STAMPFEL-FÉLE
[OLCS]ÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.
95.

Dr. Lévay Ede

ANALYTIKAI SÍKMÉRTAN

Ára 60 fill. = 30 kr.

POZSONY – BUDAPEST
KIADJA
STAMPFEL K.

45. *A magyar helyesirás törvényei.* Irta Gaal M.
46. *Ábrázolástan.* I. füzet Irta Dr. Kolbai Arnold.
47. *Ábrázolástan.* II. füz. Rajzok az ábrázolástanhoz.
48—49. *Növényhatározó.* Irta Dr. Cserey Adolf.
50. *Stereometria.* Irta Dr. Lévay Ede·
51. *Világtörténet.* I. rész. Irta Cseh Lajos.
52—53. *Stilisme.* Irta Boros Rudolf.
54. *Levelező gyorsirás.* Irta Bódogh János.
55. *Magyar közigazgatási jog.* Irta Dr. Falcsik D.
56. *Alkotmányi politika.* Irta Dr. Gratz Gusztáv.
57./57a *Magyar pénzügyi jog vázlata.* Irta Dr. Bartha [Béla.
58. *Általános földrajz.* Irta Hegedüs István.
59. *Ethika.* Irta Dr. Somló Bódog.
60. *Ásványhatározó.* Irta Dr. Cserey Adolf.
61. *Zeneműszótár.* Összeállitotta Goll János.
62. *A görög. irod. tört.* Irta Márton Jenö.
63—64. *A zománcz.* Irta Mihalik József.
65. *Vita-gyorsirás.* Irta Bódogh János.
66. *A magyar váltójog.* Irta Dr. Berényi Pál.
67. *Világtörténelem.* II. rész. Irta Cseh Lajos.
68—69. *A rajzolás vezérfonala.* Irta és rajz. Boros R.
70—72. *Mythologia.* Irta Dr. Losonczy Lajos.
73. *Általános zenetan.* Irta Goll János.
74. *Államszámviteltan.* Irta Dr. Berényi Pál.
75. *Jogbölcselet.* Irta Dr. Somló Bódog.
76. *Rovargyüjtő.* Irta Dr. Cserey Adolf.
77. *Szervetlen chémia.* Irta Schwicker Alfréd.
78. *Mechanika.* Irta Dr. Lévay Ede.
79. *Szociológia.* Irta Dr. Somló Bódog.
80. *Logika.* Irta Dr. Schmidt Márton.
81. *Akustika.* Optika. Hötan. Irta Dr. Lévay Ede.
82. *Áruüzleti szokások.* Irta Matavovszky Béla.
83. *A németirodalom röv. vázl.* Irta Albrecht János.
84. *Kereskedelmi jog.* Irta Dr. Berényi Pál.
85. *Elektromosság és mágnesség.* Irta Dr.Lévay Ede.
86. *Kosmografia.* Irta Dr. Bozóky Endre.
87—89. *Lepkehatározó.* Irta Dr. Cserey Adolf.
90—91. *A testgyakorlás alapelemei.* Irta Dr. Ottó Józs.
92. *Kis physikai földrajz.* Irta Dr. Bozóky Endre.
93. *Szerves chémia.* Irta Schwicker Alfred.
94. *Világtörténet.* III. rész. Irta Cseh Lajos.
95. *Analytikai sikmértan.* Irta Dr. Lévay Ede.
96—98. *Rovarhatározó.* Irta Dr. Cserey Adolf.
99. *Meteorologia.* Irta Dr. Bozóky Endre.
100. *A magyar művelődés tört.* Irta Dr. Bartha József.

A „Tudományos zseb-könyvtárban“ legközelebb, de időhöz nem kötötten, a következő kötetek megjelenése van tervbe véve:

Aesthetika
Anthropologia
Astronomia
Dramaturgia
Észjog
Fejlődéstan
Fogalmazványok
Földrajz (politikai)
Földtan
Geologia

Görög régiségek
Jogtörténet
Kereskedelem-isme
Keresk. földrajz
Közjog
Lélektan
Német helyesirás
Nemzetgazdaságt.
Népisme
Oktat. módszertan

Olasz nyelvtan
Orosz nyelvtan
Ötvösség
Paedagógia
Pénzügytan
Polg. perrendtartás
Statisztika
Természetrajz:
Állattan | Gombaisme
Növénytan | Ásványtan

Minden egyes füzet 60 fillér.

STAMPFEL-FÉLE

TUDOMÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.

95.

ANALYTIKAI SÍKMÉRTAN.

ÖSSZEÁLLITOTTA

DR. LÉVAY EDE.

ÁLL. FŐGYMN. TANÁR.

22 ÁBRA. — 250 FELADAT.

POZSONY. 1901. BUDAPEST.

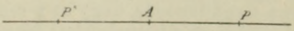
STAMPFEL KÁROLY KIADÁSA.

TARTALOM.

Bevezetés.

1. §. A pont helyzete a síkban.

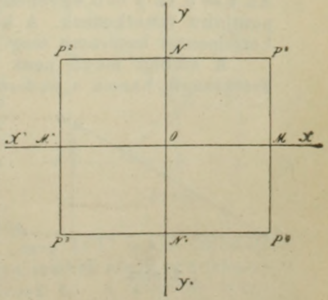
Az AP vonaldarab (1. ábra), vagyis a tetszőleges P pontnak az AX egyenes vonal A kezdőpontjától számitott távolsága, tökéletesen meghatározza P pont helyzetét az említett egyenesen. Ha azonban AX egyenest nem tekintjük A pontban határoltnak s e pontot csakis, mint a végtelenbe nyúló egyenes egyik



1. ábra.

adott pontját veszszük számításba; akkor P helyzetének biztos ismeretére nézve tudnunk kell még, hogy vajjon az jobbra, vagy balra fekszik-e A-tól? Más szóval ismernünk kell még az AP távolság előjelét is. Általánosan elfogadott eljárással az A-tól jobbra fekvő távolságokat *positiv*, a balra fekvőket *negativ* előjellel látjuk el. Ha tehát $AP = AP'$ és $AP = + x$; akkor: $AP' = - x$.

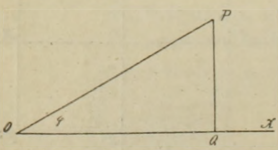
Hogy most már valamely pont helyzetét a *síkban* meghatározhassuk, arra nézve legegyszerübben két egymást O pontban metsző (2. ábra) XX' és YY' merőleges egyenest rajzolunk s azokra az illető P_1 pontból P_1M és P_1N merőleges egyeneseket emeljük. Ha ezen egyeneseknek tetszőleges hosszúság-egységekben kifejezett mértékszámait ismerjük; akkor ez úton a pont helyzetét tökéletesen meghatározottnak tekinthetjük. A $P_1N = OM$ egyenes mértékszámát *abscissának*, a $P_1M = ON$ egyenesét *ordinátának*, a kettőt együtt *coordinátáknak*, még pedig az XX' és



2. ábra.

YY' *coordinata-tengelyek* fekvése után *derékszögű-coordinátáknak* nevezzük. Minthogy az abscissát általában x-el, az ordinátát y-nal jelöljük; azért P_1 pontra nézve $x = OM$ és $y = P_1M$. Az *XX'* egyenest még *abscissa-tengelynek,* vagy *x-tengelynek,* az *YY'* egyenest pedig *ordinata-,* vagy *y-tengelynek* is nevezzük. *O* pont a coordináták *kezdőpontja.* Minthogy a coordináta-tengelyek a síkot négy quadransra bontják; azért a pont helyzetének ismeretére azt is tudnunk kell még, hogy az melyik negyedben fekszik. E tekintetben a coordináták előjelei adnak felvilágositást. Az abscissák előjelére nézve már tájékozottak vagyunk, mert tudjuk, hogy az y-tengelytől jobbra esők *positivok,* a balra esők *negativek;* az ordínáták előjelére vonatkozólag pedig az a megállapodás, hogy az x-tengely fölé eső ordinátákat *positiv,* az x-tengely alatt fekvőket ellenben *negativ* előjellel látják el. Ilyformán, ha: $OM = a$, $ON = b$; akkor: P_1 pont coordinátái: $x = +a$, $y = +b$; P_2 pontéi: $x = -a$, $y = +b$; P_3-éi: $x = -a$, $y = -b$; P_4-éi: $x = +a$, $y = -b$. Ha valamely pont előállítására csakis egyik coordinátája van megadva, úgy a feladatnak azon egyenes minden pontja megfelel, melyet az adott coordinátának megfelelő távolságban a másik tengelyhez párhuzamosan húzunk. Igy tehát az $x = a$ egyenlet az y-tengelytől *a* távolságban: az $y = b$ egyenlet az x-tengelytől *b* távolságban húzott párhuzamos egyenes vonalat állitja elő. Az $x = o$ és $y = o$ egyenletek a coordináta-tengelyek pontjaira vonatkoznak. A két egyenlet együttesen a kezdőpontot határozza meg.

A síkban fekvő pont helyzetét nem csupán a derékszögű, hanem a *ferdeszögű-coordináták* és a *sark-coordináták* is meghatározzák. Előbbieknél *XX'* és *YY'* egyenesek ferdén metszik egymást s ilyen tengelyekre nézve valamely *P* pont coordinátáit az ezen pontból az egyes tengelyekig a másikkal párhuzamosan húzott egyenesek mértékszámai adják.



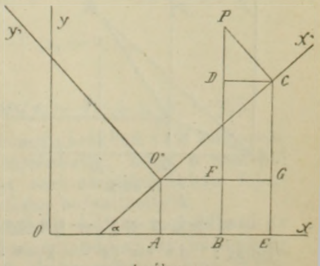
3. ábra.

A *sark-coordinátákat* következőképen nyerjük. Ha ismerjük az *OX* egyenes (3. ábra) és *O* pont helyzetét; akkor a sík *P* pontjának fekvését a $PO = \rho$ egyenes és a $POQ = \varphi$ szög teljesen meghatározzák. OX egyenest *sarktengelynek,* O pontot *sarknak,* ρ egyenest P pont *radius vectorának* és φ szöget P pont *sarkszögének,* a két utóbbit pedig közös névvel *sark-coordinátáknak* nevezzük. A sark-coordináták előjelére nézve azt kell tudnunk, hogy mi a radius vectornak mindig csak absolut-értékét veszszük tekintetbe, ellenben a sarkszöget positivnak tekintjük, ha a sarktengelytől számitva az óramutató járásával ellenkező; negativnak, ha az óramutató járásával megegyező irányban halad.

A derékszögű és sark-coordináták közt szoros összefüggés van. Hogy ezt megállapíthassuk, tekintsük OX egyenest a derékszögű coordináta-rendszer x-tengelyéül O pontot pedig ugyanannak kezdőpontjául; akkor P pont derékszögű coordinátái: $x = OQ$, $y = PQ$, és $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. E két egyenletből osztás után: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{y}$ és négyzetre emelés, majd összeadás után: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. §. A coordináták transformatiója.

A számitásra nézve gyakran igen kivánatos és előnyös, hogy valamely pont coordinátáit, ugyanazon pont új coordináta-rendszerre vonatkozó coordinátáivá alakitsuk át. Ezt az eljárást *coordináta-transformátiónak* hívjuk s ez mindannyiszor sikerül, valahányszor a két coordináta-rendszer egymáshoz való helyzete meg van határozva. Mi csupán a derékszögű-coordináták transformátiójáról kivánunk szólani. Legyen e czélból OX és OY



4. ábra.

(4. ábra) továbbá $O'X'$ meg $O'Y'$ a két coordináta-rendszer két-két tengelye, melyek közül az x-tengelyek egymással α szöget zárnak be. A második tengelyrendszer kezdőpontjának az elsőre vonatkozó coordinátái: $m = OA$ és $n = O'A$. Valamely P pont cordinátái az első rendszerre nézve: $x = OB$, $y = PB$;

a második rendszerre nézve: $x' = O'C$, $y' = PC$. Ha most a $CD \perp PB$, $CE \perp OX$ és $O'G \parallel OX$ egyeneseket húzzuk; akkor

$$x = OB = OA + AE - BE = m + O'G - CD;$$
$$y = PB = OA + FD + DP = n + CG + PD.$$

Minthogy: $O'G = x' \cos \alpha$; $CD = y' \sin \alpha$; $CG = x' \sin \alpha$; $PD = y' \cos \alpha$, azért:

$$x = m + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \quad y = n + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

Most a következő különös esetek lehetségesek:
1) A két kezdőpont összeesik. Akkor: $m = n = 0$ és:

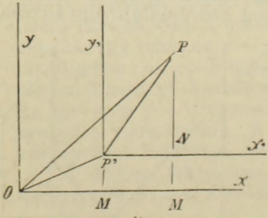
$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

2) A tengelypárok egymással párhuzamosak. Akkor: $\alpha = 0$, $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ és:

$$x = m + x'; \quad y = n + y'.$$

3. §. Két pont távolsága.

Ha a P pont (5. ábra) coordinátái $OM = x$ és $PM = y$, a P_1 pontéi $OM' = x_1$ és $P_1M' = y_1$ és $PP_1 = d$; akkor az OX és OY coordináta-tengelyeket párhuzamosan P_1X' és P_1Y' helyzetbe tolva P_1 pont az új tengelyrendszer kezdőpontjává lesz, melyre nézve P pont coordinátáit $P_1N = \xi$ és $PN = \eta$ állítják elő s a P_1NP derékszögű háromszögből $d^2 = \xi^2 + \eta^2$. Ámde a 2. §. utolsó egyenlete szerint:



5. ábra.

$x = x_1 + \xi$; $y = y_1 + \eta$ s így: $\xi = x - x_1$; $\eta = y - y_1$, tehát: $d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$, honnan: $d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$.

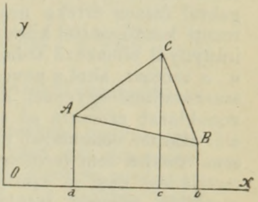
Ha P és P_1 pontok sark-coordinátákban vannak meghatározva, azaz $PO = \rho$, $POX\sphericalangle = \varphi$, $P_1O = \rho_1$ és $P_1OX = \varphi_1$; akkor $PP_1O\triangle$-ből:

$$d^2 = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi_1)}.$$

Ha P_1 pont a sarkponttal összeesik; akkor: $\rho_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ és $d = \rho$.

4. §. A háromszög területe.

Ha ABC△ (6. ábra) területét kell meghatároznunk, feltéve hogy ismerjük szögpontjainak (x_1 y_1; x_2 y_2; x_3 y_3) derékszögű coordinátáit, úgy eljárásuk a következő lesz. A háromszög területét megkapjuk, ha az $AacC$ és $BbcC$ trapézek területének összegéből levonjuk $AabB$ trapéz területét. Ámde egy-egy ily trapéz területét a középvonal és a magasság mértékszámainak szorzata adja. Tehát:



6. ábra.

$$t = AacC + BbcC - AabB$$

és:

$$AacC = \frac{y_3 + y_1}{2}(x_3 - x_1),\ BbcC = \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_3),$$

$$AabB = \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_1);$$

miből ismét:

$$t = \frac{y_3 + y_1}{2}(x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_3) -$$

$$- \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_1);$$

rendezés után pedig:

$$2t = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).$$

A területnek sark-coordinátákban való kifejezése legegyszerűbben úgy történhetik, hogy a szereplő derékszögű-coordinátákat sark-coordinátákban fejezzük ki s a nyert egyenletbe helyettesitjük.

Ez után minden nehézség nélkül megoldható az a feladat is, hogy meghatározandó az oly háromszög területe, melynek egyik szögpontja a coordinátarendszer kezdő-pontjába esik.

5. §. Algebrai kifejezések geometriai szerkesztése.

Ha a, b, c, . . . határolt egyenesek mértékszámait jelentik, úgy $a + b$ oly egyenest állit elő, melynek hosszúsága akkora, mint a és b hosszúsága együttvéve. Ennek szerkesztése éppen oly könnyű, mint az $a - b$ különbség vagy az $a + b + c$ . . . algebrai összeg jelentésének felismerése és geometriai szerkesztésének kivitele Ha a különbség, vagy algebrai összeg értéke negativ; akkor az a meghatározott kezdőponttól kiinduló s a positivnak megfelelő iránynyal ellenkező *irányú* vonaldarabot jelenti. Az $n . a$ szorzat, ahol n nevezetlen szám, szintén könnyen szerkeszthető egyenest, a-nak n-szeresét, ellenben két vonaldarab szorzata ab az oblongum területét állítja elő. Három vonaldarab mértékszámának szorzata már sem vonalra sem területre nem vezethet s így planimetriailag nem is szerkeszthető Az a^2 hatvány az a oldalu négyzet területének felel meg. Az $a : n$ hányados, melynek osztandója vonal, osztója nevezetlen szám, az a vonal szerkeszthető n-ed részét; ezzel szemben $a : b$ az a és b vonaldarabok arányát, tehát nevezetlen számot mutat. Az $x = \frac{ab}{c}$ egyenlet $c : b = a : x$ aránylat módositott alakja s így x mint a negyedik arányos *vonal* megszerkeszthető. A bonyoladottabb elsőfokú egyenletek általában mind a megismert alap-alakra vezethetők vissza. Ha tehát összegek, vagy különbségek, vagy oly hányadosak szerepelnek az egyenletben, melyeknél a nevező lineáris szorzói egygyel kisebbek, mint a számláló lineáris szorzói; úgy a hányados mindig *vonalat* jelent. Ha azonban a nevező két ily szorzóval kisebb, mint a számláló; akkor az egyenlet *területet* jelent. Ha a számláló szorzói hárommal, vagy még többel mulják felül a nevezőét, úgy a kifejezés síkmértani jelentéssel nem bír, valamint nincs geometriai jelentése az egyenletnek akkor sem, ha a számláló és nevező egyenlő számú lineáris szorzóból áll, vagy ha a nevező ily szorzóinak száma több, mint a számlálóé.

Amint a vonal második hatványa területet jelent, éppen úgy viszont az a^2-ből vont négyzetgyök a vonalban a négyzet oldalát tünteti fel. Az $x = \sqrt{ab}$ egyenlet vonalat, a és b geometriailag szerkeszthető geometriai középarányosát jelenti. Ez oly négyzet oldalával egyenlő, melynek területe akkora, mint az a és b oldalakból alkotott oblongumé. Az $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ egyenlet a derékszögű háromszög átfogóját, az $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ a derékszögű háromszög befogóját állítja elő. A vegyes másodfokú egy ismeretlent tartalmazó $x^2 \pm ax = \pm b^2$ alakú egyenletek gyökei:

$$x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm b^2}$$ alakúak; s ezek a már fentebb megismert módon egyenesekül megszerkeszthetők.

Az olyan egyszerű kifejezéseket, melyek geometriai jelentése *vonal*, lineáris, vagy *egy dimensiójú*, azokat pedig, melyek geometriai jelentése *terület*, *két dimensiójú* kifejezéseknek hivjuk. Az elsőkhöz tartozók alakja: a, $\frac{ab}{c}$, $\frac{a^3}{bc}$, $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{\frac{a^3 b^2 c}{d^2 e}}$ stb.; két dimensiójúak: ab, $\frac{abc}{d}$, $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$, $\sqrt{\frac{ab^2 c^2}{d}}$ stb.

A két ismeretlent tartalmazó határozatlan egyenletek geometriai képei egyenes, vagy görbe vonalak, mert az ily egyenletekből x és y számára végtelen sok gyököt helyettesíthetünk s ha ezeket pontok coordinátáinak mértékszámai gyanánt tekintjük; akkor az egyes összetartozó gyökpároktól meghatározott pontokat összekapcsolván, egyenes-, vagy görbevonalat nyerünk.

6. §. Az analytika geometria feladata.

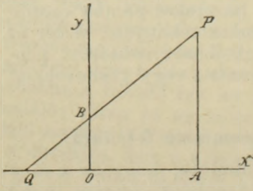
Az előbbi §-ból azt tanultuk, hogy az x és y coordináták közt fennálló egyenletek egyenes, vagy görbevonalakat, úgynevezett *geometriai helyeket*, azaz közös tulajdonsággal biró pontsokaságokat határoznak meg, melyek alakját és sajátságait geometriai szerkesztés alapján ismerhetjük fel. Ámde ebből az is következik, hogy viszont az egyes geometriai helyeknek x és y coordináták közt fennálló egyenletek felelnek meg és hogy az ezen geometriai helyek egyes pontjainak coordinátái az egyenleteknek eleget tesznek. Az analytika geometria alapját éppen az egyenlet s az annak megfelelő geometriai hely között mutatkozó összefüggés szolgáltatja. Az analytika geometria lényege ilyformán abban áll, hogy segítségével az egyes geometriai alakzatok törvényszerűségeit a coordináták közt fenálló egyenletekben kifejezzük; ezen egyenletekkel az algebra szabályai szerint számoljunk s a nyert eredményeket geometriailag értelmezzük. Az analytika geometria sík- és térmértanból áll. Az előbbi a pontok és vonalak helyzetét a síkon, a másik az idomok térbeli helyzetét vizsgálja. Mi ez alkalommal a második részre nem terjeszkedünk ki.

Az analytikai geometria megalapítója *Descartes* (1596—1650) volt. Rajta kívűl kiválnak annak művelésében *Fermat, Roberval, de Beaune, de la Hire,* majd a térmértanban *Parent, Clairaut* és mások.

Az egyenes vonal.

7. §. Az egyenes általános egyenlete.

Az egyenes vonal általános egyenletének lefejtésére legyenek az x-tengelylyel α szöget bezáró PQ (7. ábra) egyenes P pontjának coordinátái: $x = OA$, $y = PA$; akkor PQA derékszögű háromszögből: $y = (x + OQ) \operatorname{tg}\alpha = x \operatorname{tg}\alpha + BO$. Ha $\operatorname{tg}\alpha = a$ és $BO = b$; akkor: $y = ax + b$. Ebhen az egyenletben tehát az egyenes egyik pontjának coordinátáin kivül a vagyis az egyenes és az x-tengelytől képezett szög tangense és b, vagyis az egyenes és az ordinata-tengely átmetszési pontjának a kezdőpontig számított távolsága szerepel. Minthogy az egyenes minden pontjában ugyanazon irányt követi; azért x és y azon összefüggése, melyet a levezetett egyenlet meghatároz, az egyenes minden pontjára nézve érvényes. Ezt az egyenletet tehát, melynek a felvett és csakis ezen egyetlen egy egyenes minden pontjának coordinátái megfelelnek, az *egyenes egyenletének* hívjuk.



7. ábra.

Az $y = ax + b$ egyenletben x és y az egyenes egyes pontjai szerint *változó mennyiségek,* ellenben a és b ugyanazon egyenes esetében *állandó mennyiségek.* Ezek közűl az $a = \operatorname{tg}\alpha$ értékét az egyenes *irány coefficiensének* hívjuk. Az egyenes állandói annak helyzetét tökéletesen meghatározzák. Látni való ebből, hogy az egyenes helyzetét két föltétel, azaz két pont határozza meg. Ha az állandó mennyiségek közűl $b = o$; akkor az egyenes a *kezdőponton* megy át s egyenlete $y = ax$ alakot ölt. Ha az utóbbi egyenletben $\alpha = o$, azaz $tg\alpha = o$, és $\alpha = o$: akkor $y = o$. Ez utóbbi az *x-tengely egyenlete,* melynek minden pontjára nézve y értéke tényleg zérussal egyenlő. Ha ugyanazon egyenletben $a = \infty$, azaz $\alpha = 90^o$, akkor $x = \frac{y}{a} = o$ az *y-tengely egyenletét* adja. Ha az $y = ax + b$ általános egyenletben $a = o$; akkor $y = b$ az x-tengelytől b távolságban haladó párhuzamos egyenes egyenletét szolgáltatja. Ha az általános egyenletet a-val osztjuk s a $\frac{b}{a}$ értéket c-vel jelöljük; úgy $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a} = \frac{y}{a} - c$ s ha most $a = \infty$, azaz $\alpha = 90^o$, akkor $x = -c$ nem más, mint azon egyenes, mely az y-tengelytől $-c$ távolságban párhuzamosan halad.

Az egyenes szerkesztésére egyenletének alakját következőleg módosítjuk. Az $y = ax + b$ minden tagját osztjuk b-vel; akkor: $\frac{y}{b} - \frac{ax}{a} = 1$, vagy $\frac{y}{b} + \frac{x}{\frac{b}{a}} = 1$; végre az előbb tett helyettesítés számbavételével $\frac{y}{b} + \frac{x}{-c} = 1$. Itt most b és c azon távolságok mértékszámai, melyekben az egyenes az egyes tengelyeket metszi. Igy pl. az $y = \frac{4}{5}x - 4$ egyenletben, $-$ 4-gyel osztván, lesz: $\frac{y}{-4} + \frac{x}{5} = 1$. Az x-tengelyre tehát 5, az y-tengelyre a negativ iránynak megfelelően 4 egységet kell felmérnünk s a nyert pontok összekötése révén a keresett egyeneshez jutunk.

8. §. Az egyenes sarkegyenlete.

Az egyenes bármely pontját a sark-coordináta-rendszer kezdőpontjául választhatjuk s akkor az egyenes helyzetét a tengelyre vonatkozólag az egyenes hajlásszöge teljesen meghatározza s akkor $tg\varphi = a$ az ilyen egyenes sark-egyenlete.

Hogyha azonban az egyenes nem megy át a sarkponton, akkor az egyik pont (xy) coordinátáira nézve: $x = \rho \cos \varphi$ és $y = \rho \sin \varphi$ s az $y = ax + b$ egyenletben: $\rho \sin \varphi = a \, . \, \rho \cos \varphi + b$, ahol ρ és φ a pont sark-coordinátáit jelentik Ezen utóbbi egyenletből:

$$\rho\,(\sin \varphi - a \cos \varphi) = b, \text{ vagy } \rho\left(\sin \varphi - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} . \cos \varphi\right) = b;$$

$$\rho \, . \, \frac{\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha}{\cos \alpha} = b;$$

és:

$$\rho = \frac{b \, . \cos \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)}.$$

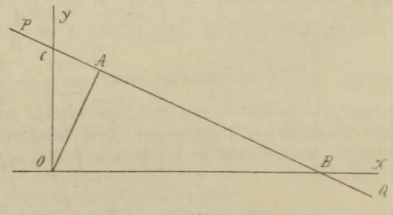
Ha most még tekintetbe veszszük, hogy $\frac{b}{a} = c$; akkor $\frac{b}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = c$ és $b \cos \alpha = c \, . \sin \alpha$, tehát:

$$\varphi = \frac{c \, . \sin \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)}.$$

Ezt az egyenletet az egyenes *sark-egyenletének* hívjuk.

9. §. Az egyenes normális egyenlete.

Az egyenes azon egyenletét, melyben meghatározó részekül a kezdőpontból az egyenesre bocsátott merőleges és ama szögek szerepelnek, melyeket e



8. ábra.

merőleges a positiv tengelyekkel bezár, az egyenes *normális egyenletének* nevezzük. Ha tehát $OA \perp PQ$ (8. ábra) és $AOX \sphericalangle = \alpha$, $AOY \sphericalangle = \beta$, $BO = c$,

$CO = b$, $AO = p$; úgy az egyenes $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, vagy $\frac{px}{c} + \frac{py}{b} = p$ egyenletéből, figyelembe véve, hogy $\frac{p}{c} = \cos\alpha$, $\frac{p}{b} = \cos\beta = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$, lesz:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p.$$

Ez az egyenes *normális-egyenlete,* melyben α és p ugyanazon egyenesre nézve állandó mennyiségek.

10. §. Adott pontokon átvonuló egyenesek.

Ha az $(x_1 y_1)$ adott ponton áthaladó egyenes egyenletét keressük; ugy annak alakja: $y = ax + b$. Ama feltétel folytán, hogy az egyenes az x_1 és y_1 által meghatározott pontot is magábsn foglalja, következik, hogy $y_1 = ax_1 + b$ ugyanazon egyenes egyenletét állitja elő oly módon, hogy a és b mindkét egyenletben azonos értéküek. Ha most a második egyenletet az elsőből kivonjuk, a következő egyenlethez jutunk:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

s ez már a feladat megfejtését foglalja magában. Az a határozatlan coefficiens végtelen sok érték felvételére képes s így nyilvánvaló, hogy egyetlen adott ponton végtelen sok egyenes mehet át.

Ha az egyenesnek egyidejüleg $(x_1 y_1)$ és $(x_2 y_2)$ pontokon kell áthaladnia; úgy az egyenesnek $y_1 = ax_1 + b$ és $y_2 = ax_2 + b$ egyaránt egyenletei. Ezekből:

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) \text{ és } a = (y_1 - y_2):(x_1 - x_2).$$

Ezt az $y_1 - y_2 = a(x - x_1)$ egyenletbe helyettesítvén:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

a keresett egyenes egyenlete. Ezt még a következő alakban is felirhatjuk:

$$(x - x_1):(x_1 - x_2) = (y - y_1):(y_1 - y_2).$$

Ez az egyenlet a három ugyanazon egyenesben lévő pont ama jellemző sajátságát fejezi ki, hogy az ily pontok abscissáinak különbségei a megfelelő ordinátάk különbségeivel arányosak. Ha ezt az aránylatot szorzattá alakítjuk, csekély átváltoztatással a 4. §-ban megismert egyenlet-alakhoz jutunk, mely azt fogja mutatni, hogy a baloldal zérussal egyenlő, azaz, hogy az ily pontoktól meghatározott háromszög területe zérus.

11. §. Párhuzamos és egymást metsző egyenesek.

Az egyenleteikben adott egyeneseknél a következő kérdések merülhetnek fel: 1. milyen azok kölcsönös iránya s a mennyiben egymást metszik, 2. milyen helyzetet foglal el a metszési pont?

Ha $y = ax + b$ és $y = a' x + b'$ két adott egyenes egyenlete; akkor közös metszési pont esetében a metszési pont coordinátáinak behelyettesitésével a két egyenlet egyaránt megtartja érvényességét. A metszési pont coordinátáinak meghatározása tehát tulajdonképen ama feladattal azonos, hogy keresendő oly x és y érték, mely egyidejüleg mind a két egyenletnek eleget tesz. Az adott elsőfokú egyenletrendszer a két ismeretlen számára csupán egy-egy értékre vezethet, aminek az az analytikai értelme, hogy két egyenesnek csupán egy közös pontja lehet, Az adott egyenletrendszerre az eliminatio módszerét alkalmazva, úgy találjuk, hogy:

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \text{ és } y = \frac{ab' - a' b}{a - a'}.$$

Itt most a következő különös esetek állhatnak elő; lehetséges, hogy:

a) $b = b'$; akkor $x = o$, azaz a metszési pont az y-tengelyben fekszik, ami *b* és *b'* jelentésének ismerete mellett (7. §.) önként következik b) $ab' = a'b$; akkor $y = o$, a metszési pont az x-tengelyben van. c) $a = a'$; akkor $x = \infty$ és $y = \infty$, a metszési pont végtelen távolban fekszik; tehát a két egyenes párhuzamos egymással. d) az előbb megismert három feltétel közül kettőnek egyidejű fenállása arra vezet, hogy $a = a'$ és $b = b'$, azaz hogy a két egyenlet minden pontja összeesik.

Az adott egyenesek ismeretes egyenleteiből meghatározhatjuk az egyenesek közt fekvő szöget is. Ha azt *w* jelenti; akkor a két egymást metsző egyenes közül az egyiknek az x-tengelylyel alkotott *α* szöge, mint külső szög egyenlő a másik egyenes és az x-tengelytől bezárt szög, meg a két egyenes képezte szög összegével, azaz: $\alpha = \alpha' + \omega$ s így: $\omega = \alpha - \alpha'$, továbbá

$$\operatorname{tg}\omega = \pm\operatorname{tg}(\alpha-\alpha') = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha'}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}$$ s minthogy

$\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\alpha' = a'$ azért:

$$\operatorname{tg}\omega = \pm\frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

A kettős jel szerint a szög hegyes, vagy tompa lehet. E kettő egymás mellékszöge. Ha csupán a hegyes szöget kivánjuk meghatározni: akkor csakis a positiv érték veendő számitásba Es most: a) Ha a két egyenletben az x mellett álló szorzók egyenlők, azaz: $a = a'$; akkor $\operatorname{tg}\omega = o$ és $\omega = o$, vagy $\omega = 180^0$; ez a párhuzamosság feltételét fejezi ki; ha pedig b) $1 + aa' = o$; akkor: $\operatorname{tg}\omega = \infty$ és $\omega = 90^0$. A két egyenes egymásra merőleges. Az $1 + aa' = o$ egyenletből: $a = -\frac{1}{a'}$ és $a' = -\frac{1}{a}$. Két egyenes ez utóbbi egyenletekből kitetszőleg, akkor áll egymásra merőlegesen, ha az x mellett álló szorzók egyike a másik negativ reciproc értékével egyenlő, azaz, ha e két tényező szorzata a negativ egység.

Az elmondottak után minden nehézség nélkül megoldhatjuk a következő feladatokat:

I) Meghatározandó az $(x'\,y')$ ponton átvonuló s az $y = ax + b$ egyenesre merőlegesen álló egyenes egyenlete. Az adott ponton átvonuló $y = a'x + b'$ egyenes egyenlete:

$$y - y' = a'(x - x');$$

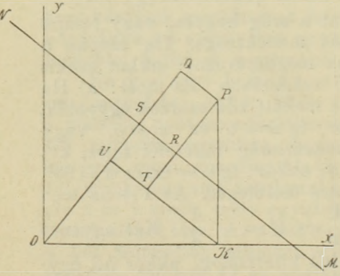
minthogy ez a mellett, hogy az adott ponton áthalad még az adott $y = ax + b$ egyenesre merőlegesen is áll, azért: $a' = -\frac{1}{a}$ és : $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$ a kereset egyenes egyenlete.

II) Meghatározandó az $(x'\,y')$ ponton átvonuló s az $y = ax + b$ egyenessel párhuzamosan haladó egyenes egyenlete. Az egyenes egyenlete mindenesetre $y = a'x + b'$ alakú, mely adott ponton áthaladván: $y - y' = a'(x - x')$ alakot ölt. Hogy azonban egyidejüleg párhuzamos legyen az adott egyenessel, annak feltétele: $a = a'$ s igy:

$$y - y' = a(x - x')$$

a keresett egyenes egyenlete.

III) Meghatározandó az $(x' \, y')$ pont távolsága az $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = o$ egyenestől Ha *MN* (9. ábra) az adott egyenes és *P* az adott pont; akkor $OK = x'$ és $PK = y'$. Ha most $PQ \parallel MN \parallel KU$, és $PT \perp MN$, $OQ \perp MN$; akkor $KOS \measuredangle = PKU = \alpha$ és $OU = x' \cos \alpha$, $PT = UQ = y' \sin \alpha$, honnan $OQ = OU + UQ = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha$. Ha most ebből $OS = p$ elvétetik, lesz: $OQ - OS = PR = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p$, s ez már nem más, mint P pont keresett függőleges távolsága *MN* egyenestől. Ha *P* pont az egyenes ugyanazon oldalán fekszik, mint a kezdőpont; akkor a talált egyenlet jobb oldala ellenkező előjellel veendő s igy ha a távolság mértékszáma *d*, lesz:



9. ábra.

$$d = -(x' \cos \alpha + y' \cos \alpha - p).$$

Látjuk ebből, hogy az egyenes normális egyletének baloldala, ha abba a sik valamely tetszőleges pontjának coordinátáit irjuk be, irányra és nagyságra nézve tökéletesen meghatározza a ponttól az egyenesig vett távolságnak értékét.

Ha az egyenes $y = ax + b$ egyenlet-alakban van adva; akkor feltéve, hogy a szög, mit az egyenes az x-tengelylyel bezár α-tól 90^0-kal különbözik, lesz:

$$\operatorname{tg}(90^0 \pm \alpha) = a; \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}};$$

$$p = b \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

s ha most ezen értékeket *d* egyenletébe helyettesítjük:

$$d = -\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} (y' - ax' - b).$$

IV) Meghatározandó ama feltétel, mely mellett három egyenes egy pontban metszi egymást. Ha az adott egyenesek egyenletei:

$$y = ax + b,\ y = a' x + b',\ y = a'' x + b''$$

akkor, ha a két első egyenes metszés-pontjának coordinátái u és v, a metszés feltétele a fentebb mondottak szerint az, hogy:

$$u = \frac{a' - b}{a - a'},\ v = \frac{ab' - a' b}{a - a'};$$

ha az első és harmadik egyenes metszés-pontjának coordinátái u_1 és v_1, akkor:

$$u_1 = \frac{b'' - b}{a - a''},\ v_1 = \frac{ab'' - a'' b}{a - a''}.$$

Ámde mi azt a feltételt keressük, mikor mind a három egyenes ugyanazon pontban metszi egymást. Ez akkor fog bekövetkezni, ha az említett két metszési pont egybeesik, azaz ha $u = u_1$ és $v = v_1$, tehát ha:

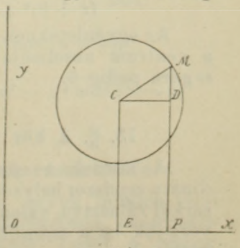
$$\frac{b' - b}{a - a'} = \frac{b'' - b}{a - a''} \text{ és } \frac{ab' - a' b}{a - a'} = \frac{ab'' - a'' b}{a - a''}.$$

E két utóbbi egyenletnek kell tehát teljesülni, hogy az adott egyenesek közös metszési ponttal bírhassanak.

A kör.

12. §. A kör általános egyenlete.

A kör oly pontok geometriai helye, melyek adott állandó ponttól — a centrumtól — egyenlő távolságban fekszenek. Ha tehát a centrum coordinátái $OF = p$ és $CF = q$, az egyes pontoknak a centrumtól való egyenlő távolsága, azaz a kör sugara $CM = r$, egyik tetszőleges M kerületi pont coordinátái $OP = x$ és $MP = y$; akkor MCD △-ből $MC^2 = CD^2 + MD^2$. És mert: $MC = r$, $CD = x - p$, $MD = y - q$, azért:



10. ábra.

$$r^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2$$

s minthogy ez a kör-kerület minden egyes pontjára nézve érvényes, azért ezt a kör *általános egyenletének* kell tekintenünk. Az a körülmény, hogy a talált egyenlet három állandó mennyiséget tartalmaz, azt bizonyítja, hogy a kör meghatározására három pont szükséges. Kifejtve a kör általános egyenletét.

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 = r^2$$

alakhoz jutunk. Ha ebben $-2p = a$, $2q = b$, $p^2 + q^2 - r^2 = c$ helyetesitést végezzük

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = o$$

másodfokú egyenletet nyerjük. Minthogy a kör ezen másodfokú egyenletnek a geometriai képe, azért azt a többi olyan vonalakkal együtt, melyek egyenlete másodfokú, *másodrendű görbe vonalnak* nevezzük.

Hogy a legutóbb nyert egyenletnek megfelelő kört szerkeszthessük, azt ily alakra hozzuk:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}.$$

Ebben $-\frac{a}{2}$ és $-\frac{b}{2}$ a centrum corrdinátáit, $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ — a sugarat jelenti. Igy ha az $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$ egyenletnek megfelő kört kell szerkesztenünk, $x^2 + 6x$ és $y^2 - 4y$ teljes négyzetté egészítendő ki. Ezt 9, illetőleg 4 hozzáadása útján érjük el s így:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 23 + 9 + 4$$

egyenleteket nyerjük. Ebből:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36 = 6^2$$

Az egyenleteknek tehát oly kör felel meg, melynél a centrum abscissája -3, ordinátája $+2$, a kör sugara pedig 6.

13. §. A kör más egyenlet alakjai.

A körnek a szerint, amint a derékszögű coordináta-rendszer helyzetét változtatjuk, vagy centrumát sarkúl választva, valamely pontjának sark-coordinátáit vezetjük be a számitásba, más egyenlet-alakjait fejthetjük le.

Ha a kör centruma az x-, vagy y-tengelyben fekszik, úgy első esetben $q = o$, a másodikban $p = o$ s a kör egyenlete.

$$y^2 + (x - p)^2 = r^2, \text{ vagy } x^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Ha az előbbi feltétel megtartása mellett a coordináta-kezdőpontot a kör kerületébe helyezzük; akkor $p = r$ és $q = o$ s a kör egyenlete:

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \text{ tehát: } x^2 + y^2 - 2rx = o,$$

Ezt az utóbbi egyenletet, mely már csakis egyetlen állandót tartalmaz, a *kör csúcs-egyenletének* mondjuk.

Ha most a kör centrumát egyidejüleg a coordináta-rendszer kezdőpontjául választjuk; akkor $p =$ $= o$ és $q = o$ és

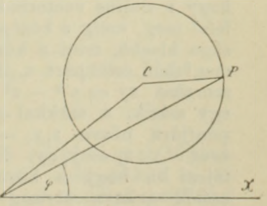
$$x^2 + y^2 = r^2$$

a kör *középponti egyenletét* állítja elő.

A *kör sarkegyenletének* levezetésénél két esetet különböztetünk meg, a szerint, amint a sarkpont a kör centrumával egybeesik, vagy nem.

Első esetben a kör-kerület bármely pontjának radius vectora a kör sugarával egyenlő s így a $\rho = r$ egyenlet már a kör sark-egyenlete.

Második esetben legyenek OX (11. ábra) a sarktengely, O a sark, $PO = \rho$ és $POX = \varphi$ a $CP = r$ sugarú kör tetszőleges P pontjának sark-coordinátái. Ha még $CO = \rho'$ jelenti a C centrum radius vectorát, $COX = \alpha$ annak sarkszögét; akkor COP $\triangle$-ből:



11. ábra.

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha - \varphi),$$

melyből:

$$\rho = \rho' \cos(\alpha - \varphi) \pm \sqrt{r^2 - \rho'^2 \sin^2(\alpha - \varphi)}$$

a *kör sarkegyenlete.*

14. §. A kör-egyenletek részletezése.

A kör bármely egyenlete annak minden tulajdonságát kifejezi s igy a derékszögű coordináta-rendszerre vonatkozó egyenletek közül a legegyszerübbet, a kör $x^2 + y^2 = r^2$ középponti egyenletét veszszük tüzetes vizsgálat alá. Ha ezt az egyenletet előbb y, majd x szerint megoldjuk:

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \text{ és } x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

értékre jutunk. Az első szerint y reális, ha $r > x$ s akkor minden x értéknek y két gyöke felel meg, melyek absolut értékre egyenlők, előjeleik azonban különbözők. Ez azt mutatja, hogy az abscissák tengelye a kört két egybevágó félkörre bontja. A második egyenlet szerint x reális, ha $r > y$ s akkor minden y értékhez x két értéke tartozik; ez azt jelenti, hogy a kört az ordináták tengelye is két egybevágó félkörre bontja. Össze vonva a két dolgot, azt látjuk, hogy a tengelypár a kört négy egybevágó negyedre szeli. Az x és y értékek akkor legnagyobbak, ha r-rel egyenlők. Ha akár x, akár y nagyobb, mint r, akkor az egyenletek imaginarius értékre vezetnek.

A kör sark egyenletét véve vizsgálat alá, azt látjuk, hogy ρ-nak reális érték felel meg mindaddig, amig a gyökjel alatt foglalt mennyiség reális, azaz amig $r > \rho' \sin(\alpha - \varphi)$ nél. Ennek az az értelme, hogy a radius vectornak mindaddig két reális érték felel meg, amig a középponttól mért merőleges távolsága kisebb, mint a kör sugara. A radius vectornak megfelelő értékpárt x, illetőleg y jellel látva el, azok szorzása $xy = \rho'^2 - r^2$ egyenletre vezet. A körnek egy másik, a sarkkal ugyanazon egyenesben fekvő pontjára nézve $x_1 y_1 = \rho'^2 - r^2$ s így $xy = x_1 y_1$, azaz: $x : x_1 = y_1 : y$. Ez azt a planimetriai tételt fejezi ki, hogy a körnél a közös pontból kiinduló szelők aránya olyan, mint a körön kivül fekvő metszetek fordítva vett aránya.

Ha $r < \rho' \sin(\alpha - \varphi)$; akkor ρ imaginárius s mint ilyen a kör egyetlen pontját sem határozhatja meg.

Ha $r = \rho' \sin(\alpha - \varphi)$; akkor:

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{r}{\rho'}, \quad \cos(\alpha - \varphi) = \frac{\sqrt{\rho'^2 - r^2}}{\rho'}$$

és:

$$\rho = \rho' \cos(\alpha - \varphi) = \rho' \cdot \frac{\sqrt{\rho'^2 - r^2}}{\rho'},$$

tehát:

$$\rho^2 = \rho'^2 - r^2,$$

de mert az előbbiek szerint

$$xy = \rho'^2 - r^2$$

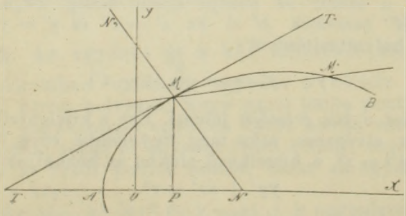
azért:

$$xy = \rho^2$$

és így ρ (az érintő) geometriai középarányos az ugyanazon pontból kiinduló szelő s annak a körön kivül fekvő szelete közt.

15. §. A kör érintője és normálisa.

Ha AB görbevonal (12. ábra) M és M' pontjain át szelőt húzunk s felteszszük, hogy az egyenest M pont körül addig forgatjuk, mig M' folyton közeledve M-hez végre azzal összeesik; akkor a szelő



12. ábra.

TT' egyenes helyzetébe jut s a görbe vonal M pontjára nézve *érintőnek* neveztetik még akkor is, ha M-től jobbra, vagy balra a görbevonalat ismételten metszené. Az érintési pontban az érintőre emelt merőlegesnek az x-tengelyig mért NM darabját M pont *normálisának*, az MT távolságot *érintőnek*, az érintő M pontjának ordinátája és T pontja közt fekvő PT vonalat *subtangensének*, NP távolságot pedig *subnormálisának* hívjuk.

Ha most a kör érintőjét és normálisát kell meghatároznunk; akkor a kerületében fekvő M' (x' y') és M'' (x'' y'') pontokon átvonuló szelő legáltalánosabb egyenlete:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Feltéve, hogy a kör centruma összeessik a coordináta-rendszer kezdőpontjával, minden kerületi pont eleget tesz az $y^2 + y^2 = r^2$ köregyenletnek s igy:

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \text{ és } x''^2 + x''^2 = r^2,$$

honnan:

$$x'^2 - x''^2 + y'^2 - y''^2 = o$$

azaz:

$$(x' + x'')(x' - x'') + (y' + y'')(y' - y'') = o$$

és:

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = - \frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Ha ezt az értéket a szelő egyenletébe helyettesítjük:

$$y - y' = - \frac{x' + x''}{y' + y''}(x - x').$$

Végre a szelőt *M'* pontja körül addig forgatván, mig *M''* összeesik *M'*-el az $x' = x''$ és $y' = y''$ értékek helyettesitésével

$$y - y' = - \frac{x'}{y'}(x - x')$$

egyenlet *a kör érintőjét* jelenti. Ezt a kijelentett műveletek elvégzése után még figyelembe véve, hogy $x'^2 + y'^2 = r^2$, a következő alakba is hozhatjuk:

$$yy' + xx' = r^2.$$

Az érintő egyenletében a $- \frac{x'}{y'}$ coefficiens az érintő és x-tengely-képezte szög trigonometriai tangensét jelenti. Az érintő egyenletéből tehát úgy kapjuk meg a *normális egyenletét,* ha abba $- \frac{x'}{y'}$ helyett annak reciproc értékét veszszük, ellenkező előjellel s igy az *M'* ponton átmenő normális egyenlete:

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x'),$$

azaz:

$$y = \frac{y'}{x'} x.$$

Ez az egyenlet azonban a kezdőponton, tehát a kör centrumán átmenő egyenes egyenlete s igy azt fejezi ki, hogy az érintési ponthoz vont körsugár merőleges az érintőre:

A *subtangens* meghatározására előbb az érintő és az abscissa-tengely metszés-pontjának abscissáját kell megismernünk. Az abscissa-tengely egyenlete $y = o$, az érintőé $yy' + xx' = r^2$, a kettő metszési-pontjának abscissája tehát $x = \frac{r^2}{x'}$. A subtangens hossza pedig ennek s az x' abscissának a különbsége s így:

$$St = \frac{r^2}{x'} - x' = \frac{r^2 - x'^2}{x'} = \frac{y'^2}{x'}.$$

Az *érintő* oly derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója y', a másik a subtangens s így:

$$T = \sqrt{y'^2 + \left(\frac{y'^2}{x'}\right)^2} = \frac{y'}{x'}\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{ry'}{x'}.$$

A *subnormális* hossza x', a *normálisé* r.

16. §. Az egyenes és a kör kölcsönös helyzete.

Általában valamely egyenes a körhöz képest vagy olyan helyzetű, hogy azzal közös pontja nincsen; vagy csupán egyetlen közös pontja van a két vonalnak, tehát az egyenes érinti a kört; vagy végre kettő a közös pontok száma, tehát az egyenes átszeli a kört.

Az $x^2 + y^2 = r^2$ és $y = ax + b$ egyenletek alapján vizsgáljuk most meg, milyen összefüggés áll fenn a két egyenlet a, b és r állandó mennyiségei között, hogy az említett kölcsönös helyzetek valamelyike bekövetkezzék. A második egyenletből:

$$y^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2,$$

ezt a kör középponti egyenletébe helyettesítvén:

$$x^2 + a^2x^2 + 2abx + b^2 = r^2$$

és:

$$x^2 + \frac{2ab}{1+a^2}x = \frac{r^2 - b^2}{1+a^2},$$

ebből:

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{r^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2}$$

helyettesités után pedig:

$$y = \frac{2a^2b + b \pm a\sqrt{r^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2}$$

Minthogy x és y értéke a kör és az egyenes egyenletének egybevetéséből nyeretett, azért e kettő a közös pontok coordinátáit állítja elő. Amig a gyökjel alatt foglalt érték reális, azaz, amig

$$r^2(1+a^2) > b^2,$$

addig x és y számára kettős gyököt nyerünk. Addig tehát az egyenes két pontban átszeli a kört. Ha $r^2(1+a^2) = b^2$; akkor x és y csupán egy-egy értékkel bírnak, tehát az egyenesnek és a körnek csak egyetlen közös pontja van. Végre ha $r^2(1+a^2) < b^2$; akkor x és y imaginárius értékek, az egyenes és a kör közös ponttal nem bír.

Az elmondottak alapján minden nagyobb nehézség nélkül megoldhatók most már a következő feladatok: a) meghatározandó a kör adott pontjához vont érintő egyenlete; b) meghatározandók a körhöz adott külső pontból vonható érintők. Az utóbbi feladat megfejtéséből az derül ki, hogy külső pontra nézve két érintési pont van, melyek az abscissa tengelyre merőleges közös egyenesben fekszenek.

17. §. Két kör kölcsönös helyzete.

Két kör kölcsönös helyzete az egyik körnek s egy egyenesnek egymáshoz képest elfoglalt helyzetére vezethető vissza, mert ha a két kör egyenlete

$$x^2 + y^2 + a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = o;$$
$$x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = o;$$

akkor kivonás után:

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = o$$

elsőfokú egyenlethez jutunk, mely a körök átmetszési pontjait tartalmazza, feltéve, hogy ilyenek egyáltalán léteznek. A köröknek, amint már tudjuk, legfeljebb két közös pontjuk lehet s ezek ebben az egyenesben benfoglaltatnak; maga az egyenes a két kör közös szelője, vagy közös érintője, vagy kivül fekszik a két körön, a szerint, amint a körök metszik, érintik, vagy sem nem metszik, sem nem érintik egymást. Hogy a szóban forgó egyenes ezen lehetséges eseteknek megfelelő sajátságait megismerjük, jelöljük a körök egyenleteit K_1 és K_2-vel. Akkor $K_1 = o$ és $K_2 = o$, majd kivonás után $K_1 - K_2 = o$, tehát $K_1 = K_2$. Minthogy a két körre nézve K_1 és K_2 az (xy) pont hatványait szolgáltatja, azért ezen utóbbi egyenlet azt fejezi ki, hogy a talált egyenes minden pontjának a két körre vonatkozó hatványa azonos, hogy tehát az a két kör *hatványvonala,* megjegyezvén, hogy valamely pontnak egy körre vonatkozó hatványán azt az állandó értékű szorzatot értjük, melyet a ponton áthaladó szelők szeletei alkotnak. A hatvány fogalmából következik, hogy ha az egyenesnek valamely a két körön kivül fekvő pontjából a körökhöz érintőket húzunk; akkor az érintési pontoktól a jelzett pontig számított érintő-távolságok egyenlők s azért a hatványvonalat még az *egyenlő érintők vonalának* is nevezhetjük. Ha a hatványvonal

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = o$$

egyenlet-alakját veszszük szemügyre; akkor:

$$y = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}x + \frac{c_1 + c_2}{b_1 + b_2}$$

s ebben $-\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$ az irány coefficienset jelenti. Amde az egyenlet által képviselt eme egyenest a $\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$ irány-coefficienssel biró egyenes merőlegesen metszi. Minthogy pedig az utóbbi irány-coefficiens a két kör centrumát összekötő centrális-vonalhoz tartozik, azért kimondhatjuk, hogy két kör hatványvonala azok centrálisára merőlegesen áll.

Ha három kört veszünk tekintetbe, akkor azok hatványvonalainak egyenletei

$$K_1 = K_2,\ K_2 = K_3,\ K_3 = K_1$$

alakra hozhatók s minthogy e három egyenlet mindenike egyszerű következménye a másik kettőnek, azért ama pont, mely az egyenletek közül kettőnek megfelel, a harmadiknak is megfelel, azaz a harmadik hatványvonalon is rajta fekszik; tehát: három kör hatványvonalai egy pontban metszik egymást.

Hogy most már a hatványvonal segítségével két kör kölcsönös helyzetét meghatározhassuk, úgy válasszuk meg a coordináta-rendszert, hogy a körök egyenletei lehető legegyszerűbb alakot öltsenek. E czélból jelentse r az egyik, $r_1 < r$ a másik kör sugarát, d a centrumok távolságát s egyszersmind legyen az r-sugarú kör a coordináta-rendszer kezdőpontja, a centrális pedig az x-tengely; akkor a körök egyenletei:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ és } (x - d)^2 + y^2 = r_1^2.$$

Kivonás után a hatványvonal egyenlete:

$$2dx - d^2 = r^2 - r_1^2,$$

ebből:

$$x = \frac{d^2 + r^2 - r_1^2}{2d}, \text{ vagy } x = \frac{d}{2} + \frac{r^2 - r_1^2}{2d}.$$

Ezen képlet szerint a hatványvonal párhuzamos az y-tengelylyel, tehát merőleges az x-tengelyre, azaz a centrálisra. De továbbá kitünik még ebből, hogy a hatványvonal közelebb fekszik a kisebb sugarú kör centrumához, mert a centrális ama pontján megy át, mely a d vonal közepétől $\frac{r^2 - r_1^2}{2d}$ positiv irányban számított távolságra fekszik.

Hogyha már most $x > r$, akkor a hatványvonal a nagyobb körön kivül fekszik, de kivüle van a kisebb körnek is, mert hiszen a netaláni közös pont egyidejüleg mind a három vonalnak közös pontja tartozik lenni. Ha x értékét az egyenlőtlenségbe helyettesítjük:

$$\frac{d^2 + r^2 - r_1^2}{2d} > r,$$

vagy:

$$(d - r)^2 - r_1^2 > o$$

és $[d - (r + r_1)] [d - (r - r_1)] > o$, ez csak akkor állhat fent, ha

vagy: $d > r + r$, s akkor egyidejüleg $d > r - r_1$,
vagy: $d < r - r$, s akkor egyidejüleg $d < r + r_1$.

Első esetben $d^2 > (r + r_1)(r - r_1)$, vagy $r^2 - r_1^2 < d^2$ s így $d > x$. A hatványvonal ekkor a teljesen elkülönített két kör közé esik. Második esetben $r^2 - r_1^2 > d^2$ s így $x > d$. A hatványvonal akkor kívül esik a két körön, melyek közül az egyik magába zárja a másikat.

Ha $x = r$; akkor: $[d - (r + r_1)] [d - (r - r_1)] = o$. Ez csak akkor állhat fent, ha $x = r + r_1$, vagy $x = r - r_1$. A hatványvonal ebben az esetben közös érintője az első esetben kivülről, második esetben belülről érintkező két körnek.

Végül ha $x < r$; akkor a hatványvonal átmetszi a két egymást metsző kört; ilyenkor:

$$[d - (r + r_1)] [d - (r - r_1)] < o,$$

ami csak úgy állhat fent, ha:

$$r + r_1 > d > r - r_1.$$

18. §. Két kör közös érintői.

Ha a két kör egyenletét, úgy mint az előbbi §-ban $x^2 + y^2 = r^2$ és $(x - d)^2 + y^2 = r_1^2$, az érintő egyenletét $y = ax + b$ tünteti fel; akkor *a* és *b* úgy határozandó meg, hogy az egyenes egyidejüleg mindakét kört érintse, tehát az első körre nézve (16. §.)

$$r^2(1 + a^2) = b^2,$$

a másodikra $\quad r_1^2(1 + a^2) = (ad + b)^2;$

az első egyenletet a másodikkal osztva:

$$\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{b^2}{(ad + b)^2}, \text{ vagy } r(ad + b) = \pm r_1 b;$$

honnan: $b = -\dfrac{adr}{r \mp r_1}$ és mert $b = r\sqrt{1 + a^2}$

azért:

$$a = \pm \frac{r \mp r_1}{\sqrt{d^2 - (r \mp r_1)^2}};\ b = -\frac{dr}{\sqrt{d^2 - (r \mp r_1)^2}}.$$

Az *a* és *b* számára ily úton nyerhető négy különböző érték azt fejezi ki, hogy két egymással nem érintkező körhöz négy érintőt húzhatunk; két egymással kivülről érintkező körnek három; két egymást metsző körnek kettő; két belülről érintkező körnek pedig egyetlen egy közös érintője lehet. A négy érintő egyenletei:

$$x = -\frac{dr}{\sqrt{d^2 - (r - r_1)^2}}, \quad y = \frac{r - r_1}{\sqrt{d^2 - (r - r_1)^2}};$$

$$x = \frac{dr}{\sqrt{d^2 - (r - r_1)^2}}, \quad y = -\frac{r - r_1}{\sqrt{d^2 - (r - r_1)^2}};$$

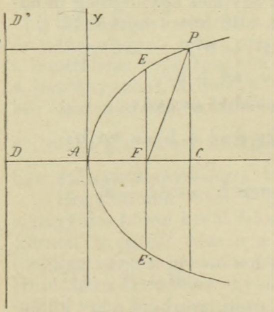
Az első és második érintőpár — hajlásszögeik kiegészitő szögek lévén — az x-tengelyben metszik egymást, s az y-tengelyre vonatkozó egyenlő metszeteik ellenkező irányban fekszenek. A metszési pontok coordinátái:

$$y = o \text{ és } x = \frac{dr}{r - r_1}, \text{ illetőleg } y = o \text{ és } x = \frac{dr}{r + r_1}.$$

Az igy meghatározott pontok a két kör *hasonlósági pontjai*, mégpedig az első a külső, a második a belső hasonlósági pont. A hasonlósági pontok még ama feltétel mellett is meghatározhatók, hogy r és r_1 előbb megegyező, majd ellenkező irányban számítva párhuzamosan haladnak.

19. §. A kúpmetszetekről általában.

Minthogy az általános másodfokú egyenlet csakis bizonyos megszorítások mellett jelent kört, fel kell tennünk, hogy a körön kivül még más másodrendű görbevonalak is léteznek. Ezen másodrendű görbevonalak közül azokkal fogunk most megismerkedni, melyek valamely forgási kúp felületén keletkeznek, ha azt síkkal átmetszük. Az ilyen *kúpmetszetek* a sikban lévő oly pontok mértani helyei, melyeknek távolságai az ugyanazon sikban fekvő szilárd egyenestől és szilárd ponttól, állandó viszonyban állanak egymáshoz. A szilárd egyenest *irányvonalnak*, vagy *directrixnek*, a szilárd pontot *gyújtópontnak*, vagy *focusnak* nevezzük. Ha DD' (13. ábra) a directrix, F a focus, $FD \perp DD'$, P a kúpmetszet egy pontja és $PB \perp DD'$, $PC \parallel DD'$; akkor a feltétel:



13. ábra.

$$\mathrm{PB} : \mathrm{PF} = 1 : \varepsilon,$$

vagy:

$$\mathrm{PF} = \varepsilon \,.\, \mathrm{PB} = \varepsilon \,.\, \mathrm{DC}.$$

Hasonlóképen A pontra nézve:

$$AF = \varepsilon .\, AD,$$

tehát:

$$\mathrm{DF} = \mathrm{AD} + \mathrm{AF} = (1 + \varepsilon)\, \mathrm{AD},$$

s ha most $\mathrm{DF} = \mathrm{d}$; akkor:

$$\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{d}}{1 + \varepsilon} \text{ és } \mathrm{PF} = \frac{\varepsilon\, \mathrm{d}}{1 + \varepsilon}.$$

A kúpmetszetek meghatározása szerint azok DF egyenesre nézve symmetrikus fekvésüek, ez az oka, hogy ezt az egyenest választjuk x-tengelyül. Ha egyszerűség kedvéért a kezdő pontot A ba helyezzük; akkor f (xy) = c oly több tagú kifejezést jelent, melynek tagjai az x és y coordinátákat legalább első hatványon tartalmazzák s így ha $x = o$, és $y = o$, az egész baloldal zérussá lesz, tehát $c = o$ azaz ha a kezdőpontot a görbevonal egyik pontjába helyezzük, akkor a görbe egyenletében nincs oly tag, melyben x, vagy y nem fordulna elő. *PFC* derékszögű háromszögből

$$PF^2 = y^2 + \left(x - \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2 \text{ és } CD = x + \frac{d}{1+\varepsilon},$$

ezekből s a kúpmetszetek említett tulajdonságából:

$$\left(x - \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(x + \frac{d}{1+\varepsilon}\right)^2,$$

tehát kifejtve:

$$x^2 + y^2 - 2\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}x + \left(\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\frac{\varepsilon^2 d}{1+\varepsilon}x + \left(\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2$$

ebből:

$$y^2 = 2\,\varepsilon dx - (1-\varepsilon^2)\,x^2.$$

Ebben az egyenletben minden x-értéknek egyenlő, ellenkező jelű két y érték felel meg, tehát a két pont az x-tengelyre nézve symmetrikus fekvésű.

$EE' = 2p$ a görbe *paramétere* s igy $EF = p$, a görbe definitiója szerint pedig: $p = \varepsilon d$ s igy a görbe egyenlete:

$$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2).\,x^2, \text{ vagy } y^2 = x\,[2p - (1-\varepsilon^2)\,x].$$

Ez megsemmisül, ha:

$$x = o \text{ és ha } x = \frac{2p}{1-\varepsilon^8}.$$

A görbe és az x tengely tehát a kezdő ponton kivül még a $\frac{2p}{1-\varepsilon^2}$ abscissával biró pontot és közös pontúl tartalmazza. Ez az abcissa adott paraméter mellett annál nagyobb, minél kisebb a nevezője. Ha ε annyi mint egy, akkor a kúpmetszetnek a tengelylyel való második metszéspontja végtelen távolba esik s a kúpmetszet egyenlete: $y^2 = 2px$. Ez a kúpmetszet a *parábola*. Ha ε kisebb, mint egy, akkor a cordinátarendszer kezdőpontját a két metszési-pontot összekötő egyenes felezési pontjába téve át, a kúpmetszet egyenletének kellő rendezése után az *ellypsis* egyenletéhez jutunk, ez: $(1 - \varepsilon^2) x^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$. Ha ε nagyobb egynél, akkor $1 - \varepsilon^2$ negativ s a kúpmetszet egyenlete, ha a coordináta-rendszer kezdőpontját a húr felező pontjába teszszük át:

$(\varepsilon^2 - 1) x^2 - y^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1}$ s ez a *hyberbola* egyenlete.

Ha $\varepsilon = o$ és $d = \infty$, a megfelelő görbe egyenlete $y^2 = 2px - x^2$ s ez oly *kört* jelent, melynek centruma F, sugara p.

A parabola.

20. §. A parabola egyenletei.

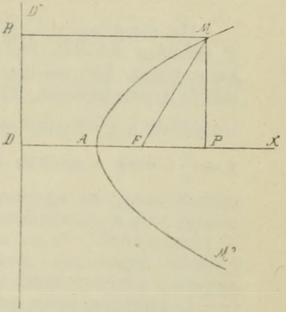
A kúpmetszetek meghatározásánál emlitett alaptulajdonságból az következik, hogy $\varepsilon = 1$ esetében a parabola-pontok mindenike egyenlő távolságra esik a gyújtóponttól és a directrixtől. A parabola csúcsa a gyújtóponttól a directrixig számított távolság felező pontjába esik és $p = d$, $AD = AF = \frac{1}{2} p$. Ha tehát a parabola csúcsa a coordináta-rendszer kezdőpontja, a symmetria-tengely az x-tengely; akkor a parabola egyenlete $y^2 = 2px$. Ha ebben az egyenletben $x = o$, úgy $y = o$, a vonal tehát tényleg átmegy a kezdőponton. Látjuk továbbá, hogy x minden értékéhez két y érték tartozik s minthogy azok csakis előjelre különböznek, a parabola tehát az abscissa tengelyre nézve symmetrikus.

A parabola két pontjára nézve:

$$y^2 = 2px \text{ és } y_1^2 = 2px_1$$

honnan:
$$x : x_1 = y^2 : y_1^2,$$

az abscissák aránya akkora, mint az ordináták négyzetének aránya Az y tehát együtt nő az x-szel, de csakis az utóbbi négyzetgyökének arányában. A parabola e sajátsága kapcsolatban ama minden kúpmetszetre nézve érvényes tulajdonsággal, hogy az x-tengelyre nézve symmetrikus, képesek vagyunk a szóban forgó *MAM'* görbét (14. ábra) megszerkeszteni annál is inkább, mert az $y^2 = 2px$ egyenletből $2p : y = y : x$, vagyis az ordináta mértani középarányos a paraméter és az abscissa közt. A parabola két ága AX irányban a végtelenbe nyúlik, mert ha $x = \infty$, $y = \infty$. *A* pont a parabola csúcsa. *F* annak gyújtópontja, *DD'* az irányvonala. A parabola természetéből következik, hogy *AF* = *AD*. Azt a vonalat mely a parabola gyújtópontját a görbe egyik pontjával összeköti (pl. FM-et) *radius vector*nak nevezzük.



14. ábra.

A parabola *sarkegyenletének* meghatározására legyen *F* a sarkpont, *AF* a sarktengely, akkor *M* pont coordinátái FM = ρ és MFA $\sphericalangle = \varphi$. Minthogy MF = MB azaz:

$$\rho = MB = DP = DF + FP = DF - \rho\cos\varphi = p - \rho\cos\varphi$$

azért:

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$$

a parabola sarkegyenlete. Ha most $\varphi = 0^0, 90^0, 180^0, 270^0$; $\rho = \frac{p}{2}$, p, ∞, p.

21. §. A parabola és az egyenes.

Ha $y^2 = 2px$ a parabola, $y = ax + b$ az egyenes vonal egyenlete; akkor közös pontok létében a két egyenlet egyidejüleg érvényes s így azokból y kiküszöbélésével:

$$a^2x^2 + 2abx - 2px + b^2 = o,$$

$$x^2 - \frac{2p - 2ab}{a^2}x = -\frac{b^2}{a^2},$$

$$x = \frac{p - ab}{a^2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 2abp + a^2b^2 - a^2b^2}{a^4}};$$

$$x = \frac{p - ab \pm \sqrt{p(p - 2ab)}}{a^2}.$$

Hasonló eljárás után:

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p(p-2ab)}}{a}.$$

Ha most már: 1) $p > 2ab$; akkor úgy x, mint y számára két-két reális értéket nyerünk, vagyis az egyenes két pontban metszi a parabolát; tehát *szelője* a parabolának. 2) Ha $y = 2ab$; akkor x és y értékében a gyökjeles rész elesik s lesz $x = \frac{p-ab}{a^2}$, $y = \frac{p}{a}$; ezek a gyökök csakis egyetlen pontot határoznak meg, az egyenesnek tehát csakis egy közös pontja van a parabolával; tehát az egyenes *érintője* a parabolának; 3) ha ellenben $p < 2ab$; akkor a gyökök képzetesek lévén, a parabola és egyenes egyetlen közös ponttal sem bírhatnak.

Lehetséges, hogy az adott egyenes vonal egyenletében $a = o$; akkor az $y^2 = 2px$ és $y = b$ egyenletekből $x = \frac{b^2}{2p}$ és $y = b$ gyököket nyerjük, melyek csakis egyetlen pontot határoznak meg. Minthogy pedig az $y = b$ alakban meghatározott egyenes az x-tengelylyel párhuzamos; azért kimondhatjuk, hogy az ilyfajta egyenesek a parabolát csupán egyetlen pontban metszik. Az igy meghatározott egyenesek a parabola *átmérői.*

Minthogy az y-tengely egyenlete $x = o$, a paraboláé $y^2 = 2px$; azért a kettőt összekötve az $y^2 = o$ egyenlethez jutunk, melyből két $y = o$ egyenlő gyök nyeretik. Ez két egybeeső pontot jelent, melyben egyidejüleg az egyenes és a parabola is találkoznak. Az y-tengely tehát itt oly jelentést nyert, mely szerint azt a csúcsponton átmenő érintőnek lehet tekintenünk.

22. §. A parabola érintője.

Ha x_1y_1 és x_2y_2 a parabola pontjai, úgy a parabola egyenletét $y_1^2 = 2px_1$, vagy $y_2^2 = 2px_2$ állítja elő. Ezekből: $y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1)$, vagy $(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 2p(x_2 - x_1)$ vagy végre más alakban: $\frac{y_2 - y^1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$. Ha most a két ponton egyenest fektetünk át, annak egyenlete:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

helyettesités után pedig:

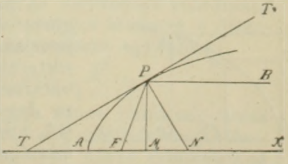
$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1).$$

Ha végül az egyenest egyik pontja körül addig forgatjuk, míg a második pont a forgási-pont helyzetébe kerül; akkor $y_2 = y_1$ s az *érintő egyenlete*

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$

Ezen egyenletből a nevezőt eltüntetve s elvégezve a kijelentett szorzást; px_1-nek az egyenlet mindkét oldalához adása után: $yy^1 + 2px_1 = y_1{}^2 + p(x + x_1)$ alakhoz jutunk és ha figyelembe veszszük, hogy $2px_1 = y_1{}^2$, az érintő egyenletét ily alakban nyerjük: $yy^1 = p(x + x_1)$. Az érintő egyenletének első alakjába az érintő és az x-tengely képezte szög trigonometriai tangensét kifejező coefficiens negativ reciproc értékét helyettesitve, az x_1y_1 ponthoz tartozó *normális* $y - y_1 = - \frac{y_1}{p}(x - x_1)$ egyenletéhez jutunk.

Ha az érintő $yy_1 = p(x + x_1)$ egyenletébe $y = o$ értéket helyettesítjük; akkor az érintő ama pontjának abscissája, melyben az a parabola tengelyét metszi $x = - x_1$. Ez utolsó érték felette alkalmas az adott érintési ponthoz tartozó érintő meghatározására. Igy ha a parabola P pontjához tartozó érintőt keressük (15. ábra) meghúzzuk P pont PM ordinátáját és $MA = TA$ felmérése után TP a keresett érintőt adja. Ha az érintő és a PF radius vector irány-coefficiesét összehasonlítjuk, arra az eredménye jutunk, hogy az érintő a tengelylyel és az érintési ponthoz tartozó radius vectorral egyenlő szöget zár be, amiből $TF = PN$. Ha most $PB \parallel AM$ egyenest húzzuk, úgy $T'PB \measuredangle = T'TM \measuredangle$ s ezen alapszanak a parabola-gyújtópont physikai sajátságai. A tengelye körül forgatott parabolától képezett ho-

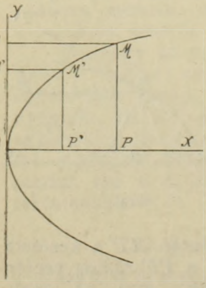


15. ábra.

morú tükörre a tengelylyel párhuzamos irányban beeső hang-, hő- és fénysugarak a gyújtópontban egyesíttetnek s viszont az utóbb nevezett pontból kiinduló hang-, hő- és fénysugarak a tükörről a tengelylyel párhuzamos irányban vezetnek vissza.

A négy érintő-távolség meghatározása következőképen végezhető. A *subtangens TM* $= MA + AT = 2x_1$. A parabola bármely pontjának subtangense ilyformán akkora, mint az illető pont abscissájának kétszerese. Az *érintő PT* a *TPM* derékszögű háromszögből nyerhető, mert $\overline{TP}^2 = \overline{TM}^2 + \overline{PM}^2 = 4x_1{}^2 + y_1{}^2 = 4x_1{}^2 + 2px_1 = 2x_1(2x_1 + p)$; innen $TM = \sqrt{2x_1(2x_1 + p)}$. A *subnormális MN* meghatározására a normális egyenletébe $y = o$ értéket írva, megkapjuk a normális és a tengely *N* metszési-pontjának az abscissáját s ez $AN = x_1 + p$, s minthogy a subnormális $MN = AN - AM$, azért $MN = x_1 + p - x_1 = p$. A subnormális a parabola minden pontjára nézve állandó. A *normális* hosszát MNP derékszögű háromszögből számítjuk ki; ebből: $\overline{PN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MN}^2 = y_1{}^2 + p^2 = 2px_1 + p^2$ és $PN = \sqrt{p(2x_1 + p)}$.

23. §. A parabola területe.



16. ábra.

A parabola területén az ezen görbe vonal íve s az ív végpontjának coordinátái közé eső síkterületet értjük. Az így meghatározott terület kiszámítására legyen *AM* a parabola-ív (16. ábra) s az ív *M* pontjának coordinátái: $MP = y$ és $AP = x$; AX a parabola tengelye. Ha figyelembe vesszük még az *M'* $(x'y')$ pontot s a pontokból a tengelyekre merőlegeseket húzunk, két trapézt nyerünk, ezek: MPP'M' és MQQ'M'. Ezek területei:

$$MPP'M' = \frac{y + y'}{2}(x - x') \text{ és } MQQ'M' = \frac{x + x'}{2}(y - y').$$

Ezen egyenletekbe x és x' helyett az $y^2 = 2px$ és $y'^2 = 2px'$ egyenletekből nyert x és x' értékeket helyettesítve s a két területet arányba állitva, lesz:

$$\frac{MPP'M'}{MQQ'M'} = \frac{(y+y')^2}{2p(x+x')}.$$

Ha *M* és *M'* távolsága elenyésző kicsiny; akkor $y = y'$ és $x = x'$, tehát:

$$\frac{MPP'M'}{MQQ'M'} = \frac{4y^2}{2 \,.\, 2px} = 2 \text{ s igy } MPP'M' = 2 \,.\, MQQ'M'.$$

Ami igaz e két terület-elemre; igaz más ily elemekre s igy az egész APM és AQM területekre, tehát: $APM = 2AQM$; ámde $APM + AQM = xy$, igy hát:

$$APM + \frac{APM}{2} = xy;\ 3APM = 2xy \text{ és } APM = \frac{2}{3} xy.$$

A fentebb meghatározott terület tehát az ív végpontjához tartozó coordináták szorzatának kétharmad részével egyenlő.

Az ellipsis.

24. §. Az ellipsis egyenletei.

Ha a kúpmetszetek általános egyenletében (19. §.) $\varepsilon < 1$; akkor feltéve, hogy a derékszögű coordináta rendszer x-tengelye a gyújtóponton átmenve a directrixre merőlegesen áll, a kúpmetszet egyenlete:

$$(1 - \varepsilon^2) x^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Ez az egyenlet x és y-ra nézve tiszta négyzetes egyenlet lévén, azt mutatja, hogy az általa meghatározott ellipsis mindkét tengelyre nézve symmetrikus s négy egymással egybevágó negyedből áll. Ilyformán a kezdőpont *középpontja* az ellipsisnek, azaz oly tulajdonsággal bir, hogy az azon áthúzott egyenesen mindkét irány felé, egyenlő távolságban ellipsis-pontok fekszenek. Ha *a* jelenti a csúcstól a centrumig számított távolság mértékszámát; akkor $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$. Az F gyújtópont távolságát a centrumtól az ellipsis *excentricitásának* nevezzük s e-vel jelöljük. Minthogy ilyformán $e = a - AF = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} - \frac{p}{1 + \varepsilon}$, azért: $e = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} = \varepsilon a$. Ha figyelembe veszszük, hogy: $1 - \varepsilon^2 = \frac{p}{a}$; akkor az ellipsis egyenlete:

$$\frac{p}{a} x^2 + y^2 = ap,$$

ebből *ap*-vel osztván:

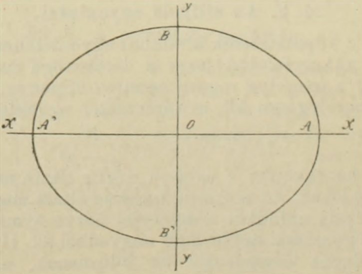
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ap} = 1$$

ha most *a* és *p* geometriai középarányosát b^2-tel jelöljük, azaz: $b^2 = ap$, úgy az ellipsis *középponti egyenlete:*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

mely a nevezők eltávolitása után $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ alakra is hozható.

Ebből a coordinátákra nézve reális értékekhez jutunk, ha $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \leqq 1$, $\left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1$ s igy az ellipsis-pontokra nézve az abcissák csakis $+a$ és $-a$, az ordináták $+b$ és $-b$ közötti értékeket vehetnek fel. Növekedő x-hez fogyó y érték tartozik, az elipsis tehát zárt



17. ábra.

görbe vonal (17. ábra). Ha $y = o$, úgy $x = \pm a$, ha $x = o$, $y = \pm b$ a tengelyeken fekvő pontok coordinátái. E pontokat *csúcsok*nak nevezzük. $AA' = 2a$ és $BB' = 2b$ a tengelyek, mégpedig az első a *nagy-*, utóbbi a *kistengely*. Minthogy a fentebb elmondottak szerint:

$$e = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} = \varepsilon a; \; b^2 = ap, \text{ azért } b^2 = (1 - \varepsilon^2)\, a^2 \text{ és}$$

mert: $\varepsilon = \frac{e}{a}$; azért $b^2 = a^2 - e^2$ s ez az egyenlet a tengelyek és az excentricitás összefüggését fejezi ki. Ebből: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Minél kisebb a különbség a tengely-hosszak közt, azaz minél kisebb az excentricitás, annál közelebb jut a gyújtópont a középponthoz, azaz annál jobban közeledik az ellipsis alakja a kör alakjához.

A legutóbb talált egyenlet azt fejezi ki, hogy az excentricitás oly derékszögű háromszögnek egyik befogója, melynek átfogója a nagy féltengely, másik befogója a kis féltengely. Ez az észrevétel módot nyújt a gyujtópont helyének megkeresésére, ha ismeretesek a tengelyek. Minthogy azonban e-nek két érték felel meg, nyilvánvaló, hogy az ellipsisnek két gyújtópontja van.

Az olyan egyeneseket, melyek az elipsis valamely pontját a gyújtóponttal összekötik, *radius vectoroknak* hivjuk. Minden elipsis-ponthoz két radius vector tartozik s minthogy gyújtópont is kettő van, ennélfogva két directrixnek kell léteznie. Ha ezek távolságát a centrumtól m jelenti; akkor az r és r_1 radius vectorokra nézve, a kúpmetszetek általános meghatározása szerint érvényes a következő két egyenlet:

$$r = \varepsilon m \text{ és } r_1 = \varepsilon m,$$

ezekből pedig:

$$r + r_1 = 2\varepsilon m.$$

Ha most ε jelentését a 19. §-ból s a jelen §. $e = \varepsilon a$ egyenleteiből megállapítjuk; úgy arra jövünk reá, hogy ez az állandó kifejezi a kúpmetszet bármely pontjának a gyújtóponttól és directrixtől mért távolsága közt fenálló arányt, de másrészt kifejezi az excentricitás és a nagy féltengely közt fenálló arányt is. Azaz $\varepsilon = \frac{a}{m}$ és $\varepsilon = \frac{e}{a}$; tehát:

$$a : m = e : a.$$

A directrixnek a középpontól mért távolsága, a nagy féltengely és az excentricitás közt fenálló ezen folytonos arány szerint: $m = \frac{a^2}{e}$ s igy: $2m = \frac{2a^2}{e}$ és mert $e = \varepsilon a$, azért: $2m = 2a$, tehát:

$$r + r_1 = 2a.$$

E szerint az ellipsis minden pontjára nézve a radius vectorok összege állandó, még pedig egyenlő az ellipsis nagytengelyével.

Ha a coordináta-rendszer kezdőpontjául a középpont helyett az ellipsis egyik csúcsát választjuk, úgy az egyik x_1 y_1-pont coordinátáit $x_1 = x + a$, $y_1 = y$ szolgáltatják. Ilyformán $x = x_1 - a$, $y = y_1$ és

$$\frac{(x_1 - a)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

s ebből:

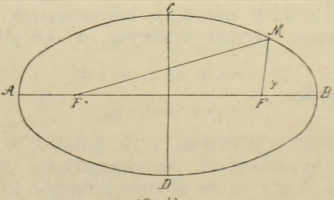
$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax_1 - x_1^2).$$

A *paraméter* bevezetésével: $\frac{b^2}{a} = p$ helyettesités után:

$$y_1^2 = 2px_1 - \frac{px_1}{a}$$

az elipsis *csúcsegyenletét* adja.

Ha az ellipsis nagytengelyét sarktengelyül, F gyújtópontját (18. ábra) sarkul választjuk akkor



18. ábra

$MFB \measuredangle = \varphi$ és $MF = \rho$ a sark-coordináták *Carnot*-tétele szerint MFF' △-ből:

$$\overline{F'M}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{FF'}^2 - 2MF.\,FF' \cos MFF'.$$

Minthogy: $MFF' = 180^0 - \varphi$,

$$\overline{F'M}^2 = \rho^2 + 4\,e^2 + 4\,e\,\rho \cos \varphi.$$

Ámde: $F'M = 2a - MF = 2a - \rho$ és

$$\overline{F'M}^2 = 4\,a^2 - 4a\,\rho + \rho^2$$

tehát:

$$\rho^2 + 4\,e^2 + 4\,e\,\rho \cos \varphi = 4\,a^2 - 4\,a\,\rho + \rho^2;$$

innen: $\rho = \dfrac{a^2 - e^2}{a + e \cos \varphi} = \dfrac{b^2}{a + e \cos \varphi}$

az *ellipsis sarkegyenlete.*

25. §. Az ellipsis és az egyenes.

Az ellipsis $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ és az egyenes $y = mx + n$ egyenletéből az (xy) közös pont abscissája

$$x = \frac{-mna^2 \pm ab\sqrt{m^2 a^2 + b^2 - n^2}}{m^2 a^2 + b^2}$$

Ennek két reális értéke van, ha $m^2a^2 + b^2 > n^2$; ekkor az ellipsis és az egyenes két közös ponttal bir: az egyenes tehát szelője az ellipsisnek. Egy értékű a gyök, ha $m^2a^2 + b^2 = n^2$; ekkor az ellipsis és az egyenes már csak egy közös ponttal bir, az egyenes érintője az ellipsisnek. Végre képzetes értéket vesz fel x, ha $m^2a^2 + b^2 < n^2$, ilyenkor az ellipsis és az egyenes nem bir közös ponttal.

Az ellipsis centrumán átmenő egyenes $y = mx$ egyenletét összevetve az ellipsis egyenletével úgy látjuk, hogy a két közös pont abscissái és ordinátái számára $x = \pm \dfrac{ab}{\sqrt{m^2a^2 + b^2}}$, $y = \pm \dfrac{mab}{\sqrt{m^2a^2 + b^2}}$ két-két absolut értékre nézve megegyező gyököt nyerünk, ami azt jelenti, hogy a középpont felezi azon húrjait az ellipsisnek, melyek rajta átmennek. Az ilyen húrokat *átmérőknek* nevezzük. Ha *h* jelenti egy ily átmérő hosszát, úgy $h = \sqrt{x^2 + y^2}$: ámde $y^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x^2$ s igy $h = \pm\sqrt{b^2 + \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}$. Az átmérő ezen egyenlet szerint akkor veszi fel legkisebb értékét, ha $x = o$ és legnagyobb értékét, ha $x = \pm a$. A kis tengely tehát a legrövidebb, a nagy tengely a leghosszabb átmérő.

26. §. Az ellipsis érintője.

Ha $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ az ellipsis középponti egyenlete, x_1y_1 és x_2y_2 annak két adott pontja, úgy az e pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

De a pontok az ellipsis pontjai is lévén:

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2$$
$$a^2y_2^2 + b^2x_2^2 = a^2b^2.$$

Levonás és tényezőkre bontás után ezen egyenletekből:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

Ilyformán a szelő egyenlete:

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \cdot (x - x').$$

Ha a szelőt az egyik pont körül addig forgatjuk mig a két pont egybeesik; akkor $x_1 = x_2$, $y_1 = y$ s az *érintő egyenlete:*

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1),$$

vagy:

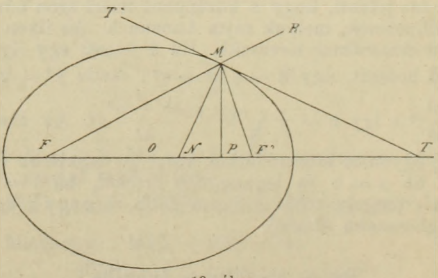
$$\frac{yy_1}{b^2} + \frac{xx_1}{a^2} = 1.$$

A *normális egyenletét* pedig:

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$$

tünteti fel.

Hogy az *érintő-vonalak* hosszát meghatározhassuk, a 19. ábrából látjuk, hogy a *subtangens PT.* Ennek



19. ábra.

abscissáját úgy nyerjük, hogy az érintő egyenletébe $y = o$ értéket helyettesítjük; akkor: $x = \frac{a^2}{x_1}$ és $PT = OT - OP = \frac{a^2}{x_1} - x_1$, vagy mert itt a subtangens negativ, $PT = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$. Az *érintő TM* meghatározására:

$$\overline{TM}^2 = y_1^2 + \overline{PT}^2 = y_1^2 + \frac{(x_1^2 - a^2)}{x_1^2} = \frac{y_1}{b^2 x_1}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}.$$

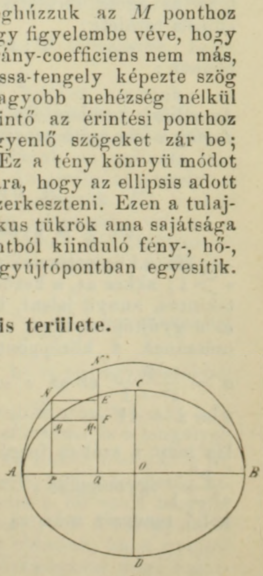
A *subnormális* és a *normális* számára nem lesz nehéz ezek után meghatározni, hogy:

$$PN = \frac{b^2 x_1}{a^2} \text{ és } NM = \sqrt{\frac{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}{a^2}}.$$

Ha a 19. ábrában meghúzzuk az M ponthoz tartozó radius vectorokat, úgy figyelembe véve, hogy az érintő egyenletében az irány-coefficiens nem más, mint az érintő és az abscissa-tengely képezte szög trigonometriai tangense; nagyobb nehézség nélkül kimutathatjuk, hogy az érintő az érintési ponthoz vont radius vectorokkal egyenlő szögeket zár be; azaz: $RMT\sphericalangle = TMF'\sphericalangle$. Ez a tény könnyü módot nyújt azon feladat megoldására, hogy az ellipsis adott pontjához érintőt tudjunk szerkeszteni. Ezen a tulajdonságon alapszik az elliptikus tükrök ama sajátsága is, hogy az egyik gyújtópontból kiinduló fény-, hő-, és hangsugarakat a másik gyújtópontban egyesítik.

27. §. Az elipsis területe.

Az ellipsis nagy tengelye, mint átmérő fölé kört írva s az OP abscissának megfelelő ordinátát (20. ábra.) a körben és az ellipsisben összehasonlítva, azt látjuk hogy:



20. ábra.

$$NP = y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$M'P = y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

és:

$$M'P : NP = M'Q : N'Q = \frac{y_1}{y} = \frac{b}{a}.$$

Ez az összefüggés megtanít bennünket arra, hogy kell a tengelyek ismeretében, akárhány ellipsis-pontot meghatároznunk.

Ha most NE ∥ MF ∥ AB egyeneseket húzzuk :

$$MFQP : NEQP = b : a,$$

mert az egyenlő alappal biró parallelogrammák területei úgy aránylanak, mint magasságaik. *P* és *Q* pontokat egymáshoz végtelen közelfekvőknek tekintve, a megfelelő ordinátákat egyenlőkül vehetjük, és azt mondhatjuk, hogy MM'F és NN'E háromszögek elenyésző kicsinyek, hogy tehát a kör és ellipsis számbavett terület-elemei úgy aránylanak egymáshoz, mint *b* : *a*-hoz. Ami a terület-elemekre nézve érvényes, igaz az egész területekre nézve is, ennélfogva az ellipsis területe:

$$T : a^2\pi = b : a;$$

honnan:

$$T = ab . \pi.$$

Az ellipsis területe ilyformán a két féltengely és a *Ludolph*-féle szám szorzatával egyenlő.

A hyperbola.

28. §. A hyperbola egyenletei.

Ha a kúpmetszetek általános egyenletében (19 §.) $\varepsilon > 1$; akkor az, a kezdőpontot a görbe centrumának tekintve, annyit jelent, hogy a directrix a középpont és a gyújtópont közé esik. Ha *a* jelenti a görbe csúcsának a középponttól mért távolságát, úgy: $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$ és az *e* excentricitás (13. ábra) lesz:

$$e = a + AF = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} + \frac{p}{\varepsilon + 1} = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Ha most a szóban forgó hyperbola $(\varepsilon^2 - 1) x^2 - y^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1}$ egyenletébe $\varepsilon^2 - 1 = \frac{p}{a}$ értéket helyettesítjük, kellő rendezés után az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ap} = 1$$

egyenlethez s $ap = b^2$ felvétele után:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ egyenlethez}$$

jutunk s ez adja a hyperbola *középponti egyenletét*, melyet még a következő alakban is irhatunk:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

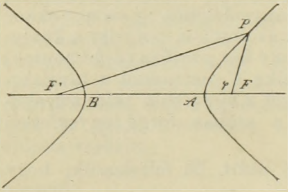
Ez az egyenlet úgy x-re, mint y-ra nézve tiszta négyzetes egyenlet lévén azt mutatja, hogy a görbe vonal a tengelyek mindegyikére nézve *symmetrikus* s a tengelyek a görbét négy egybevágó negyedre bontják.

Ha a hyperbola egyenletében $y = o$; akkor $x = \pm a$. A görbe tehát az abscissa tengelyt a középponttól jobbra és balra oly két pontban (csúcspontok) metszi, melyek mindegyike a centrumtól *a* távolságban van. A *2a* távolságot a hyperbola *valós tengelyének* hívjuk. Minthogy a szóban forgó egyenletből

$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$; azért, ha felteszszük, hogy $x < a$, y számára képzetes értéket nyerünk; ez pedig annyit jelent, hogy a középponttól jobbra és balra *a* távolságon belül emelt merőlegesek a görbét nem metszik s így a hyperbolának az ordináta tengelylyel nincs közös pontja. Az ordináta-tengelyt a hyperbola *képzetes tengelyének* nevezzük. Ha *x* akár positiv, akár negativ értékben növekszik, vele nő a végtelenségig y is. A görbe tehát két elkülönített ággal bír, melyek mindegyike végtelen távolságba nyúlik.

Az $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$ és $e = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon - 1}$ egyenletekből $\varepsilon = \frac{e}{a}$ s az $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$ és $b^2 = ap$ egyenletekből $b^2 = (\varepsilon^2 - 1) a^2$, s ez ε helyettesitése után: $e^2 = a^2 + b^2$ egyenletre vezet, mely az excentricitás és a tengelyek közt létező összefüggést fejezi ki. Ebből: $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, azaz az excentricitás oly derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a fél valós tengely, másik befogója a képzetes tengelynek a középponttól számitott ama szelete, melyet nyerünk, ha a gyújtópontnak a centrumtól mért távolságával mint sugárral az egyik csúcsból kört irunk le. A kör és az ordináta tengely metszési pontjainak a középpontig mért távolsága adja *b* hosszát. Ha $b = a$, az *egyenlő oldalú hyperbolát* nyerjük, melynek egyenlete: $x^2 - y^2 = a^2$. Ha a hyperbola egyenletében $x = e$; akkor $y = \frac{b^2}{a} = p$. A fél képzetes tengely tehát geometriai középarányos a fél valós tengely és a paraméter közt.

Amint az ellipsisnél tettük, kimutathatjuk itt is, hogy a hyperbolának két irányvonal és két gyujtópont felel meg és hogy a hyperbolánál a radius vectorok különbsége a valós tengelylyel egyenlő.



21. ábra.

Ha a hyperbola egyik pl. A csúcsát (21. ábra) választjuk a coordináta-rendszer kezdőpontjául s a valós tengelyt abscissa tengelyül; akkor a P pont uj rendszerre vonatkoztatott x_1 y_1 coordinátái a régiekkel következőképen függnek össze: $x_1 = y - a$ és $y_1 = y$ s igy:

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax_1 + x_1^2),$$

de mert:

$$\frac{b^2}{a} = p,$$

azért:

$$y_1^2 = 2px_1 + \frac{p\,x_1^2}{a}$$

a *hyperbola csúcsegyenlete.*

Ha a hyperbola F gyújtópontját sarkul s FF'-et sarktengelyül választjuk; akkor P pont sark-coordinátái:

$$\rho = PF \text{ és } \varphi = PFF'\sphericalangle;$$

PFF' $\triangle$-ből pedig:

$$\overline{PF'^2} = \overline{FF'^2} + \overline{PF^2} - 2FF'.\,PF\,.\cos\varphi$$

ámde:

$$PF = 2a + \rho$$

s igy:

$$(2a + \rho)^2 = 4e^2 + \rho^2 - 4e\rho\,.\cos\varphi$$

s ebből:

$$\rho = \frac{e^2 - a^2}{a \mp e\cos\varphi}$$

a hyperbola sarkegyenlete.

Minthogy a hyperbola egyenlete az ellipsisétől csakis b^2 előjelében különbözik, azért az ellipsisre nézve megállapított tételeket a hyperbolára is alkalmazhatjuk, ha b helyett $b\sqrt{-1}$-et irunk.

A parabola, ellipsis és hyperbola csúcsegyenletei rendre:

$$y^2 = 2px,\ y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},\ y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

Ha ezen egyenleteket összehasonlítjuk, azt látjuk, hogy $a = \infty$ esetében teljesen azonosakká válnak. A parabolát tehát oly ellipsisnek vagy hyperbolának tekinthetjük, melynek tengelye végtelen nagy.

29. §. A hyperbola és az egyenes.

A hyperbola és az egyenes közös pontjának abscissája

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ és } y = mx + n$$

egyenletekből:

$$x = \frac{-mna^2 \pm ab\sqrt{n^2 - (m^2a^2 - b^2)}}{m^2a^2 - b^2}.$$

Ebből kitetszőleg a hyperbolának és az egyenesnek két, vagy egy közös pontja van, vagy nincs közös pontja a szerint, amint

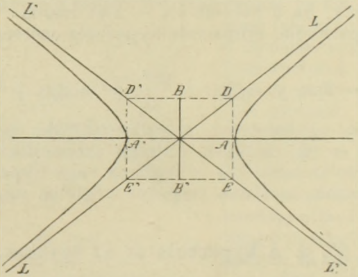
$$n^2 \gtreqless m^2a^2 - b^2.$$

Az O középponttal biró hyperbola és a középponton átmenő $y = mx$ egyenes xy közös pontjának coordinátái

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - m^2a^2}};\ y = \frac{mab}{\sqrt{b^2 - m^2a^2}}.$$

A kettős jel azt mutatja, hogy x és y-nak két egyenlő, ellenkező előjelű érték fel meg s így a középpont felezi a rajta átmenő egyeneseket, vagy *átmérőket*. Ha x és y értékeiben $b^2 = m^2a^2$, azaz $b = \pm ma$ és $m = \pm\frac{b}{a}$; akkor x és y értéke végtelen nagygyá lesz. Ezen egyenesek szerkesztésére (22. ábra) a valós és képzetes tengely fölé DEE'D' oblongumot alakítjuk, s ennek *LL*, illetőleg *L'L'* átlói a kivánt egyenesek.

Ezen a hyperbolához mindjobban közeledő, de azt csak végtelen távolban metsző egyenesek a *végérintők,*



22. ábra.

vagy *asymptoták.* Az LL hajlásszöge $LOX \sphericalangle$ az $L'L'$-é $L'OX$ és mert első esetben

$$m = \operatorname{tg} LOX = -\frac{b}{a},$$

második esetben

$$m = \operatorname{tg} L'OX = \frac{b}{a},$$

azért a szerkesztés tényleg helyes volt.

30. §. A hyperbola érintője.

Az *érintő vonal egyenlete,* ha az a hyperbola x_1y_1 pontján megy át a 25. §-ban követett eljárás alkalmazásával

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1),$$

vagy más rendezésben

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

A *normális egyenlete* pedig:

$$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

Az érintési vonalakat úgy kapjuk meg az ellipsis ily egyeneseinek értékeiből, ha azokba b helyett $b\sqrt{-1}$-et irunk s akkor:

$$\text{a } \textit{subtangens} \text{ értéke: } \frac{x_1^2 - a^2}{x};$$

$$\text{az } \textit{érintő} \text{ értéke: } \frac{y_1}{b^2 y_1}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2};$$

$$\text{a } \textit{subnormális} \text{ értéke: } \frac{b^2 x_1}{b^2};$$

$$\text{a } \textit{normális} \text{ értéke: } \sqrt{\frac{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}{a^2}}.$$

A megismert egyenletek alapján bebizonyítható, hogy a hyperbola érintője felezi az érintési ponthoz tartozó radius vectoroktól bezárt szöget. Ezen tulajdonság alapján tudunk érintőt szerkeszteni a hyperbola adott pontjához s ez a tulajdonság fejti meg, hogy a hyperbola körülforgatásából származtatható felszínnel bíró domború tükörfelület az egyik gyújtópont irányában beeső hő-, fény- és hangsugarakat a másik gyújtópontba veri vissza.

31. §. A két ismeretlent tartalmazó teljes másodfokú egyenlet elemzése.

A derékszögű tengely rendszerre vonatkozó x és y coordináták közt fenálló másodfokú egyenlet rendezett alakja

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o.$$

Mindig elérhetjük, hogy ezen egyenletben A positiv legyen, a többi coefficiens pedig tetszőleges reális értéket jelenthet. Az egyenletben kifejezett görbék meghatározására rendezzük azt y szerint; akkor:

$$y^2 + \frac{Bx + D}{A}y + \frac{Cx^2 + Ex + F}{A} = o$$

s ebből:

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\left(x^2 + \frac{2BD-4AE}{B^2-4AC}x + \frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right)}$$

Ha rövidség okáért az y értékét képviselő algebrai összeg első összeadandóját *u*-val, a másodikat *v*-vel jelöljük, úgy

$$y = -u \pm v,$$

ahol *v* még a gyökjel alatt foglalt első szorzónak *M*-mel, a másodiknak *N*-nel való jelölése után röviden így állitható elő:

$$v = \frac{1}{2A} \sqrt{MN}.$$

Ha az eddigi eredményeket figyelmünkre méltatjuk, azt látjuk, hogy y számára minden x érték két értéket szolgáltat s ezek mindketteje valódi, vagy mindketteje képzetes. Ami az *u* értéket illeti, az a görbe egyik átmérőjét állitja elő, mely a másodrendű vonalaknál csakis egyenes lehet. Ha *v* értékét nézzük, az csak úgy lehet reális, ha *MN* szorzat positiv. Ez azonban nem zárja ki, hogy *M*, azaz

$$B^2 - 4AC \gtreqless 0$$

lehessen.

Ha $B^2 - 4AC > 0$; akkor *N* szintén nagyobb, mint zérus. *N* azonban mint másodfokú trinom két elsőfokú kéttagú tényezőre bontható. Ha abban x gyökei *a* és *b*, úgy:

$$N = (x - a)(x - b).$$

Most *a* és *b* egyidejűleg reális, vagy képzetes lehet. Első esetben *N* csak akkor positiv, ha értékében x nagyobb, mint az *a* és *b* közé eső számok; ellenben ha *x a* és *b* közt fekvő értéket nyer; akkor *N* negativ. A szóban forgó görbe, ebből kitetszőleg, oly természetű, hogy két abscissával bir, melyeken belül egyetlen pontja sincs, ezeken kivül azonban mindkét irányban végtelen messzire nyúlhatik. Ilyen tulajdonságot csakis a *hyperbolánál* ismertünk fel. Hasonló eredményhez jutunk, ha *a* és *b* conjugált complex-számok. Hogyha pedig $a = b$; akkor a másodfokú egyenlet két első fokúra bomlik s két egymást metsző egyenest jelent.

Ha $B^2 - 4AC < 0$, azaz negativ; akkor kell, hogy *N* szintén negativ legyen. Ez azonban az előbbiek szerint csakis akkor következik be, ha x helyett oly értéket irunk a másodfokú trinom szorzatalakjába, mely a és b határok közt fekszik. A másodfokú egyenlet tehát csakis addig bir jelentéssel, amig x túl nem lépi az a és b közé eső határt. Az egyenlet tehát ekkor *ellipsist* jelent.

Ha végre $B^2-4AC=o$; akkor tekintetbe véve, hogy a §. elején y szerint rendezett egyenlet gyökét

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+(2BD-4AE)x+D^2-4AF}$$

alakban is felirhatjuk. és hogy ebben éppen a feltétel miatt az x-et másodfokban tartalmazó tag kiesik; akkor a megmaradó részből az tűnik ki, hogy y legelőbb csakis

$$x=-\frac{D^2-4AF}{2BD-4AE}$$

mellett vehet fel reális értéket. Ezen minimumértéktől kezdve azonban x a $+$ végtelenig növekedhetik. Ily tulajdonságú görbe gyanánt a *parabolát* ismertük meg. Ha y értékében az eredeti felvételhez még $2BD-4AE=O$ is hozzájárulna, akkor az egyenletek két párhuzamos egyenest állitanának elő.

Mindent egybevetve, azt látjuk, hogy a teljes másodfokú egyenlet azokon a görbevonalakon kivül, melyeket kúpmetszetekül ismertünk meg, más másodrendű görbevonalakat nem jelenthet, mert amennyiben valóságos, vagy képzetes kúpmetszet-vonalra nem vezetne, két elsőrendű szorzóra bontható, melyek párhuzamos, vagy egymást metsző egyeneseket képviselnek. Ha a szóban forgó egyenletben $B^2-4AC>O$, hyperbolát, ha $B^2-4AC<O$ ellipsist, ha $B^2-4AC=O$ parabolát foglal az egyenlet magában.

A másodrendű görbevonalak az egyenes körkúp síkkal való metszése utján állíthatók elő. Mégpedig, ha az egyenes körkúpot alaplapjával párhuzamosan haladó sík metszi *kört;* ha alapjával nem párhuzamosan haladó, de az alappal közös pontokkal nem bíró sík metszi, *ellipsist;* ha a metsző sík az egyik alkotó egyenesen átmenő érintősíkkal párhuzamosan fut, *parabolát;* végre, ha a metsző sík a kúp tengelyével kisebb szöget alkot, mint a kúp tengelye az alkotóval, *hyperbolát* nyerünk kúpmetszetül. Utóbbi esetben a metsző sík átvágja másodízben is az alkotókat, feltéve, hogy azokat a kúp csúcsán túl is meghosszabbitjuk s ily úton a hyperbola második ágát állítja elő.

32. §. Példák 1—250.

1. Meghatározandó a pont helyzete, melynek coordinátái: $x=4$, $y=5$; $x=-3$, $y=7$; $x=5$, $y=-2$; $x=-4$, $y=-6$; $x=o$, $y=-5$; $x=3$, $y=o$.

Meghatározandók a pontok helyzetei, melyek derékszögű coordinátáit a következő egyenletek szolgáltatják:

2. $x+y=28$, $x-y=6$;

3. $x+2y=13$, $2x+3y=13$;

4. $8x+3y=7$; $5x-2y=16$;

5. $5x-6y=22$, $\frac{3x+5y}{-3}=19-\frac{x+y}{2}$.

6. Kiszámitandók a fentebbi egyenletekben adott pontok coordinátái oly párhuzamos derékszögű coordináta-rendszerre, melynek kezdőpontja a régi rendszerre nézve $m=3$, $n=5$ coordinátákkal bir.

7. Mik a két utolsó egyenletben adott pontok coordinátái oly derékszögű tengelyrendszerre nézve, melynek kezdőpontja összeesik az eredeti rendszerével, x-tengelye azonban a régivel $15^0\ 30'$-nyí szöget zár be?

8. Milyen azon pontok helyzete, melyek sark-coordinátái: $\rho=7$, $\varphi=45^0$; $\rho=9$, $\varphi=28^0$; $\rho=3$, $\varphi=135^0$; $\rho=4$, $\varphi=-56^0$?

9. Mily szög alatt kell elforgatni a coordinátarendszert, hogy (5, 7) pont ordinátája 6 legyen?

10. Mily nagy az $x=42$, $y=35$ és $x_1=3$, $y_1=-4$ pontok távolsága?

11. Mily nagy oly két pont távolsága, melyek sark-coordinátái:
$\rho=15$, $\varphi=48^0\ 26'$; $\rho_1=17$, $\varphi_1=125^0$?

12. Mily föltételeknek kell teljesülni, hogy xy pont a $(4_1 5)$ és $(6_1 7)$ pontoktól egyenlő távol feküdjék?

13. A 25 hosszegységnyi távolság egyik végpontjának coordinátái $x=9$, $y=32$; másik végpontjára nézve $x_1=-18$. Mily nagy e végpont ordinátája?

14. Mily nagy két oly pont távolsága, melyek derékszögű coordinátái rendre: 3, 7 és -4, 5; -9, 12 és 0, 3; 0, 0 és 7, -5?

15. Mily szög alatt forgatandó el a coordinátarendszer a kezdőpont körül, hogy az x-tengely a 4, 7 pontig jusson?

16. Valamely háromszög szögpontjainak coordinátái 5, 7; 1, 5; 2, 9, mily nagy a háromszög területe?
17. Mily nagy akkor, ha a jelzett coordináták: 5, — 2; 3, — 4; — 3, 6?
18. A háromszög szögpontjainak coordinátái: 2, 4; 6, — 4; — 2, 2. Meghatározandók az oldalaktól egyenlő távol fekvő pont coordinátái.
19. Mily nagy a négyszög területe, ha szögpontjainak coordinátái: 2, 5; — 3, 7; 1, — 9 és — 3, 7?
20. Mily nagy akkor, ha a jelzett coordináták: 3, 8; 2, — 5; — 3, — 10; — 5, 8?

---

21. Mi az egyenlete az abscissa-tengelylyel 45°-nyi szöget bezáró s az ordináta-tengelyről 3 egységet lemetsző egyenesnek?
22. Mi lesz akkor, ha az x-tengelylyel bezárt szög 158°, az y-tengelyről leszelt rész — 5?
23. Mi az egyenlete a kezdőponton átmenő s az x-tengelylyel 70°-os szöget bezáró egyenesnek?
24. Mily szöget alkot az x-tengelylyel az $y = x + 5$ egyenes?
25. Felállitandó azon egyenes egyenlete, mely az x-tengelyből — 5, az y-tengelyből 24 egységet szel le.
26. Megszerkesztendők az $x + 3y = 5$; $y = 4x - 3$; $3x - y = 6$ egyenletekben adott egyenesek.
27. Mily szöget alkot az abscissa-tengelylyel az $y = 2x - 7$; $y = x + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ egyenes?
28. Keressük az $y = \frac{5}{3}x - 7$ egyenes normális egyenletét.
29. Állitsuk fel az $y = 5x + 6$ egyenes sarkegyenletét.
30. Állitsuk elő az $y = \frac{2}{3}x - 3$ egyenlet normális és sarkegyenletét.
31. Keressük meg az $5y - 2x = 4$ és $3y - x = 4$ egyenesek metszési pontjának coordinátáit.
32. Keressük meg ugyanazt az $y = 3x + 4$ és $y = x + 4$ egyenesekre.
33. Keressük meg ugyanazt az $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ és $y = 4x + 4$ egyenesek esetében.

34. Mi az egyenlete az $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 4$, $y_2 = 5$ pontokon átvonuló egyenesnek?

35. Mi akkor, ha az adott pontok $x_1 = -1{\cdot}2$, $y_1 = -3$; $x_2 = 5$, $y_2 = -2$; vagy $x_1 = -\frac{1}{2}$, $y_1 = 3$; $y_2 = 3$, $y_2 = o$?

36. Meghatározandó az $x = 5y - 15$; $y = 2x + 1$; $2y = 7 - x$ egyenesektől alkotott háromszög oldalai és területe.

37. Keressük az $x = 5$, $y = -4$ ponton átmenő $y = 3 - x$ egyenesre merőlegesen álló egyenes vonal egyenletét.

38. Milyen lesz az $x = 3$, $y = 8$ ponton átmenő $y + 2x - 8 = 0$ egyenesre merőleges egyenes egyenlete?

39. Mi lesz akkor, ha az egyenes a kezdőpontból indul ki s merőleges az $y - 3x = -7$ egyenesre?

40. Az egyenes az x-tengelyhez $\alpha = 63^0\,26'\,6''$ szög alatt hajlik, az y-tengelyből pedig 4 egységet szel le. Mily nagy az egyenesben fekvő egyik pont coordinátája, ha abscissája 10 egység?

41. Keressük az $x = 3y - 5$, $y - 3 = 2x$ egyenesek metszésipontjából kiinduló s $3x - 2y = 7$ egyenesre merőleges egyenes egyenletét.

42. A háromszög oldalainak egyenletei: $2x + y - 11 = o$, $2y - 9x + 50 = 0$ és $6y - 7\alpha - 3 = 0$; keressük a magasságok egyenleteit.

43. Határozzuk meg az x-tengelylyel párhuzamos egyenes egyenletét, feltéve, hogy az az $y = 3x + 5$ és $y = 7x - 2$ egyenesek metszési pontjából indul ki.

44. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát, ha azok egyenletei: $5x - 3y = 9$; $2y - 3x = 4$; $y - x = -2$

45. Mi lesz derékszögű coordinátákban a $\operatorname{tg} \alpha = 1$; $r = 3 : \cos \alpha$ egyenesek egyenlete?

46. Határozzuk meg ezen egyenesek átmetszésipontját.

47. Milyen távol esik a kezdőpont $y - 3x = 4$ egyenestől?

48. Mily szög alatt metszik egymást a háromszög súlyvonalai, ha szögpontjainak coidinátái $3_1 - 2$; $5 -, 7$; $-3, -6$?

49. Mi lesz azon egyenes egyenlete, mely az $x = -1$, $y = 5$ ponton átmenve $5x - 4y - 1 = 0$ egyenessel 45^0-nyi szöget alkot?

50. Mily nagy az $y + 3x = 7$ és $y + 3x = 16$ egyenesek egymástól mért távolsága?

---

51. Mi a derékszögű coordináta-rendszerre nézve azon kör egyenlete, melyben a középpont coordinátái 2 és -1, a sugár $1\frac{1}{2}$?

52. Mi az egyenlet akkor, ha az előbbi példában megnevezett értékek rendre: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, 2, vagy -5, 7, 9?

Szerkeszszük a következő egyenleteknek megfelelő vonalakat:

53. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 7^2$;
54. $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 11$;
55. $x^2 + y^2 - 2x + y = 3$;
56. $x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0$.
57. $4x^2 + 4y^2 - 6x + 3y = 0$;
58. $x^2 - y^2 + 3x + 2y = 6$.
59. Szerkeszszünk kört a 12, 10; 6, 11; 10, 4 három ponton át.
60. Hány közös pontja van az $x^2 + y^2 = 25$ körnek az $y = 3x - 6$ egyenessel.
61. Mi az $x^2 + y^2 = 16$ kört érintő s a 6 és 4 coordinátákkal bíró ponton átmenő egyenes egyenlete?
62. Keressük az $x^2 + y^2 - 10x - 6y = -30$ kört 5, 1 pontban érintő egyenes egyenletét.
63. Hogy néz ki az $x^2 + y^2 = 64$ kör egyenlete az 5, 9 kezdőponttal és az eredetivel párhuzamosan haladó tengelyekkel bíró coordináta-rendszerre nézve?
64. Mily pontokban metszi az $x^2 + y^2 - 3x + 5y = 17$ kör a tengelyeket?
65. Keresendő az $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$ körben 5, 4 ponthoz tartozó érintő és normális egyenlete.
66. Állítsuk elő az $x^2 + y^2 + 2x + 2y\sqrt{3} = 5$ kör sarkegyenletét.
67. Az $x^2 + y^2 = 169$ kört a 16, 11 pontból kiinduló két egyenes érinti. Keressük meg az érintési pontok coordinátáit.

68. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 36$ és $x^2 + y^2 = 64$ körök metszési pontjainak coordinátáit, feltéve, hogy a centrális hossza 10.

69. Hogy alakúlnak az előbbi példában nyert értékek ha a centrális hossza 14?

70. Hogy alakúlnak a 69. példa eredményei, ha második körül $x^2 + y^2 = 256$ jön számításba?

71. Két kör egyenletei: $x^2 + y^2 - 10x = 9$ és $x^2 - y^2 + 12y = -11$. Mekkora e körök közös részének területe?

72. Húzzunk érintőket a kezdőpontból az $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 21$ körhöz s határozzuk meg azon háromszög területét, melyet az érintők s az érintési pontok közé eső ív alkotnak.

73. Irjuk fel azon kör egyenletét, melynek sugara 2, centruma a positiv x-tengelyen van s érinti a $3x - 4y = 12$ egyenest.

74. Az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz 2, 8 pontból érintőket húzunk. Mily nagy az ezektől bezárt szög?

75. Határozzuk meg ama kör egyenletét, mely két adott kör hasonlósági pontjain átmenve sugárul akkora távolságot bír, mint az adott körök centrálisa.

76. Két egyenes egyenlete $y = \frac{x}{2} + 1$ és $y = x + 1^0$; e két egyenes metszőpontjából $r = 6$ sugárral kört irván le, kérdés mi lesz a kör és egyenes 4 metszési pontjához tartozó érintők hajlásszöge?

77. Felirandó a 3 adott ponton átmenő kör egyenlete.

78. Keressük ama kör egyenletét, mely a positiv x-tengelyt és a $4y + 3x = 33$ egyenest érinti s az 1, 5 ponton áthalad.

79. Keressük azon körök centrumainak geometriai helyét, melyek a 2, 0 ponton átmenve az $(x - 6)^2 + y^2 = 64$ kört belülről érintik.

80. Meghatározandók a 8, 1 ponton átmenő $x^2 + y^2 = 16$ kört érintő egyenesek egyenletei, az érintési pontok cordinátái s az érintőktől bezárt szög.

81. Szerkeszszük az $x^2 + y^2 = 225$ és $x^2 + y^2 - 30x + 180 = 0$ görbéket, azok közös érintőit s keressük az érintők egyenleteit és az érintési pontok coordinátáit.

82. Melyik azon pont, melyből az $(x-3)^2+(y-4)^2 = 36$ és $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ körökhöz rajzolt érintők hossza 7?

83. Az $x^2+y^2=25$ körhöz 2, — 8 pontból érintőket húzván, számítsuk ki az adott és az érintési pontok közé eső háromszög területét.

84. Keressük meg az $x^2+y^2=16$ körhöz 6, 4 pontból húzott érintők egyenleteit s az érintési pontok coordinátáit.

85. Keressük az $x^2+y^2=16$ és $x^2+y^2-10x+6y = 30$ körök közös érintőinek egyenleteit.

86. Keressük meg ugyane körök hasonlósági pontjaiknak coordinátáit.

87. Ha két kör közül az egyik egyenlete $x^2+y^2=1$, a külső hasonlósági pont coordinátái $x=4$, $y=7$, a belső abscissája $x_1=-5$, mi a 2-ik kör egyenlete?

88. Keressük azon kör egyenletét, mely két nagyságra és helyzetre adott kört érint.

89. Keresendők az érintési vonalak az $x^2+y^2=169$ kör esetében, ha az érintési-pont abscissája 7.

90. Ugyanazon feladat oldandó meg az $x^2+y^2=49$ körre, feltéve, hogy a kérdéses abscissa 4.

91. Mi az $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ kört kivülről érintő r_1 sugárú körök centrumainak geometriai helye?

92. Az $x^2+y^2=16$ és $(x-10)^2+(y-4)^2=16$ köröket érintő s 5, 1 ponton átmenő kör egyenlete keresendő fel.

93. Keressük meg a két adott ponton átmenő s adott kört érintő kör egyenletét.

94. Mily messze esik az $x+\frac{3}{2}y=3$ egyenes az $x^2+y^2-6x+6y=3$ kör centrumától?

95. Coordinátáikban adott 3 ponton átmenő körnek mi az egyenlete?

96. Irjuk fel azon kör egyenletét, melyben a centrum coordinátái 116 és 81, a kerület egyik pontjának coordinátái 162 és 25.

97. Határozzuk meg az $x^2+y^2-6x+8y=24$ kör centrumának coordinátáit.

98. Irjuk fel a három adott kört érintő kör egyenletét.

99. Határozzuk meg az $x^2+y^2-x+\frac{3}{2}y=3$ kör sarkegyenletét.

100. Mily nagy azon húr hossza, melyet az $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ kör a $2y - x - 2 = 0$ egyenesből leszel?

---

101. Milyen parabolát jelent az $y^2 = 8x$; $y^2 = -\frac{8}{9}x$ egyenlet?

102. Milyen parabolát jelent az $y^2 + 6y = 4x + 11$ egyenlet?

103. Szerkeszszük meg a két előbbi példában adott parabolákat arra való tekintettel, hogy $x : y = y : 2p$.

104. Irjuk fel a parabola egyenletét oly rendszerre, melynek x tengelye összeesik a parabola tengelyével, csúcsa a kezdőponttal; a gyújtópont távola pedig a csúcstól 4·5.

105. Irjuk fel a parabola egyenletét, tudva, hogy csúcsának coordinátái 7 és — 5, paramétere 8, tengelye pedig párhuzamos az x-tengelylyel.

106. Az $y^2 = 4x$ parabola egyik pontjának abscissája 7. Mi lesz az egyenlete és hossza az ezen ponthoz tartozó radius vectornak?

107. Mi az $y^2 = 5x$ parabolát 20, 10 pontban érintő egyenes egyenlete?

108. Határozzuk meg a parabola ugyanazon pontjához tartozó normálisnak az egyenletét.

109. Az egyik parabola-pontra $x = 5$, $y = 6·24$, a másikra nézve $x_1 = 3$, $y_1 = 3·5$. Számítsuk ki a paramétert.

110. Szerkeszszük meg az előbb említett parabolát s számítsuk ki a két pont közé eső területrészt.

111. Számítsuk ki az $y^2 = 8x$ parabola $x = 5$, $y > 0$ pontjához tartozó érintési egyeneseket.

112. Mily görbén feküsznek az $y^2 = 6x$ parabola radius vectorait felező pontok?

113. Milyen szög mellett lesz a parabola sarkegyenlete $r = 2p$?

114. Irjuk fel az $y^2 = 1·5x$ parabola sarkegyenletét.

115. Mi az $y^2 = 5x$ parabola azon érintőjének egyenlete, mely a tengelylyel 45^0-nyi szöget alkot?

116. Mi a területe azon parabola-segmentumnak mit a paraméter az $y^2 = 12x$ parabolából elmetsz?

117. Ha $y^2 = 2x$ a parabola egyenlete, $x_1 = 7$, $x_2 = 9$ két pontjának abscissái. Mi lesz a két pontot összekötő húr s a megfelelő parabolaív közt fekvő terület értéke?

118. Számítsuk ki a parabola azon szelletének területét, melyre $y = 3{\cdot}7$, ha a parabola egyenlete $y^2 = 5x$.

119. Számítsuk ki az ugyanazon parabola 9, 6·7 pontjához vont érintőnek az egyenletét.

120. Számítsuk ki a jelzett ponthoz tartozó négy érintési egyenes hosszát.

121. Határozzuk meg az $y^2 = 4x$ parabola $x = 16$ abscissával bíró pontjának coordinátái és a parabola íve közé eső területet.

122. A parabola csúcsából 50^0-nyi szög alatt húr indul ki. Mily nagy az attól leszelt segmentum területe, ha a parabola egyenlete $y^2 = 12x$?

Milyen kúpmetszetet jelent az:

123. $y^2 + x^2 - 2xy - 4x + 2y = 1$

124. $y^2 + 16x^2 + 8xy - 14x - 6y = 0$

125. $y^2 + 9x^2 + 6xy - 22x + 8y + 14 = 0$ egyenlet?

126. Parabola szerkesztendő, ha annak gyújtópontja és még két kerületi pontja adva van.

127. A parabola-segmentum F területéből és a húr abscissájából meghatározandó a húr, tudván, hogy az merőlegesen áll a tengelyre.

128. Számítsuk ki a tengelyre merőlegesen álló húrral lemetszett parabola-segmentumot; tudva, hogy a paraméter 14, a húr abscissája 56.

129. Szerkeszszük a directrixből és 2 adott pontból a parabolát.

130. Végezzük a szerkesztést, ha két pont s a tengely helyzete ismeretes.

131. Szerkeszszük a következő egyenleteket: $x^2 + 10x + 8y = 0$; $y^2 - 2y - 6x = 0$; $x^2 - 6x - 3y = 0$; $y^2 - 18x = 0$.

132. Adva van $y^2 = 18x$ parabola. Egy pontnak coordinátái $x = 4$, $y = 3$. Határozzuk meg a ponttól felezett húr egyenletét.

133. Határozzuk még meg a húr és a parabola határolta területet is.

134. Mekkorák az $y^2 = 4x$ parabolához 8, 6 pontból húzott érintők érintési pontjaihoz tartozó radius vectorok?

135. Mik lesznek az $y^2 = 16x$ és $2x - y = 2$ vonalak metszési pontjainak coordinátái?

136. Határozzuk meg az $y^2 = 8x$ parabolához 2, 3·5 pontból vont érintők egyenletét s az érintőktől bezárt szöget.

137. Határozzuk meg az $y^2 = 24x$ és $y + 2 = 4x$ vonalak közös pontjait.

138. Határozzuk meg az $y^2 = 4x$ parabola 4 ordinátával biró pontjához tartozó érintési vonalakat.

139. Mely parabola-pontokban — 12 a subtangens és 3 a subnormális?

140. Mi lesz a vizszintesen, mi a ferdén eldobott test útja?

---

141. Irjuk fel a $2a = 16$ és $2b = 12$ tengelyekkel biró ellipsis középponti egyenletét.

142. Az ellipsis két pontjának coordinátái 1, 5 és — 2, 4. Hogy alakul az ellipsis középponti egyenlete.

143. Irjuk fel az ellipsis egyenletét, ha $a + b = 27$, $e = 9$.

144. Kiszámítandó a és b, ha $e = 5$, $p = 6·5$.

145. Szerkeszszük a $18x^2 - 216x + 32y^2 - 512y + 1544 = 0$ ellipsist.

146. Keressük meg a fenti egyenlet alapján az ellipsis lineáris excentricitását, paraméterét és területét.

147. A 8, 10 ellipsis-pont radius vectorai keresendők, ha $a = 14$, $b = 10$, $e = 12$.

148. Mekkora a $3x^2 + 5y^2 = 17$ ellipsis excentricitása és paramétere.

149. Megszerkesztendő az ellipsis, a paraméter és az excentricitás ismeretében ($e = 5$, $p = 4$).

150. Keressük fel az ellipsis csúcsegyenletét, ha kis tengelye 14, paramétere 6.

151. Keressük az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsis 2, 1·8 pontjához tartozó radius vectorok hajlásszögét.

152. Keressük az $x^2 + y^2 = 97$ és $\left(\frac{x}{15}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ vonalak metszése révén keletkező négyszög területét.

153. Keressük az $\left(\frac{x-5}{8}\right)^2 + \left(\frac{y-6}{4}\right)^2 = 1$ és $x^2 + y^2 = 36$ vonalak metszési pontjaihoz tartozó érintőket.

154. Mely pontokban metszi az $y^2 + 22x^2 + 8xy - 29x - 6y + 2 = 0$ ellipsis a tengelyeket?

155. Határozzuk meg ugyanazt az $y^2 + 12x^2 - 4xy = o$ ellipsisre.

156. Határozzuk meg a középponti egyenletében adott ellipsisbe rajzolható négyzet oldalainak egyenletét s a négyzet kerületét.

157. Határozzuk meg a $8x^2 + 15y^2 = 120$ ellipsis $x = 3, y < o$ pontjához tartozó normális egyenletét.

158. Határozzuk meg az ellipsis tengelyeit a $4y^2 + 9x^2 - 8y + 54x + 49 = 0$ egyenlet alapján.

159. Ugyanazon alapon határozzuk meg az excentricitást, a paramétert és az ellipsis területét.

Milyen görbére vonatkoznak a következő egyenletek:

160. $36x^2 - 432x + 64y^2 - 1024y + 3088 = 0$;

161. $y^2 + 7x^2 - 4xy + 18x - 10y + 30 = 0$;

162. $56x^2 + y^2 - 14xy + 79x - 10y + 31 = 0$;

163. $x^2 + 4y^2 + 4x + 16y + 16 = 0$;

164. $36y^2 + 16x^2 - 72y + 24x - 99 = 0$.

165. A $25x^2 + 36y^2 = 900$ ellipsis $x = 4{\cdot}8$, $y > 0$ pontjához érintőt rajzolunk, mely a kis tengely meghosszabbítását P pontban metszi. Az érintési és P ponton át rajzoljunk kört, melynek centruma a kis tengelyben van. Hol metszi a kör a nagy tengelyt.

166. Az $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ ellipsis jobboldali focusában húzzuk meg a positiv ordinátát. Szerkeszszünk az ellipsishez ennek végpontjában érintőt. Mekkora az érintő és a két tengelytől bezárt háromszög területe?

167. Keressük a $9y^2 + 4x^2 = 36$ ellipsis területét.

168. Mi az ellipsis területe, ha $2a = 20$, $e = 4{\cdot}6$?

169. Húzzunk a $9x^2 + 16y^2 = 144$ ellipsis baloldali gyújtópontján át a positiv x-tengelylyel 45^0-nyi szöget alkotó húrt. Mik lesznek a húr, a vele párhuzamos érintők egyenletei s az érintési pontok coordinátái?

170. Határozzuk meg az $5y^2 + 3x^2 = 15$ ellipsis oly érintőjének egyenletét, mely párhuzamos a $4x - 3y + 2 = 0$ egyenessel.

171. Meghatározandók a $16x^2 + 25y^2 = 400$ ellipsis és azon parabola átmetszési pontjai, melynek csúcsa az ellipsis centrumával, gyújtópontja az abscissa-tengely positiv oldalán fekvő ellipsis-focussal egybeesik.

172. Milyen szög alatt metszi egymást az előbbi példában meghatározott két görbe.

173. Az ellipsisben $a = 14$, $e = 2$. Mekkorák a $14^0 15'$ szöget bezáró radius vectorok?

174. Mekkora a $11y^2 + 5x^2 = 55$ ellipsis középpontján át a nagy tengelylyel 45^0 és 30^0 szöget bezáró szelőktől meghatározott sector területe?

175. Mi lesz az $x^2 + y^2 = 144$ kör pontjainak ordinátáit felező pontok geometriai helye?

176. Ellipsis szerkesztendő, ha a nagy tengely és egy pont adva van.

177. Ellipsis szerkesztendő, ha adva van a nagy tengely s egy egyenes, mit az ellipsis érint.

178. Ellipsis szerkesztendő, ha ismeretes egy átmérő és az egyik gyújtópont.

179. Egy égi test oly ellipsisben kering a nap körül, melynek nagy tengelye 2600, excentricitása 798 millió kilométer; mekkora tért fut körül az égitest s mily nagy a naptól való távola, mikor $x = 463$, $y = 934$ millió km.?

180. Mekkora szöget alkotnak a kis tengelyhez húzott radius vectorok a nagy tengelylyel, ha a tengelyek négyzeteinek összege 160, összegük pedig szorzatuk harmadrészével egyenlő?

181. Az ellipsisben $a = 18$, $b = 6$. Határozzuk meg a gyújtóponttól 8 távolságban fekvő pontok coordinátáit.

182. Mily szöget zárnak be a szóban forgó pontokhoz húzott érintők?

183. Mekkorák a $4x^2 + 25y^2 = 100$ ellipsis $x = 4$, $y > o$ pontjához tartozó érintési vonalak?

184. Az ellipsisben $2a = 12$, $2b = 10$. Ha a nagy tengely az x-tengely, egyik vége a kezdőpont, mily nagy az $y = 4$ ponthoz tartozó abscissa?

185. Mi lesz az ezen ponthoz tartozó érintő egyenlete és hajlásszöge?

186. Mily nagy azon háromszög kerülete, melyet az érintő s a coordináta tengelyek alkotnak?

187. Adva van $16x^2 + 25y^2 = 400$ ellipsis. Mi lesz ebben a 3, 3·2 ponthoz vont érintő egyenlete?

188. Ha az ellipsis gyújtópontjaiból merőlegeseket húzunk a nyert érintőre, mi lesz ezen merőlegesek, mint féltengelyektől meghatározott második ellipsis egyenlete?

189. Hogy aránylik a két ellipsis területe egymáshoz?

190. Mekkora szöget zárnak be a $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellipsis $x = 2$, $y > o$ pontjához tartozó radius vectorok?

Hány közös pontja van a $9y^2 - 4x^2 = 36$ hyperbolának

191. az $y = \frac{2}{3}x + 2$;

192. $y = 2x - 8$;

193. $y = x - 3$ egyenessel?

194. Mily nagyok a $25x^2 - 36y = 900$ hyperbola tengelyei, excentricitása, parametere?

196. Ha a hyperbolánál $a = 5$, $b = 8$; mi lesz a hyperbola egyenlete; mik lesznek a 7, 8, 9 stb. abscissával biró pontok ordinátái?

197. Mily nagy szöget zárnak be a $9x^2 - 25y^2 = 225$ hyperbola $x = 13$, $y > o$ pontjához tartozó radius vectorok?

198. Meghatározandó $16x^2 - 7y^2 = 112$ hyperbola azon pontjának coordinátái, melyet érintési pontúl tekintve, a hozzá tartozó érintő az x-tengelylyel 70^0-nyi szöget alkot.

199. Megszerkesztendő a $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0$ egyenlet útján adott görbe.

200. Milyen görbe vonalat képvisel a $16x^2 - 25y^2 - 128x - 150y + 31 = 0$ egyenlet?

201. Szerkeszszük az $x^2 - y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ és

202. a $16y^2 - 9x^2 + 3bx - xb = 0$ egyenleteket.

203. A hyperbola egyenlete $16x^2 - 25y^2 - 32x + 150y = 248$. Az egyenes egyenlete $2y - 5 = x$. Mi lesz azon kör egyenlete, melyet a hyperbola és egyenes metszési pontjai közé eső távolság, mint átmérő fölé szerkesztünk?

204. A hyperbola egyenlete $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$. Egyik pontjának coordinátái 6, $\sqrt{75}$. Meghatározandó az érintő egyenlete.

205. Mi lesz az ugyanazon ponthoz tartozó normális egyenlete?

206. Meghatározandók az illető ponthoz tartozó érintési vonalak.

207. Mily viszonyban áll az $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ hyperbola az $y = -\frac{1}{3}\sqrt{29}\,.\,x + 5$ és $y = \frac{1}{3}\sqrt{29}\,.\,x - 5$ egyenesekkel?

208. Mely pontokban metszi az $y^2 + 6\,x^2 - 6xy - 20\,x + 8\,y + 11 = 0$ hyperbola a tengelyeket?

209. Mekkora szöget zárnak be egymással a $9\,x^2 - 7\,y^2 = 36$ hyperbola asymptotái?

210. Határozzuk meg a $9\,x^2 - 7\,y^2 = 36$ hyperbola oly érintőjének egyenletét, mely $y = 4\,x + 1$ egyenessel párhuzamos.

211. Vannak e közös pontjai az $x^2 - 4\,y^2 = 4$ és $y - 2x - 3 = 0$ vonalaknak?

212. Irjuk fel az $x^2 - 3\,y^2 = 12$ hyberbola asymptotáinak egyenletét s határozzuk meg az általuk bezárt szöget.

213. Mi lesz a hyperbola középponti egyenlete, ha $e = 3$, $p = 6$?

214. Egy ellipsis egyenlete $9\,x^2 + 25\,y^2 = 225$, egy hyperboláé $9\,x^2 - 7\,y^2 = 63$. Mekkora szöget zárnak be a metszési pontjaikban húzott érintők?

215. Mekkora azon háromszög területe, melyet az egyik metszéspontból húzott radius rectorok s az x-tengely határolnak?

216. Hyperbola szerkesztendő, ha ismeretesek a csúcsai s kerületének egy pontja.

217. Hyperbola szerkesztendő, ha két csúcsa s egy a hyperbolát érintő egyenes ismeretes.

218. Adva vannak az asymptoták s a hyperbola egy pontja. Megszerkesztendő a hyperbola.

219. Mely hyperbola-pontra nézve egyenlő a subtangens és subnormális?

220. Irjuk fel a hyperbola középponti egyenletét, ha két pontjának coordinátái: 5, 3; 8, — 10.

Mi az analytikai értelme a következő egyenleteknek:

221. $y^2 + 9x^2 + 6xy - 40x - 16y + 60 = 0$;
222. $y^2 + 19x^2 - 6xy - 27x + 8y + 10 = 0$;
223. $y^2 - 2x^2 - 2xy - 4x + 2y + 3 = 0$;
224. $y^2 + 2x^2 + 6xy - 48x - 16y + 64 = 0$;
225. $y^2 - 2xy - 2x + 2y + x^2 = 0$;

226. Határozzuk meg az $y = x + 8$ és $2y = 6 - x$ egyenesek metszési pontját, az általuk bezárt szöget s a két egyenesnek a positiv x-tengelylyel alkotta szögét.

227. Határozzuk meg az egyenesek- és tengelyektől bezárt idom területét.

228. Valamely háromszög alapvonalának egyenlete $18x + 55y + 250 = 0$. Az alap végpontjainak abscissái 2 és 7·5. A háromszög súlypontjának coordinátái 5, 6. Mekkorák az oldalak és szögek?

229. Az $x - y + 2 = 0$ egyenes, mely pontja fekszik egyenlő távol $\frac{1}{2}$, 5 ponttól és $x - 2y + 2 = 0$ egyenestől?

230. Keressük azon háromszög súlypontjainak coordinátáit, melynek szögpontjai az $x + y = 11$; $2x = 3y - 18$; $x = 4y - 19$ oldalakkal határolt háromszög oldalainak felező pontjai.

231. Állapítsuk meg a szóban forgó háromszögek területének arányát.

232. Mekkora azon test felszine és térfogata, amely oly háromszögnek az x tengely körül forgatásából jött létre, melynek szögpontjai 0, 0; 10, 0; 9, 3 coordinátákkal bírnak?

233. Mily távol van a 7, 3 és 5, 4 pontokon áthaladó egyenestől 2, — 6 pont?

234. Oldjuk meg a $9y + 2x + 17 = 0$; $y = 7x - 38$; $2y - x = 2$ háromszögot.

235. Szerkeszszük meg $x^2 + y^2 = 225$ és $x^2 - 30x + y^2 - 180 = 0$ görbéket.

236. Határozzuk meg e görbék közös érintőinek egyenletét s az érintési pontok coordinátáit.

237. A $3y = 4x - 6$ egyenes $x^2 + y^2 - 4y + 6x = 3$ görbét A és B pontban metszi. Meghatározandó AB távolság.

238. Meghatározandó azon háromszög területe, melynek szögpontjai A és B pontok s a coordinátarendszer O kezdőpontja.

239. Mi a 2, 0 ponton átmenő s az $(x-6)^2+y^2=64$ kört belülről érintő körök centrumainak geometriai helye?

240. Állitsuk fel azon kör egyenletét, mely az x-tengelyt s a $4y+3x-13=0$ egyenest érinti s 1, 5 ponton átmegy.

241. Állitsuk fel az 5 cm. sugarú $3x-4y-10=0$ egyenest érintő kör egyenletét.

242. A $16x^2+25y^2=400$ egyenlettel biró görbe $x=4$, $y>o$ pontjában érintőt rajzolunk, mely P, Q pontokban metszi a csúcspontokon áthaladó érintőket. Keressük meg a PQ fölé rajzolt kör egyenletét.

243. Mily pontokban metszi e kör az x-tengelyt?

244. Mily szög alatt metszik egymást az $x^2+y^2=25$ és $y^2=8x$ görbék?

245. Mily szög alatt akkor, ha egyenleteik $7x^2+16y^2=112$ és $5x^2+4y^2=20$?

246. Bizonyitsuk be, hogy ha az ellipsis két érintőjének P metszéspontját F focussal összekötjük PF egyenes felezi az R és S érintési pontokat F-fel összekötő egyenesektől bezárt szöget.

247. Végezzük a bizonyitást arra az esetre is, ha az ellipsis egyenlete $9x^2+25y^2=225$, az érintési pontok coordinátái. $x_1=3$, $y_1>o$, $x_2=-4$, $y_2>o$.

248. Irjuk fel a $3x^2-4y^2=12$ görbéhez 2, 1 pontból huzható érintő egyenletét.

249. Állitsuk elő a $2y^2-3x=0$ görbe sarkegyenletét.

250. Mily alakot ölt a hyperbola középponti egyenlete, ha y-tengelyül a P pontjához vont érintő, x-tengelyül a P ponton átmenő s az előbbi x-tengelyhez párhuzamosan haladó egyenes szolgál?

Eder István könyvnyomdája Pozsonyban.