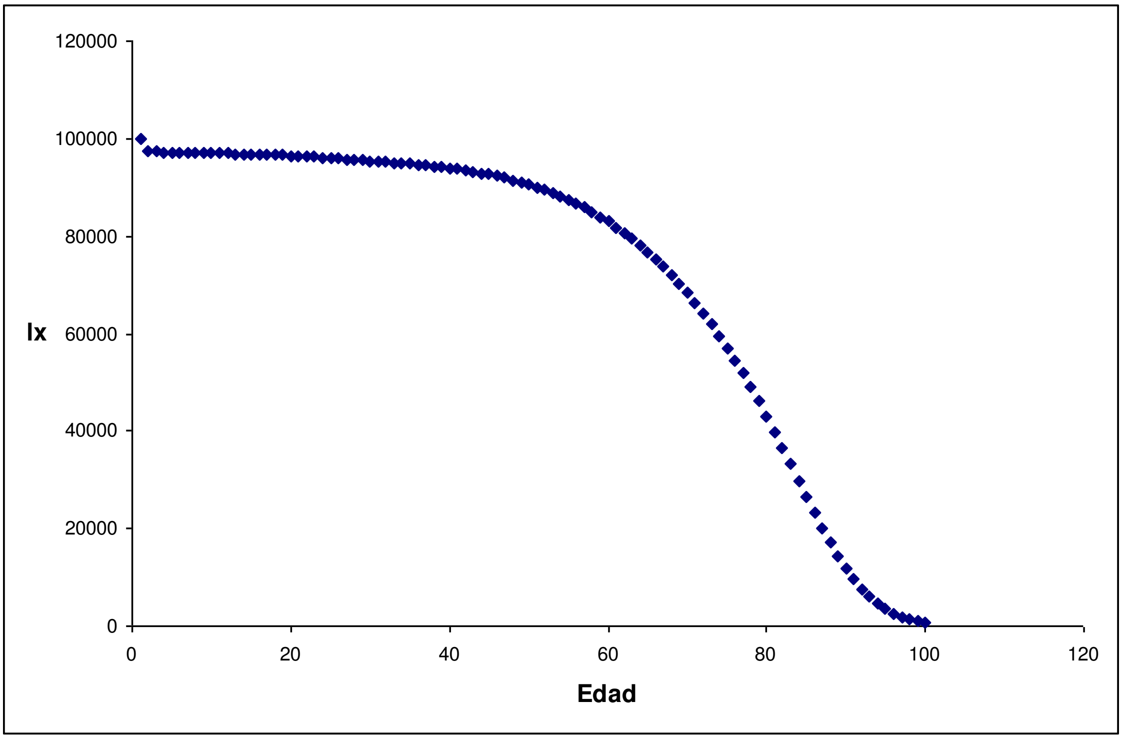


Gráfico 1

Como vemos, l_x es decreciente, por los fallecimientos que se producen en cada edad.

Denominaremos:

d_x = la cantidad de personas fallecidas entre las edades x y $x+1$. Contaremos aquí todas la personas que habiendo cumplido la edad x no llegaron con vida a $x+1$.

Ejemplo 8.1:

d_{25} = representa la cantidad de fallecidos a los 25 años, es el número de personas que habiendo cumplido 25 años, fallecieron antes de cumplir 26.

d_x se obtiene:

$$\boxed{d_x = l_x - l_{x+1}}$$

Lo que nos indica que la cantidad de fallecidos a la edad exacta x es la diferencia entre la cantidad de personas de edad exacta x y los de $x+1$.
Despejando:

$$l_{x+1} = l_x - d_x$$

la cantidad de personas de edad $x+1$ es la diferencia entre la cantidad de edad x y los fallecidos a la edad x.

Por último:

$$l_x = l_{x+1} + d_x$$

que nos permite afirmar que de las personas de edad x, algunas vivirán un año más (l_{x+1}) y las otras fallecerán antes de cumplir $x+1$ (d_x).

El Gráfico 2 nos ilustra acerca de los valores de d_x según las Tablas Actuariales para Argentina 1990-1992, para ambos sexos.

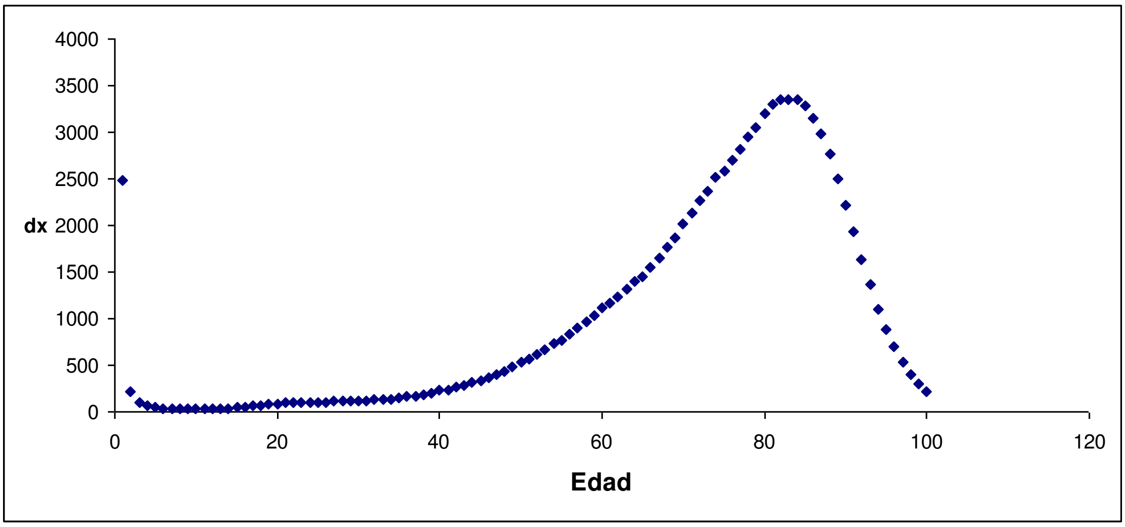


Gráfico 2

Como todas las personas que componen el grupo inicial l_0 fallecerán en algún momento, afirmamos que:

$$\sum_{t=0}^{\omega} d_t = l_0$$

L_x nos indica la cantidad de personas de edad x en un momento dado, es decir, las que habiendo cumplido x años, no han llegado a la edad $x+1$.
Este valor puede ser real, obteniéndose a través de un censo o una muestra, o puede ser teórico si se calcula a través de los valores de la tabla de mortalidad. Si se determina de esta última manera:

$$L_0 = l_0 - \frac{1}{2} d_0$$

$$L_1 = l_1 - \frac{1}{2} d_1$$

...

$$L_x = l_x - \frac{1}{2} d_x$$

Esta última expresión nos está indicando que, partiendo de l_x, que es la cantidad de personas de edad exacta x y que algunas ellas llegarán con vida a la edad $x+1$ y otras fallecerán sin alcanzarla y, considerando que estas muertes se distribuyen de manera uniforme a lo largo del año en un momento dado, se habrán producido la mitad de estos fallecimientos.

Como $d_x = l_x - l_{x+1}$:

$$L_x = l_x - \frac{1}{2}\left(l_x - l_{x+1}\right)$$

Resolvemos el producto:

$$L_x = l_x - \frac{1}{2} l_x + \frac{1}{2} l_{x+1}$$

Restamos los dos primeros términos:

$$L_x = \frac{1}{2} l_x + \frac{1}{2} l_{x+1}$$

$$\boxed{L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}}$$

Probabilidad de vida y de muerte de una persona

Recordemos que probabilidad es la posibilidad u oportunidad de que suceda un evento particular. Su valor varía entre 0 y 1 y se obtiene del cociente entre:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{n}^{\circ} \text{ de resultados en los que ocurre el evento}}{\text{n}^{\circ} \text{ total de resultados posibles}}$$

A continuación definiremos distintas probabilidades referidas a la vida y el fallecimiento de las personas:

${}_n p_x$ es la probabilidad de que una persona de edad exacta x viva n años más, es decir, llegue con vida a la edad $x+n$.

Teniendo en cuenta la definición que indicamos anteriormente para la probabilidad:

$$\boxed{{}_{n}p_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}}}$$

consideramos en el denominador la cantidad de personas que llegaron a la edad x, y en el numerador la cantidad de ellas que cumplen $x+n$.

Ejemplo 8.2:

${}_{8}p_{30} = \frac{l_{38}}{l_{30}}$, nos indica la probabilidad de que una persona de 30 años viva 8 años más, es decir, llegue con vida hasta los 38 años.

p_x es la probabilidad de que una persona de edad exacta x viva un año más, es decir, llegue con vida a la edad $x+1$:

$$\boxed{p_{x} = \frac{l_{x+1}}{l_{x}}}$$

q_x es la probabilidad de que una persona de edad exacta x fallezca a esa edad, es decir, no llegue con vida a la edad $x+1$:

$$\boxed{q_{x} = \frac{d_{x}}{l_{x}} = \frac{l_{x} - l_{x+1}}{l_{x}}}$$

Distribuyendo el denominador:

$$q_{x} = \frac{l_{x}}{l_{x}} - \frac{l_{x+1}}{l_{x}} = 1 - p_{x}$$

Efectivamente, la probabilidad de morir o de sobrevivir un año más son complementarias:

$$p_{x} + q_{x} = 1$$

${}_{n}q_{x}$ es la probabilidad de que una persona de edad exacta x fallezca en los próximos n años, es decir, no llegue con vida a la edad $x+n$:

$$\boxed{{}_{n}q_{x} = \frac{l_{x} - l_{x+n}}{l_{x}}}$$

$$ {}_{n}q_{x} = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_{n}p_{x} $$

Ejemplo 8.3:

${}_{12}q_{45}$ indica la probabilidad de que una persona de edad exacta 45 fallezca en los próximos 12 años, es decir, no llegue con vida a los 57 años.

$$ {}_{12}q_{45} = \frac{l_{45} - l_{57}}{l_{45}} $$

${}^{m}/{}_{n}q_{x}$ es la probabilidad de que una persona de edad exacta x fallezca en los n años posteriores a $x+m$, es decir, llegando con vida a la edad $x+m$ no alcance la edad $x+m+n$:

$$ \boxed{ {}^{m}/{}_{n}q_{x} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} } $$

$$ {}^{m}/{}_{n}q_{x} = \frac{l_{x+m}}{l_x} - \frac{l_{x+m+n}}{l_x} = {}_{m}p_{x} - {}_{m+n}p_{x} $$

Ejemplo 8.4:

${}^{5}/{}_{10}q_{62}$ indica la probabilidad de que una persona de edad exacta 62 fallezca en los 10 años posteriores a sobrevivir 5 años. También podemos indicar que es la probabilidad de una persona de edad exacta 62, llegue con vida hasta los 67 y fallezca en los 10 años siguientes, es decir, antes de cumplir los 77 años:

$$ {}^{5}/{}_{10}q_{62} = \frac{l_{67} - l_{77}}{l_{62}} $$

${}^{n-1}/{}_{1}q_{x}$ es la probabilidad de que una persona de edad exacta x fallezca a la edad $x+n-1$, es decir, llegando con vida a la edad $x+n-1$ no alcance la edad $x+n$:

$$ \boxed{ {}^{n-1}/{}_{1}q_{x} = \frac{d_{x+n-1}}{l_x} = \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} } $$

$$ {}^{n-1}/{}_{1}q_{x} = \frac{l_{x+n-1}}{l_x} - \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_{n-1}p_{x} - {}_{n}p_{x} $$

Ejemplo 8.5:

$^{5}/_{1}q_{54}$ indica la probabilidad de que una persona de edad exacta 54 fallezca a los 59 años, es decir, llegue con vida hasta los 59 años y fallezca a esa edad, antes de cumplir 60 años:

$$^{5}/_{1}q_{54} = \frac{d_{59}}{l_{54}} = \frac{l_{59} - l_{60}}{l_{54}}$$

Retomando el caso inicial

Ya estamos en condiciones de dar respuesta a las preguntas de la señora Julieta Coppa, que presentamos al comienzo de esta unidad. Recordemos:

- En primer lugar quiere conocer la probabilidad de fallecer en los próximos 10 años y considerando que hoy tiene exactamente 38 años, el resultado lo obtenemos realizando el siguiente cálculo:

$$_{10}q_{38} = \frac{l_{38} - l_{48}}{l_{38}}$$

Debemos buscar esos valores en la tabla de Mujeres:

	37	95444	144	0,001[illegible]
	38	95300	154	0,0016
	39	95146	171	0,0018
	40	94975	181	0,0019
	41	94794	195	0,0020
	42	94599	209	0,0022
	43	94390	227	0,0024
	44	94163	242	0,0025
	45	93921	263	0,0028
	46	93658	282	0,0030
	47	93376	304	0,0032
	48	93072	327	0,0035
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

y reemplazar por los valores hallados:

$$_{10}q_{38} = \frac{95.300 - 93.072}{95.300} = 0,0239$$

Por lo tanto, la probabilidad de fallecer en los próximos 10 años es de 0,0239.

- En segundo lugar, la Sra. Coppa desea conocer la probabilidad de que llegue con vida a los 60 años, lo cual se determina a través del siguiente cálculo:

$$_{22}p_{38} = \frac{l_{60}}{l_{38}}$$

Con ello estaremos determinando la probabilidad de que viva 22 años más, es decir, llegue con vida hasta los 60. Buscando los valores en la tabla y reemplazando:

59	87806	721	0,00821	87446
60	87085	765	0,00878	86703
61	86320	820	0,00950	85910
62	85500	880	0,01029	85060

$$_{22}p_{38} = \frac{87.085}{95.300} = 0,9138$$

obtuvimos entonces que la probabilidad de la Sra. Julieta de llegar con vida a los 60 años es 0,9138

Le proponemos ahora, resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 1
¿Cuántos hombres entre 1.000.000 que tienen 1 año llegarán vivos a la edad de 50 años?

Rta. : 902.855

EJERCICIO 2
¿Cuál es la probabilidad que tiene un hombre de 61 años de vivir un año más?

Rta. : 0,97830

EJERCICIO 3
¿Cuál es la probabilidad de que un hombre de 50 años de edad, logre estar vivo a los 65 años?

Rta. : 0,77640

EJERCICIO 4
¿Cuántos hombres de 46 años, morirán antes de cumplir 47 años de edad?

Rta. : 525

EJERCICIO 5
Determine la probabilidad de que un hombre de 18 años muera:

a) antes de cumplir 19 años
b) antes de cumplir 60 años

Rta. : a) 0,00115 b) 0,20160

EJERCICIO 6
Determine la probabilidad de que un hombre de 15 años de edad muera entre los 25 y los 30 años.

Rta. : 0,00766

EJERCICIO 7
¿Cuál es la probabilidad de que un hombre de 30 años muera a los 51 años?

Rta. : 0,00871

Tasa de mortalidad

La tasa de mortalidad para una edad x se obtiene del cociente del número de personas fallecidas a la edad x y la cantidad de personas de edad exacta x:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

que como podemos observar es lo que indicamos anteriormente como la probabilidad de que una persona de edad exacta x fallezca a esa edad.
Es decir, las probabilidades representan a su vez tasas (tasa de mortalidad en este caso), vinculándonos una variable flujo en el numerador (la cantidad de fallecidos) con una variable stock (cantidad de personas de edad x) en el denominador.

El Gráfico 3 refleja la tasa de mortalidad para cada edad, para las tablas indicadas anteriormente:

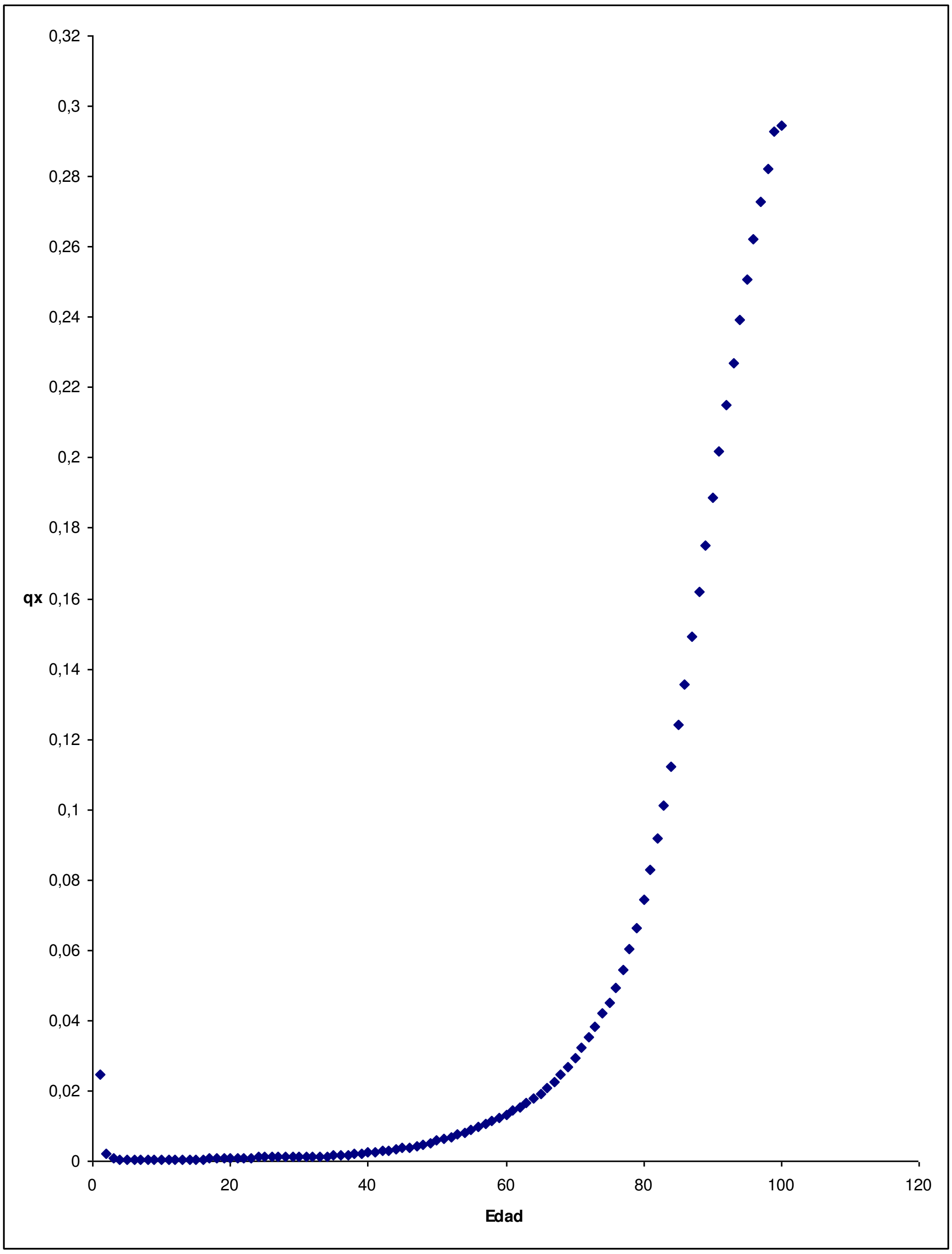


Gráfico 3

Tasa central de mortalidad

A partir de la tasa de mortalidad definida en la sección anterior, la tasa central de mortalidad se obtiene remplazando l_x por L_x:

$$\boxed{m_x = \frac{d_x}{L_x}}$$

Esta tasa de mortalidad recibe el nombre de central porque la población considerada es L_x ya que tomamos los fallecidos a lo largo de todo el año y estos tienden a distribuirse de manera uniforme a lo largo del mismo entonces es razonable tomar la población a la mitad del año.

Esta tasa puede ser teórica si tomamos los valores de una tabla de mortalidad pero también real si L_x se obtiene, por ejemplo, de un censo y d_x de los registros de defunciones correspondientes a la población censada.

Remplazando $L_x = l_x - \frac{1}{2} d_x$:

$$m_x = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2} d_x}$$

Dividimos numerador y denominador por l_x:

$$m_x = \frac{\dfrac{d_x}{l_x}}{\dfrac{l_x - \frac{1}{2} d_x}{l_x}}$$

Sabemos que $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, sustituimos en el numerador y resolvemos el cociente en el denominador:

$$m_x = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} q_x}$$

Multiplicamos numerador y denominador por 2:

$$m_x = \frac{2q_x}{2 - q_x}$$

donde nos ha quedado expresada la tasa central de mortalidad en términos de la tasa de mortalidad. Despejemos ahora q_x:

$$m_x\left(2-q_x\right)=2q_x$$

Multiplicamos:

$$2m_x-q_xm_x=2q_x$$
$$2m_x=2q_x+q_xm_x$$

Extraemos factor común en el segundo miembro de la igualdad:

$$2m_x=q_x\left(2+m_x\right)$$

Finalmente:

$$\boxed{q_x=\frac{2m_x}{2+m_x}}$$

obteniendo la tasa de mortalidad en función de la tasa central de mortalidad.

Tabla de mortalidad

La tabla de mortalidad consiste en una serie cronológica que expresa la reducción progresiva de un grupo inicial de individuos de la misma edad, a causa de su fallecimiento mostrando el comportamiento de la supervivencia de una población.
Para comprender lo que indica una tabla de mortalidad, supongamos que, con el fin de analizar la mortalidad de cierta región se toma un grupo numeroso de recién nacidos de edad exacta 0 y se los observa hasta que todos fallecen, registrando, año a año, los fallecimientos producidos y el número de sobrevivientes. Más allá del inconveniente de hacer este seguimiento por, supongamos 100 años, llegaríamos a obtener un registro más o menos completo de la mortalidad experimentada por el grupo inicial a las distintas edades en esa región y durante ese período. Pero no se construye una tabla de esta manera, por el tiempo que llevaría y porque la mortalidad disminuye con el transcurso del tiempo y está afectada por los cambios médicos, sanitarios, económicos, sociales, entre otros. Estas tablas se denominan "**de generación**" y sólo unos pocos países disponen de ellas.
En realidad, las tablas de mortalidad se determinan para una población determinada y para un año dado (denominadas tablas "**de momento**").
Un procedimiento posible para construirla es la siguiente:

Partiendo de disponer los siguientes datos:

- La distribución por edad de la población en un momento dado (un censo, por ejemplo)
- Los fallecimientos por edad en esa población durante un año determinado (información obtenida del Registro Civil).

Por ejemplo, si tenemos los datos del censo del año 2.010, puede tomarse la población distribuida en sus distintas edades. De esta manera se cuenta con L_x .

Por otro lado, se toman las defunciones por edades. A los fines de que el valor no quede afectado por eventos extraordinarios, pueden promediarse un conjunto de años anteriores y posteriores al año en cuestión. Por ejemplo, se toman los fallecimientos del año 2.010, los dos años anteriores (2.008 y 2.009) y los posteriores (años 2.011 y 2.012) y se promedian. Con esta información tendremos d_x.

Luego, con los datos obtenidos se calcula la tasa central de mortalidad:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

Con ella determinamos q_x:

$$q_x = \frac{2m_x}{2+m_x}$$

Generalmente estos valores son corregidos de posibles errores.
Se define l_0 y sabiendo que:

$$q_0 = \frac{d_0}{l_0}$$

Son conocidas q_0 y l_0, entonces:

$$d_0 = l_0 . q_0$$

Luego determinamos:

$$l_1 = l_0 - d_0$$

Y se continúa con la construcción de la tabla.

En general, una tabla de mortalidad contará con la siguiente información:

x	l_x	d_x	q_x	L_x	T_x	e_x
1	l_1	d_1	q_1	L_1	T_1	e_1
2	l_2	d_2	q_2	L_2	T_2	e_2
...	...	...	...	...	...	...

Los primeros cinco elementos ya los hemos caracterizado. Respecto a los dos últimos sólo indicaremos que:

T_x = es la cantidad de existencia abreviada y representa el número de años que le queda por vivir al conjunto l_x.

e_x = vida media abreviada, es el promedio de años que le queda por vivir a una persona de edad x, en el supuesto de que todos los años que le queda por vivir al grupo se distribuye de manera uniforme entre los integrantes del grupo.

Las estadísticas demográficas han demostrado que la mortalidad varía con el sexo, lo cuál ha conducido a que se construyan tablas distintas para hombres y mujeres.

EJERCITACIÓN

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 8

Determine la probabilidad de que:

a) Un hombre de 29 años sobreviva al menos un año;
b) Un hombre que celebra su 50 aniversario festeje el 51.

Rta. : a) 0,99840 b) 0,99140

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de estos ejercicios en formato video.

EJERCICIO 9

Determine la probabilidad de que un hombre de 35 años sobreviva:

a) al menos un año
b) al menos 20 años

Rta. : a) 0,99789 b) 0,88935

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 10

Un señor de 25 años debe recibir una herencia al cumplir 30 años. ¿Cuál es la probabilidad de que la reciba?

Rta. : 0,99220

EJERCICIO 11

Los graduados de un curso de último año de un colegio se comprometen en reunirse 25 años después. Si el curso tiene 50 alumnos y la edad promedio es de 18 años, ¿cuál es el número probable de ex-alumnos que se reunirá? Utilice la tabla para ambos sexos.

Rta. : 48

EJERCICIO 12

¿Cuál es la probabilidad de un hombre de 56 años de morir antes de cumplir 57 años?

Rta. : 0,01484

EJERCICIO 13

¿Cuál es la probabilidad de que un hombre de 60 años muera, antes de llegar a los 61 años?

Rta. : 0,02030

EJERCICIO 14

¿Cuál es la probabilidad de que un hombre de 40 años muera, antes de cumplir 75 años?

Rta. : 0,52917

EJERCICIO 15

Determine la probabilidad de que un hombre de 35 años de edad muera antes de cumplir los 40 años.

Rta. : 0,01250

EJERCICIO 16

Hay un grupo de 1000 personas de una misma edad; si las probabilidades son de que 19 mueran antes de cumplir el siguiente aniversario, hallar, utilizando las tablas para ambos sexos, la edad de las personas.

Rta. : 64 años

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 17

Determine la probabilidad de que un hombre de 22 años muera:

a) entre los 25 y los 30 años
b) entre los 30 y los 40 años

Rta. : a) 0,00772 b) 0,02097

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de estos ejercicios en formato video.

EJERCICIO 18

Hallar la probabilidad de que un hombre de 30 años, esté vivo a los 50 años, pero no a los 60 años.

Rta. : 0,11660

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 19

Hallar la probabilidad de que un hombre de 35 años muera a los 65 años de edad.

Rta. : 0,02118

EJERCICIO 20

Determine la probabilidad de que un hombre de 45 años muera:

a) a los 45 años
b) a los 46 años
c) a los 70 años

Rta. : a) 0,00524 b) 0,00579 c) 0,02820

EJERCICIO 21

De 60.000 hombres vivos a la edad de 20 años, ¿cuántos morirán a la edad de 50 años?

Rta. : 470

EJERCICIO 22

Carolina cumplió 18 años al ingresar a la Universidad. Determine la probabilidad de que:

a) fallezca en el lapso de 5 años que dura su carrera
b) fallezca antes de cumplir 20 años
c) celebre con sus compañeros el 10° aniversario de su graduación.

Rta. :a) 0,00290, b) 0,00109 c) 0,98890

EJERCICIO 23

El padre de Carolina tenía 50 años al entrar ella a la universidad. Determine la probabilidad de que:

a) esté vivo para asistir a la graduación de su hija
b) fallezca el año de la graduación de su hija.

Rta. : a) 0,94879 b) 0,01290

EJERCICIO 24

Si la generación de Carolina está formada por 160 personas de 18 años, 200 de 19 y 120 de 20 años, determine de acuerdo con las probabilidades de vida:

a) los que estarán vivos para la fiesta de graduación
b) los que celebrarán los 10 años de la terminación de la carrera

Utilice las tablas para ambos sexos.

Rta. : a) 477 b) 472

BIBLIOTECA

Aquí podrán consultar otros recursos que los docentes pondrán a disposición.

INTEGRANDO IDEAS

A los largo de esta unidad nos hemos introducido en un campo nuevo del conocimiento, aprendiendo sobre las funciones biométricas que nos permiten determinar distintos tipos de probabilidades ligadas a la vida y el fallecimiento de las personas. También hemos analizado las tasas de mortalidad y tasa central de mortalidad, que nos son de utilidad para la construcción de las tablas de mortalidad.

Finalmente definimos y reconocimos diferentes maneras de construir una tabla de mortalidad y aprendimos a identificar los elementos que la componen y cómo operar con ellas.

Todo lo saberes aportados por esta unidad nos permitirán poder abordar la determinación de las primas correspondientes a distintos tipos de seguro, que estudiaremos en la próxima unidad.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:

CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Segunda Parte. Córdoba Fac. de Cs. Económicas U.N.C. (2001).

YASUKAWA, Alberto M. *Matemática Actuarial y valuaciones actuariales.* Córdoba. LDM Editorial (2001).

Tabla de Mortalidad de Argentina 1990-92 **AMBOS SEXOS**

x	lx	dx	qx	Lx	x	lx	dx	qx	Lx
0	100000	2481	0,02481	97904	50	90058	574	0,00637	89771
1	97519	210	0,00215	97395	51	89484	621	0,00694	89174
2	97309	99	0,00101	97257	52	88863	671	0,00755	88528
3	97211	59	0,00060	97180	53	88192	728	0,00825	87828
4	97152	45	0,00046	97129	54	87464	773	0,00884	87077
5	97107	35	0,00036	97090	55	86691	837	0,00966	86272
6	97072	33	0,00034	97056	56	85853	904	0,01053	85401
7	97039	31	0,00032	97024	57	84949	969	0,01141	84464
8	97008	31	0,00032	96993	58	83980	1029	0,01225	83465
9	96977	30	0,00031	96963	59	82951	1109	0,01338	82396
10	96947	30	0,00031	96934	60	81841	1171	0,01431	81256
11	96917	31	0,00032	96903	61	80670	1234	0,01530	80053
12	96886	33	0,00034	96872	62	79436	1313	0,01653	78780
13	96853	38	0,00039	96836	63	78124	1395	0,01786	77426
14	96815	45	0,00047	96794	64	76729	1456	0,01898	76001
15	96770	54	0,00056	96745	65	75273	1552	0,02061	74497
16	96716	64	0,00066	96686	66	73721	1648	0,02236	72897
17	96652	73	0,00076	96617	67	72073	1765	0,02449	71190
18	96579	82	0,00085	96540	68	70307	1871	0,02661	69372
19	96497	88	0,00091	96454	69	68437	2020	0,02952	67427
20	96409	93	0,00097	96364	70	66417	2139	0,03221	65347
21	96316	98	0,00102	96268	71	64278	2268	0,03529	63143
22	96218	101	0,00105	96169	72	62009	2374	0,03828	60822
23	96117	104	0,00108	96066	73	59635	2512	0,04212	58379
24	96013	105	0,00110	95962	74	57123	2577	0,04511	55835
25	95908	107	0,00112	95855	75	54547	2698	0,04947	53198
26	95801	111	0,00116	95746	76	51848	2823	0,05445	50437
27	95690	112	0,00117	95635	77	49025	2952	0,06021	47549
28	95578	116	0,00121	95521	78	46073	3051	0,06623	44547
29	95463	119	0,00124	95403	79	43022	3208	0,07457	41418
30	95344	123	0,00129	95283	80	39814	3295	0,08275	38166
31	95221	127	0,00134	95157	81	36519	3355	0,09187	34842
32	95094	133	0,00140	95027	82	33164	3352	0,10108	31488
33	94961	140	0,00147	94891	83	29812	3345	0,11222	28139
34	94821	148	0,00156	94747	84	26467	3279	0,12388	24827
35	94673	160	0,00169	94593	85	23188	3145	0,13562	21616
36	94513	175	0,00185	94426	86	20043	2989	0,14912	18549
37	94338	188	0,00199	94244	87	17054	2764	0,16209	15672
38	94150	203	0,00216	94049	88	14290	2502	0,17505	13039
39	93947	226	0,00240	93834	89	11788	2222	0,18852	10677
40	93721	241	0,00257	93601	90	9566	1929	0,20165	8602
41	93480	262	0,00280	93349	91	7637	1641	0,21482	6817
42	93218	286	0,00307	93075	92	5996	1361	0,22701	5316
43	92932	312	0,00335	92776	93	4635	1108	0,23894	4081
44	92620	337	0,00364	92452	94	3528	884	0,25066	3086
45	92283	371	0,00402	92097	95	2643	693	0,26211	2297
46	91912	406	0,00442	91709	96	1951	532	0,27260	1685
47	91506	441	0,00482	91286	97	1419	400	0,28219	1219
48	91065	479	0,00526	90826	98	1018	298	0,29244	870
49	90586	528	0,00583	90322	99	721	212	0,29470	614

Tabla de Mortalidad de Argentina 1990-92 VARONES

x	lx	dx	qx	Lx	x	lx	dx	qx	Lx
0	100000	2733	0,02733	97904	50	87818	752	0,00856	87442
1	97267	217	0,00223	97139	51	87066	823	0,00945	86655
2	97050	99	0,00102	96998	52	86243	898	0,01041	85794
3	96951	68	0,00070	96916	53	85345	978	0,01146	84856
4	96883	49	0,00051	96858	54	84367	1046	0,01240	83844
5	96834	39	0,00040	96815	55	83321	1133	0,01360	82755
6	96795	37	0,00038	96777	56	82188	1220	0,01484	81578
7	96758	35	0,00036	96741	57	80968	1300	0,01606	80318
8	96723	35	0,00036	96706	58	79668	1386	0,01740	78975
9	96688	34	0,00035	96671	59	78282	1483	0,01894	77541
10	96654	34	0,00035	96637	60	76799	1561	0,02033	76019
11	96620	37	0,00038	96602	61	75238	1632	0,02169	74422
12	96583	39	0,00040	96564	62	73606	1729	0,02349	72742
13	96544	48	0,00050	96520	63	71877	1816	0,02527	70969
14	96496	58	0,00060	96467	64	70061	1879	0,02682	69122
15	96438	70	0,00073	96403	65	68182	1984	0,02910	67190
16	96368	84	0,00087	96326	66	66198	2090	0,03157	65153
17	96284	98	0,00102	96235	67	64108	2205	0,03440	63006
18	96186	111	0,00115	96131	68	61903	2309	0,03730	60749
19	96075	121	0,00126	96015	69	59594	2445	0,04103	58372
20	95954	129	0,00134	95890	70	57149	2559	0,04478	55870
21	95825	137	0,00143	95757	71	54590	2655	0,04864	53263
22	95688	139	0,00145	95619	72	51935	2735	0,05266	50568
23	95549	143	0,00150	95478	73	49200	2812	0,05715	47794
24	95406	144	0,00151	95334	74	46388	2829	0,06099	44974
25	95262	144	0,00151	95190	75	43559	2868	0,06584	42125
26	95118	147	0,00155	95045	76	40691	2941	0,07228	39221
27	94971	147	0,00155	94898	77	37750	2971	0,07870	36265
28	94824	149	0,00157	94750	78	34779	2995	0,08612	33282
29	94675	152	0,00161	94599	79	31784	3033	0,09543	30268
30	94523	155	0,00164	94446	80	28751	3046	0,10594	27228
31	94368	159	0,00168	94289	81	25705	2948	0,11469	24231
32	94209	166	0,00176	94126	82	22757	2790	0,12260	21362
33	94043	173	0,00184	93957	83	19967	2690	0,13472	18622
34	93870	182	0,00194	93779	84	17277	2542	0,14713	16006
35	93688	198	0,00211	93589	85	14735	2334	0,15840	13568
36	93490	215	0,00230	93383	86	12401	2153	0,17362	11325
37	93275	230	0,00247	93160	87	10248	1909	0,18628	9294
38	93045	251	0,00270	92920	88	8339	1653	0,19823	7513
39	92794	278	0,00300	92655	89	6686	1414	0,21149	5979
40	92516	299	0,00323	92367	90	5272	1180	0,22382	4682
41	92217	326	0,00354	92054	91	4092	971	0,23729	3607
42	91891	361	0,00393	91711	92	3121	774	0,24800	2734
43	91530	393	0,00429	91334	93	2347	609	0,25948	2043
44	91137	429	0,00471	90923	94	1738	472	0,27158	1502
45	90708	475	0,00524	90471	95	1266	361	0,28515	1086
46	90233	525	0,00582	89971	96	905	268	0,29613	771
47	89708	572	0,00638	89422	97	637	195	0,30612	540
48	89136	626	0,00702	88823	98	442	140	0,31674	372
49	88510	692	0,00782	88164	99	302	96	0,31927	254

Tabla de Mortalidad de Argentina 1990-92 — MUJERES

x	lx	dx	qx	Lx	x	lx	dx	qx	Lx
0	100000	2218	0,02218	98115	50	92387	388	0,00420	92193
1	97782	203	0,00208	97662	51	91999	411	0,00447	91794
2	97579	98	0,00100	97527	52	91588	435	0,00475	91371
3	97481	49	0,00050	97456	53	91153	468	0,00513	90919
4	97432	40	0,00041	97411	54	90685	490	0,00540	90440
5	97392	31	0,00032	97377	55	90195	530	0,00588	89930
6	97361	28	0,00029	97347	56	89665	576	0,00642	89377
7	97333	27	0,00028	97320	57	89089	625	0,00702	88777
8	97306	26	0,00027	97293	58	88464	658	0,00744	88135
9	97280	25	0,00026	97268	59	87806	721	0,00821	87446
10	97255	25	0,00026	97243	60	87085	765	0,00878	86703
11	97230	25	0,00026	97218	61	86320	820	0,00950	85910
12	97205	26	0,00027	97192	62	85500	880	0,01029	85060
13	97179	28	0,00029	97165	63	84620	957	0,01131	84142
14	97151	32	0,00033	97135	64	83663	1016	0,01214	83155
15	97119	38	0,00039	97100	65	82647	1102	0,01333	82096
16	97081	43	0,00044	97060	66	81545	1189	0,01458	80951
17	97038	47	0,00048	97015	67	80356	1308	0,01628	79702
18	96991	52	0,00054	96965	68	79048	1415	0,01790	78341
19	96939	54	0,00056	96912	69	77633	1578	0,02033	76844
20	96885	56	0,00058	96857	70	76055	1703	0,02239	75204
21	96829	58	0,00060	96800	71	74352	1866	0,02510	73419
22	96771	61	0,00063	96741	72	72486	1998	0,02756	71487
23	96710	63	0,00065	96679	73	70488	2200	0,03121	69388
24	96647	65	0,00067	96615	74	68288	2314	0,03389	67131
25	96582	69	0,00071	96548	75	65974	2522	0,03823	64713
26	96513	74	0,00077	96476	76	63452	2701	0,04257	62102
27	96439	76	0,00079	96401	77	60751	2932	0,04826	59285
28	96363	81	0,00084	96323	78	57819	3110	0,05379	56264
29	96282	84	0,00087	96240	79	54709	3390	0,06196	53014
30	96198	90	0,00094	96153	80	51319	3553	0,06923	49543
31	96108	94	0,00098	96061	81	47766	3778	0,07909	45877
32	96014	98	0,00102	95965	82	43988	3937	0,08950	42020
33	95916	105	0,00109	95864	83	40051	4027	0,10055	38038
34	95811	113	0,00118	95755	84	36024	4045	0,11229	34002
35	95698	121	0,00126	95638	85	31979	3988	0,12471	29985
36	95577	133	0,00139	95511	86	27991	3858	0,13783	26062
37	95444	144	0,00151	95372	87	24133	3654	0,15141	22306
38	95300	154	0,00162	95223	88	20479	3384	0,16524	18787
39	95146	171	0,00180	95061	89	17095	3063	0,17918	15564
40	94975	181	0,00191	94885	90	14032	2708	0,19299	12678
41	94794	195	0,00206	94697	91	11324	2337	0,20638	10156
42	94599	209	0,00221	94495	92	8987	1972	0,21943	8001
43	94390	227	0,00240	94277	93	7015	1626	0,23179	6202
44	94163	242	0,00257	94042	94	5389	1313	0,24364	4733
45	93921	263	0,00280	93790	95	4076	1038	0,25466	3557
46	93658	282	0,00301	93517	96	3038	806	0,26531	2635
47	93376	304	0,00326	93224	97	2232	614	0,27509	1925
48	93072	327	0,00351	92909	98	1618	462	0,28554	1387
49	92745	358	0,00386	92566	99	1156	333	0,28803	990

U9

BLOQUE 4

UNIDAD 9
RENTAS ALEATORIAS Y SEGUROS

UNIDAD 9:
Rentas aleatorias y seguros

CONTENIDOS

Seguros en caso de vida. Capital Diferido. Prima pura y única de un seguro en caso de vida: Inmediato. Diferido. Temporario. Interceptado. Seguros en caso de muerte. Prima pura y única de un seguro en caso de muerte: Entero. Diferido. Temporario. Interceptado.
Reserva Matemática: Concepto.

OBJETIVOS

- Diferenciar conceptualmente las rentas ciertas de las rentas aleatorias.
- Identificar los distintos tipos de seguros, en caso de vida y en caso de muerte.
- Calcular las primas puras y únicas de los seguros en caso de vida y de muerte en sus distintas modalidades.
- Reflexionar respecto a la utilización de estas herramientas actuariales en contexto actual.

PRESENTACIÓN

AULA VIRTUAL
SECCIÓN PRESENTACIÓN

Los invitamos a consultar la **presentación de la Unidad 9.** Allí los profesores proporcionan algunas recomendaciones para el estudio de los temas abordados.

En la unidad 8 pudimos conocer acerca de las características y el cálculo de las funciones biométricas, probabilidades de vida o muerte de una persona, tasas y tablas de mortalidad. En esta unidad aplicaremos estos conceptos y lo que aprendimos acerca de rentas en la unidad 4, para poder aplicarlos a operaciones de seguro.

En los seguros que analizaremos, la entidad aseguradora se compromete a abonar al beneficiario designado las sumas que se establezcan si se producen determinados eventos relacionados con la vida de una persona.
La entidad recibe a su vez un importe llamado *prima*. Su valor está dado por la esperanza matemática de los importes a pagar actualizados, es la contraprestación en el momento de origen de la operación y equivale al valor actual del compromiso del asegurador.
Nuestro objetivo será determinar el importe de las primas puras y únicas, requiriendo para su cálculo adoptar una determinada tabla de mortalidad y una tasa de interés.

RECURSOS A UTILIZAR
EN LA UNIDAD 9

- Material Teórico – Práctico
- Videos Tutoriales de ejercicios

Todas las condiciones establecidas en un contrato de seguro se reflejan en un instrumento llamado póliza, que tendrá una determinada fecha de emisión y período de vigencia.

Continuando con las inquietudes de la Sra. Julieta Coppa, que con exactamente 38 años quería conocer acerca de las probabilidades de supervivencia, quiere ahora saber cuál es la diferencia entre dos propuestas de seguros que le ofrecen y en cuál de ellas deberá abonar un precio mayor.

Las propuestas que ha recibido son: un seguro que consiste en recibir una cantidad constante al final de cada año, hasta los 60 años y siempre que permanezca con vida, y la otra, un seguro que le permitirá a los beneficiarios que ella designa, recibir una cierta cantidad de dinero al final del año en que Julieta fallezca, siempre que esto ocurra antes de cumplir los 60 años.

Para poder ayudar a la señora Coppa y analizar otras situaciones vinculadas a los seguros referidos a la vida y la muerte de las personas, comenzaremos clasificándolos de la siguiente manera:

- Seguros en caso de vida
- Seguros en caso de muerte
- Seguros mixtos

A continuación los analizaremos detalladamente.

Seguros en caso de Vida

Son aquellos que se abonan siempre que la persona asegurada permanezca con vida. A su vez se clasifican en:

$$\text{Seguros en caso de vida}\begin{cases}\text{Capital Diferido}\\ \text{Rentas Vitalicias}\end{cases}$$

Capital Diferido

Este seguro da derecho al asegurado a percibir, de parte de la entidad aseguradora, el capital establecido si la persona está con vida al final del plazo.

Denominaremos con ${}_{n}E_{x}$ a la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta x que le dará derecho a cobrar un peso si está con vida dentro de n años:

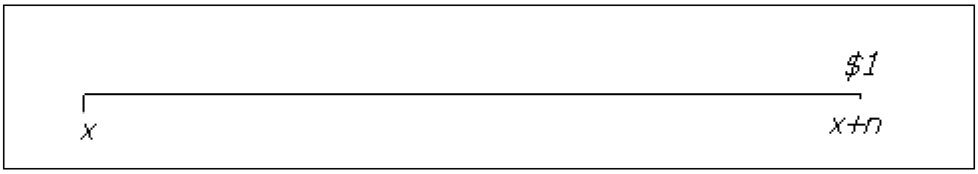


Gráfico 1

Como observamos en el Gráfico 1, la persona tiene la edad exacta x y tendrá el derecho a cobrar $1 al llegar con vida a la edad $x+n$.
Para calcular el valor de la prima a abonar al contratar el seguro debemos considerar que ese valor se actualiza a una determinada tasa de interés. El factor de actualización es:

$$v^n = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

Pero también hay que tener en cuenta la probabilidad de que la persona esté con vida a la edad $x+n$, porque sólo en este caso cobrará el capital asegurado. La probabilidad de que una persona de edad exacta x llegue con vida a la edad $x+n$ es:

$$_n p_x$$

Por lo tanto:

$$_{\mathrm{n}}E_x = v^n \, _n p_x$$

Esto puede resolverse calculando cada uno de los factores que intervienen pero, a los fines de facilitar la determinación de las primas, las tablas actuariales incluyen determinados valores que simplifican la tarea.

Primero remplazamos en la última expresión $_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$:

$$_{\mathrm{n}}E_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Multiplicamos y dividimos por v^x:

$$_{\mathrm{n}}E_x = \frac{v^x}{v^x}\left(v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}\right)$$

$$_{\mathrm{n}}E_x = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}$$

El resultado de la expresión del numerador y la del denominador pueden encontrarse en una tabla actuarial para una determinada tasa de interés:

$$D_x = v^x l_x$$

$$D_{x+n} = v^{x+n} l_{x+n}$$

Esta expresión D_x así como otras que utilizaremos más adelante se denominan funciones de conmutación o funciones actuariales.
Remplazando:

$$\boxed{_{\mathrm{n}}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

Como indicamos anteriormente, ${}_{n}E_{x}$ *es la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso si está con vida dentro de* n *años.*
La prima es pura porque sólo se están considerando los efectos financieros y actuariales de la operación. Deberán, posteriormente, agregarse gastos, impuestos y el beneficio de la entidad aseguradora. Y es única, porque se abona en un solo pago.

Ejemplo 9.1:
Si una persona de 25 años contrata un seguro de capital diferido por 40 años, la prima pura y única se determinará de la siguiente manera:

$${}_{40}E_{25} = \frac{D_{65}}{D_{25}}$$

Les proponemos resolver los siguientes ejercicios. Para estos y el resto de los ejercicios trabajaremos con las Tablas Actuariales para Argentina del año 1991-1992 de la SAFJP, que se encuentran al final de la unidad.

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 1
Determine:
a) D_{28}.
b) D_{52}.
c) D_{81}

Rta. :a) 31.622, b) 11.220 c) 1.072

EJERCICIO 2
Hallar la prima pura y única de un capital diferido de $80.000 pagadero a la edad de 60 años a un hombre cuya edad actual es de 20 años.

Rta. : $13.337,60

Rentas Vitalicias

En este tipo de seguro, el asegurado recibirá una suma de dinero anualmente, siempre que se encuentre con vida.
De acuerdo al valor de las anualidades pueden distinguirse:

$$\text{Rentas Vitalicias}\begin{cases}\text{constantes}\\ \text{variables}\end{cases}$$

De acuerdo a si el pago se realiza al inicio o al final de cada unidad de tiempo, se clasifican en:

$$\text{Rentas Vitalicias}\begin{cases}\text{vencidas}\\ \text{anticipadas}\end{cases}$$

También es posible diferenciarlas de acuerdo al momento en que comienza a abonarse y/o finaliza el pago:

$$\text{Rentas Vitalicias}\begin{cases}\text{inmediatas}\\ \text{diferidas}\\ \text{temporarias}\\ \text{interceptadas}\end{cases}$$

Analizaremos cada una de ellas a continuación, determinando la prima pura y única, que consistirá en determinar el valor actual de un conjunto de pagos efectuados bajo la condición de que el asegurado se encuentre con vida al momento que corresponda abonarse cada uno de ellos.

Renta vitalicia inmediata anticipada

En este caso, el asegurado tendrá derecho a cobrar $1 al inicio de cada año, siempre que esté con vida, como lo refleja el siguiente gráfico:

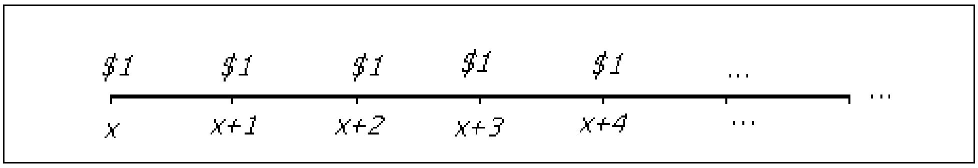


Gráfico 2

y simbolizaremos con $\ddot{a}_x$ a la prima pura y única correspondiente, que se determinará como la suma de los valores actuales de cada peso a cobrar, considerando una determinada tasa de interés y la probabilidad de vida del asegurado:

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x + v^2\,{}_2p_x + v^3\,{}_3p_x + \ldots$$

Remplazamos a la probabilidad de vida por su expresión de cálculo:

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x}{l_x} + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3\frac{l_{x+3}}{l_x} + \ldots$$

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \ldots}{l_x}$$

Multiplicamos y dividimos por v^x:

$$\ddot{a}_x = \frac{v^x}{v^x}\left(\frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \ldots}{l_x}\right)$$

$$\ddot{a}_x = \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \ldots}{v^x l_x}$$

Indicamos anteriormente que $D_x = v^x l_x$:

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots}{D_x}$$

Definimos una nueva función de conmutación:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$$

Finalmente:

$$\boxed{\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}}$$

Donde $\ddot{a}_x$ *es la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso al inicio de cada año siempre que esté con vida.*

Renta vitalicia inmediata vencida

En este tipo de renta vitalicia, el asegurado tendrá derecho a cobrar $1 al final de cada año, siempre que esté con vida, tal como se observa en el siguiente gráfico:

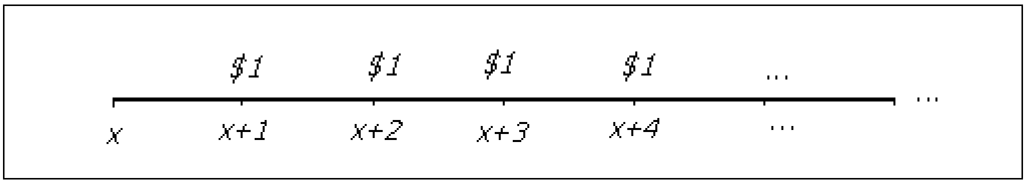


Gráfico 3

Tendremos entonces:

$$a_x = vp_x + v^2\,{}_2p_x + v^3\,{}_3p_x + \dots$$

Con el mismo procedimiento que el seguido para las rentas anticipadas:

$$a_x = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3\frac{l_{x+3}}{l_x} + \dots = \frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \dots}{l_x}$$

Multiplicamos y dividimos por v^x:

$$a_x = \frac{v^x}{v^x}\left(\frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \dots}{l_x}\right) = \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \dots}{v^x l_x}$$

Sustituimos por las funciones de conmutación:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots}{D_x} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x}$$

Finalmente:

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

Donde a_x *es la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso al final de cada año siempre que esté con vida.*

A continuación le sugerimos resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 3
Determinar la prima pura y única de una renta vitalicia anticipada de $ 65.000, pagadera a un hombre de 35 años de edad.

Rta. : $1.248.491,70

EJERCICIO 4
El Sr. López tiene 58 años de edad y va a jubilarse. La empresa va a pagarle, de acuerdo con su plan de pensiones, $6.000 anuales vencidos durante el tiempo que viva. Calcule qué pago único realizado al momento de jubilarse sería equivalente a los pagos anuales.

Rta. : $69.639,12

Renta vitalicia diferida, vencida y anticipada
Esta renta se caracteriza porque transcurrirá cierta cantidad de unidades de tiempo hasta el momento en el cual el asegurado comenzará a cobrar un peso anualmente, mientras esté con vida. Para el caso de pagos vencidos:

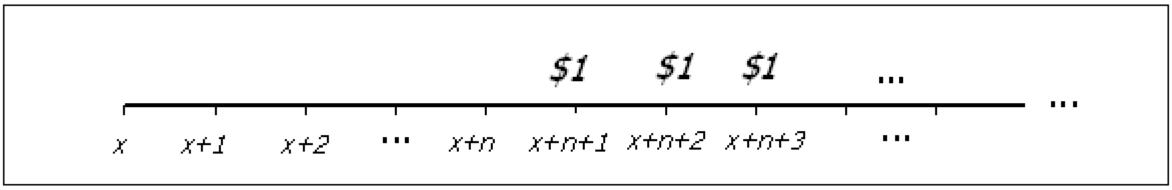


Gráfico 4

Para determinar la prima pura y única debemos considerar que durante las primeras n unidades de tiempo no recibirá ningún importe, comenzando a recibir $1, a partir de la edad $x+n+1$:

$$^{n}/a_x = v^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + v^{n+2}\,{}_{n+2}p_x + v^{n+3}\,{}_{n+3}p_x + \dots$$

Sustituimos las probabilidades de vida por su fórmula de cálculo:

$$^{n}/a_x = v^{n+1}\frac{l_{x+n+1}}{l_x} + v^{n+2}\frac{l_{x+n+2}}{l_x} + v^{n+3}\frac{l_{x+n+3}}{l_x} + \dots$$

$$^{n}/a_x = \frac{v^{n+1}l_{x+n+1} + v^{n+2}l_{x+n+2} + v^{n+3}l_{x+n+3} + \dots}{l_x}$$

Multiplicamos y dividimos por v^x:

$$ {}^{n}/\,a_x = \frac{v^x}{v^x}\left(\frac{v^{n+1}l_{x+n+1} + v^{n+2}l_{x+n+2} + v^{n+3}l_{x+n+3} + \dots}{l_x}\right) $$

Resolvemos:

$$ {}^{n}/\,a_x = \frac{v^{x+n+1}l_{x+n+1} + v^{x+n+2}l_{x+n+2} + v^{x+n+3}l_{x+n+3} + \dots}{v^x l_x} $$

Sustituimos por las funciones de conmutación:

$$ {}^{n}/\,a_x = \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + D_{x+n+3} + \dots}{D_x} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+n+t}}{D_x} $$

$$ \boxed{{}^{n}/\,a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}} $$

Donde ${}^{n}/\,a_x$ *es la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso al final de cada año siempre que esté con vida, después de transcurrir* n años*.*

Para pagos anticipados:

$$ \boxed{{}^{n}/\,\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}} $$

Donde ${}^{n}/\,\ddot{a}_x$ *es la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso al inicio de cada año siempre que esté con vida, después de transcurrir* n años*.*

Resolvemos los siguientes ejercicios:

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 5
Determinar la prima pura y única de una renta vitalicia de $125.000 anuales pagaderos a un hombre de 48 años, si el primer pago debe realizarse dentro de 15 años.

Rta. : $558.464,17

EJERCICIO 6
Hallar la prima pura y única que debe pagar un hombre de 20 años, para obtener una renta anual vitalicia de $10.000, si el primer pago lo recibirá:

a) un año después de cumplir 55 años,
b) al cumplir los 55 años.

Rta. : a) $ 27.643,86   b) $29.844,49

Renta vitalicia temporaria, vencida y anticipada

El pago de la prima pura y única dará derecho al asegurado de edad exacta x a cobrar \$1 al final de cada año (en el caso de que sea vencida) hasta la edad $x+n$ y siempre que esté con vida:

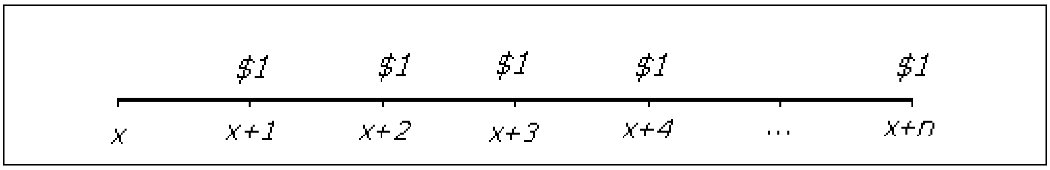


Gráfico 5

El cálculo de la prima pura y única de esta renta implica considerar que sólo se recibirá \$1 durante los n años siguientes al momento de contratar el seguro, hasta alcanzar la edad $x+n$ y siempre que se esté con vida:

$$a_{x:\overline{n|}} = vp_x + v^2\,{}_2p_x + v^3\,{}_3p_x + \ldots + v^n\,{}_np_x$$

Remplazamos a la probabilidad de vida por su expresión de cálculo:

$$a_{x:\overline{n|}} = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3\frac{l_{x+3}}{l_x} + \ldots + v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{vl_{x+1} + v^2l_{x+2} + v^3l_{x+3} + \ldots + v^nl_{x+n}}{l_x}$$

Multiplicamos y dividimos por v^x:

$$a_{x:\overline{n|}} = \frac{v^x}{v^x}\left(\frac{vl_{x+1} + v^2l_{x+2} + v^3l_{x+3} + \ldots + v^nl_{x+n}}{l_x}\right) = \frac{v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3} + \ldots + v^{x+n}l_{x+n}}{v^xl_x}$$

Sustituimos por las funciones de conmutación:

$$a_{x:\overline{n|}} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n}}{D_x} = \frac{\sum_{t=1}^{n} D_{x+t}}{D_x}$$

Sabemos que:

$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t}$$

$$N_{x+n+1} = D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + D_{x+n+3} + \ldots = \sum_{t=n+1}^{\infty} D_{x+t}$$

Por lo tanto:

$$D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n} = N_{x+1} - N_{x+n+1}$$

Finalmente:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Donde $a_{x:\overline{n}|}$ *es la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso al final de cada año hasta la edad* $x+n$*, siempre que esté con vida.*

También es posible expresar la fórmula de cálculo en términos de una renta vitalicia inmediata y una diferida:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = a_x - {}^{n}/\, a_x$$

Retomando el caso inicial: primera parte

Una de las propuestas recibida por Julieta consiste en un seguro de este tipo, debido a que recibiría una cantidad constante al final de cada año, hasta cumplir los 60 años, y siempre que permanezca con vida. La prima pura y única que corresponde es:

$a_{38:\overline{22}|}$

Resolvemos:

$$a_{38:\overline{22}|} = \frac{N_{39} - N_{61}}{D_{38}}$$

Reemplazamos por lo valores correspondiente a la Tabla de Funciones Actuariales, para mujeres:

x	Dx	Nx	ax	Cx	Mx
50	13000	225025	17,31	52	4345
51	12448	212025	17,03	53	4293
52	11915	199577	16,75	54	4239
53	11403	187662	16,46	56	4185
54	10908	176259	16,16	57	4129
55	10432	165352	15,85	59	4072
56	9971	154920	15,54	62	4013
57	9526	144949	15,22	64	3951
58	9096	135422	14,89	65	3887
59	8681	126327	14,55	69	3822
60	8278	117646	14,21	70	3753
61	7890	**109368**	13,86	72	3684

36	23289	477998	20,52	31	4905
37	22362	454709	20,33	32	4873
38	**21470**	432347	20,14	33	4841
39	20611	**410877**	19,94	36	4808
40	19782	390267	19,73	36	4772
41	18985	370484	19,51	38	4736
42	18217	351499	19,29	39	4698
43	17478	333282	19,07	40	4660
44	16765	315804	18,84	41	4619
45	16079	299039	18,60	43	4578

$$a_{38:\overline{22}|} = \frac{N_{39} - N_{61}}{D_{38}} = \frac{410.877 - 109.368}{21.470} = 14,04$$

El importe de $14,04 representa la prima pura y única que deberá abonar Julieta si desea recibir $1 al final de cada año, por lo próximos 22 años y siempre que se encuentre con vida.

Cuando se trate de una renta de pagos anticipados:

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x}}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - {}^{n}/\,\ddot{a}_x$$

Donde $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ *es la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso al inicio de cada año hasta la edad* $x+n$*, siempre que esté con vida.*

A continuación le proponemos resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 7
Hallar la prima pura y única de una renta vitalicia temporaria vencida, de $10.000 anuales, a pagar durante 20 años, a un hombre de 35 años de edad.

Rta. : $131.086,68

Renta vitalicia interceptada, vencida y anticipada
Un asegurado de edad exacta x que contrata esta modalidad de renta vencida, recibirá al final de cada año $1, luego de cumplir la edad $x+n$ y hasta la edad $x+n+m$ siempre que permanezca con vida:

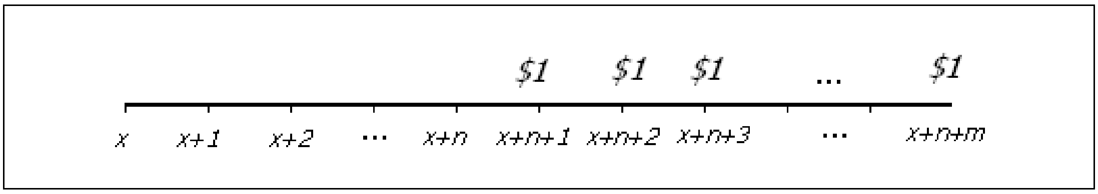


Gráfico 6

Buscaremos a continuación la prima pura y única que corresponde a esta renta vitalicia:

$${}^{n}/\,a_{x:\overline{m}|} = v^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + v^{n+2}\,{}_{n+2}p_x + v^{n+3}\,{}_{n+3}p_x + \ldots + v^{n+m}\,{}_{n+m}p_x$$

Sustituimos las probabilidades de vida por su fórmula de cálculo:

$${}^{n}/\,a_{x:\overline{m}|} = v^{n+1}\frac{l_{x+n+1}}{l_x} + v^{n+2}\frac{l_{x+n+2}}{l_x} + v^{n+3}\frac{l_{x+n+3}}{l_x} + \ldots + v^{n+m}\frac{l_{x+n+m}}{l_x}$$

$${}^{n}/\,a_{x:\overline{m}|} = \frac{v^{n+1}l_{x+n+1} + v^{n+2}l_{x+n+2} + v^{n+3}l_{x+n+3} + \ldots + v^{n+m}l_{x+n+m}}{l_x}$$

Multiplicamos y dividimos por v^x:

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \frac{v^x}{v^x}\left(\frac{v^{n+1}l_{x+n+1} + v^{n+2}l_{x+n+2} + v^{n+3}l_{x+n+3} + \ldots + v^{n+m}l_{x+n+m}}{l_x}\right) $$

Resolvemos:

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \frac{v^{x+n+1}l_{x+n+1} + v^{x+n+2}l_{x+n+2} + v^{x+n+3}l_{x+n+3} + \ldots + v^{x+n+m}l_{x+n+m}}{v^x l_x} $$

Sustituimos por las funciones de conmutación:

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + D_{x+n+3} + \ldots + D_{x+n+m}}{D_x} = \frac{\sum_{t=1}^{m} D_{x+n+t}}{D_x} $$

$$ \boxed{{}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}} $$

También podemos expresarla como la diferencia entre dos rentas vitalicias diferidas, por n y por $n+m$, respectivamente:

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+m+1}}{D_x} = {}^{n}/a_x - {}^{n+m}/a_x $$

Otra posibilidad es calcularla con la diferencia entre dos rentas vitalicias temporarias, una por $n+m$ años y otra por n:

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = a_{x:\overline{n+m}|} - a_{x:\overline{n}|} $$

Al sustituir cada una de ellas por su expresión en funciones de conmutación:

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} $$

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+m+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{N_{x+n+1}}{D_x} $$

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \cancel{\frac{N_{x+1}}{D_x}} - \frac{N_{x+n+m+1}}{D_x} - \cancel{\frac{N_{x+1}}{D_x}} + \frac{N_{x+n+1}}{D_x} $$

Reordenando:

$$ {}^{n}/a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+m+1}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} $$

logrando la expresión de cálculo obtenida anteriormente.

Definimos ${}^{n}/a_{x:\overline{m}|}$ como *la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso al final de cada año después de transcurridos* n *años y por los* m *años inmediatos siguientes, siempre que esté con vida.*

Si se trata de una renta interceptada anticipada:

$$ \boxed{{}^{n}/\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}} $$

Alternativamente:

$$ {}^{n}/\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = {}^{n}/\ddot{a}_{x} - {}^{n+m}/\ddot{a}_{x} $$

$$ {}^{n}/\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} $$

Donde ${}^{n}/\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$ *es la prima pura y única que deberá abonar un asegurado de edad exacta* x *para tener derecho a cobrar un peso al inicio de cada año después de transcurridos* n *años y por los* m *años inmediatos siguientes, siempre que esté con vida.*

Resolvemos:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 8

Hallar el valor de la prima pura y única de una renta vitalicia de $1.000 anuales, diferida por 6 años y pagadera durante 8 años, para un hombre de 30 años de edad.

Rta. : $5.199,43

Es importante tener en cuenta que:

- Obtuvimos primas puras, pero se abonarán las llamadas primas de tarifa, que incorporan gastos, comisiones, impuestos y el beneficio para la entidad aseguradora.
- Sólo consideramos una prima única, pero esta puede ser fraccionada en pagos periódicos.
- Hemos realizado el cálculo de las primas considerando que el o los pagos a realizarse por la entidad aseguradora serán de $1, en el caso de que el importe sea distinto, la prima se calcula multiplicándola por el importe del capital asegurado o de la renta anual constante.
- Por último, es posible calcular los importes de una renta vitalicia a pagarse en fracciones de tiempo menores al año.

Seguros en caso de Muerte

Son los seguros por los cuales la entidad aseguradora se compromete a abonar un determinado importe a los beneficiarios designados en la póliza, cuando el asegurado fallece.
Según el plazo de cobertura tendremos:

Seguro de vida entera
Los beneficiarios tendrán derecho a cobrar $1 al final del año de fallecimiento del asegurado. Por lo tanto el importe se abonará en algún momento pero se desconoce cuándo acaecerá el fallecimiento.
La determinación de la prima pura y única para una persona de edad exacta x, que simbolizaremos A_x, dependerá del componente financiero y de la probabilidad de muerte:

$$A_x = vq_x + v^2\ {}_{1/}q_x + v^3\ {}_{2/}q_x + v^4\ {}_{3/}q_x + ...$$

Remplazamos la probabilidad de fallecimiento por su fórmula de cálculo:

$$A_x = v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3\frac{d_{x+2}}{l_x} + v^4\frac{d_{x+3}}{l_x} + ...$$

$$A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + v^4 d_{x+3} + ...}{l_x}$$

Multiplicamos numerador y denominador por v^x:

$$A_x = \frac{v^x}{v^x}\left(\frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + v^4 d_{x+3} + ...}{l_x}\right)$$

$$A_x = \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + v^{x+4}d_{x+3} + ...}{v^x l_x}$$

Definiremos las siguientes funciones de conmutación:

$$C_x = v^{x+1}d_x$$
$$C_{x+1} = v^{x+2}d_{x+1}$$
$$C_{x+2} = v^{x+3}d_{x+2}$$
...
$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} ... = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

Finalmente:

$$\boxed{A_x = \frac{M_x}{D_x}}$$

Donde A_x *es la prima pura y única que debe abonar una persona de edad exacta* x *para que sus beneficiarios tengan derecho a percibir $1 al final del año en que el asegurado fallezca.*

A continuación, resolvemos el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 9

Calcular la prima pura y única de un seguro ordinario de $10.000 para un hombre de 40 años de edad.

Rta. : $3.082,51

Seguro en caso de muerte diferido

Este seguro dará a los beneficiarios el derecho de recibir $1 al final del año en que el asegurado de edad exacta x fallezca, siempre que la muerte ocurra después de cumplir la edad $x+n$:

$$^{n}/A_x = v^{n+1}\,{}^{n}/q_x + v^{n+2}\,{}^{n+1}/q_x + v^{n+3}\,{}^{n+2}/q_x + v^{n+4}\,{}^{n+3}/q_x + \dots$$

Sustituimos cada probabilidad de muerte por su fórmula de cálculo:

$$^{n}/A_x = v^{n+1}\frac{d_{x+n}}{l_x} + v^{n+2}\frac{d_{x+n+1}}{l_x} + v^{n+3}\frac{d_{x+n+2}}{l_x} + v^{n+4}\frac{d_{x+n+3}}{l_x} + \dots$$

$$^{n}/A_x = \frac{v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + v^{n+3}d_{x+n+2} + v^{n+4}d_{x+n+3} + \dots}{l_x}$$

Multiplicamos numerador y denominador por v^x:

$$^{n}/A_x = \frac{v^x}{v^x}\left(\frac{v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + v^{n+3}d_{x+n+2} + v^{n+4}d_{x+n+3} + \dots}{l_x}\right)$$

$$^{n}/A_x = \frac{v^{x+n+1}d_{x+n} + v^{x+n+2}d_{x+n+1} + v^{x+n+3}d_{x+n+2} + v^{x+n+4}d_{x+n+3} + \dots}{v^x l_x}$$

Remplazamos por las funciones de conmutación correspondientes:

$$^{n}/A_x = \frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + C_{x+n+3} + \dots}{D_x}$$

Siendo:

$$M_{x+n} = C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2}\dots = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+n+t}$$

Entonces:

$$\boxed{{}^{n}/A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}}$$

Donde ${}^{n}/A_x$ *es la prima pura y única que debe abonar una persona de edad exacta* x *para que sus beneficiarios tengan derecho a percibir $1 al final del año en que el asegurado fallezca, siempre que la muerte ocurra a partir de la edad* $x+n$.

Ahora le sugerimos resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 10
¿Cuál será la prima pura y única de un seguro diferido por 25 años, de $50.000, para una mujer de 30 años de edad?

Rta. : $6.864,46

Seguro en caso de muerte temporario
La característica de este seguro en caso de muerte es que los beneficiarios recibirán $1 al final del año en el que el asegurado de edad exacta x fallezca, siempre que esto ocurra en los n años siguientes a la firma del contrato.
A continuación obtendremos la fórmula de cálculo de la prima pura y única siguiendo un razonamiento similar a las modalidades anteriores:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = vq_x + v^2\ {}^{1}/q_x + v^3\ {}^{2}/q_x + v^4\ {}^{3}/q_x + \ldots + v^n\ {}^{n-1}/q_x$$

Remplazamos la probabilidad de fallecimiento por su fórmula de cálculo:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3\frac{d_{x+2}}{l_x} + v^4\frac{d_{x+3}}{l_x} + \ldots + v^n\frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{vd_x + v^2d_{x+1} + v^3d_{x+2} + v^4d_{x+3} + \ldots + v^nd_{x+n-1}}{l_x}$$

Multiplicamos numerador y denominador por v^x:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{v^x}{v^x}\left(\frac{vd_x + v^2d_{x+1} + v^3d_{x+2} + v^4d_{x+3} + \ldots + v^nd_{x+n-1}}{l_x}\right)$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + v^{x+4}d_{x+3} + \ldots + v^{x+n}d_{x+n-1}}{v^xl_x}$$

Finalmente:

378

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

$$\boxed{A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

También es posible expresarla como la diferencia entre las primas de seguros de vida entera y uno diferido:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x} = A_x - {}^{n}/A_x$$

Donde $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ *es la prima pura y única que debe abonar una persona de edad exacta* x *para que sus beneficiarios tengan derecho a percibir $1 al final del año en el que el asegurado fallezca, siempre que esto ocurra antes de cumplir la edad* $x+n$.

Retomando el caso inicial: segunda parte

Un seguro de este tipo es la otra alternativa que analiza la Sra. Coppa. En este caso, considerando su edad exacta de 38 años y que la cobertura del seguro se extenderá por 22 años (hasta los 60), la prima pura y única se expresa como:

$A^{1}_{38:\overline{22}|}$

Expresamos la fórmula de cálculo:

$$A^{1}_{38:\overline{22}|} = \frac{M_{38} - M_{60}}{D_{38}}$$

Buscamos los valores en la tabla de funciones actuariales para Mujeres:

x	Dx	Nx	ax	Cx	Mx
50	13000	225025	17,31	52	4345
51	12448	212025	17,03	53	4293
52	11915	199577	16,75	54	4239
53	11403	187662	16,46	56	4185
54	10908	176259	16,16	57	4129
55	10432	165352	15,85	59	4072
56	9971	154920	15,54	62	4013
57	9526	144949	15,22	64	3951
58	9096	135422	14,89	65	3887
59	8681	126327	14,55	69	3822
60	8278	117646	14,21	70	**3753**
61	7890	109368	13,86	72	3684

37	22362	454709	20,33	32	4873
38	**21470**	432347	20,14	33	**4841**
39	20611	410877	19,94	36	4808
40	19782	390267	19,73	36	4772
41	18985	370484	19,51	38	4736
42	18217	351499	19,29	39	4698
43	17478	333282	19,07	40	4660
44	16765	315804	18,84	41	4619
45	16079	299039	18,60	43	4578
46	15417	282959	18,35	45	4534
47	14780	267542	18,10	46	4490
48	14165	252762	17,84	48	4443
49	13572	238597	17,58	50	4396

Y reemplazamos:

$$A^{1}_{38:\overline{22|}} = \frac{M_{38} - M_{60}}{D_{38}} = \frac{4.841 - 3.753}{21.470} = 0,0507$$

El importe de $0,0507 indica el valor de la prima pura y única que deberá abonar Julieta si desea que los beneficiarios que ella designe, reciban $1 al final del año de su fallecimiento.

El siguiente ejercicio nos permitirá calcular este tipo de prima:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 11
Hallar la prima pura y única que debe pagar un hombre de 35 años, por una póliza de seguro temporario de $50.000, a 10 años.

Rta. : $1.255,16

Seguro en caso de muerte interceptado
El pago de la prima pura y única dará derecho a los beneficiarios a cobrar $1 al término del año en que el asegurado de edad exacta x fallezca, siempre que la muerte ocurra desde la edad $x+n$ y hasta llegar a $x+n+m$.
Obtengamos el valor de la prima pura y única:

$${}^{n}/A^{1}_{x:\overline{m|}} = v^{n+1}\,{}^{n}/q_x + v^{n+2}\,{}^{n+1}/q_x + v^{n+3}\,{}^{n+2}/q_x + v^{n+4}\,{}^{n+3}/q_x + \ldots + v^{n+m}\,{}^{n+m-1}/q_x$$

Remplazamos la probabilidad de fallecimiento por su fórmula de cálculo:

$${}^{n}/A^{1}_{x:\overline{m|}} = v^{n+1}\frac{d_{x+n}}{l_x} + v^{n+2}\frac{d_{x+n+1}}{l_x} + v^{n+3}\frac{d_{x+n+2}}{l_x} + v^{n+4}\frac{d_{x+n+3}}{l_x} + \ldots + v^{n+m}\frac{d_{x+n+m-1}}{l_x}$$

$${}^{n}/A^{1}_{x:\overline{m|}} = \frac{v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + v^{n+3}d_{x+n+2} + v^{n+4}d_{x+n+3} + \ldots + v^{n+m}d_{x+n+m-1}}{l_x}$$

Multiplicamos numerador y denominador por v^x:

$${}^{n}/A^{1}_{x:\overline{m|}} = \frac{v^{x+n+1}d_{x+n} + v^{x+n+2}d_{x+n+1} + v^{x+n+3}d_{x+n+2} + v^{x+n+4}d_{x+n+3} + \ldots + v^{x+n+m}d_{x+n+m-1}}{v^x l_x}$$

$${}^{n}/A^{1}_{x:\overline{m|}} = \frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + C_{x+n+3} + \ldots + C_{x+n+m-1}}{D_x}$$

$$\boxed{{}^{n}/A^{1}_{x:\overline{m|}} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}}$$

También es posible expresarla como la diferencia entre primas de seguros diferidos:

$${}^{n}/A^{1}_{x:\overline{m|}} = \frac{M_{x+n}}{D_x} - \frac{M_{x+n+m}}{D_x} = {}^{n}/A_x - {}^{n+m}/A_x$$

o seguros temporarios:

$$ {}^{n}/\,A^{1}_{x:\overline{m}|} = A^{1}_{x:\overline{n+m}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|} $$

Donde ${}^{n}/\,A^{1}_{x:\overline{m}|}$ *es la prima pura y única que debe abonar una persona de edad exacta* x *para que sus beneficiarios tengan derecho a percibir $1 al final del año en el que el asegurado fallezca, siempre que esto ocurra desde la edad* $x+n$ *y antes de alcanzar la edad* $x+n+m$.

A continuación le sugerimos resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 12
Calcular la prima pura y única que deberá abonar un hombre de 40 años para que sus beneficiarios reciban un capital de $100.000 si fallece entre los 65 y los 90 años.

Rta. : $15.993,77

Seguros Mixtos

Este tipo de seguros no serán objeto de nuestro análisis, pero indicaremos que son aquellos en donde se combinan seguros en caso de vida y en caso de muerte, cubriendo diferentes eventos.

Reserva Matemática

381 Las reservas matemáticas son sumas que los asegurados anticipan para cubrir riesgos futuros. Esto constituye un pasivo del asegurador. Esto se explica de la siguiente manera:
Supongamos que una persona de edad x desea tomar un seguro de vida entera, pero en lugar de abonar una prima única, o una prima anual constante, abona una prima única anual, que va renovando todos los años, según su edad. Esta prima (prima natural) es proporcional a la probabilidad de muerte y crece a medida que aumenta la edad del asegurado, tornándose imposible de abonar.

De esta manera, la prima constante es superior en los primeros años del seguro a la prima natural, por lo que el asegurado estaría pagando un excedente que, capitalizado a la tasa de interés, va a cubrir el déficit que se producirá cuando la prima constante sea inferior a la natural.

EJERCITACIÓN

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 13
¿Cuál es el valor actual de un capital diferido de $50.000 pagadero a un hombre cuando cumpla los 40 años, si ahora tiene 32 años?

Rta. : $ 35.877,90

EJERCICIO 14
¿Cuál es el valor actual de un capital diferido pagadero a la Sra. Martínez dentro de 18 años, si el importe del seguro es de $200.000 y ella tiene 40 años de edad?

Rta. : $91.962,39

EXPLICANDO
CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de estos ejercicios en formato video.

EJERCICIO 15
Una compañía de seguros de vida ha vendido 35.000 pólizas de seguro de capital diferido, en igual fecha y con capital asegurado individual de $ 1.000, con edad de contratación 30 años, sexo masculino y plazo de 6 años. Calcular:

a) Prima pura única por póliza y recaudación total.
b) El beneficio del asegurador, si pasados los 6 años llegan el 90% del número probable de supervivientes y el asegurador ha invertido la recaudación según las bases técnicas.

Rta. : a) $ 781,70 y $ 27.359.500 b) $ 3.118.495,69

Ejercicios a resolver

EJERCICIO 16
Una mujer contrata una operación de capital diferido por $ 15.000. Su edad es de 35 años y el capital quiere cobrarlo a los 60 años. Calcular la prima única de este seguro. Si cuando dicha mujer alcanza los 60 años en lugar de cobrar su dinero, elige comenzar a cobrar una renta vitalicia desde ese momento durante 20 años, ¿de cuánto será el valor de la renta?

Rta. : $5.120,20 y $ 1.204,39

EJERCICIO 17
Un hombre de 55 años, debe ser pensionado por la empresa en que trabaja con una anualidad de $8.000, pagadera al final de cada año. Recibe la oferta de $80.000 para cancelar de una vez su pensión. ¿Es conveniente esta oferta?

Rta. : No le conviene la oferta.

EJERCICIO 18
Una señora queda viuda a la edad de 38 años y recibe por herencia una pensión vitalicia anual de $60.000, por año vencido. Si desea vender sus derechos, ¿cuánto recibirá?

Rta. : $1.148.235,68

EJERCICIO 19
Un hombre de 36 años de edad recibe una herencia de $200.000 para que lo invierta en la compra de una renta vitalicia inmediata vencida. Hallar el valor de las rentas anuales que recibirá.

Rta. : $11.126,17

EJERCICIO 20
El valor actual de una renta vitalicia pagadera a un hombre de 54 años es de $20.000. Calcular el valor del pago anual.

Rta. : $1.552,93

EJERCICIO 21
Calcular la renta anual vitalicia ilimitada que puedo comprar con un capital de $150.000 para la edad de 60 y 65, sexo masculino y femenino.

Rta. : $13.684,41 $ 16.113,45 $11.353,41 $13.167,52

EJERCICIO 22
Encuentre la prima pura y única de una renta vitalicia anticipada de $ 800 anuales pagadera a un hombre de 75 años de edad.

Rta. : $5.645,93

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de estos ejercicios en formato video.

EJERCICIO 23

¿Cuál es el monto que un hombre debe juntar a los 65 años para que a partir de esa edad pueda comenzar a cobrar $ 10.000 por año de por vida? Si dicha persona va a juntar el dinero en una cuenta de caja de ahorro durante 40 años al 8% anual. ¿Cuánto debe ahorrar al inicio de cada mes teniendo en cuenta que la caja de ahorro tiene un gasto del 0,5% del depósito?

Rta. : $ 31,96

Ejercicio a resolver

EJERCICIO 24

Un hombre aseguró su vida en $100.000, a favor de su esposa, con la cláusula de que, con la suma asegurada, se otorgue a su viuda una pensión vitalicia anticipada. Al morir el esposo, la viuda tenía 55 años de edad. Hallar la renta anual que recibirá la viuda.

Rta. : $6.308,97

EJERCICIO 25

Un señor de 60 años de edad va a recibir una renta vitalicia vencida de $30.000 ¿qué cantidad anual recibiría si la renta se convirtiera en anticipada?

Rta. : $27.491,93

EJERCICIO 26

Determinar las primas puras únicas de seguros de renta vitalicia para una persona de 25 años, sexo masculino, $ 1.000 de capital asegurado según:

	Diferimiento del riesgo	Plazo en años	Prima
a	0	3	
b	0	20	
c	10	3	
d	10	20	
e	0	$\omega - x$	
f	10	$\omega - x - 10$	

Rta. : a) $2.766,78 b) $ 13.356,89 c) $1.835,70
d) $ 8.709,52 e) $ 20.141,66 f) $ 12.097,27

EJERCICIO 27

Un comerciante debe pensionar a sus empleados a llegar a la edad de 60 años. Uno de sus empleados tiene 20 años de edad y, al llegar a los 60 años, será jubilado con una renta anual vitalicia anticipada de $12.000. Hallar la prima pura y única que debe comenzar a pagar a una compañía para proveer la pensión vitalicia del empleado.

Rta. : $ 23.930,40

Ejercicio a resolver

DIALOGOS SOBRE LOS CONTENIDOS

En este espacio podrán consultar las dudas que surjan de la lectura del material y de la resolución de ejercicios.

EJERCICIO 28
¿Cuál es el valor actual de una renta vitalicia anticipada de $75.000 pagadero a una persona de 52 años de edad si se difiere durante 10 años?

Rta. : $488.983,96

EJERCICIO 29
¿Qué renta vitalicia inmediata anticipada puede comprar un hombre de 25 años con $60.000, para empezar a cobrarla 30 años después?

Rta. : $16.404,91

EJERCICIO 30
Hallar el valor de la prima pura y única de una renta vitalicia temporal, anticipada de $10.000 anuales, por 10 años, para un hombre de 35 años de edad.

Rta. : $83.417,57

EJERCICIO 31
El licenciado Godínez, de 32 años de edad, va a recibir $250.000 al inicio de cada año, comenzando dentro de 15 años y durante otros 15 años más, si está vivo para cobrarlos ¿qué clase de renta puede utilizar para representar este caso y cuál es la prima pura y única a pagar?

Rta. : Renta vitalicia interceptada anticipada,
y la prima de $ 1.437.739,71

EJERCICIO 32
Hallar la prima pura y única que tendría que pagar un hombre de 35 años de edad, para obtener un seguro de vida total por $100.000.

Rta. : $26.126,70

EXPLICANDO CÓMO SE HACE

Aquí encontrarán desarrolladas las **resoluciones** de estos ejercicios en formato video.

EJERCICIO 33
Un empleado de 35 años de edad fue enviado por su empresa a trabajar, por 6 años, fuera del país y le aseguró la vida por $100.000. Hallar la prima pura y única que pagó la empresa.

Rta. : $1.360,46

INTEGRANDO IDEAS

BIBLIOTECA

Aquí podrán consultar otros recursos que los docentes pondrán a disposición.

En esta unidad hemos aprendido a diferenciar los seguros en caso de vida y en caso de muerte, y dentro de ellos las distintas variantes que se pueden presentar: pago único o rentas, el plazo de la cobertura y si los pagos son vencidos o anticipados.
De esta manera hemos podido aplicar los conocimientos financieros respecto de rentas y acerca de las funciones biométricas, completando así los contenidos previstos en el programa de la asignatura.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD

Podemos complementar y ampliar los contenidos de esta unidad, consultando:

CARRIZO, José F. *Matemática Financiera*. Segunda Parte. Córdoba Fac. de Cs. Económicas U.N.C. (2001).
YASUKAWA, Alberto M. *Matemática Actuarial y valuaciones actuariales.* Córdoba. LDM Editorial (2001).

Funciones Actuariales para Argentina 1990-92						Interés 4%				AMBOS SEXOS	
x	Dx	Nx	ax	Cx	Mx	x	Dx	Nx	ax	Cx	Mx
0	100000	2357973	23,58	2385	9309	50	12672	205576	16,22	78	4765
1	93769	2257973	24,08	194	6924	51	12107	192904	15,93	81	4688
2	89968	2164204	24,06	88	6729	52	11561	180797	15,64	84	4607
3	86420	2074236	24,00	50	6642	53	11032	169236	15,34	88	4523
4	83046	1987816	23,94	37	6592	54	10520	158204	15,04	89	4436
5	79815	1904770	23,86	28	6555	55	10026	147683	14,73	93	4346
6	76718	1824955	23,79	25	6527	56	9547	137657	14,42	97	4253
7	73742	1748237	23,71	23	6502	57	9084	128110	14,10	100	4156
8	70883	1674495	23,62	21	6480	58	8635	119026	13,78	102	4057
9	68136	1603611	23,54	20	6458	59	8201	110391	13,46	105	3955
10	65495	1535476	23,44	19	6438	60	7780	102191	13,14	107	3849
11	62957	1469981	23,35	19	6419	61	7374	94411	12,80	108	3742
12	60516	1407024	23,25	20	6400	62	6982	87037	12,47	111	3634
13	58169	1346508	23,15	22	6380	63	6602	80056	12,13	113	3523
14	55909	1288339	23,04	25	6358	64	6235	73454	11,78	114	3410
15	53734	1232430	22,94	29	6333	65	5881	67219	11,43	117	3296
16	51638	1178696	22,83	33	6304	66	5538	61338	11,07	119	3179
17	49619	1127058	22,71	36	6271	67	5206	55799	10,72	123	3060
18	47675	1077438	22,60	39	6235	68	4884	50593	10,36	125	2938
19	45802	1029763	22,48	40	6196	69	4571	45709	10,00	130	2813
20	44000	983961	22,36	41	6156	70	4265	41138	9,65	132	2683
21	42267	939961	22,24	41	6115	71	3969	36873	9,29	135	2551
22	40600	897693	22,11	41	6073	72	3682	32904	8,94	136	2416
23	38998	857093	21,98	40	6033	73	3405	29222	8,58	138	2281
24	37457	818096	21,84	39	5992	74	3136	25818	8,23	136	2143
25	35977	780638	21,70	39	5953	75	2879	22682	7,88	137	2007
26	34555	744661	21,55	39	5914	76	2631	19803	7,53	138	1870
27	33187	710107	21,40	37	5875	77	2392	17171	7,18	139	1732
28	31873	676920	21,24	37	5838	78	2162	14779	6,84	138	1594
29	30610	645046	21,07	37	5801	79	1941	12617	6,50	139	1456
30	29396	614436	20,90	37	5764	80	1727	10676	6,18	137	1317
31	28229	585040	20,72	36	5728	81	1523	8948	5,87	135	1179
32	27107	556810	20,54	36	5691	82	1330	7425	5,58	129	1045
33	26028	529703	20,35	37	5655	83	1150	6095	5,30	124	915
34	24990	503675	20,15	38	5618	84	982	4945	5,04	117	791
35	23992	478685	19,95	39	5581	85	827	3963	4,79	108	674
36	23030	454693	19,74	41	5542	86	687	3136	4,56	99	567
37	22103	431663	19,53	42	5501	87	562	2449	4,36	88	468
38	21211	409560	19,31	44	5458	88	453	1887	4,17	76	380
39	20351	388349	19,08	47	5414	89	359	1434	3,99	65	304
40	19521	367998	18,85	48	5367	90	280	1075	3,83	54	239
41	18722	348477	18,61	50	5319	91	215	794	3,69	44	185
42	17952	329755	18,37	53	5269	92	162	579	3,56	35	140
43	17208	311804	18,12	55	5216	93	121	417	3,45	28	105
44	16491	294596	17,86	58	5160	94	88	296	3,35	21	77
45	15799	278105	17,60	61	5102	95	64	207	3,26	16	56
46	15130	262306	17,34	64	5041	96	45	144	3,18	12	40
47	14484	247176	17,07	67	4977	97	32	99	3,12	9	28
48	13860	232692	16,79	70	4910	98	22	67	3,07	6	19
49	13256	218833	16,51	74	4840	99	15	45	3,04	4	13

Funciones Actuariales para Argentina 1990-92 — Interés 4% — VARONES

x	Dx	Nx	ax	Cx	Mx	x	Dx	Nx	ax	Cx	Mx
0	100000	2327766	23,28	2628	10471	50	12357	186876	15,12	102	5170
1	93526	2227766	23,82	201	7843	51	11780	174519	14,81	107	5068
2	89728	2134240	23,79	88	7642	52	11220	162739	14,50	112	4961
3	86189	2044512	23,72	58	7554	53	10676	151519	14,19	118	4848
4	82816	1958322	23,65	40	7496	54	10148	140843	13,88	121	4731
5	79590	1875506	23,56	31	7456	55	9637	130695	13,56	126	4610
6	76498	1795916	23,48	28	7425	56	9140	121058	13,25	130	4484
7	73528	1719417	23,38	26	7397	57	8658	111918	12,93	134	4353
8	70675	1645889	23,29	25	7371	58	8191	103260	12,61	137	4220
9	67932	1575215	23,19	23	7347	59	7739	95069	12,28	141	4083
10	65296	1507283	23,08	22	7324	60	7301	87330	11,96	143	3942
11	62763	1441987	22,98	23	7301	61	6877	80029	11,64	143	3799
12	60325	1379225	22,86	23	7278	62	6469	73152	11,31	146	3656
13	57982	1318899	22,75	28	7255	63	6074	66683	10,98	148	3509
14	55724	1260917	22,63	32	7227	64	5693	60609	10,65	147	3362
15	53549	1205193	22,51	37	7195	65	5327	54916	10,31	149	3215
16	51452	1151645	22,38	43	7158	66	4973	49589	9,97	151	3066
17	49430	1100193	22,26	48	7115	67	4631	44615	9,63	153	2915
18	47480	1050763	22,13	53	7066	68	4300	39984	9,30	154	2762
19	45601	1003283	22,00	55	7013	69	3980	35685	8,97	157	2608
20	43792	957682	21,87	57	6958	70	3670	31704	8,64	158	2451
21	42051	913890	21,73	58	6902	71	3371	28034	8,32	158	2293
22	40376	871839	21,59	56	6844	72	3084	24664	8,00	156	2135
23	38767	831463	21,45	56	6787	73	2809	21580	7,68	154	1979
24	37220	792696	21,30	54	6732	74	2546	18771	7,37	149	1825
25	35734	755476	21,14	52	6678	75	2299	16225	7,06	146	1675
26	34308	719742	20,98	51	6626	76	2065	13925	6,74	144	1530
27	32938	685433	20,81	49	6575	77	1842	11860	6,44	139	1386
28	31622	652496	20,63	48	6526	78	1632	10018	6,14	135	1247
29	30358	620874	20,45	47	6478	79	1434	8386	5,85	132	1112
30	29143	590517	20,26	46	6431	80	1247	6952	5,57	127	980
31	27976	561373	20,07	45	6385	81	1072	5704	5,32	118	853
32	26855	533397	19,86	45	6340	82	913	4632	5,07	108	735
33	25777	506542	19,65	46	6294	83	770	3719	4,83	100	627
34	24740	480765	19,43	46	6249	84	641	2949	4,60	91	527
35	23742	456026	19,21	48	6203	85	525	2309	4,39	80	437
36	22781	432284	18,98	50	6154	86	425	1783	4,19	71	357
37	21854	409503	18,74	52	6104	87	338	1358	4,02	61	286
38	20962	387649	18,49	54	6052	88	264	1020	3,86	50	225
39	20101	366687	18,24	58	5998	89	204	756	3,71	41	175
40	19270	346586	17,99	60	5940	90	155	552	3,57	33	133
41	18469	327316	17,72	63	5880	91	115	397	3,45	26	100
42	17696	308847	17,45	67	5817	92	85	282	3,34	20	74
43	16948	291151	17,18	70	5750	93	61	197	3,23	15	54
44	16227	274203	16,90	73	5680	94	44	136	3,13	11	38
45	15529	257976	16,61	78	5607	95	30	93	3,04	8	27
46	14854	242447	16,32	83	5529	96	21	62	2,97	6	19
47	14199	227594	16,03	87	5446	97	14	41	2,91	4	13
48	13566	213394	15,73	92	5359	98	9	27	2,87	3	8
49	12953	199828	15,43	97	5267	99	6	18	2,84	2	6

Funciones Actuariales para Argentina 1990-92 Interés 4% MUJERES

x	Dx	Nx	ax	Cx	Mx	x	Dx	Nx	ax	Cx	Mx
0	100000	2389388	23,89	2133	8100	50	13000	225025	17,31	52	4345
1	94021	2289388	24,35	188	5968	51	12448	212025	17,03	53	4293
2	90217	2195367	24,33	87	5780	52	11915	199577	16,75	54	4239
3	86660	2105150	24,29	42	5693	53	11403	187662	16,46	56	4185
4	83285	2018490	24,24	33	5651	54	10908	176259	16,16	57	4129
5	80049	1935204	24,18	24	5618	55	10432	165352	15,85	59	4072
6	76946	1855155	24,11	21	5594	56	9971	154920	15,54	62	4013
7	73965	1778209	24,04	20	5572	57	9526	144949	15,22	64	3951
8	71101	1704244	23,97	18	5553	58	9096	135422	14,89	65	3887
9	68348	1633144	23,89	17	5534	59	8681	126327	14,55	69	3822
10	65702	1564796	23,82	16	5518	60	8278	117646	14,21	70	3753
11	63159	1499094	23,74	16	5501	61	7890	109368	13,86	72	3684
12	60714	1435935	23,65	16	5486	62	7514	101478	13,50	74	3611
13	58363	1375221	23,56	16	5470	63	7151	93963	13,14	78	3537
14	56102	1316858	23,47	18	5454	64	6798	86812	12,77	79	3459
15	53927	1260756	23,38	20	5436	65	6457	80014	12,39	83	3380
16	51832	1206829	23,28	22	5416	66	6126	73556	12,01	86	3297
17	49817	1154997	23,18	23	5394	67	5805	67430	11,62	91	3211
18	47877	1105180	23,08	25	5371	68	5491	61625	11,22	95	3120
19	46011	1057303	22,98	25	5346	69	5185	56135	10,83	101	3026
20	44217	1011291	22,87	25	5321	70	4884	50950	10,43	105	2925
21	42492	967074	22,76	24	5297	71	4591	46065	10,03	111	2819
22	40833	924582	22,64	25	5272	72	4304	41474	9,64	114	2709
23	39238	883749	22,52	25	5247	73	4024	37170	9,24	121	2595
24	37704	844512	22,40	24	5223	74	3749	33146	8,84	122	2474
25	36230	806808	22,27	25	5198	75	3482	29397	8,44	128	2352
26	34811	770578	22,14	26	5174	76	3220	25915	8,05	132	2224
27	33447	735767	22,00	25	5148	77	2965	22695	7,65	138	2092
28	32135	702320	21,86	26	5123	78	2713	19730	7,27	140	1954
29	30873	670185	21,71	26	5097	79	2468	17017	6,89	147	1814
30	29660	639312	21,55	27	5071	80	2226	14548	6,53	148	1667
31	28492	609653	21,40	27	5044	81	1993	12322	6,18	152	1519
32	27370	581160	21,23	27	5017	82	1764	10329	5,85	152	1367
33	26290	553791	21,06	28	4990	83	1545	8565	5,54	149	1215
34	25251	527501	20,89	29	4963	84	1336	7020	5,25	144	1066
35	24251	502250	20,71	29	4934	85	1140	5684	4,98	137	922
36	23289	477998	20,52	31	4905	86	960	4544	4,73	127	785
37	22362	454709	20,33	32	4873	87	796	3584	4,50	116	658
38	21470	432347	20,14	33	4841	88	649	2789	4,30	103	542
39	20611	410877	19,94	36	4808	89	521	2139	4,11	90	439
40	19782	390267	19,73	36	4772	90	411	1618	3,94	76	349
41	18985	370484	19,51	38	4736	91	319	1207	3,78	63	273
42	18217	351499	19,29	39	4698	92	244	888	3,65	51	209
43	17478	333282	19,07	40	4660	93	183	644	3,53	41	158
44	16765	315804	18,84	41	4619	94	135	462	3,42	32	117
45	16079	299039	18,60	43	4578	95	98	327	3,33	24	86
46	15417	282959	18,35	45	4534	96	70	228	3,25	18	62
47	14780	267542	18,10	46	4490	97	50	158	3,18	13	44
48	14165	252762	17,84	48	4443	98	35	108	3,13	10	30
49	13572	238597	17,58	50	4396	99	24	74	3,10	7	21

PALABRAS FINALES

Hemos llegado al final de este material de estudio que nos ha permitido aprender acerca de todos los contenidos incluidos en el programa de Matemática Financiera.

A través de desarrollos teóricos, ejemplos, aplicaciones y ejercicios han incorporado a sus saberes profesionales aspectos muy importantes referidos a las operaciones del campo financiero.

Todo lo aprendido será útil en la actividad profesional, en la gestión de las organizaciones, asesoramiento de inversores y hasta en el quehacer cotidiano ya que las personas realizamos habitualmente operaciones de inversión y financiación.
Pero también serán un insumo para otras asignaturas que forman parte del plan de estudio.

BIBLIOGRAFÍA

- CARRIZO, José F. (2001) "Matemática Financiera. Primera Parte". Facultad de Ciencias Económicas U.N.C. Córdoba

- CARRIZO, José F. (2001) "Matemática Financiera. Segunda Parte". Facultad de Ciencias Económicas U.N.C. Córdoba

- MARGARÍA, Oscar. (2013) "Matemática Financiera. Notas de Cátedra". Asociación Cooperadora Facultad de Ciencias Económicas". U.N.C. Córdoba

- MARGARÍA, Oscar y BRAVINO, Laura. (2013) "Matemática Financiera. Material de Estudio para Clases Prácticas". Asociación Cooperadora Facultad de Ciencias Económicas". U.N.C. Córdoba

- YASUKAWA, Alberto M. (2007) "Matemática Financiera. LDM Editorial. 2007. Córdoba.

- YASUKAWA, Alberto M. (2001) "Matemática Actuarial y valuaciones actuariales". Eudecor. Córdoba.