Hatibovic Alen

Szabadvezeték vezetékhosszának számítása az oszlopközben, illetve annak kijelölt részében

2. rész Parabola

A cikk jelen része a vezetékhossz számítását tárgyalja abban az esetben, ha a vezeték alakját nem láncgörbének (mint a cikk 1. részében), hanem parabolának tekintjük. Míg a szabadvezetékekkel foglalkozó szakirodalom a vezetékhosszra vonatkozóan általában a vízszintes felfüggesztésre ad megoldást, a cikkben levezetett univerzális képlet akár vízszintes, akár ferde felfüggesztés esetén is használható. Továbbá, az új képlet alkalmazása lehetővé teszi a vezetékhossz meghatározását nemcsak a teljes oszlopközben, hanem annak tetszőleges részében is. A parabolahosszra vonatkozó univerzális képlet alkalmazásának bemutatására egy gyakorlati példa szolgál.

The present part of the article discusses the conductor length calculation in the case when the conductor curve is not considered as a catenary (as it is in the 1. part of the article) but as a parabola. Concerning that, while the literatures related to overhead lines give the solution for level spans generally, the universal formula derived in the article is applicable either in level spans or in inclined ones. Furthermore, using the new formula the conductor length can be calculated not in a full span only, but also in the span–part. The application of the universal formula for the parabola length has been shown in a practical example.

1. BEVEZETÉS

A cikkben használt rövidítések a következők:

- *vf.* vízszintes felfüggesztés,
- *ff.* ferde felfüggesztés.

Parabola esetén a számításokhoz szükséges fő bemenő adatok az alábbiak:

- a oszlopköz hossza [m],
- h_1 bal oldali felfüggesztési pont magassága [m],
- h_2 jobb oldali felfüggesztési pont magassága [m],
- b_{max} parabola legnagyobb belógása [m].

Abban az esetben, hogyha a vezeték hosszát nem a teljes oszlopközben, hanem annak egy részében kell meghatározni, a következő – tetszőlegesen választható – adatokra is szükség van:

- x_1 oszlopköz részének bal oldali végpontja [m],
- x_2 oszlopköz részének jobb oldali végpontja [m].

Itt a $0 \leq x_1 < x_2 \leq a$ feltételnek a teljesülése szükséges.

A vezetékhosszra vonatkozóan a következő két fejezet az alábbi számításokhoz nyújt megoldást:

- parabola hossza az oszlopköz részében *ff.* esetén,
- parabola hossza a teljes oszlopközben *ff.* esetén,
- parabola hossza az oszlopköz részében *vf.* esetén,
- parabola hossza a teljes oszlopközben *vf.* esetén.

Négy különböző – e cikkben levezetett – képlet közül az első univerzális képlet, míg a többi három annak különböző egyszerűsítéséből származó kifejezés. A bemenő adatokra nézve az említett négy képlet az alábbi négy esetet takarja:

- $[x_1, x_2] \neq [0, a] \;\wedge\; h_1 \neq h_2$,
- $[x_1, x_2] = [0, a] \;\wedge\; h_1 \neq h_2$,
- $[x_1, x_2] \neq [0, a] \;\wedge\; h_1 = h_2$,
- $[x_1, x_2] = [0, a] \;\wedge\; h_1 = h_2$.

A vezetékhossz számítása a következő matematikai kifejezés felhasználásával történik, (1) az $y(x)$ görbe ívhosszára vonatkozik az $[x_1,x_2]$ intervallumon:

$$L_{[x_1,x_2]} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2} \cdot dx \qquad (1)$$

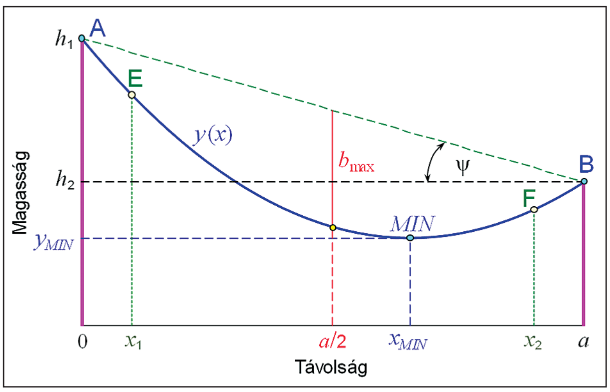
Mivel a vezeték hossza a hőmérséklettel változik, értelemszerűen a vezetékhossz számítása arra a vezeték-hőmérsékletre vonatkozik, amelyhez a felhasznált b_{max} adat tartozik. Minden hőmérsékleten más a parabola legnagyobb belógása. Az utóbbi adatot a vezeték mechanikai méretezéséből [1], [2], ill. a belógási táblázatokból kell átvenni.

A kisfeszültségű (1. ábra), illetve középfeszültségű szabadvezeték–hálózat tervezése során a vezeték alakját az oszlopközben általában parabolának tekintjük, ilyenkor a számításokhoz szükséges adatként a parabola legnagyobb belógása szerepel. (Megemlítendő, hogy a láncgörbe esetén nem a legnagyobb belógás, hanem a láncgörbe paramétere a szükséges adat [3].)

1. ábra *Kisfeszültségű szabadvezeték–hálózat (kettős rendszer szigetelt vezetékkel)*

2. FERDE FELFÜGGESZTÉS

Különböző magasságban lévő felfüggesztési pontok esetén ($h_1 \neq h_2$) ferde felfüggesztésről van szó. Egy ilyen esetet a 2. ábra szemléltet, amelyen fel vannak tüntetve a bemenő adatok és a parabola $y(x)$ is. Az A és B felfüggesztési pontok,



2. ábra *Parabola ferde felfüggesztési közben ($h_1 > h_2$)*

míg $E(x_1;y(x_1))$ és $F(x_2;y(x_2))$ a vezeték első és utolsó pontja az oszlopköz kiválasztott részében, azaz az $[x_1,x_2]$ intervallumon. Az x_{MIN} és y_{MIN} a vezeték legmélyebb pontjának (*MIN*) a koordinátái. ψ a felfüggesztési pontokat összekötő húr vízszintessel bezárt szöge [1].

A vezeték görbe parabola, egyenlete a (2) kifejezés [4], azonban az univerzális vezetékhosszképlet levezetéséhez itt elegendő az egyszerűbb változata, azaz a (3) egyenlet, figyelembe véve a (4) és $A=(4b_{max})/a^2$ kifejezéseket.

$$y(x)=\frac{4b_{max}}{a^2}\left[x-\frac{a}{2}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right]^2+ h_1-b_{max}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)^2,\qquad x\in[0,a] \tag{2}$$

$$y(x)=A(x-x_{MIN})^2+y_{MIN},\qquad x\in[0,a] \tag{3}$$

$$x_{MIN}=\frac{a}{2}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right);\quad y_{MIN}=h_1-b_{max}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)^2 \tag{4}$$

2.1 Parabola hossza az oszlopköz részében (*ff.*)

A 2. ábrán lévő parabola $[x_1,x_2]$ intervallumba eső hosszának a kiszámításához az (5) kifejezés (1) képletbe behelyettesítése szükséges. Az (5) az $y(x)$ első deriváltjának a négyzete.

$$\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2=\left(2A(x-x_{MIN})\right)^2 \tag{5}$$

$$L_{[x_1,x_2]}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(2A(x-x_{MIN})\right)^2}\cdot dx \tag{6}$$

Az integrál megoldása, majd azt követően az A és x_{MIN}–re vonatkozó kifejezések alkalmazása a (7) képletet eredményezi [5].

$$\begin{aligned}L_{[x_1,x_2]}=&\frac{a^2}{16b_{max}}\operatorname{arsh}\left(\frac{8b_{max}}{a^2}\left(x_2-\frac{a}{2}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)\right)-\\&-\frac{a^2}{16b_{max}}\operatorname{arsh}\left(\frac{8b_{max}}{a^2}\left(x_1-\frac{a}{2}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)\right)+\\&+\frac{1}{2}\left(x_2-\frac{a}{2}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{8b_{max}}{a^2}\left(x_2-\frac{a}{2}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)\right)^2}-\\&-\frac{1}{2}\left(x_1-\frac{a}{2}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{8b_{max}}{a^2}\left(x_1-\frac{a}{2}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)\right)^2}\end{aligned} \tag{7}$$

A (7) számú képlettel kiszámítható az oszlopközben, egy tetszőlegesen kiválasztható $[x_1,x_2]$ intervallumban a parabola ívhossza.

Az új képlet gyakorlati alkalmazására a következő példa szolgál, a 3. ábra két görbéje:

- $y_I(x)$ parabola $h_1<h_2$ típusú *ff.*–i közben,
- $y_{II}(x)$ parabola $h_1>h_2$ típusú *ff.*–i közben.

A bemenő adatokat az 1. táblázat tartalmazza. A (7) összefüggés használatával kiszámított parabola hosszak a [0,100], [100,300], [300,400] és [0,400] intervallumokban a 2. táblázatban szerepelnek.

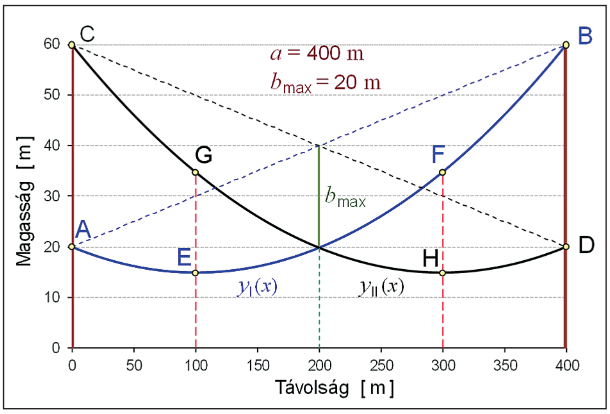
Példa 1:

1. táblázat *Bemenő adatok*

Parabola	a [m]	h_1 [m]	h_2 [m]	b_{max} [m]
$y_I(x)$	400	20	60	20
$y_{II}(x)$	400	60	20	20

$$y_I(x)=5\cdot10^{-4}\cdot(x-100)^2+15,\qquad x\in[0,400]$$

$$y_{II}(x)=5\cdot10^{-4}\cdot(x-300)^2+15,\qquad x\in[0,400]$$



3. ábra *Parabolák $y_I(x)$ és $y_{II}(x)$*

2. táblázat *A (7) képlet használatával kapott eredmények*

x_1 [m]	x_2 [m]	Parabola $y_I(x)$		Parabola $y_{II}(x)$	
0	100	L_{AE} [m]	100,166	L_{CG} [m]	103,116
100	300	L_{EF} [m]	201,326	L_{GH} [m]	201,326
300	400	L_{FB} [m]	103,116	L_{HD} [m]	100,166
0	400	L_{AB} [m]	404,608	L_{CD} [m]	404,608

Megjegyzendő, hogy az L_{AE}, L_{EF} és L_{FB} összege megegyezik az L_{AB} hosszra vonatkozó eredménnyel:

$$\begin{aligned}L_{AE}+L_{EF}+L_{FB}&=100{,}166\ \text{m}+201{,}326\ \text{m}+103{,}116\ \text{m}=\\&=404{,}608\ \text{m}=L_{AB}\end{aligned}$$

Ez az eredmény alátámasztja az univerzális (7) képlet matematikai helyességét. A bemutatott példában a következő egyenlőségek is érvényesülnek: $L_{AE}=L_{HD}$, $L_{EF}=L_{GH}$, $L_{FB}=L_{CG}$ és $L_{AB}=L_{CD}$. A 2. táblázatban szereplő eredmények alapján megállapítható, hogy a (7) képletet mindkét típusú *ff.*–i közben ($h_1<h_2$ és $h_1>h_2$) egyaránt lehet alkalmazni.

2.2 Parabola hossza a teljes oszlopközben (*ff.*)

Amikor az $[x_1,x_2]=[0,a]$, azaz a kiválasztott intervallum megegyezik az oszlopközzel, akkor a teljes vezetékhosszra vonatkozó képlet a (8)-ból levezethető [5]. Azonban azonos eredményre juthatunk (9) egyszerűbb módon is, ha az x_1=0 és x_2=a értékeket helyettesítjük be az univerzális (7) képletbe.

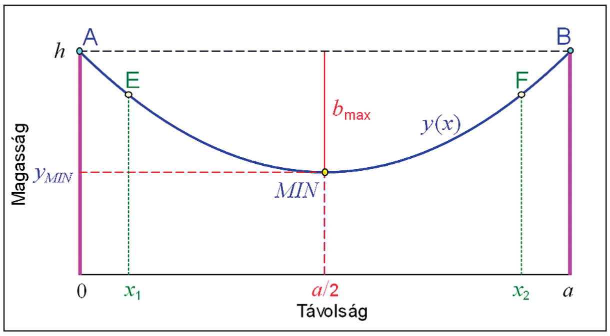
$$L=L_{[0,a]}=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2}\cdot dx \tag{8}$$

$$\begin{aligned}L=&\frac{a^2}{16b_{max}}\operatorname{arsh}\left(\frac{4b_{max}}{a}\left(1+\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)+\\&+\frac{a^2}{16b_{max}}\operatorname{arsh}\left(\frac{4b_{max}}{a}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)+\\&+\frac{a}{4}\left(1+\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{4b_{max}}{a}\left(1+\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)^2}+\\&+\frac{a}{4}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{4b_{max}}{a}\left(1-\frac{h_2-h_1}{4b_{max}}\right)\right)^2}\end{aligned} \tag{9}$$

A (9) képlettel ferde felfüggesztésű oszlopközben a parabola teljes hossza kiszámítható. A (7) képlettel szemben, a (9)-re sokkal gyakrabban van szükség. A (9) kifejezés az univerzális (7) képlet első egyszerűsítése.

3. VÍZSZINTES FELFÜGGESZTÉS

Egyenlő magasságú felfüggesztési pontok esetén ($h_1=h_2$) vízszintes felfüggesztésről van szó, és ilyenkor ψ=0. Egy ilyen esetet a 4. ábra mutat be, melyen látható, hogy a vezeték legmélyebb pontja az oszlopköz felénél van.



4. ábra *Parabola vízszintes felfüggesztési közben ($h_1=h_2=h$)*

Úgy, mint a 2. fejezetben a parabola ívhosszának számítására az oszlopköz egy részében vagy a teljes oszlopközben sor kerülhet. Ezt tárgyalja a 3.1, ill. 3.2 alfejezet.

3.1 Parabola hossza az oszlopköz részében (*vf.*)

Vízszintes felfüggesztés ($h_1=h_2$) esetén az univerzális (7) képletből adódik a (10) összefüggés [5], amely tulajdonképpen a (7)-nek a második egyszerűsítése.

$$\begin{aligned} L_{[x_1,x_2]} = & \frac{a^2}{16b_{\max}}\operatorname{arsh}\left(\frac{8b_{\max}}{a^2}\left(x_2-\frac{a}{2}\right)\right)- \\ & -\frac{a^2}{16b_{\max}}\operatorname{arsh}\left(\frac{8b_{\max}}{a^2}\left(x_1-\frac{a}{2}\right)\right)+ \\ & +\frac{1}{2}\left(x_2-\frac{a}{2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{8b_{\max}}{a^2}\left(x_2-\frac{a}{2}\right)\right)^2}- \\ & -\frac{1}{2}\left(x_1-\frac{a}{2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{8b_{\max}}{a^2}\left(x_1-\frac{a}{2}\right)\right)^2} \end{aligned} \qquad (10)$$

3.2 Parabola hossza a teljes oszlopközben (*vf.*)

Tekintettel arra, hogy a parabola, úgymint a láncgörbe, páros függvény, itt a (11) egyenlőség is érvényesül.

$$L=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2}\,dx=2\int_0^{a/2}\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2}\,dx \qquad (11)$$

Az x_1=0 és $x_2=a$ a (10)–be való behelyettesítése a parabola hosszát adja a teljes oszlopközben *vf.*–re vonatkozóan. Így alakul ki a (12) képlet, amely nyilvánvalóan a $h_1=h_2$ a (9)–be való behelyettesítésével is levezethető. (A (12) a [6] szakkönyvben is szerepel.)

$$L=\frac{a^2}{8b_{\max}}\operatorname{arsh}\left(\frac{4b_{\max}}{a}\right)+\frac{a}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{4b_{\max}}{a}\right)^2} \qquad (12)$$

Visszatérve az univerzális (7) képlethez, $h_1=h_2$ és $[x_1,x_2]=[0,a]$ feltételek együttes teljesülése esetén szintén adódik a (12), így az a (7) harmadik egyszerűsítésének tekinthető.

Mint látható a (12) képlet esetében csak két adat szükséges a parabola ívhosszának számításához, az oszlopköz hossza és a legnagyobb belógás. Fontos megemlíteni, hogy a szabadvezeték–hálózat tervezésével foglalkozó szakirodalom általában csak erre a legegyszerűbb esetre vonatkozó (közelítő) képletet közli. A (15) [7] képletet, a (13) [8] hatványsor figyelembe vételével és $c=a^2/(8b_{max})$ összefüggés alkalmazással a (14) (láncgörbe hossza teljes oszlopközben *vf.* esetén) kifejezés első két tagja alkotja.

$$\operatorname{sh}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots \qquad (13)$$

$$L_{\text{láncgörbe } vf}=2c\cdot\operatorname{sh}\frac{a}{2c}=a+\frac{8}{3}\cdot\frac{b_{\max}^2}{a}+\frac{32}{15}\cdot\frac{b_{\max}^4}{a^3}+\ldots \qquad (14)$$

$$L^*=a+\frac{8}{3}\cdot\frac{b_{\max}^2}{a} \qquad (15)$$

Nyilvánvaló, hogy a (15) matematikailag nem egzakt, hanem közelítő képlet. Felmerül a kérdés, hogy a használata mekkora hibát eredményez, a (12) képlethez képest. Ennek tanulmányozására a következő példa szolgál. A példában három különböző eset szerepel, amelyeknél az oszlopköz hossza ugyan azonos, de a legnagyobb belógás értéke azonban eltérő.

Példa 2:

3. táblázat *Bemenő adatok és a parabola hossza (egzakt és közelítő értéke) a teljes oszlopközben vf. esetén*

Eset	*a* [m]	b_{max} [m]	*L* [m]	L^* [m]
1.	400	10	400,666	400,667
2.	400	15	401,495	401,500
3.	400	20	402,651	402,667

A 2. táblázat alapján megállapítható, hogy $L^* > L$, azaz a közelítő képlet az egzakthoz képest nagyobb értéket ad. Továbbá a b_{max} növelésével a hiba $\Delta L=L^*-L$ is nő, azonban az eltérés mértéke csekély, általában elhanyagolható. Ez alapján kijelenthető, hogy a parabolahossz számításához a teljes oszlopközben *vf.* esetén a szakirodalomban található közelítő (15) képlet használata elfogadható.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk 2. része a parabola ívhosszának a számításával foglalkozik ferde és vízszintes felfüggesztés esetén, a teljes oszlopközben, ill. annak egy tetszőlegesen kiválasztott részében. A cikk egy univerzális képletet és annak három egyszerűsített formáját mutatja be.

Közismert tény, hogy a parabola alapú levezetések, számítások, egyenletek alapvetően egyszerűbbek, mint a láncgörbe alapúak, beleértve itt a vezeték, ill. belógási görbe egyenletének a levezetését, a vezeték legmélyebb pontjának a meghatározását vagy pl. a belógás számítását az oszlopköz tetszőleges pontjában. Ezzel szemben e cikk két részében bemutatott, a vezetékhosszra vonatkozó képletek és levezetésük a parabola esetén bonyolultabbak, mint a láncgörbe esetében. Szabadvezeték tervezésekor a vezetékhossz meghatározása egy olyan számítás, amely a parabola esetén komplikáltabb, mint a láncgörbe esetében.

Irodalomjegyzék

[1] **Dr. Novothny Ferenc:** *Villamosenergia-ellátás II.*, BMF KVK, Budapest, 2012.

[2] **Dr. Novothny Ferenc:** *Példatár Villamosenergia–ellátás II.* (*bővített kiadás*), BMF KVK, Budapest, 2011.

[3] **Hatibovic A.:** *Szabadvezeték vezetékhosszának számítása az oszlopközben,*

illetve annak kijelölt részében 1. rész (Láncgörbe), Elektrotechnika, 109. évfolyam, 5–6. szám, pp. 12–14, 2016.
[4] **Hatibovic A.:** *Determination of the Lowest Point of the Conductor in Inclined Spans Based on a Known Maximal Sag of the Parabola*, CIRED 2013, Stockholm, Sweden, 2013.06.10–13, Paper No. 0150, pp. 1–4, (http://www.cired.net/publications/cired2013/pdfs/CIRED2013_0150_final.pdf)
[5] **Hatibovic A.:** *Algorithm for the Conductor Length Calculation in Inclined and Levelled Spans Based on the Parabola Model*, CIRED 2014, Trogir, Croatia, 2014.05.11–14, Paper SO1–14, pp. 1–9, (http://www.ho-cired.hr/4savjetovanje/SO1/SO1-14.pdf)
[6] **Perneczky G.:** *Szabadvezetékek feszítése*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
[7] **Pansini A. J.:** *Power Transmission and Distribution 2nd Edition*, The Fairmont Press, Inc., 2004.
[8] **Polyanin A. D., Manzhirov A. V.:** *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Taylor & Francis Group, USA, 2007.

Hatibovic Alen
okleveles villamosmérnök, tervező
Optimum Solar Kft. és
Sárköz Green Plan Kft.
MEE–tag
hatibovic.alen@gmail.com