O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores

Isabel Vale

Escola Superior de Educação do IPVC

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Teresa Pimentel

E.S. Santa Maria Maior

terpimentel@gmail.com

Resumo: Este texto incide sobre o tema do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade ao nível da formação contínua de professores. Na abordagem apresentada o tema dos padrões surge como contexto estruturante para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Começa-se por fazer um enquadramento dos referenciais teóricos que fundamentam a adoção de uma proposta didática desenvolvida nesse âmbito, recorrendo em seguida a um estudo empírico que foi desenvolvido, do qual se relata aqui uma parte centrada nas práticas de sala de aula de uma professora do primeiro ciclo em formação, de modo a poder confirmar a eficácia da proposta no ensino e desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Os resultados permitem concluir que a professora interiorizou e projetou na sua prática os aspetos essenciais que conduziram ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos. O texto termina com algumas conclusões e implicações para a formação de professores.

Palavras-chave: formação de professores, ensino e aprendizagem da álgebra, pensamento algébrico, padrões

---

Vale, I. & Pimentel, T. (2013). O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. *Da Investigação às Práticas, 3*(2), 98–124.

Contacto: Isabel Vale, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal / isabel.vale@ese.ipvc.pt

Abstract: This article deals with the subject of algebraic thinking in early years of schooling and at the level of continuous teacher education. In the presented approach, the subject of patterns serves as a structuring context for the development of algebraic thinking. It begins by creating a theoretical frame of reference which substantiates the adoption of a didactic proposal developed in this field. It then uses an empirical study that was carried out, of which reference is made here to a part focusing on the classroom practices of a third cycle teacher in training, with a view to confirming the effectiveness of the proposal in the teaching and development of algebraic thinking in the pupils. The outcomes allow us to conclude that the teacher had absorbed and incorporated in her practice the essential aspects leading to the development of algebraic thinking in her pupils. The article ends with some conclusions and implications for teacher education.

Key words: teacher education, teaching and learning of algebra, algebraic thinking, patterns

Résumé: Ce texte met l'accent sur le thème de la pensée algébrique dans les premières années de scolarisation au niveau de la formation continue des enseignants. Dans l'approche présentée, le thème des patrons apparaît comme un contexte structurant pour le développement de la pensée algébrique. Nous commençons par présenter les cadres théoriques de référence qui sous-tendent l'adoption d'une proposition didactique développée dans ce contexte, puis nous exposons une étude empirique qui a été développée , et dont nous rapportons ici la partie centrée sur les pratiques de salle de classe d'un enseignant du premier cycle en formation , afin de pouvoir confirmer l'efficacité de la proposition pour l'enseignement et le développement de la pensée algébrique des élèves. Les résultats permettent de conclure que la professeure a intériorisé et projeté dans sa pratique les aspects essentiels qui ont conduit au développement de la pensée algébrique chez les élèves. Le texte se termine par quelques conclusions et implications pour la formation des professeurs.

Mots-clés: formation de professeurs, enseignement et apprentissage de l'algèbre, pensée algébrique, patrons

INTRODUÇÃO

O tema do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade tem ultimamente recebido grande interesse e visibilidade uma vez que é referido em documentos curriculares nacionais e internacionais (e.g. ME, 2007; NCTM, 2000). A sua introdução no Programa de Matemática do Ensino Básico [PMEB] (ME, 2007) gerou uma dinâmica significativa em programas de formação de professores, quer inicial quer contínua, já que este era um tema tradicionalmente trabalhado de modo muito formal e apenas a nível do 3º ciclo do ensino básico, e era necessário sensibilizar e preparar os professores para os desafios inerentes.

A conjugação do Projeto *Matemática e Padrões no Ensino Básico: Perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores* (Padrões)[1] e do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do Ensino Básico[2] [PFCM], que vigoraram em simultâneo, assim

[1] Projeto financiado pela FCT com a referência PTDC/CED/69287/2006
[2] Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do primeiro ciclo do ensino básico, de iniciativa ministerial, que decorreu entre os anos de 2005 e 2011

como o novo PMEB, foi o contexto para a realização de um estudo de investigação (Pimentel, 2010) de que se relatam alguns aspetos e resultados ligados ao pensamento algébrico no âmbito da formação contínua de professores.

Iremos discutir a importância dos padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesta sequência, iniciamos com uma fundamentação teórica com foco na formação contínua de professores, em particular ao nível da álgebra, e nos padrões no ensino da matemática. Neste último tema, apresentamos uma proposta didática, por nós desenvolvida, com a finalidade de servir de suporte à abordagem de tarefas com padrões como via para o pensamento algébrico. Passamos de seguida à apresentação e análise de segmentos de prática de sala de aula de uma professora do primeiro ciclo, em formação contínua, ao longo do seu processo formativo. Esta prática, apoiada pela proposta didática referida, centra-se em tarefas matematicamente ricas e desafiantes de descoberta de padrões, colocando-se em evidência a capacidade manifestada pela professora em explorá-las de modo eficaz, designadamente ao nível do questionamento, de modo a promover nos alunos um pensamento matemático mais geral do que centrado em casos particulares, proporcionando assim a entrada no mundo da álgebra.

Assim, o objetivo fundamental deste texto não é a descrição do estudo realizado por Pimentel (2010) – este serve apenas de suporte à discussão. O que se pretende é a análise sobre o modo como uma proposta didática, delineada, desenvolvida e refinada numa investigação extensiva conduzida por uma equipa de investigadores no âmbito do Projeto Padrões, é interpretada por uma professora em formação, e como serve realmente de suporte às suas práticas de ensino e conduz efetivamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

FORMAÇÃO DE PROFESSORES E DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Ao longo do tempo foram surgindo várias visões do papel do professor: o professor como artista, o professor como transmissor de conhecimentos, o professor como funcionário. Atualmente, a visão que prevalece é a do professor como profissional de ensino (Garcia, 1999). Sowder (2007) afirma de modo significativo que os professores importam. Segundo esta autora, são inúmeros os investigadores, a nível internacional, que detetam uma estreita relação entre, por um lado, o conhecimento e a formação dos professores e, por outro, o sucesso das reformas e a melhoria das aprendizagens. O professor como profissional de ensino traduz uma perspetiva que envolve a aprendizagem ao longo da vida, não duma forma individualista mas de cooperação e responsabilidade partilhada, e ainda a reflexão crítica e a investigação da prática profissional. O desenvolvimento profissional é um meio que permite ao professor aprender por períodos alargados de tempo, superando a perspetiva tradicionalista da união de dois momentos disjuntos: a formação inicial e depois, mais tarde, reciclagens ou aperfeiçoamentos. Há, assim, um crescente reconhecimento de que, por um lado, a formação de professores é prioritária e, por outro, deve obedecer a esta visão abrangente.

No caso particular da matemática enquanto disciplina estruturante do raciocínio dos alunos, considerava-se tradicionalmente que para ensinar bastava saber matemática. Com a introdução, no nosso país, pelos anos setenta do séc. XX, de ramos educacionais, foi-se acrescentando ao saber puramente matemático um saber da história e da epistemologia da matemática, e conhecimentos ditos de pedagogia. Mas esta justaposição de saberes não imbricados não tinha qualquer influência nas escolhas profissionais e nas atividades de sala de aula. Mais tarde começou a prevalecer a ideia de que a formação é um processo muito mais complexo do que simplesmente desenvolver o conhecimento matemático dos professores, já que é importante não só o que se aprende mas o modo como se aprende (Cooney & Krainer, 1996). Na mesma linha, Fosnot e Dolk (2001) defendem que os professores tenham experiências que os envolvam na ação, reflexão e conversação no contexto do ensino e da aprendizagem. Se os professores modelarem, eles próprios, situações matematicamente, resolverem problemas, estabelecerem relações e comunicarem as suas ideias aos colegas, as suas crenças sobre a matemática e o seu ensino começarão a mudar. E se é certo que as práticas tradicionais dos professores têm de mudar, de modo a se coadunarem com as novas exigências da formação dos jovens num mundo em mudança permanente, é de realçar que, mais do que treinar professores para a implementação de novas práticas, é necessário levar os professores a verem-se a si próprios como aprendizes, descobrindo práticas de sala de aula que respondam às necessidades dos alunos e avaliando e adaptando continuamente essas práticas. De modo consistente com esta ideia, Ponte e Chapman (2008), numa extensa revisão de literatura sobre formação inicial, apontam a importância das abordagens exploratórias pela oportunidade de discutir, argumentar, conjeturar, testar e validar resultados. Realçam também a necessidade de os professores fazerem matemática com significado, bem como de refletirem, comunicarem e discutirem as suas ideias matemáticas com os colegas e formadores.

O Programa de Formação Contínua em Matemática

O PFCM tinha como princípios fundamentais a valorização do desenvolvimento profissional do professor; a valorização de uma formação matemática de qualidade para o professor; a valorização do desenvolvimento curricular em matemática; o reconhecimento das práticas letivas dos professores como ponto de partida da formação; a consideração das necessidades concretas dos professores relativamente às suas práticas curriculares em matemática; a valorização do trabalho colaborativo entre diferentes atores; e a valorização de dinâmicas curriculares contínuas centradas na matemática. Este Programa era operacionalizado em cada distrito com certa autonomia, sob a coordenação de uma Instituição de Ensino Superior. A avaliação incluía a elaboração de um portefólio onde os professores em formação deviam descrever pormenorizadamente algumas experiências de ensino mais significativas, incluindo reações e trabalho realizado pelos seus alunos. A interpretação a nível distrital baseou-se desde início em documentos curriculares oficiais e recomendações nacionais e internacionais sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, bem como em necessidades de formação identificadas por auscultação dos formandos. As autoras deste artigo estiveram presentes na coordenação e formação durante todo o funcionamento do programa. Iremos, nesta descrição, centrar-nos nos aspetos do programa ligados ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a nível de um determinado distrito.

Desde o ano de 2006 que se abordou nas sessões de formação o tema dos padrões, como resultado do envolvimento de alguns membros da equipa no Projeto Padrões. A partir de 2007, deu-se particular atenção a conteúdos inexistentes ou de pouco realce no programa de 1990 em vigor, e que surgiram valorizados pelo PMEB (ME, 2007). Neste sentido, foi destacado o tema do pensamento algébrico, dando-se importância fundamental ao reconhecimento de padrões em sequências e consequente generalização e ao trabalho com as operações e respetivas propriedades. Deste modo, foram sendo definidas algumas linhas de força resultantes também da informação e impressões recolhidas pelos formadores no terreno, visando colmatar deficiências ou reforçar determinadas práticas. Uma dessas linhas de força foi designada por *Os padrões como via para o pensamento algébrico*. No entendimento do PMEB, o percurso de aprendizagem com a consideração da álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos, facilitará aprendizagens posteriores da álgebra. Para além destas razões, a investigação ligada ao Projeto Padrões fez ressaltar a importância do tema quer para aprendizagens futuras quer para o aprofundamento no presente de conceitos matemáticos, quer ainda para o desenvolvimento de capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio e comunicação, precisamente por permitir uma grande variedade de conexões com todos os temas da matemática.

A equipa de formação considerou assim fundamental o contacto dos professores em formação com este tema e uma boa variedade de tarefas a ele ligadas, já que não tinham contacto com as ideias algébricas ou, pelo menos, não tinham consciência de que, orientando adequadamente determinado tipo de trabalho habitualmente realizado, poderiam estar a desenvolver nos alunos o pensamento algébrico. Uma das preocupações da equipa era colocar os formandos num papel idêntico ao que se esperava que os seus alunos tivessem, alertando-os para o modo de atender à diversidade de respostas que poderiam surgir e para como deveria lidar com as situações em grande grupo.

O pensamento algébrico na formação de professores

Apresenta-se em seguida um programa de formação contínua de professores especificamente virado para o desenvolvimento do pensamento algébrico, por ser o tema matemático em realce neste texto. Kaput e Blanton (2001) e Blanton e Kaput (2003), reconhecendo como problemática a abordagem tardia da álgebra nos currículos, propõem o desenvolvimento do raciocínio algébrico de forma a aprofundar a compreensão dos alunos. Para atingir este objetivo, desenvolveram um programa de formação de professores cuja estratégia central é a de algebrização da experiência matemática dos professores, que se enraíza na atenção dada pelo professor a processos de os alunos generalizarem o seu pensamento matemático e de exprimirem e justificarem as suas generalizações. Este programa possui três dimensões:

(a) Construção de oportunidades de raciocínio algébrico, tais como generalização e formalização progressiva a partir de materiais de ensino adequados, incluindo a algebrização de problemas aritméticos conhecidos de uma-resposta-numérica em oportunidades de construir padrões, conjeturar, generalizar e justificar factos e relações matemáticas;
(b) A descoberta e apoio do pensamento algébrico dos alunos pelo desenvolvimento nos professores de "olhos e ouvidos algébricos" de modo que possam identificar oportunidades de generalização e sua expressão sistemática (incluindo expressão escrita) e explorá-las quando ocorrem;
(c) A criação de uma cultura de sala de aula e práticas de encorajamento de processos de generalização e formalização no contexto de conjeturas e argumentação intencional, de modo que ocorram frequentemente oportunidades de raciocínio algébrico e sejam exploradas quando ocorrerem.

O primeiro passo traduz-se no uso de problemas matematicamente desafiadores, que os professores poderão modificar para uso nas suas aulas. Estes problemas devem possuir características especiais como conter ideias matemáticas importantes, permitir abordagens a diversos níveis, gerar debates ricos do ponto de vista matemático, envolver raciocínio e cálculo.

Para uma melhor concretização das ações do professor nesse domínio e de acordo com os mesmos autores (Blanton & Kaput, 2005), recorre-se a um estudo de caso de uma professora do 3.º ano de escolaridade - June – que frequenta um programa de formação contínua centrado no pensamento algébrico, em que se caracterizam práticas de sala de aula que promovem o raciocínio algébrico. A categorização a seguir apresentada na Tabela 1 é uma adaptação da elaborada por estes autores e envolve o pensamento algébrico nas formas mais ligadas a este nível de ensino: como aritmética generalizada, como pensamento funcional e outros aspetos envolvendo generalização e justificação. É aqui apresentada pois foi usada para caracterizar o desenvolvimento de formas de pensamento algébrico dos professores envolvidos no estudo adiante descrito.

Na primeira aceção, a aritmética é usada como um domínio para expressar e formalizar generalizações. Na segunda, a exploração e a generalização de padrões numéricos e geométricos permitem a descrição de relações funcionais. O terceiro ponto envolve outros processos de generalização e justificação mais complexos, não especificados anteriormente, que podem indiciar que o pensamento algébrico é já um hábito mental nos alunos.

Tabela 1: Categorização das formas de pensamento algébrico (Adaptada de Blanton & Kaput, 2005)

	Categorias de pensamento algébrico	
Aritmética generalizada	Pensamento funcional	Outros processos de generalização e justificação
A: Exploração de propriedades e relações entre números inteiros	E: Simbolização de quantidades e operação com expressões simbólicas	I: Uso de generalizações para a resolução de tarefas algébricas
B: Exploração de propriedades das operações sobre números inteiros	F: Descoberta de relações funcionais	J: Justificação, prova e teste de conjeturas
C: Tratamento algébrico do número	G: Predição de situações desconhecidas usando dados conhecidos – conjetura	K: Generalização de um processo matemático
D: Resolução de expressões em que falta um número	H: Identificação e descrição de padrões numéricos e geométricos	

Explicitam-se de seguida possibilidades de ocorrência de cada uma das categorias apresentadas na Tabela 1.

Categoria A – Os alunos exploram várias propriedades de números ou relações entre números. Por exemplo, generalizam sobre somas e produtos de pares e ímpares, generalizam sobre a diferença entre um número e ele próprio, decompõem números em parcelas e

examinam a estrutura dessas parcelas, generalizam sobre propriedades ligadas ao valor posicional.
Categoria B – Os alunos exploram a estrutura das operações. Na tabela dos cem, a própria representação codifica múltiplos modos de pensar acerca de possíveis operações sobre um número. Por exemplo, a partir do 75 e para subtrair 10, os alunos podem subir diretamente uma linha ou podem mover-se para a esquerda por unidades simples e subtrair 1 ao número por dez vezes consecutivas; quando verificam que a sequência de movimentos $\downarrow \rightarrow$ é equivalente a $\rightarrow \downarrow$ apercebem-se da propriedade comutativa.
Categoria C – Os alunos tratam o número de uma forma algébrica, ou seja, como representante, o que requer uma atenção à estrutura mais do que ao cálculo entre números específicos. Por exemplo, usando números suficientemente grandes de modo a estabelecer a paridade da soma sem a calcular.
Categoria D – Os alunos resolvem equações com uma ou múltiplas incógnitas.
Categoria E – Os alunos usam símbolos para modelar problemas ou para operar sobre expressões simbólicas. Por exemplo, quando usam códigos secretos e genericamente quando abstraem, de certo modo, do número para o símbolo.
Categoria F – Os alunos exploram correspondências entre quantidades ou relações funcionais e descobrem uma regra que descreve a relação entre as quantidades que variam.
Categoria G – Os alunos fazem conjeturas sobre o que poderá acontecer numa situação desconhecida, com base no que sabem da análise de dados conhecidos em relações funcionais. Por exemplo, no problema dos apertos de mão (que envolve a descoberta do número total de apertos de mão que são dados quando num grupo de pessoas todos se cumprimentam dois a dois desse modo) escrevem uma expressão numérica que dá o número de apertos de mão que se dariam num grupo de 12 pessoas baseados no conhecimento do que se passa com 6, 7 e 8 pessoas.
Categoria H – Os alunos identificam padrões em sequências numéricas ou figurativas ou em expressões numéricas.
Categoria I – Os alunos usam generalizações já realizadas para construir outras generalizações, num nível mais sofisticado de pensamento algébrico. Por exemplo, para determinar a paridade da soma de três números ímpares, os alunos baseiam-se na generalização feita para a soma de dois números ímpares.
Categoria J – Envolve processos essenciais para uma cultura que permite a emergência do pensamento algébrico mas não são específicos deste. Os alunos explicam o seu pensamento oral e publicamente, facultando um contexto de envolvimento e debate com os pares em que as conjeturas podem ser aceites ou refutadas, justificando as suas perspetivas a um nível de sofisticação mais elevado. Por exemplo, os alunos discutem se zero é par ou impar ou testam e justificam os componentes de uma relação funcional estabelecida.
Categoria K – Os alunos constroem um conceito que resulta na generalização de um processo ou fórmula matemática. A construção é semelhante à de uma relação funcional mas aqui as generalizações visam conceitos nitidamente matemáticos. Por exemplo, a partir do conceito de área generalizam a fórmula da área de um retângulo.

Pode também falar-se, de acordo com Blanton e Kaput (2005), de ferramentas que apoiam o pensamento algébrico, embora não sejam específicas deste, que podem dividir-se em duas categorias: objetos e processos. Dentro dos objetos podem listar-se tabelas, gráficos, diagramas e retas numéricas. No âmbito dos processos, consideram-se registar, recolher, representar e organizar dados. Os autores concluem, do estudo realizado, que a professora

June, que não se considerava uma "pessoa matemática", foi capaz de integrar o raciocínio algébrico na sua prática, quer em situações planeadas quer espontâneas, o que deu origem a mudanças positivas na capacidade de pensamento algébrico dos alunos.

ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Muitas dificuldades nas aprendizagens matemáticas dos alunos devem-se, por um lado, às conceções e atitudes dos professores que influenciam as suas ações na sala de aula e as suas interações com os alunos e entre alunos, e, por outro, às fragilidades no conhecimento matemático e didático desses professores e/ou à falta de compreensão desse conhecimento. A atuação do professor em sala de aula, que carateriza a sua prática, depende de vários fatores mas grandemente das tarefas que propõe e da exploração que promove.

O PMEB (ME, 2007) dá um grande realce às tarefas propostas pelo professor, que devem ser utilizadas num ensino de natureza exploratória. Neste contexto, as tarefas, desenvolvidas de modo autónomo pelos alunos, devem ser objeto de discussão coletiva e confronto de resultados com sínteses conducentes à institucionalização do conhecimento. No caso presente, as tarefas incidem sobre o pensamento algébrico, pelo que se fará de seguida uma pequena súmula sobre a importância das tarefas e a sua integração no tema do pensamento algébrico.

As tarefas e a sua exploração

Peressin e Knuth (2000) identificam três processos a que os professores devem recorrer para alimentar uma cultura de sala de aula, em que se promova um ensino mais conceptual, de cariz exploratório e de inquirição matemática: (1) colocar tarefas matematicamente ricas; (2) promover a discussão dos alunos sobre as tarefas e as suas (re)soluções; e (3) refletir sobre as tarefas e as discussões de modo a maximizar a atividade matemática e a consequente compreensão dos alunos.

Embora as discussões ofereçam oportunidades importantes para os alunos, constituem também desafios para o professor, uma vez que este deve determinar a forma de organizar a discussão, construída a partir de um conjunto diversificado de respostas. O professor deve decidir quais os aspetos da tarefa a destacar, como organizar o trabalho dos alunos, como apoiá-los, sem eliminar o desafio contido na tarefa, ou seja, deve organizar as questões a colocar aos alunos com diferentes níveis de conhecimento de modo a constituir um desafio para todos, e sobretudo decidir como orientar as discussões em sala de aula para que seja evidenciada e compreendida a matemática subjacente em cada tarefa (Vale, 2009).

Atualmente, a tendência generalizada em educação matemática para uma aprendizagem eficaz requer que os alunos se envolvam ativamente em tarefas significativas e diversificadas, atendendo ao impacto que estas têm na sua aprendizagem (e.g. Doyle, 1988; Stein & Smith, 1998). Deste modo, a seleção e construção de tarefas é um aspeto crucial do trabalho do professor. Stein, Smith, Henningsen e Silver (2000) definem tarefas matemáticas como um conjunto de problemas ou um problema complexo cujo objetivo é concentrar a atenção dos alunos numa ideia matemática específica. Documentos curriculares como os Princípios e Normas (NCTM, 2000) classificam de úteis as tarefas que lidam com ideias matemáticas fundamentais, que constituem um desafio intelectual para os alunos e que permitem várias abordagens. Na verdade, se queremos desenvolver nos alunos capacidades de raciocinar e resolver problemas temos de lhes proporcionar tarefas de nível cognitivo elevado, ou seja, que não se limitem à aplicação de procedimentos, mas que os aliem ao estabelecimento de conexões e a oportunidades de comunicação. Segundo Stein e Smith (1998), as tarefas passam por várias fases como mediadoras da aprendizagem: o modo como surgem nos materiais curriculares, o modo como são apresentadas pelo professor e, finalmente, o modo como são realizadas pelos alunos. A Figura 1 mostra esse percurso.

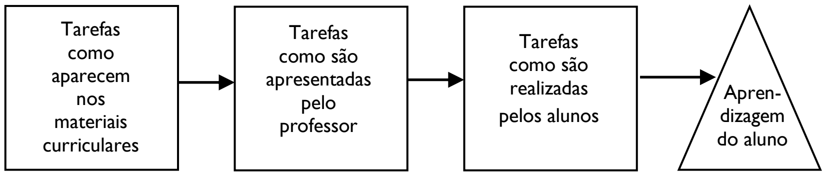


Figura 1: O quadro das tarefas matemáticas (Stein & Smith, 1998)

Na sequência do que se tem vindo a desenvolver associado à capacidade de o professor identificar tarefas matematicamente desafiantes de acordo com os objetivos pretendidos, há a questão da discussão incluída na resolução da tarefa e que envolve necessariamente questionamento. Também Smith e Stein (2011) chamam a atenção para esta questão através daquilo que designam por orquestração das discussões, pois defendem que as discussões sobre tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas são essenciais para obter uma melhor compreensão da matemática. Estas discussões dão oportunidade aos alunos de exporem e partilharem as suas ideias e de, com os seus pares e professor, clarificarem as suas dúvidas, reforçarem as suas ideias recorrendo à argumentação e de contactarem com resoluções alternativas. Deste modo, as autoras sugerem um modelo de cinco práticas que o professor deve seguir de modo a orientar uma boa discussão dentro da sala de aula: 1) antecipar - perante a tarefa a implementar na sala de aula, considerar possíveis respostas dos alunos; 2) monitorizar - acompanhar os alunos no desenvolvimento da tarefa; 3) selecionar - escolher os alunos para partilharem as suas ideias matemáticas acerca da tarefa explorada, de acordo com os objetivos pretendidos; 4) sequenciar - identificar a ordem pela qual os alunos devem apresentar as suas resoluções; e 5) estabelecer conexões - interligar as diferentes respostas dos alunos e relacioná-las com ideias matemáticas chave.

Ensino e aprendizagem da álgebra

Tradicionalmente, associava-se o estudo da álgebra ao uso formal do simbolismo algébrico. No entanto, nos últimos anos têm surgido, com especial relevo, recomendações curriculares para a introdução de formas de pensamento algébrico a partir dos primeiros anos (NCTM, 1989, 2000; ME, 2007). Analisa-se então este conceito emergente nos últimos anos. Kieran (2004) define o pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade como o desenvolvimento de modos de pensar que não são exclusivos da álgebra tais como, entre outros, analisar relações entre quantidades, descobrir a estrutura, generalizar, resolver problemas, modelar, predizer, justificar e provar, e para os quais o simbolismo da álgebra pode ser, ou não, usado como ferramenta. A autora considera que os estudantes que estão habituados a trabalhar num contexto aritmético não veem os aspetos relacionais entre as operações, tendendo a centrar-se nos cálculos, recomendando os seguintes ajustamentos no ensino para que a transição da aritmética para a álgebra seja bem sucedida: (1) o foco nas relações e não meramente no cálculo de respostas numéricas; (2) o realce nas operações e nas suas inversas e na ideia relacionada de fazer e desfazer; (3) o foco na representação e resolução simultânea de problemas em vez de apenas na resolução; (4) a utilização de números e letras em vez de apenas números; e (5) a reformulação do significado do sinal de igual, que normalmente é encarado como um separador entre o problema e a solução, ou seja, um indicador para efetuar as operações constantes do lado esquerdo. Em consonância com esta autora, Cai e Moyer (2008) definem o pensamento algébrico nos primeiros anos como "uma extensão da aritmética e da fluência de cálculo típicas dos primeiros anos de escolaridade à consideração mais profunda da estrutura matemática subjacente" (p.170).

Diversos autores identificam como um alicerce fundamental da álgebra a aritmética generalizada. Mason (1996) mantém que a álgebra como aritmética generalizada é produzida pela expressão da estrutura da aritmética, dando como exemplo a expressão por uma criança da propriedade comutativa da adição. Kaput e Blanton (2001) defendem que a álgebra como generalização e formalização de padrões, especialmente como aritmética generalizada, remete para duas subcategorias muito próximas: (a) a generalização de operações aritméticas e suas propriedades (por exemplo, propriedades do zero, comutatividade, relações inversas, etc.); e (b) a realização de generalizações sobre propriedades numéricas ou relações especiais (por exemplo, a soma de dois ímpares é par; descobrir regularidades na tabela dos cem; características da multiplicação por uma potência de dez). Para além de fornecer uma base de sustentação a estudos posteriores, defendem que esta introdução de ideias algébricas nos níveis elementares, designada por algebrização da aritmética, tem também como finalidades acrescentar maior coerência e profundidade à matemática elementar, que tende a centrar-se em procedimentos de aritmética; integrar duas áreas, a aritmética e a álgebra, que têm vindo a ser estudadas separadamente de forma inadequada; e democratizar o acesso a ideias poderosas da matemática. Também Usiskin (1999) realça os padrões generalizados como um dos aspetos fundamentais da introdução da álgebra nos primeiros anos, entendendo por isto a descrição genérica de relações numéricas por vezes úteis no cálculo mental e também de propriedades numéricas. Nesta ordem de ideias, Schliemann, Carraher e Brizuela (2007) apresentam como alternativa uma visão da aritmética como parte da álgebra, designadamente a que lida com sistemas de numeração, a reta numérica, funções simples, etc. A Figura 2 clarifica a nova interpretação da aritmética como parte da álgebra:

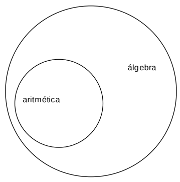


Figura 2: Caráter algébrico da aritmética (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007)

Num estudo conduzido no âmbito da formação contínua de professores do ensino básico em álgebra, Jacobs, Franke, Carpenter, Levi e Battey (2007) defendem que as tarefas apresentadas aos professores devem envolver pensamento algébrico, como forma, não só de prover um fundamento para o estudo subsequente da álgebra, como também de aprofundar a compreensão da aritmética básica, e concluem que o envolvimento dos professores em discussões acerca do raciocínio algébrico pode ser uma motivação para uma mudança fundamental no ensino, não só da álgebra, mas da matemática em geral.

Infere-se assim que a introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos pode ser, para além de outros aspetos importantes, um bom veículo para a utilização de tarefas que exijam o envolvimento com conceitos e estruturas matemáticas e estimulem os alunos a fazer conexões de modo a atribuir significado a ideias matemáticas relevantes. Defendemos, no ponto seguinte, uma abordagem ao pensamento algébrico através dos padrões.

PADRÕES E PENSAMENTO ALGÉBRICO

O pensamento algébrico centra-se em processos de descoberta de invariantes e na oportunidade de, sobre eles, fazer conjeturas e generalizações. Tem assim uma concretização natural em tarefas usualmente designadas de "descoberta de padrões". Estas tarefas são extremamente ricas, no sentido de que mobilizam processos matemáticos fundamentais, são desafiantes e possibilitam múltiplas representações.

No trabalho de investigação que temos desenvolvido ao longo de vários anos sobre padrões, não só em contextos geométricos - onde o termo "padrão" tem um significado preciso, ligado às transformações geométricas - mas também em contextos numéricos, foi-se tornando clara a identificação do significado de padrão com o de regularidade. Quando observamos um arranjo de qualquer natureza, temos um padrão ou regularidade se for possível detetar uma relação a que corresponde uma lei ou regra claramente definida. No entanto, essa regra pode não ser única, dependendo do contexto e da interpretação que é dada ao arranjo por cada sujeito, ou de vários modos de ver o arranjo pelo mesmo sujeito. Da reflexão efetuada resultou uma proposta de definição de padrão ou regularidade como "uma relação discernível, apreendida de modo pessoal, num arranjo de qualquer natureza, através de um processo mental que pode ser partilhado, e que corresponde a uma estrutura traduzível por uma lei matemática" (Pimentel & Vale, 2012, p. 33). É esta estrutura subjacente ao padrão que permite fazer generalizações, e, mais forte do que isso, a análise dessa estrutura pode permitir explicar as razões da generalização efetuada, chegando à justificação da sua validade em todos os casos. Mas, situando-nos no campo do ensino e aprendizagem, como ajudar os alunos a analisar o padrão de modo a detetar a relação que corresponde a uma estrutura?

A importância dos padrões figurativos

A importância do visual na aprendizagem da matemática é defendida por vários autores (e.g. Dreyfus, 1991, Frobisher, Frobisher, Orton & Orton, 2007). Também é subscrita por Polya (1988), ao considerar "fazer um desenho" como uma das estratégias de resolução de problemas. Esta importância vem do facto de que a visualização não está relacionada somente com a mera ilustração mas também é reconhecida como uma componente do raciocínio (profundamente envolvida com o concetual e não só com o percetual), da resolução de problemas e mesmo da prova. Os estudantes sem esta capacidade visual terão grande dificuldade em ter sucesso na aprendizagem da matemática. Frobisher et al. (2007) usam o termo "visualização" para significar o procedimento mental que permite a alguém mover-se de um objeto físico visível, ou de uma sua representação visual, para a sua representação mental. Há autores (e.g. Yerushalmy, Shternberg & Gilead, 1999; Steele, 2008) que defendem que a visualização é um veículo para a resolução de problemas em álgebra. No caminho para a álgebra, descrita como uma expressão da generalidade, a primeira fase pela qual o aluno passa é sempre "ver" e isto significa compreender mentalmente um padrão ou uma relação (Orton, 1999). "Ver" reveste-se de extrema importância pois o professor tem de estar atento a esta questão para poder orientar o aluno e proporcionar-lhe situações alternativas. Como tradicionalmente os professores têm mais tendência para explorar os padrões numericamente do que visualmente, mesmo que a sua apresentação seja figurativa, vamos explanar este aspeto.

Na realidade, se pretendemos fomentar o pensamento algébrico dos estudantes, temos de lhes propor tarefas para analisar, reconhecer e generalizar padrões em contextos figurativos, devendo os alunos passar por muitas experiências que recorram a esse tipo de pensamento visual. Por exemplo, Rivera e Becker (2005) subscrevem que é necessário contrariar a tendência de uma abordagem numérica dos padrões, realçando a compreensão figurativa da generalização, por terem detetado, através de vários estudos conduzidos, que os alunos que generalizam apoiados na visualização têm uma compreensão com mais significado das estratégias numéricas que constroem; em contrapartida, os que fazem a generalização numérica são muitas vezes incapazes de ver o padrão e de justificar as suas fórmulas. Os autores defendem que é mais produtiva uma visão dinâmica oscilando entre as duas abordagens, que lhes permite desenvolver maior flexibilidade e fluência de representação e notação. Já outros autores (Orton, 1999; Stacey, 1989) referiam, também, que os padrões podem sugerir uma abordagem numérica, visual ou mista, destacando esta última como a matematicamente mais útil. Stylianides e Silver (2010) consideram que uma abordagem de padrões de tipo figurativo, reduzindo-os à exploração numérica, é extremamente limitadora por não permitir que o aluno se aperceba da estrutura matemática subjacente ao padrão de modo a derivar uma regra conclusiva, uma vez que não relacionam a generalização que fazem com o processo através do qual cada elemento da sequência é construído a partir do anterior.

Também defendemos que, pelo menos para os níveis elementares, é fundamental uma abordagem muito apoiada na visualização. De facto, a regra observada no arranjo pode ter representações de diferentes tipos, mas existe necessariamente consistência entre estas representações. E pode ser mais simples para um aluno, sobretudo se não dispuser ainda de muitas ferramentas matemáticas, descobrir o padrão figurativo associado a um padrão numérico. Poderá afirmar-se que esta abordagem tem as seguintes vantagens: (1) facilita a tomada de contacto com a tarefa e a sua exploração inicial, de um modo que talvez fosse impossível num contexto puramente numérico por insuficiência de conhecimentos ou flexibilidade numérica incipiente; (2) permite um aprofundamento de conceitos matemáticos envolvidos e o estabelecimento de conexões entre temas matemáticos, ao relacionar os contextos figurativo e numérico; e (3) a descoberta da consistência entre os vários tipos de representação do padrão permite um alargamento de vistas sobre o arranjo que amplia a compreensão, e proporciona, de um modo muito mais fecundo, a generalização e a explicação.

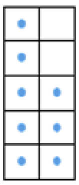
A primeira vantagem enunciada pode levar a inferir que a abordagem é empobrecedora, pois procura apenas contornar as limitações de base dos alunos. No entanto, não é assim. O passo seguinte vai permitir ao aluno descobrir inesperadas relações e propriedades numéricas, que não eram detetadas à partida, mas que adquirem um sentido com o apoio visual, não se reduzindo a meros ensaios de tentativa e erro feitos às cegas com os números e com pouco significado. E nesse sentido, o aluno vai, ao invés, enriquecer e aprofundar o seu conhecimento matemático. Poderá, então, argumentar-se que nessa ordem de ideias a representação visual do padrão serve unicamente para alunos mais novos, ou então como início de abordagem, já que depois a força e o poder dos números se sobrepõem. Mas também aqui se verifica que não é assim. É que em muitos casos a visualização explica de um modo mais eficaz, ou mesmo justifica, a generalização feita (e.g. Arcavi, 2003; Stylianides & Silver, 2010).

Todas estas considerações teóricas, e também a experiência com alunos de diferentes níveis e ao longo de vários anos, levaram à elaboração de uma proposta didática de exploração de tarefas que envolvem a descoberta de padrões, de acordo com uma sequência bem definida, que apresentaremos na secção seguinte.

A proposta didática envolvendo padrões

Com o objetivo de conduzir a uma familiarização progressiva com determinadas técnicas e estratégias úteis com vista à generalização e, nalguns casos, a sua explicação e justificação, construiu-se uma proposta didática em três fases que foi sendo desenvolvida ao longo do tempo, com base em estudos teóricos e empíricos (Vale & Pimentel, 2009): (1) Contagens visuais; (2) Sequências; e (3) Problemas. Esta proposta pode adequar-se a qualquer nível de ensino, uma vez que privilegia uma componente visual que nem sempre é aprofundada pelos professores. No entanto, está mais direcionada para os primeiros anos de escolaridade.

Na primeira fase, a capacidade de contagem visual, entendida como a apreensão da estrutura espacial da disposição de um determinado conjunto de objetos encarado globalmente, pode ter um papel de auxiliar poderoso. As contagens visuais apoiam-se no arranjo visual para a descoberta de estratégias de cálculo intuitivas e simples mas evitando as contagens de um em um. Podem surgir inicialmente em contextos numéricos muito elementares - contagens visuais básicas – em que se faz o reconhecimento de padrões para desenvolver a capacidade de ver instantaneamente (*subitizing*) como base do sentido do número. A Figura 3 ilustra uma dessas situações em que se faz uso da moldura do dez. Para além de se familiarizarem com vários padrões numéricos, os alunos também trabalham com números e operações e as suas relações.



Mais 3 que 5	5 + 3
Mais 2 que 6	6 + 2
Menos 2 que 10	10 - 2

Figura 3: Contagens visuais básicas na moldura do dez

As contagens visuais podem, também, surgir posteriormente noutros contextos mais variados, com predomínio de arranjos retangulares e situações de simetria. Este tipo de contagens é um bom ponto de partida para o reconhecimento de padrões em sequências figurativas, apoiando a sua exploração. Apresenta-se, na Figura 4, um exemplo desta situação, com o qual se pretende ilustrar a procura de diferentes modos de visualização da estrutura, a descoberta de regularidades que permitem um cálculo rápido e a sua transformação em expressões numéricas equivalentes.

Quantos peixinhos estão na figura?
Descobre diferentes modos de contagem.
Escreve as expressões numéricas respetivas.
Que concluis?

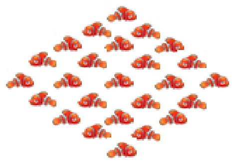


Figura 4: Contagens visuais noutros contextos

Este é um exemplo de possível expressão numérica 5x5, por analogia com um arranjo retangular. Poderá também ser feita uma leitura horizontal (vertical), obtendo-se a expressão 1+2+3+4+5+4+3+2+1.

A segunda fase da proposta didática centra-se no reconhecimento de padrões em sequências, de modo a permitir a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular, recorrendo ou não à simbologia. A procura de padrões em sequências numéricas pode ser uma boa oportunidade para introduzir ou relembrar números e relações numéricas, por exemplo, números pares e ímpares; múltiplos; potências.

Com o exemplo apresentado na Figura 5, pretende-se mostrar como a apropriação visual da regularidade, e a procura de consistência com a representação numérica, permite um grau de generalização até à descoberta do termo geral que, por simples observação da sequência numérica, não seria possível a alunos deste nível de ensino.

Considera a sequência de estrelas em L.

fig1 fig2 fig3

1. Quantas estrelas tem o 4° L?
2. Quantas estrelas são necessárias para construir a 20ª figura? Explica como pensaste. Discute com o colega do lado.
3. Explica por palavras tuas de quantas estrelas precisas para desenhar uma figura qualquer na sequência.

Figura 5: Padrões em sequências

O procedimento habitual neste tipo de tarefa é uma conversão numérica imediata e a procura de uma regularidade ou padrão nesse arranjo.

4, 6, 8, 10, 12, …

Contudo, se os alunos se limitarem a observar a sequência numérica resultante, poderão facilmente descobrir uma lei de formação por recorrência (cada termo obtém-se adicionando 2 unidades ao anterior). É o que é feito habitualmente, sendo dada a tarefa como terminada. Na verdade, faz-se uma generalização aritmética (Radford, 2008). Mas a parte mais desafiante e profunda do ponto de vista matemático nem sequer foi ainda aflorada.

A questão 2 - quantas estrelas são necessárias para construir a 20ª figura da sequência - poderá ser abordada usando a "força bruta", ou seja, desenhando as vinte primeiras figuras sequencialmente. No entanto, a mesma questão para a milésima figura já seria bastante mais improvável de abordar com êxito. A descoberta do termo geral, ou seja, a generalização algébrica (Radford, 2008), que permita dizer quantas estrelinhas tem uma figura de qualquer ordem da sequência, é deixada, tradicionalmente, em termos de matemática escolar, para o ensino secundário, nível no qual são abordadas as progressões aritméticas e geométricas.

O que queremos aqui colocar em evidência é que é possível a alunos muito novos essa descoberta. Da observação de cada uma das figuras resulta a descoberta do invariante na sua estrutura - a apreensão das figuras como sendo constituídas, por exemplo, por uma coluna de estrelas e uma linha sobrante. A procura da consistência entre esta representação figurativa e uma representação numérica dará origem às expressões 3+1, 4+2, 5+3, etc.. Esta descoberta permite conjeturar que o termo de ordem 20 será dado pela expressão 22+20, ou ainda que um termo de qualquer ordem n será dado pela expressão (n+2)+n.

Esta procura da consistência entre representações deve ser feita de modo organizado, usando, por exemplo, uma tabela, como se mostra na Figura 6. Este registo não deve traduzir o número total de estrelas por contagem, mas sim expressar o que o aluno "vê".

número da figura	número de estrelas
1	3+1
2	4+2
3	5+3
4	6+4
…	…
20	22+20
n	(n+2)+n

Figura 6: Tabela de registo de um modo de ver

É neste ponto que se faz notar a utilidade da representação visual para atribuir significado à expressão numérica obtida ou à equivalência entre diferentes expressões numéricas, e é nesse sentido que se afirma que esta abordagem amplia e aprofunda a compreensão matemática dos alunos. É de realçar também que, nas sequências de crescimento, quando os alunos procuram uma lei de formação, relacionando a posição de um termo da sequência com o seu valor, estão a trabalhar o conceito de função, desenvolvendo assim o raciocínio funcional.

Na terceira fase da proposta didática apresentam-se e resolvem-se problemas, na perspetiva de que o reconhecimento de padrões é uma estratégia poderosa na sua resolução. Nestas tarefas são os alunos que têm de construir as suas próprias sequências de modo a descobrir o padrão que os leve à generalização, permitindo chegar à solução. É claro que muitas das questões anteriores já constituem problemas. Aqui trata-se de problemas de palavras, com um enunciado contextualizado, como o seguinte:

> *O João deu uma boa notícia a dois amigos: amanhã vai haver cinema na escola! Nos cinco minutos seguintes cada um dos amigos contou-a apenas a outros dois. Cada aluno que ouviu a novidade contou-a a dois colegas no prazo de cinco minutos e, depois disso, não a contou a mais ninguém. Às nove e meia quantos meninos sabiam a novidade?*

Este problema é ilustrativo da força da estratégia de descoberta de um padrão, pois verifica-se que, embora possam ser utilizadas outras estratégias, como a elaboração de um esquema, a descoberta do padrão na evolução dos números é incomparavelmente mais eficaz.

Nesta proposta didática há, como se verifica, a preocupação de uma evolução na atribuição de significado a contextos numéricos através do visual, com o objetivo de facilitar e fazer a ponte para o desenvolvimento de processos de generalização e, consequentemente, de pensamento algébrico.

O PENSAMENTO ALGÉBRICO E A PRÁTICA DE SALA DE AULA

Os princípios de formação de professores atrás enunciados têm tido uma possibilidade natural de concretização em processos de formação, quer inicial quer contínua. Procuraremos em seguida ilustrar o modo como a proposta didática atrás apresentada foi podendo servir de recurso estruturante quer para a aprendizagem de professores em formação, quer para a dos respetivos alunos, no âmbito do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Apresenta-se assim o modo como o conteúdo das sessões de formação, que incluiu a proposta didática conducente ao desenvolvimento do pensamento algébrico, foi interpretado e operacionalizado junto dos seus alunos por uma das professoras acompanhadas no estudo de Pimentel (2010). Este foi um estudo longitudinal, de natureza qualitativa, com *design* de estudo de caso, no qual foram acompanhados quatro professores ao longo do seu processo de formação contínua, durante dois anos. As evidências apresentadas são resultado da análise dos dados recolhidos através de observação, entrevista e análise documental.

Sílvia tinha quarenta e dois anos no início da formação. Esteve colocada, durante os dois anos de formação, como titular de uma turma numa pequena escola rural com doze alunos do 1º e 2º ano e, no ano seguinte, da mesma turma com alunos do 2º e 3º ano. Esta professora não tinha à partida qualquer conhecimento sequer sobre o significado de pensamento algébrico nos primeiros anos. Nas sessões de formação, Sílvia procurava tirar partido dos materiais apresentados, quebrar o isolamento, não cair na rotina, trocar experiências com colegas. Empenhou-se na formação com vivacidade e entusiasmo, investindo no seu conhecimento matemático e didático, justificando a importância do que aprendia pela sua aplicabilidade direta e valorizando o aspeto formativo deste programa pela colaboração e apoio da formadora no momento oportuno. E a sua postura refletiu-se na prática, como pode constatar-se pelos episódios seguintes.

Episódio 1. Explorando contagens visuais como primeiro passo

No primeiro ano de formação fez uma primeira abordagem com a turma aos padrões de repetição e de crescimento. Utilizou figuras geométricas em plástico coladas no quadro com *post it* para definir as sequências em que seria necessário descobrir o padrão. Começou com padrões de repetição do tipo ABAB, ABCABC, etc.. Os alunos fizeram a identificação da estrutura dos padrões utilizando outras representações, designadamente sons, números e gestos. Nos padrões de crescimento trabalhou a tarefa Bolas em V (Figura 7), com a exploração de vários aspetos numéricos relacionados.

Figura 7: Padrão das bolas em V

Nesta exploração, bem conduzida, em que a professora soube colocar questões importantes, foram produzidas duas categorias de generalização. Por um lado, usando um tipo de pensamento recursivo, e baseando-se na visualização, os alunos concluíram bem que se passava de um termo para o seguinte adicionando sempre duas unidades. Por outro lado, analisando os valores numéricos dos diferentes termos, concluíram que estes eram sempre representados por um número ímpar, pelo que não seria possível um V com 48 bolinhas, nem com qualquer outro número par; esta argumentação teve também suporte visual, como pode observar-se na transcrição:

Prof. Então vamos lá voltar atrás. Para trás. A pergunta que eu fiz é… Chiu! A pergunta que eu fiz é: Será possível fazermos um V com quarenta e oito bolinhas?
A[vários] [Em coro] Não.
Prof. Não. Porquê?
A[vários] Porque é par.
Prof. Um de cada vez. Aluna 1! Diz lá.
Aluna 1: Porque fica com um lado mais e o outro menos.
Prof. Porque iria ficar com um lado maior do que o outro. Porque o número quarenta e oito é um número?...
A[vários, em coro] Par.

No entanto, não foi produzida qualquer generalização algébrica.

Noutra aula, já no segundo ano de formação, foi proposta uma tarefa que apelava às contagens visuais. Sílvia entregou a cada par de alunos uma imagem das uvas como a apresentada na Figura 8, dentro de uma "mica", uma caneta de quadro branco e um lenço de papel e explicou que a tarefa consistia em indicarem quantos cachos de uvas viam na figura, sem os contarem um a um, ou seja, procurando um modo expedito de contagem. Deviam também explicar como tinham contado. Depois passavam à contagem das uvas.

Figura 8: Contagem visual dos cachos e das uvas

Surgiram muitos modos de contar as uvas. Apresenta-se o mais elegante, ilustrado na Figura 9 com o trabalho dos seus autores:

Aluna 1: Ó professora! Arranjámos outra maneira. 5 vezes o 10.
[…]
Prof. Senta. Olhem para aqui para este grupo arranjou uma estratégia muito interessante. O que é que ele fez? O que é que eles fizeram? Ó Aluna 1! Anda cá. Explica tu, que vocês é que fizeram. Aluno 5! Senta. Ou expliquem vocês os dois. Vocês foi que fizeram. Vá lá. Olhem! Estejam atentos que eu vou-vos perguntar depois. O que é que fizestes? Diz lá.
Aluno 3: Nós fizemos grupinhos de 5.
Prof. Tu fizeste grupinhos de quê?
Aluna 1: 10.
Prof. 10 uvas. Eles fizeram… Olhem! Agruparam as uvas. 10 baguinhos, um conjunto. Foi isso? 10 baguinhos, outro conjunto. 10 baguinhos, outro. Mais 10 bagos e mais 10 bagos. O que é que eles fizeram aqui? Quantos conjuntos?
A[vários] 5.
Prof. 5 conjuntos. Cada conjunto tem?...
A[vários] 10.
Prof. Então 5 vezes 10?...
A[vários] 50.
Prof. … 50 bagos. Ora representa ali a vossa hipótese então. A hipótese 4. Está? Vamos lá representar ali graficamente.
[O Aluno 3 regista no quadro: 5x10=50.]

Figura 9: Agrupamento dos cachos em dezenas

Nesta tarefa os alunos fizeram contagens visuais. Tanto a contagem dos cachos como a das uvas possibilitou a descoberta de vários processos de associação, que foram traduzidos quer em linguagem corrente quer em linguagem matemática. Os alunos comunicaram com a professora, e entre eles, e puderam confirmar a equivalência de várias expressões numéricas. Também, por sugestão da professora, aplicaram a propriedade associativa da adição para fazer mais rapidamente os cálculos de várias parcelas 7 e 3. Provavelmente, foi este procedimento que inspirou a última maneira de contar as uvas, por associação de um cacho preto com um branco e formação de cinco grupos de 10=7+3. A professora utilizou, ainda, outros exemplos de tarefas do mesmo tipo.

Episódio 2: A caminho da generalização algébrica

No segundo ano de formação, os formandos deveriam produzir trabalho autónomo, por imperativo do PFCM. Ao nível distrital foi decidido que este constasse de uma planificação que depois seria aplicada na respetiva turma. O trabalho realizado devia posteriormente ser apresentado publicamente numa sessão de formação. Aos professores acompanhados na investigação foi sugerido que ancorassem o seu trabalho autónomo no âmbito do pensamento algébrico.

O trabalho autónomo de Sílvia foi feito com outras duas colegas, isto é, escolheram um tema comum, o das áreas e perímetros, que planificaram em conjunto. No entanto, depois cada uma adaptou às suas turmas e respetivos níveis de escolaridade. Sílvia introduziu tarefas de descoberta de padrões em sequências de crescimento, para desenvolvimento do pensamento algébrico, ligadas às áreas e perímetros. O trabalho desenvolveu-se em duas aulas.

Depois de uma exploração preliminar a respeito do conceito de área, passou-se então à descoberta do padrão no cálculo dos perímetros duma sequência de quadrados de lado 1, 2, 3, etc., como a representada na Figura 10.

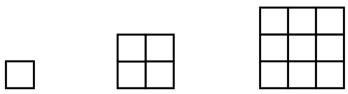


Figura 10: Perímetro duma sequência de quadrados

Começaram por indicar o perímetro das três figuras desenhadas, tendo registado o seu valor abaixo da figura respetiva. Em seguida desenharam a 4.ª e a 5.ª figura e indicaram o seu perímetro. Depois era necessário dar o salto para a 10.ª. Os alunos fizeram a generalização:

> Aluna 1: [Esboçando com o dedo os 4 lados do quadrado] Tem 10 assim, 10 assim, 10 assim e 10 assim, 4 vezes o 10 dá 40.

Passando depois para a 56.ª figura, outra aluna explicou que esta figura tem 56 unidades de lado, logo o perímetro vai ser 4x56.

Por fim a professora quis a generalização para uma figura qualquer:

> Prof. Olhem uma coisa! Então vamos transformar naquela que "eu não sei". O 56 vai passar a ser agora o número que eu não sei.
> Aluno 1: Quando eu resolver esta conta pomos um igual e um N, não sei!
> Prof. O N de não sei. Exatamente. Nós utilizamos o N de não sei. Então, se eu quiser calcular o perímetro de uma figura qualquer que seja que eu nem sei qual é, como é que eu posso?
> [...]
> Aluna 2: É 4 vezes… o que eu não sei.
> Aluna 3: Professora! O N de número […] que dá de número e de não sei.

[…]

Prof. Se eu te disser agora assim. Calcula o perímetro da figura número 1525. Não precisas de ir para o boneco. Dizes como é que fazemos.

A[vários] 4 vezes 1525.

A primeira aula acabou por aqui. No entanto, Sílvia descreve no portefólio que no dia seguinte os alunos quiseram retomar a sequência e descobrir o padrão para a área:

> Na manhã seguinte os alunos estavam tão entusiasmados com as descobertas do dia anterior que quiseram, logo pela manhã, continuar a atividade que ficara incompleta no dia anterior, analisando desta vez a área das figuras. Talvez um pouco embalados pela atividade da aula anterior, facilmente descobriram que se multiplicassem o número de quadrados da vertical pelo número de quadrados da horizontal daria a área ocupada por cada uma das figuras e assim poderiam calcular a área de qualquer figura da sequência se para tal lhes fosse dado o número da figura, ou seja, as áreas evoluem na sequência 1, 4, 9, 16, 25, …, que se podem obter como 1x1, 2x2, 3x3, … A seguir (Fig. 11) apresentam-se alguns trabalhos produzidos pelos alunos que vêm confirmar o raciocínio atrás explicado.

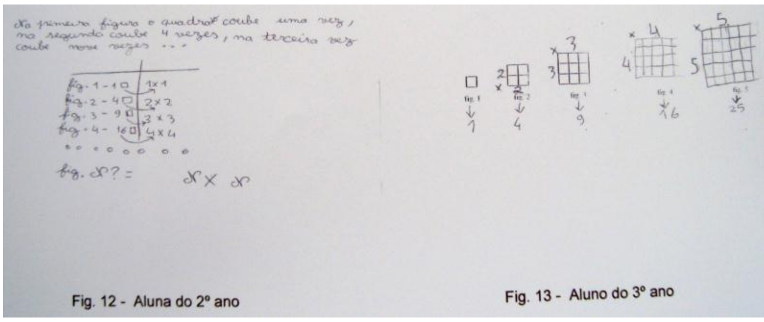


Figura 11: Trabalho de alunos apresentado no portefólio de Sílvia

> Concluíram então que para calcularmos a área de uma figura qualquer desta sequência, bastaria multiplicar o número da figura pretendida por si próprio e surge então a fórmula NxN em que N representa o número da figura pretendida. Com esta conclusão a que quase todos os alunos chegaram (dois alunos do 2.º ano tiveram algumas dificuldades em acompanhar o raciocínio dos restantes colegas da turma) deu-se por concluída a tarefa proposta para esta sessão. (Portefólio)

Na segunda aula dedicada a este tema, Sílvia começou por apresentar a sequência de retângulos apresentada na Figura 12 com o objetivo da descoberta de regularidades na medida do perímetro e da área:

Figura 12: Perímetro e área duma sequência de retângulos

Havia um espaço na ficha para os alunos explicarem por escrito como fariam para calcular o perímetro de uma figura qualquer. Alguns alunos começaram a contar as unidades no perímetro da segunda figura, mas houve logo uma aluna que disse que podia ser de outra maneira, e um terceiro que arranjou logo outra:

Aluna 1: Contei estes aqui [apontando para o lado maior do retângulo] e depois conta-se…
Prof. Espera aí!
Aluna 1: Faz-se 2 vezes este [Apontando para o lado maior do retângulo] e depois 2 vezes este [Apontando para o lado menor do retângulo] e somam.
[…]
Aluno 2: Também podia ser duas vezes dois mais um mais um.

Descobrem também outras formas de expressão:

Aluno 4: Ó professora! 2 vezes o 2 é 4 [Apontando para a primeira figura].
Prof. Sim.
Aluno 4: 2 vezes o 3 é 6 [Apontando para a segunda figura]. 2 vezes…
[…]
Aluna 5: Para seguir a tabuada tinha que ser isso.
Aluna 5: A figura 6 é 2 vezes 7.
Inv. E a figura 20?
Aluna 5: 20? 2 vezes 21.

Quando a professora pediu a esta aluna para explicar o seu raciocínio sobre a figura, ela explicou perfeitamente desenhando os dois L ilustrados na figura 13, que correspondiam numericamente a 3+3 ou 2x3 para a 2.ª figura:

Figura 13: Justificação de uma aluna

De volta ao trabalho com toda a turma, a professora questionou qual seria o perímetro da figura 30 e depois de uma figura qualquer. Conseguiram efetuar perfeitamente a generalização. Foram questionados vários alunos. Por último uma aluna escreveu no quadro a expressão simbólica 2xN+2. Testaram a fórmula para valores já calculados e depois usaram-na para calcular mais alguns, como por exemplo o perímetro da figura 71.

A segunda tarefa procurava a área das mesmas figuras e foi de tal modo fácil que alguns escreveram a resposta antes de a professora explicar o que quer que fosse. Logo vários alunos verbalizaram a generalização feita, dizendo "é o número da figura!". Quando a professora perguntou qual seria a área da figura 100, houve um aluno que afirmou orgulhosamente que não precisava de fazer o desenho, tendo-se apercebido já da importância da generalização: Professora! Eu não desenho!

Desenvolveram ainda outra tarefa semelhante – pedindo perímetro e área - mas partindo de outra sequência de retângulos.

É de realçar que o apoio visual teve nestas tarefas um papel crucial. A tarefa das contagens visuais das uvas descrita e outras que se seguiram puderam desenvolver nos alunos a capacidade de visualização, e as figuras agora trabalhadas, todas em arranjo retangular, prestavam-se facilmente a um reconhecimento visual. A professora procurou sempre que as justificações dadas pelos alunos se apoiassem precisamente nas figuras presentes, e esta circunstância foi claramente um dos fatores do sucesso na realização das tarefas.

Embora estas tarefas tenham permitido também consolidar e distinguir as noções de perímetro e área, trabalhadas em paralelo, a geometria transformou-se em números, correspondentes às medidas da área e do perímetro, e deu lugar ao pensamento algébrico. Nas notas de campo da investigadora pode ler-se:

> Para a professora e para estes alunos (na sua maioria) já não chegam as definições por recorrência, são muito fracas por não permitirem a generalização distante. É necessário ir mais além e descobrir uma regra mais sólida que permita a obtenção de um termo qualquer, primeiro da figura 30 e depois mesmo da figura de ordem N, "a que eu não sei". Esta designação funcionou na perfeição e é enunciada e encarada com toda a naturalidade por aqueles pirralhos de 2.º/3.º anos de uma aldeia remota dum concelho atrasado.

Também Sílvia reflete sobre o seu trabalho ao longo do segundo ano no domínio do pensamento algébrico e sobre as suas expectativas em relação aos alunos, como pode ver-se por um excerto de entrevista:

> E achei que a álgebra foi excecional. Gostei imenso. Aliás, todas as atividades que fiz este ano foram dentro da álgebra. Então estas duas últimas eu adorei, porque muito sinceramente eu tinha cá no fundo uma esperança de que eles iam conseguir lá chegar, mas chegar à generalização. Porque eu tinha dúvidas. Eu tinha um bocado de dúvidas.

Sílvia desenvolveu ainda problemas de descoberta de padrão, designadamente o do Jogo Justo. A professora pediu que escolhessem quem era par e quem era ímpar e o jogo da soma começou em cada par de alunos. Lançavam os dois dados e somavam os pontos. Se o resultado fosse par, pontuava o aluno "par", caso contrário pontuava o aluno "ímpar". Depois fizeram um jogo semelhante para o produto. Estes jogos foram uma iniciação às probabilidades, proporcionaram oportunidades de cálculo mental, mas também desenvolveram o pensamento algébrico em processos de generalização, a propósito das operações de adição e multiplicação entre pares e ímpares.

Sílvia evidencia desenvolvimento do pensamento algébrico no seu trabalho autónomo, à luz do percurso de algebrização da experiência matemática dos alunos recomendado por Blanton e Kaput (2003), e concretizado pela categorização apresentada na Tabela 1. Este trabalho teve como pano de fundo o estabelecimento e a distinção entre os conceitos de perímetro e área mas evoluiu para a descoberta de padrões em sequências figurativas, precisamente no cálculo da medida do perímetro e da área de quadrados e em seguida de dois tipos diferentes de retângulos. Assim, o pensamento algébrico foi visto como permeando o currículo de matemática mais do que um mero tópico a ensinar. Os alunos, apoiando-se e recorrendo a conceitos acabados de introduzir, os de perímetro e área, tiveram oportunidade, ao trabalhá-los em simultâneo, de efetuar mentalmente a sua distinção de uma forma marcante, e, em paralelo, o ponto de partida geométrico tornou-se um trabalho numérico por consideração das medidas respetivas. O desempenho dos alunos nas tarefas foi extraordinário. Por análise das sequências figurativas apresentadas, para as quais deveriam indicar a área ou o perímetro, alguns, construindo algumas figuras para além das três primeiras que foram dadas, passaram a uma simples contagem um a um das unidades de perímetro ou de área. Este procedimento é muito restritivo e os alunos aperceberam-se disso: era necessário arranjar um processo que lhes permitisse indicar o número sem contar as unidades e mesmo sem fazer os desenhos. Houve assim em alguns casos uma evolução para a generalização aritmética através de um pensamento de tipo recursivo – os alunos descobriam, por exemplo, que cada quadrado tinha mais quatro unidades de perímetro que o anterior. Contudo, outros alunos fizeram uma passagem direta para a generalização algébrica (Radford, 2008), relacionando a medida do perímetro ou da área da figura com a posição que essa figura ocupava na sequência. A tarefa de descobrir uma regra ou fórmula que relacione a posição da figura na sequência com a medida do seu perímetro ou da sua área começa assim a ser vista como extensão natural do seu trabalho com números, permitindo desenvolver a predisposição para a modelação algébrica (Rivera, 2006). Nesta fase, os alunos começaram por descrever por palavras a generalização obtida e passaram de seguida a utilizar o simbolismo algébrico, usando a letra N como variável para representar o número de uma figura qualquer *que eu não sei* (N de número e N de não sei). Esta imagem, criada pela professora, funcionou eficazmente, tendo os alunos aderido a ela de forma extremamente natural e com total compreensão.

O bom desempenho alcançado nestas tarefas deveu-se também a um trabalho prévio de contagens visuais, em que os alunos desenvolveram a sua capacidade de reconhecimento visual; as sequências de figuras trabalhadas, em arranjo retangular, prestavam-se a essa capacidade de ver (Vale & Pimentel, 2009). A professora procurou sempre que os alunos justificassem as suas conclusões precisamente com base no que viam, e essa circunstância facilitou o processo de generalização. A Tabela 2 apresenta as ocorrências de formas de pensamento algébrico observadas.

Tabela 2: Ocorrências de formas de pensamento algébrico na aula de trabalho autónomo de Sílvia

Categoria	
A	Procura de uma relação recursiva entre os diversos termos das sequências exploradas.
C	Os números das figuras foram tratados como representantes, requerendo dos alunos atenção à estrutura mais do que aos cálculos.
E	Abstração do número para o símbolo N para representar *um número que eu não sei*.
F	Descoberta de relações entre o número da figura e a medida do perímetro ou da área respetiva.
G	Formulação de conjeturas sobre a medida do perímetro ou da área dos termos das sequências.
H	Identificação e descrição dos padrões de crescimento detetados nas sequências.
J	Explicitação e verbalização das descobertas que vão sendo progressivamente refinadas. Discussão e debate com a professora e entre colegas.
K	Descoberta de processos de cálculo da área e do perímetro de quadrados e retângulos.

As sequências figurativas apresentadas constituíram uma ferramenta inicial que potenciou o pensamento algébrico. As formas de registo foram sempre preocupação da professora. Foram utilizadas diferentes formas de representação – desenhos, tabelas, linguagem corrente, linguagem simbólica – e feita a transição entre essas diferentes formas.

CONCLUSÕES

O objetivo deste texto era discutir as potencialidades da descoberta de padrões no pensamento algébrico e as suas interligações com a formação de professores. Quer a investigação realizada no âmbito dos Padrões quer o trabalho desenvolvido no contexto do

PFCM foram projetos que se desenrolaram ao longo de três anos. Da interligação destes podemos retirar duas ideias-chave: por um lado, é possível desenvolver o pensamento algébrico de alunos dos primeiros anos através de uma sequência didática, com padrões, que os leve à construção de ideias poderosas em matemática, como é o caso da generalização; por outro lado, uma formação contínua de professores adequada e contextualizada, que tenha em conta as suas necessidades, é indispensável para o desenvolvimento destas capacidades nos alunos. O estudo empírico no qual nos baseamos, centrado em Sílvia, procura sustentar estas afirmações.

Sílvia, como ela própria afirmou, efetuou uma grande mudança nas suas práticas, que passaram a incluir tarefas de tipo predominantemente exploratório, baseadas nas sessões de formação, com elevado grau de desafio. Para esta professora, o que se revelou realmente fundamental no sentido da mudança foi a formação contínua numa modalidade como esta de imersão na prática durante um período longo, e a verificação de reações positivas por parte dos alunos, quer no que se refere à motivação quer nas aprendizagens realizadas. Na passagem para a sala de aula não houve empobrecimento do poder matemático das tarefas propostas na formação, contrariamente às preocupações realçadas por Stein e Smith (1998). Tal pode ter ficado a dever-se ao formato das sessões conjuntas, em que os professores deveriam explorar as tarefas apresentadas do mesmo modo que se esperava que viessem a trabalhá-las com os seus alunos, utilizando, por exemplo, os mesmos materiais manipuláveis, aprofundando as questões matemáticas mais elementares envolvidas e discutindo formas de organização do trabalho e questionamento a realizar (Fosnot & Dolk, 2001). Quanto aos alunos de Sílvia, houve um aumento notório do gosto pela matemática provocado essencialmente pela utilização de tarefas menos rotineiras e mais desafiadoras, e que se traduziu por um "olhar matemático" que facilita o estabelecimento de relações e conjeturas. A proposta didática implícita na sequência de tarefas apresentadas por esta professora revelou-se eficaz, pois permitiu que os alunos fossem desenvolvendo paulatinamente a sua capacidade de visualização, tendo esta sido fundamental para a compreensão figurativa da generalização (Rivera e Becker, 2005), que lhes permitiu, em última análise, produzir expressões algébricas com significado e compreensão. O trabalho autónomo proporcionou o desenvolvimento profissional da professora pela necessidade de conduzir uma experiência curricular com uma certa autonomia e também de tornar essa experiência visível pela necessidade de apresentação pública do seu trabalho. Estes aspetos foram reforçados pela sua participação no estudo. Pensa-se poder concluir que houve uma forte evolução do conhecimento matemático e didático desta professora, em particular ao nível do pensamento algébrico, mas no sentido em que este se relaciona com ideias matemáticas fortes e estruturantes, constituindo, neste nível de ensino, um tema transversal do currículo. Para tal também contribuiu o envolvimento com colegas em discussões acerca do pensamento algébrico. Estes resultados são consistentes com Jacobs et al. (2007).

Os dados obtidos ao longo destes projetos, dos quais Sílvia é um exemplo, mostram que a proposta didática desenvolvida teve, por um lado, o mérito de familiarizar com a álgebra, tema que a maioria não dominava, os professores participantes na formação; por outro lado, os professores reconheceram potencialidades na proposta devido à reação positiva dos seus alunos em termos de motivação bem como de apropriação de ideias matemáticas fortes. Pode também inferir-se dos dados que um modelo de formação contínua nos moldes em que foi desenvolvido pode melhorar significativamente as práticas dos professores e, consequentemente, as aprendizagens dos alunos.

Referências

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241.

Blanton, M. & Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' "Algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics, 10(2)*, 70-77.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(5),* 412-446.

Cai, J. & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: some insights from internacional comparative studies. Em C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp. 169-180). Reston: NCTM.

Cooney, T. & Krainer, K. (1996). Inservice teacher mathematics education: the importance of listening. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 1155-1185). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23,* 167- 180.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) vol. 1* (pp. 33-48). Assis: PME.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth: Heinemann.

Frobisher, L., Frobisher, A., Orton, A. & Orton, J. (2007). *Learning to teach shape and space.* Cheltenham, UK: Nelson Thornes.

Garcia, C.M. (1999). *Formação de professores. Para uma mudança educativa.* Porto: Porto Editora.

Jacobs, V, Franke, M., Carpenter, T., Levi, L. & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38 (3),* 258-288.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming Task Structure. *Proceedings of the ICMI-Algebra Conference*. Melbourne, Australia, Dec.2001. Acedido Outubro, 1, 2007 em http://www.scps.k12.fl.us/scctm/TextFiles/Educational%20Articles/Algebrafying%20elementary%20mathematicsPart%20I.pdf

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica [ME-DEB] (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

Ministério da Educação - DGIDC (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico.* Acedido Janeiro 7, 2008, em http://www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgidc.min-edu.pt/

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar. Lisboa, APM/IIE, 1991].

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Princípios* e *Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa, APM, 2007].

Orton, A. (1999) (Ed.). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.

Peressin, D. & Knuth, E. (2000). The role of tasks in developing communities of mathematical inquiry. *Teaching Children Mathematics, 6*(6), 391-397.

Pimentel, T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações com um programa de formação contínua?* (Tese de Doutoramento, Universidade do Minho).

Pimentel, T. & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante, 21*(2), 29 – 50.

Polya, G. (1988). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd Edition,* pp. 223-261). New York: Taylor and Francis.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40,* 83–96.

Rivera, F. & Becker, J. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics teaching in the middle school, Vol.11, No.4*, 198-203.

Rivera, F. (2006). Changing the face of Arithmetic: Teaching Children Algebra. *Teaching Children Mathematics, 12(6),* 306-311.

Schliemann, A., Carraher, D. & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic. From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Smith, M., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol.1 (pp. 157-224). Reston: NCTM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20(2),* 147-164.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM: International Journal in Mathematics Education, 40*, 97-110.

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268–275.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Stylianides, G. & Silver, E. (2010). Reasoning-and-proving in school mathematics: the case of pattern identification. In D. Stylianou, M. Blanton & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: a K-16 perspective* (pp. 235-249). Routledge.

Usiskin, Z. (1999). Doing algebra in grades K-4. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 – Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications.* Reston: NCTM.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. Em J. Fernandes, H. Martinho, & F. Viseu (Eds.), *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: Associação de Professores de Matemática (APM).

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). Visual pattern tasks with elementary teachers and students: a didactical experience. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), *Padrões: múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/Patterns: multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp.151-162). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Projecto Padrões.

Yerushalmy, M., Shternberg, G. & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference vol.1* (pp.197-211).