Cuadernos de Economía. Vol. 21 165-188 1993

Análisis financiero de un empréstito

Antonio Alegre Escolano
Hortènsia Fontanals Albiol
Universidad de Barcelona
Dpt. de Matemática Económica,
Financiera y Actuarial.
Diagonal, 690
08034 - Barcelona

ABSTRACT

The object of this paper is to propose a general financial analysis of the loan from several moneylender based on the framework of the repayment. We put forward a general and systematic model which enables us to include the dynamism of the financial operation, using finite difference equations. To carry out the analysis we use the number of bonds in circulation as a basic variable. The main purpose of this paper is to provide the financial meaning of the mathematical expressions which resolt from the application of finite difference equations. By means of magnitudes which present specific and functional relationships with the characteristics of the loan, we propose a scheme of study similar to the traditional analysis of the loans with only one moneylender. The parallelism between these two schemes allows us to create a model which gives us the financial meaning of the expressions used, without losing mathematical precision.

RESUMEN

En este trabajo se propone un análisis financiero, de carácter general, de las operaciones de emisión de obligaciones a partir de su estructura amortizativa. La utilización de un instrumento matemático que recoge el dinamismo de la operación, las ecuaciones en diferencias finitas, permite un estudio sistemático y general de los empréstitos. El análisis se realiza en base a la variable indicativa del número de títulos en circulación. La aportación de este artículo consiste en dotar de significado financiero las expresiones resultantes de la aplicación de las ecuaciones en diferencias. Mediante la utilización de magnitudes que presentan determinadas relaciones funcionales con las características del empréstito, se propone un esquema de estudio análogo al que tradicionalmente se utiliza en las operaciones de préstamo. El paralelismo entre ambas estructuras permite plantear un modelo, que, sin perder rigor matemático, proporciona una visión clara de la interpretación financiera de las expresiones utilizadas.

I. - INTRODUCCIÓN

Las operaciones de emisión de obligaciones constituyen una parcela de la Matemática Financiera en la que ha resultado difícil lograr la sistematización alcanzada por otros tipos de operaciones financieras. La mayoría de los autores clásicos proponen un enfoque descriptivo y particularizado de estas operaciones sin presentar un análisis de carácter general. Esta situación se justifica, en parte, por el instrumento matemático que se utiliza en su análisis, las ecuaciones en diferencias finitas.

En el estudio sistemático de los empréstitos podemos citar como pionero a Estrugo, J.A. (1943, págs. 115-122.), que publicó en los Anales del Instituto de Actuarios Españoles su trabajo "*La sucesión financiera aplicada a los préstamos y empréstitos*", donde planteó la dinámica amortizativa mediante una ecuación en diferencias lineal de primer orden, cuya solución denominaba *sucesión financiera*. Posteriormente Rodríguez, A. (1962, págs. 260-272.) y Nieto de Alba, U. (1967, págs. 69-93) sistematizaron, mediante ecuaciones en diferencias lineales de primer orden y orden superior, el análisis de la estructura amortizativa de los empréstitos[1]. En este trabajo se utilizan las ecuaciones en diferencias finitas para realizar el análisis de las operaciones de emisión de obligaciones, pero su aportación se centra en dotar de una interpretación financiera a las expresiones matemáticas representativas de las diferentes magnitudes.

En función del paralelismo formal que se puede establecer entre determinadas magnitudes de las operaciones de préstamo y los empréstitos se logra un esquema de estudio dotado de contenido financiero. Para conseguir este objetivo, resulta necesario redefinir el sistema de las magnitudes fundamentales a utilizar en la Matemática Financiera de los Empréstitos, y en esta linea introduciremos una nueva magnitud fundamental que permita el fraccionamiento del empréstito en partes alícuotas que denominaremos títulos. Así, el sistema fundamental de magnitudes incorporará, a las tradicionales Cuantía (C) y Diferimiento (T), la que denominaremos Fraccionamiento del empréstito (F) y que tomando como unidad de medida el título, indicará el número de títulos que integran el empréstito, de la misma forma que la unidad monetaria peseta, utilizada como unidad de medida de la magnitud Cuantía, permite obtener el número de pesetas correspondiente a una cierta cantidad de Cuantía. Las magnitudes derivadas de la Matemática Financiera de los Empréstitos serán de la forma

$$(X) = (C)^{a} \cdot (T)^{b} \cdot (F)^{c}$$

Siendo (a,b,c,) la dimensión de (X) en el sistema fundamental de magnitudes Cuantía, Diferimiento y Fraccionamiento con unidades respectivas, peseta, año y título.

1. Un tratamiento de los empréstitos desde esta óptica, a partir del análisis de la dinámica amortizativa, puede encontrarse también en las obras de Rodriguez, A. (1984 págs. 244 y sig.) y Gil Peláez, L. (1987 págs. 567-571.) En particular, esta exposición se centra en Alegre, A. y Fontanals, H. (1989 págs. 5-11.).

En la sección 2 se detalla la nomenclatura que se utilizará en el estudio; básicamente se sigue la propuesta por A. Rodríguez (1984, págs. 244-245). En la sección 3 se plantea la problemática que presentan los empréstitos en relación a la obtención del término amortizativo y se realiza un planteamiento de carácter general, a partir de su composición. En la sección 4 se estudian los empréstitos cuyas características funcionales dan lugar a una ecuación en diferencias lineal y de primer orden; estas operaciones son interesantes también desde el punto de vista práctico, ya que casi la totalidad de las emisiones vigentes en el mercado se incluyen dentro de este grupo. La sección 5 describe un caso particular de las operaciones de emisión estudiadas en la sección 4, los empréstitos normalizables. Finalmente en la sección 6 se recogen las conclusiones del trabajo.

II. - NOMENCLATURA

En primer lugar es preciso especificar la nomenclatura que se utiliza en el análisis de los empréstitos y que se seguirá en este trabajo. Se pueden diferenciar las magnitudes que recogen las características de la emisión, de las relacionadas con la estructura amortizativa:

Magnitudes relacionadas con las características de la emisión:

C Nominal del título, de dimensión (1,0,-1) que vendrá dado en pesetas por título.

N Número de títulos emitidos, de dimensión (0,0,1).

C Cuantía total del empréstito, igual a C•N, que evidentemente es una cuantía y su dimensión (1,0,0).

P_e Prima de emisión por título y de dimensión (1,0,-1).
- emisión a la par, $P_e = 0$
- emisión bajo la par, $P_e > 0$

P_a^r Prima de amortización por título para el período r, de dimensión (1,0,-1).
- amortización a la par, $P_a^r = 0$
- amortización sobre la par, $P_a^r > 0$

C_e Precio de emisión, igual a C-P_e, de dimensión (1,0,-1).

C_a^r Precio de amortización para el período r, igual a C+P_a^r, de dimensión (1,0,-1).

I_r Interés efectivo, por período de amortización, estipulado en la emisión, de dimensión (0,0,0). Para simplificar la notación, se designa por I el tipo de interés efectivo en lugar de I_m, donde m sería la frecuencia de amortización del empréstito dentro del año.

C•I^r Cupón por título, pagadero con igual frecuencia que la amortización de títulos, de dimensión (1,0,-1). La coincidencia entre la frecuencia en el pago de los cupones y la correspondiente a la amortización de títulos es una hipótesis simplificadora pero válida desde un punto de vista práctico ya que un elevado porcentaje de las emisiones presentan esta característica.

α_r Término amortizativo del r-ésimo período, cuantía de dimensión (1,0,0).

L_r Lotes, premios, etc., asociados al período r-ésimo, cuantía de dimensión (1,0,0).

n Número de términos amortizativos, escalar de dimensión (0,0,0).

Magnitudes relacionadas con la estructura amortizativa:

Todas ellas de dimensión (0,0,1)

σ_r Número de títulos que se amortizan en el r-ésimo período.

μ_r Número total de títulos amortizados durante los r primeros períodos.

ν_r Número de títulos en circulación después de la r-ésima amortización.

Entre las tres magnitudes que caracterizan la estructura amortizativa del empréstito, podemos destacar las siguientes relaciones:

a) Por la complementariedad entre μ_r y ν_r, tenemos:

$$\mu_r + \nu_r = N \text{ para todo } r \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

siendo $\mu_0 = 0$ ya que $\nu_0 = N$, y $\mu_n = N$ con lo que $\nu_r = 0$

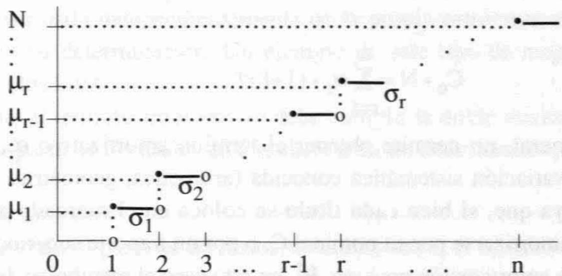
b) Por su definición podemos escribir:

$$\mu_r = \sum_{s=1}^{r} \sigma_s \text{ y } \nu_r = \sum_{s=1} \sigma_{r+s}$$

c) Las relaciones inversas a las anteriores, es decir $\sigma_r = f(\mu_r) = g(\nu_r)$ se obtienen fácilmente a partir de su definición:

$$\sigma_r = \mu_r - \mu_{r-1} = \Delta\mu_{r-1}$$

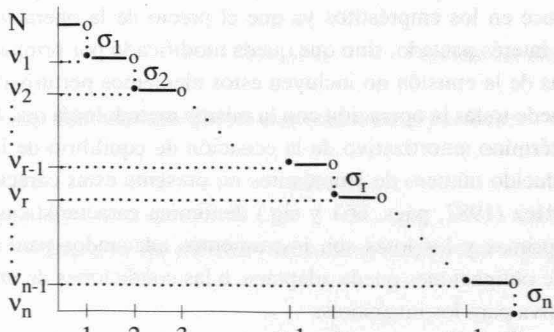
relación que queda de manifiesto a través del gráfico que refleja la evolución de la variable, μ_r:



y como $\mu_{r-1} = N-\nu_{r-1}$, tenemos también

$$\sigma_r = \Delta[N-\nu_{r-1}] = -\Delta\nu_{r-1} = \nu_{r-1} - \nu_r$$

relación que se podrá obtener del gráfico de ν_r:



III. - TERMINO AMORTIZATIVO

La principal problemática que presentan los empréstitos desde el punto de vista del análisis financiero, se centra en la imposibilidad de obtener la cuantía del término y la estructura amortizativa de la operación a partir de la ecuación de equilibrio inicial, debido a la existencia de primas, lotes y otras características de tipo comercial.

La ecuación del equilibrio financiero inicial de la operación viene dada por:

$$C_e \cdot N = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \cdot f(r,0)$$

que, si el factor financiero se concreta en el régimen del interés compuesto a tanto constante, tenemos:

$$C_e \cdot N = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \cdot (1+I')^{-r}$$

expresión que, en general, no permite obtener el término amortizativo α_r, aunque fuera constante o de variación sistemática conocida (aritmética, geométrica o según un polinomio dado) ya que, si bien cada título se coloca en el mercado al precio $C_e = C\text{-}P_e$, tiene que amortizarse por su nominal C, o por un importe superior en caso de que exista prima de amortización positiva, P_a^r, en este caso el reembolso de la obligación sería $C_a^r > C$.

Las modificaciones incorporadas por las primas de emisión y amortización desvirtuan la ecuación de equilibrio financiero de la operación restándole eficacia práctica. En este caso no se puede identificar el tipo de interés estipulado en la emisión, pagadero periodicamente mediante los tradicionales cupones, con la ley financiera implícita de la operación. Esta identificación, en la que se apoya el estudio de los préstamos, no se produce en los empréstitos ya que el precio de la operación no se refleja solamente en el interés pactado, sino que queda modificado por primas y lotes.

Si las características de la emisión no incluyen estos elementos perturbadores del equilibrio inicial, se puede tratar la operación con la misma metodología que los préstamos, deduciendo el término amortizativo de la ecuación de equilibrio de la operación. Solamente un reducido número de empréstitos no presenta estas características que el profesor Gil Peláez (1987, págs. 661 y sig.) denomina características comerciales. De hecho, las primas y los lotes son instrumentos adecuados para que una determinada emisión de obligaciones pueda adaptarse a las condiciones de un mercado dado y resulte atractiva para los inversores.

La existencia de características comerciales en los empréstitos obliga a utilizar una metodología específica, de carácter muy general y centrada en la ecuación dinámica de la estructura amortizativa de la operación. El estudio de los empréstitos queda sistematizado a través de la ecuación dinámica de cada operación. La integración de esta ecuación, sometida a las condiciones de contorno, proporciona el análisis completo del empréstito.

La ecuación dinámica se obtiene de la descomposición de los términos amortizativos en función de las magnitudes que describen la estructura amortizativa. En general el término amortizativo viene dado a través de una expresión cuantitativa que lo relaciona con dichas magnitudes, y se puede expresar:

$$\alpha_r = f(\ldots, \sigma_{r-1}, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \ldots \mu_{r-1}, \mu_r, \mu_{r+1}, \ldots, \ldots, \nu_{r-1}, \nu_r, \nu_{r+1}, \ldots, L_r)$$

Con L_r se incorpora una cuantía, magnitud de dimensión (1,0,0) que, en general, puede venir dada independientemente de la propia estructura amortizativa, pero que influye en su determinación. Un ejemplo de este tipo de magnitud pueden ser los denominados lotes.

Ya que el término amortizativo debe cumplir la doble misión de pagar intereses y amortizar parte de los títulos en circulación en un determinado período r, tenemos:

*** Pago de intereses.**

En general, el pago de intereses se realiza sobre el número de títulos vigentes en el período anterior al r-ésimo, si los intereses se pagan por vencido, o bien sobre el número de títulos en circulación en el período r-ésimo si se pagan por anticipado, y si existe pérdida del último cupón:

$I_r = C \cdot I^r \cdot \nu_{r-1}$	$r = 1,2,\ldots,n$	Cupones vencidos
$I_r = C \cdot I^{r+1} \cdot \nu_r$	$r = 0,1,2,\ldots,n-1$	Cupones anticipados
$I_r = C \cdot I^r \cdot \nu_r$	$r = 1,2,\ldots,n-1$	Pérdida del último cupón vencido

*** Reembolso de los títulos que se amortizan en el período:**

$$A_r = C_a^r \cdot \sigma_r$$

ya que $\sigma_r = -\Delta\nu_{r-1}$, el importe dedicado a la amortización se puede obtener de:

$$A_r = C_a^r \cdot (-\Delta\nu_{r-1})$$

Es importante destacar que en las anteriores expresiones correspondientes al término r-ésimo, aparece la magnitud ν_r "número de títulos en circulación en el período" referida al período r-ésimo o al anterior r-1. Sin embargo, con esta metodología es posible incorporar la variable ν relacionada con cualquiera de los períodos de la operación, en función de las condiciones de la emisión.

En general, para el análisis dinámico de una operación de financiación se recurre a la Reserva Matemática, que proporciona, en cada momento, el desequilibrio de la operación, es decir, el valor de las prestaciones realizadas por el sujeto activo, deducidas las contraprestaciones efectuadas por el sujeto pasivo.

En el caso de los empréstitos, la magnitud que puede reflejar un concepto análogo a la Reserva Matemática es ν_r, número de títulos en circulación en el período r-ésimo, indicativo del desequilibrio de la operación expresado en la magnitud títulos.

Las consideraciones anteriores nos conducen a elegir ν_r como magnitud básica, indicativa del número de títulos en circulación después del r-ésimo período amortizativo, y podemos establecer la ecuación dinámica de la estructura amortizativa a través de la función discreta ν_r, quedando:

$$\alpha_r = f_\nu (\ldots, \nu_{r-1}, \nu_r, \nu_{r+1}, \ldots, L_r)$$

aplicando la relación entre los operadores siguiente y diferencia,

$$\nu_{s+r} = E^r = [\Delta\text{-}I]^r \nu_s = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \Delta^j \nu_s$$

se obtiene:

$$\boxed{\alpha_r = g_\nu (\nu_s, \Delta \nu_s, \Delta^2 \nu_s, \ldots, L_r)}$$

siendo f_ν la correspondiente ecuación de recurrencia en ν_s indicando por s el índice mínimo en g_ν. su ecuación en diferencias asociada, que determinan la estructura amortizativa del empréstito en función de la magnitud ν_r.

La solución de la ecuación anterior para las condiciones de contorno que configuran la operación que estamos analizando, es decir, $\nu_0 = N$ ya que en el origen de la operación todos los títulos están en circulación y $\nu_n = 0$ teniendo en cuenta que cuando el empréstito se cancela los títulos se hallan amortizados en su totalidad, nos permitirán establecer la función de ν_r que define la estructura amortizativa para cada empréstito específico.

IV. - EMPRESTITOS DEFINIDOS POR UNA ECUACION DINAMICA LINEAL DE PRIMER ORDEN

Un caso particularmente interesante, dada su aplicabilidad en las operaciones que se realizan actualmente en el mercado financiero, se presenta cuando las características funcionales f_ν y g_ν dan origen a una ecuación en diferencias lineal y de primer orden. Sea:

$$\alpha_r = k_{1,r} \cdot \nu_{r-1} + k_{2,r} \cdot \nu_r + L_r$$

ecuación de recurrencia en ν_{r-1} y el siguiente ν_r, que conduce a la ecuación en diferencias lineal de primer orden:

$$\alpha_r = k_{1,r} \cdot \nu_{r-1} + k_{2,r} \cdot (\nu_{r-1} + \Delta\nu_{r-1}) + L_r$$

sin más que considerar,

$$\Delta \nu_{r-1} = \nu_r - \nu_{r-1} \rightarrow \nu_r = \nu_{r-1} + \Delta \nu_{r-1}$$

normalizando, tenemos,

$$\Delta \nu_{r-1} + \frac{k_{1,r} + k_{2,r}}{k_{2,r}} \cdot \nu_{r-1} + \frac{L_r - \alpha_r}{k_{2,r}} = 0$$

que podemos escribir como,

$$\boxed{\Delta \nu_{r-1} + \beta_r \cdot \nu_{r-1} + \gamma_r = 0} \quad (1)$$

con β_r escalares de dimensión (0,0,0) y γ_r de dimensión (0,0,1) y donde β_r y γ_r dependen de las características particulares de cada empréstito.

La solución general de la ecuación en diferencias finitas proporcionará la familia de funciones ν_{r-1} que la satisfacen. Para la definición de la función específica del tipo de operaciones que estamos analizando, deberán aplicarse las condiciones de contorno:

$$\nu_0 = N \qquad y \qquad \nu_n = 0$$

que incorporan el total de títulos emitidos N, títulos en circulación en el origen de la operación y aseguran la total amortización del empréstito.

La solución particular obtenida permitirá plantear una ecuación para determinar el valor del término amortizativo α_r o alguna de las características no cuantificadas en la emisión. Esta solución deberá ser compatible con el proceso de amortización, por lo que es preciso que:

$$\nu_{r-1} \geq \nu_r \text{ para todo } r \epsilon \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

y

$$\nu_{n-1} > \nu_n = 0$$

o su expresión equivalente en función de la magnitud σ_r que proporciona el número de títulos que se amortizan en el período r y que debe ser tal que:

$$\sigma_r \geq 0 \text{ para todo } r \epsilon \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

y

$$\sigma_n > 0$$

La estructura amortizativa del empréstito establecida por la ecuación dinámica (1), vendrá dada por la solución de la ecuación en diferencias lineal de primer orden[2].

En nuestro caso, la ecuación,

$$\Delta v_{r-1} + \beta_r \cdot v_{r-1} + \gamma_r = 0 \qquad r=1,2,\ldots,n$$

que se puede escribir, con un cambio de subíndices

$$\Delta v_r + \beta_{r+1} \cdot v_r + \gamma_{r+1} = 0 \qquad r=0,1,2,\ldots,n-1$$

tendrá como solución la familia de funciones:

2. La resolución de este tipo de ecuaciones y las soluciones que se exponen a continuación se encuentran en Alegre, A. y Biayna, A. (1987), págs. 26-36. Sea la ecuación en diferencias finitas, lineal, de primer orden y completa, del tipo:

$$\Delta y_k + P(x_k).\ y_k = Q(x_k)$$

siendo $f(x_k) = y_k$ una función discreta con $k\in \{1, 2, \ldots, n\}$ con solución, desde el punto de vista retrospectivo, dada por:

$$y_k = \prod_{s=1}^{k} [1-P(x_{s-1})] \cdot \left[\sum_{h=1}^{k} \frac{Q(x_{h-1})}{\prod_{s=1}^{h} [1-P(x_{s-1})]} + y_0 \right]$$

En el caso particular considerado, donde el dominio es finito, la solución de la ecuación en función del último valor viene dada a partir de:

$$y_n = \prod_{s=1}^{n} [1-P(x_{s-1})] \cdot \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{Q(x_{h-1})}{\prod_{s=1}^{h} [1-P(x_{s-1})]} + y_0 \right]$$

de donde:

$$y_0 = \frac{y_n}{\prod_{s=1}^{n} [1-P(x_{s-1})]} - \sum_{h=1}^{n} \frac{Q(x_{h-1})}{\prod_{s=1}^{h} [1-P(x_{s-1})]}$$

y sustituyendo en la expresión general podemos obtener la solución retrospectiva de y_k, en función de y_n:

$$y_k = \frac{y_n}{\prod_{s=k+1}^{n} [1-P(x_{s-1})]} - \sum_{h=k+1}^{n} \frac{Q(x_{h-1})}{\prod_{s=k+1}^{h} [1-P(x_{s-1})]}$$

$$\nu_r = \prod_{s=1}^{r} (1-\beta_s) \cdot \left[\sum_{h=1}^{r} \frac{-\gamma_h}{\prod_{s=1}^{h} (1-\beta_s)} + \nu_0 \right]$$

que nos facilita la expresión de la función discreta "número de títulos en circulación en el momento r", ν_r.

En este punto estamos interesados en la obtención de una ecuación de equilibrio general para la operación que permita obtener el término amortizativo y determinar expresiones operativas para el cálculo de los títulos en circulación en un período r-ésimo.

Considerando la totalidad de la operación:

$$\nu_n = \prod_{s=1}^{n} (1-\beta_s) \cdot \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{-\gamma_h}{\prod_{s=1}^{h} (1-\beta_s)} + \nu_0 \right]$$

y aplicando las condiciones de contorno, $\nu_0 = N$ y $\nu_n = 0$, tenemos:

$$0 = \prod_{s=1}^{n} (1-\beta_s) \cdot \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{-\gamma_h}{\prod_{s=1}^{h} (1-\beta_s)} + N \right]$$

de donde:

$$N = \sum_{h=1}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=1}^{h} (1-\beta_s)^{-1} \tag{2}$$

expresión que puede interpretarse como el valor actual V_0, de la magnitud γ_h bajo régimen de interés compuesto a tanto variable $-\beta_s$ Gráficamente:

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_n (1-\beta_1)^{-1} \dots (1-\beta_n)^{-1} & \longleftarrow & \gamma_n \\
\dots & & \dots \\
\gamma_2 (1-\beta_1)^{-1} \cdot (1-\beta_2)^{-1} & \longleftarrow & \gamma_2 \\
\gamma_1 (1-\beta_1)^{-1} & \longleftarrow & \gamma_1 \\
N & & \\
0 \quad\quad 1 & \quad 2 \quad \dots & n
\end{array}$$

y para simplificar la notación, escribiremos:

$$\boxed{N = V_0 \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}_{-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_n}} \tag{3}$$

o bien, más sintéticamente:

$$N = V_0 \{\gamma_r\}_{-\beta_r} \qquad \text{con } r=1,2,\dots n$$

La expresión anterior proporciona la **ecuación de equilibrio**, en el origen de la operación, de la estructura amortizativa del empréstito en función de los coeficientes γ_r, magnitudes de dimensión (0,0,1) y β_r, escalares de dimensión (0,0,0).

La expresión (3) es equivalente a la de una operación de préstamo, con una diferencia básica, las magnitudes de las variables. En una operación de préstamo las variables están expresadas en **unidades monetarias**, de dimensión (1,0,0), mientras que en un empréstito la magnitud es **número de títulos**, de dimensión (0,0,1). La operación de préstamo queda descrita por el equilibrio:

$$C = V_0 \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}_{I_1, I_2, \dots, I_n} = V_0 \{\alpha_r\}_{I_r} \qquad \text{con } r=1,2,\dots n \tag{4}$$

siendo I_r el tipo efectivo de interés asociado al período r.

La equivalencia entre las expresiones (3) y (4) nos permite proponer un análisis de las emisiones de obligaciones centrado en la variable ν_r "número de títulos en circulación en el período r" y en el término independiente de la ecuación en diferencias γ_r, análisis paralelo al que se utiliza en las operaciones de préstamo, en las que el estudio se realiza a partir de la deuda pendiente o reserva matemática R_r y el término amortizativo del préstamo, α_r.

A continuación se obtienen expresiones operativas para el cálculo ν_r, "número de títulos en circulación en un período r-ésimo". Al igual que en el cálculo de la reserva matemática es posible obtener dos expresiones paralelas según se analice la operación desde el punto de vista retrospectivo o prospectivo.

Retrospectivamente se considera la operación realizada desde su origen hasta el momento r. El punto de vista prospectivo considera la parte de la operación que se realizará en el futuro a partir de un punto temporal. Gráficamente podemos simbolizar la operación mediante un diagrama temporal:

$$\begin{array}{ccccccccccc} N & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_r & \gamma_{r+1} & \gamma_{r+2} & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & r & r+1 & r+2 & \dots & n-1 & n \end{array}$$

$\longleftarrow$ Método retrospectivo $\longrightarrow$ | $\longleftarrow$ Método prospectivo $\longrightarrow$

Las expresiones analíticas resultantes de la aplicación de ambos métodos se obtienen a partir de la solución general,

$$\nu_r = \prod_{s=1}^{r}(1-\beta_s) \cdot \left[\sum_{h=1}^{r} \frac{-\gamma_h}{\prod_{s=1}^{h}(1-\beta_s)} + \nu_0 \right]$$

sin más que considerar $V_0 = N$, tenemos la expresión de ν_r por el método retrospectivo:

$$\nu_r = \prod_{s=1}^{r}(1-\beta_s) \cdot \left[\sum_{h=1}^{r} \frac{-\gamma_h}{\prod_{s=1}^{h}(1-\beta_s)} + N \right]$$

de donde:

$$\nu_r = N \cdot \prod_{s=1}^{r}(1-\beta_s) - \sum_{h=1}^{r} \frac{-\gamma_h}{\prod_{s=1}^{h}(1-\beta_s)} \cdot \prod_{s=1}^{r}(1-\beta_s)$$

y dado que $h < r$:

$$\frac{\prod_{s=1}^{r}(1-\beta_s)}{\prod_{s=1}^{h}(1-\beta_s)} = \prod_{s=h+1}^{r}(1-\beta_s)$$

por lo que finalmente, la expresión retrospectiva del número de títulos en circulación para un período r es:

$$\nu_r = N \cdot \prod_{s=1}^{r}(1-\beta_s) - \sum_{h=1}^{r} \gamma_h \cdot \prod_{s=h+1}^{r}(1-\beta_s) \tag{5}$$

que puede interpretarse como la diferencia entre el equivalente de N en el período r a través de un factor de interés compuesto a tanto variable y el valor en r de los coeficientes γ_r bajo el mismo régimen; simbólicamente escribiremos:

$$\boxed{\nu_r = N \cdot f_{-\beta_s}(0, r) - V_r \ \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}_{-\beta_2, \ldots, -\beta_r}} \qquad \text{con } s=1, \ldots\ r \tag{6}$$

La relación anterior (6) se puede expresar gráficamente, utilizando el diagrama temporal:

$$\left.\begin{array}{r} \gamma_r \\ \vdots \\ \gamma_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \nu_r = N \cdot f_{-\beta_s}(0, r) - V_r\{\gamma_s\}_{-\beta_s}$$

$$\begin{array}{cccccc} \vert\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- & \vert\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- & \vert\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- & \vert\!\!-\!\!-\!\!-\ldots\ldots & \!\!-\!\!-\vert & \quad \text{con } s=1, \ldots r \\ 0 & 1 & 2 & r & n & \end{array}$$

El método prospectivo para el cálculo de ν_r se obtiene de la ecuación de equilibrio global de la operación, considerando, únicamente, los períodos posteriores a r.

Anteriormente hemos planteado simbólicamente la ecuación de equilibrio global de la operación (3)

$$N = V_0\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}_{-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_n}$$

analíticamente equivalente a (2):

$$N = \nu_0 = \sum_{h=1}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=1}^{h} (1-\beta_s)^{-1}$$

expresión que incorpora todos los períodos. Estamos interesados únicamente en los períodos posteriores a r, por lo que sustituímos los extremos del sumatorio y del productorio por h=r+1 y s=r+1, con lo que obtenemos la expresión por el método de cálculo prospectivo para la magnitud ν_r:

$$\nu_r = \sum_{h=r+1}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=r+1}^{h} (1-\beta_s)^{-1} \qquad (7)$$

que, de acuerdo con la formulación de (3) y (6) podemos expresar como valor actual, en el período r, de los coeficientes γ_r pendientes, con los tipos de interés $-\beta_s$, correspondientes a cada período,

$$\boxed{\nu_r = V_r\{\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n\}_{-\beta_{r+1}, \ldots, -\beta_n}} \qquad (8)$$

Gráficamente, la relación expresada en (7) y (8) se puede esquematizar en el diagrama temporal:

$$\nu_r = V_r\,\{\gamma_s\}\,-\beta_s \qquad \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\gamma_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\gamma_{r+2} \\ \ldots\ldots\gamma_{r+1} \end{cases}$$

$$\underset{0}{|}\!\!-\!\!-\!\!-\;\ldots\;-\!\!-\!\!-\!\!\underset{r}{|}\!\!-\!\!\underset{r+1}{|}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{r+2}{|}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{n}{|} \qquad \text{con } s= r+1, \ldots\, n$$

Podemos concluir este planteamiento general diciendo que la ecuación de equilibrio (3) permite obtener los distintos términos amortizativos y que de la variable ν_r, dada alternativamente por (6) ó (8), se desprende la estructura amortizativa del empréstito.

Este enfoque engloba el análisis de todas aquellas emisiones de obligaciones cuya ecuación dinámica se puede expresar por una ecuación en diferencias finitas, lineal y de primer orden, permitiendo introducir las características particulares de cada operación en los coeficientes β_r y γ_r. Después de esta simplificación, el análisis se reduce al utilizado en las operaciones de préstamo, sin más que sustituir el término amortizativo α_r, expresado en unidades monetarias, por la variable γ_r, expresada en número de títulos.

En base a las relaciones entre las magnitudes fundamentales que definen la estructura amortizativa del empréstito, podemos obtener las variables μ_r "número total de títulos amortizados hasta el período r-ésimo" y σ_r "número de títulos que se amortizan en el período r-ésimo".

Evidentemente el número total de títulos emitidos se distribuye entre los títulos en circulación y los amortizados:

$$\nu_r + \mu_r = N$$

por lo que:

$$\mu_r = N - \nu_r$$

y retrospectivamente, de la (5):

$$\mu_r = N - \left[N \cdot \prod_{s=1}^{r} (1-\beta_s) - \sum_{h=1}^{r} \gamma_h \cdot \prod_{s=h+1}^{r} (1-\beta_s) \right] \tag{9}$$

relación que también se puede expresar, a partir de (6), como

$$\mu_r = N - N \cdot f_{-\beta_s}(0, r) + V_r\{\gamma_1, \dots \gamma_r\}_{-\beta_2 \dots, -\beta_r} =$$

$$= V_r\{\gamma_1, \dots \gamma_r\}_{-\beta_2 \dots, -\beta_r} - N \cdot \left[f_{-\beta_s}(0, r) - 1\right]$$

y como $\left[f_{-\beta_s}(0, r) - 1\right]$ es el tanto efectivo de interés, podemos escribir:

$$\boxed{\mu_r = V_r\{\gamma_1, \dots \gamma_r\}_{-\beta_2 \dots, -\beta_r} - N \cdot I_{-\beta_s}(0, r)} \tag{10}$$

En un préstamo, la expresión anterior indicaría que el capital amortizado hasta r es igual al valor en r de los términos amortizativos pagados, menos los intereses del capital devengados y cuyo pago se ha aplazado hasta r.

Y a partir de la expresión (7), prospectivamente:

$$\mu_r = N - \sum_{h=r+1}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=r+1}^{h} (1-\beta_s)^{-1} \tag{11}$$

y utilizando la expresión (8), queda:

$$\boxed{\mu_r = N - V_r\{\gamma_{r+1}, \dots \gamma_n\}_{-\beta_{r+1} \dots, -\beta_n}} \tag{12}$$

cuya interpretación, en un préstamo, indicaría que el total amortizado es igual al nominal del préstamo menos el resto pendiente calculado por el método prospectivo, como el valor de los términos pendientes.

Finalmente, la variable σ_r "número de títulos que se amortizan en el período r-ésimo", se obtiene de:

$$\sigma_r = \mu_r - \mu_{r-1} = \Delta\mu_{r-1} = -\Delta\nu_{r-1} = \nu_{r-1} - \nu_r$$

y sustituyendo la variable ν_r por su expresión desde el punto de vista prospectivo, tenemos:

$$\sigma_r = \sum_{h=r}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=r}^{h} (1-\beta_s)^{-1} - \sum_{h=r+1}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=r+1}^{h} (1-\beta_s)^{-1}$$

con γ_s y β_s tales que aseguren $\sigma_r \geq 0$ con r=1,2, … n-1 y $\sigma_r > 0$

Sumando y restando γ_r, y sacando factor común dentro del sumatorio, podemos escribir:

$$\sigma_r = \gamma_r + \sum_{h=r}^{n} \gamma_h \cdot \left[\prod_{s=r}^{h} (1-\beta_s)^{-1} - \prod_{s=r+1}^{h} (1-\beta_s)^{-1} \right]$$

donde el segundo productorio se sustituye por la unidad en el caso de que el índice superior sea menor que el índice inferior, simplificando:

$$\sigma_r = \gamma_r + \sum_{h=r}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=r}^{h} (1-\beta_s)^{-1} \cdot \left[1 - (1-\beta_s)^{-1} \right] =$$

$$= \gamma_r - \sum_{h=r}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=r}^{h} (1-\beta_s)^{-1} \, (-\beta_r)$$

con lo que

$$\boxed{\sigma_r = \gamma_r - V_{r-1} \{\gamma_r, \ldots, \gamma_n\}_{-\beta_r, \ldots, -\beta_n} \cdot (-\beta_r)}$$

expresión que en el caso de un préstamo indica que la cuota de capital del período r es igual al término amortizativo menos la cuota de interés, calculada a partir del resto pendiente en el período anterior por el tanto efectivo.

V. - EMPRÉSTITOS NORMALIZABLES

Definimos el empréstito de primer orden como normalizable si su ecuación dinámica es lineal y los coeficientes son constantes.

A partir de la ecuación dinámica lineal de primer orden, analizada en el apartado anterior:

$$\Delta v_r + \beta_{r+1} \cdot v_r + \gamma_{r+1} = 0$$

imponemos la condición de coeficientes constantes:

$$\Delta v_r + \beta \cdot v_r + \gamma = 0$$

Su descripción financiera se realiza a partir de las expresiones generales obtenidas en el apartado anterior.

La ecuación de equilibrio inicial (2):

$$N = \sum_{h=1}^{n} \gamma_h \cdot \prod_{s=1}^{h} (1-\beta_s)^{-1}$$

que hemos interpretado como el valor actual V_0, de la magnitud γ_h, bajo régimen de interés compuesto a tanto variable $-\beta_s$

$$N = V_0 \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}_{-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_n}$$

al ser constantes los coeficientes, $-\beta_s = -\beta$ y $\gamma_h = \gamma$, el número de títulos se obtiene del valor actual de una renta de término constante actualizada en régimen de interés compuesto a un tipo $-\beta$, constante,

$$N = V_0 \{\gamma\}_{-\beta}$$

es decir,

$$N = \sum_{h=1}^{n} \gamma \cdot \prod_{s=1}^{h} (1-\beta)^{-1} = \gamma \cdot \sum_{h=1}^{n} (1-\beta)^{-h}$$

y utilizando la expresión del valor actual de una renta unitaria, $a_{\overline{n}|I}$ tenemos:

$$\boxed{N = \gamma \cdot a_{\overline{n}|-\beta}}$$

De esta ecuación de equilibrio inicial se puede obtener γ,

$$\gamma = \frac{N}{a_{\overline{n}|-\beta}}$$

con lo que es posible cuantificar fácilmente las expresiones obtenidas en el apartado anterior, al poder sustituir los sumatorios por la expresión del valor actual de una renta unitaria:

$$a_{\overline{n}|I} = \frac{1-(1+I)^{-n}}{I}$$

A partir de la expresión del número de títulos en circulación podemos obtener las demás magnitudes de la estructura amortizativa, por lo que ν_r define completamente la estructura amortizativa de una operación dada.

Las variables relacionadas con la estructura amortizativa, en particular el número de títulos en circulación en el período r-ésimo, se obtienen de la expresión (8) desde el punto de vista prospectivo,

$$\nu_r = V_r \{\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n\}_{-\beta_{r+1}, \ldots, -\beta_n}$$

con γ y β constantes obtenemos,

$$\nu_r = \gamma \cdot \sum_{s=1}^{n-r} (1-\beta)^{-s} = \gamma \cdot a_{\overline{n-r}|-\beta}$$

y sustituyendo γ por la expresión obtenida anteriormente,

$$\gamma = \frac{N}{a_{\overline{n}|-\beta}}$$

tenemos:

$$\boxed{\nu_r = N \cdot \frac{a_{\overline{n-r}|-\beta}}{a_{\overline{n}|-\beta}}}$$

expresión que proporciona el número de títulos que permanecen en circulación después del período r-ésimo, desde el punto de vista prospectivo y que coincide con la expresión para el cálculo de la reserva en el método francés de amortización de préstamos, sin más que sustituir el nominal del préstamo C, por el número de títulos emitidos, N, y el tipo de interés efectivo del préstamo I_m, por el coeficiente $-\beta$ de la ecuación dinámica.

Retrospectivamente, en base a (6), tenemos,

$$\nu_r = N \cdot f_{-\beta_s}(0, r) - V_r \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}_{-\beta_2, \ldots -\beta_r} \quad \text{con } s=1, \ldots r$$

y para β y γ constantes:

$$\nu_r = N \cdot (1-\beta)^r - \sum_{h=1}^{r} \gamma \cdot \prod_{s=h+1}^{r} (1-\beta)$$

$$\boxed{\nu_r = N \cdot (1-\beta)^r - \gamma \cdot s_{\overline{r}|-\beta}}$$

Esta expresión se suele desarrollar de manera que obtenemos una fórmula similar a la utilizada en el cálculo de la reserva desde el punto de vista retrospectivo en el método francés de amortización de préstamos. Efectivamente:

$$v_r = N \cdot (1-\beta)^r - \gamma \cdot s_{\overline{r}|-\beta} = N \cdot (1-\beta)^r - \frac{N}{a_{\overline{n}|-\beta}} \cdot s_{\overline{r}|-\beta} =$$

$$= N \cdot \left[(1-\beta)^r - \frac{s_{\overline{r}|-\beta}}{a_{\overline{n}|-\beta}}\right] = N \cdot \frac{a_{\overline{n}|-\beta} \cdot (1-\beta)^r - s_{\overline{r}|-\beta}}{a_{\overline{n}|-\beta}}$$

y multiplicando y dividiendo por $(1-\beta)^n$:

$$v_r = N \cdot \frac{s_{\overline{n}|-\beta} \cdot (1-\beta)^r - s_{\overline{r}|-\beta} \cdot (1-\beta)^n}{s_{\overline{n}|-\beta}} \tag{13}$$

$$v_r = N \cdot \frac{[(1-\beta)^n - 1] \cdot (1-\beta)^r - [(1-\beta)^r - 1] \cdot (1-\beta)^n}{(1-\beta)^n - 1} =$$

$$= N \cdot \frac{(1-\beta)^n - (1-\beta)^r}{(1-\beta)^n - 1} = N \cdot \frac{(1-\beta)^n - 1 - [(1-\beta)^r - 1]}{(1-\beta)^n - 1} = N \cdot \frac{s_{\overline{n}|-\beta} - s_{\overline{r}|-\beta}}{s_{\overline{n}|-\beta}}$$

$$\boxed{v_r = N \cdot \left[1 - \frac{s_{\overline{r}|-\beta}}{s_{\overline{n}|-\beta}}\right]}$$

expresión que coincide con la correspondiente a la deuda pendiente en el sistema francés de amortización de préstamos, sustituyendo N por el capital nominal del préstamo y $-\beta$ por el tipo de interés efectivo de la operación I_m.

Gráficamente es posible demostrar la equivalencia entre la expresión (13) de la demostración anterior y la expresión final. Tenemos:

$$v_r = N \cdot \frac{s_{\overline{n}|-\beta} \cdot (1-\beta)^r - s_{\overline{r}|-\beta} \cdot (1-\beta)^n}{s_{\overline{n}|-\beta}} = N \cdot \left[1 - \frac{s_{\overline{r}|-\beta}}{s_{\overline{n}|-\beta}}\right]$$

efectivamente, mediante un diagrama temporal:

$$\left.\begin{array}{l} s_{\overline{r|}-\beta} \;\cdots\cdots\cdots\cdots\;\; s_{\overline{r|}-\beta}\cdot(1-\beta)^n \\ \qquad\qquad s_{\overline{r|}-\beta}\;\cdots\cdots\; s_{\overline{n|}-\beta}\cdot(1-\beta)^r \end{array}\right\}(-)$$

0 r n n+r

$$\vdash \;\ldots\; \text{———}\; s_{\overline{n-r|}-\beta} \;\ldots\; s_{\overline{n-r|}-\beta}\cdot(1-\beta)^r$$

equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} s_{\overline{n|}-\beta} \\ s_{\overline{r|}-\beta} \end{array}\right\}(-)$$

por lo tanto,

$$s_{\overline{n|}-\beta}\cdot(1-\beta)^r - s_{\overline{r|}-\beta}\cdot(1-\beta)^n = s_{\overline{n-r|}-\beta}\cdot(1-\beta)^r = s_{\overline{n|}-\beta} - s_{\overline{r|}-\beta}$$

Las dos expresiones propuestas para el cálculo del número de título ν_r, prospectiva y retrospectiva, son equivalentes, tal como se desprende de la siguiente demostración. Partiendo de la expresión obtenida retrospectivamente:

$$\nu_r = N\cdot\left[1-\frac{s_{\overline{r|}-\beta}}{s_{\overline{n|}-\beta}}\right] = N\cdot\left[1-\frac{(1-\beta)^r-1}{(1-\beta)^n-1}\right] =$$

$$= N\cdot\left[\frac{(1-\beta)^n-1-(1-\beta)^r+1}{(1-\beta)^n-1}\right] = \frac{(1-\beta)^n-(1-\beta)^r}{(1-\beta)^n-1} =$$

multiplicando y dividiendo por $(1-\beta)^{-n}$

$$\nu_r = N\cdot\left[\frac{1-(1-\beta)^{r-n}}{1-(1-\beta)^{-n}}\right] = N\cdot\frac{a_{\overline{n-r|}-\beta}}{a_{\overline{n|}-\beta}}$$

llegamos a la expresión de ν_r desde el punto de vista prospectivo.

La magnitud μ_r total de títulos amortizados hasta el período r-ésimo se obtiene por diferencia entre el número de títulos emitidos y los títulos que permanecen en circulación:

$$\boxed{\mu_r = N-\nu_r = N\cdot\frac{s_{\overline{r|}-\beta}}{s_{\overline{n|}-\beta}}}$$

Finalmente, el número de títulos amortizados con el término r-ésimo viene dado por,

$$\sigma_r = \gamma_r - V_{r-1}\{\gamma_r \ldots\ldots \gamma_n\}(-\beta_r) = \left\{ \begin{matrix} \gamma = \dfrac{N}{a_{\overline{n}|-\beta}} \\ -\beta \end{matrix} \right\} =$$

$$= \gamma - \gamma\, a_{\overline{n-r+1}|-\beta}(-\beta) = \gamma \left[1 - \frac{1-(1-\beta)^{-n+r-1}}{-\beta} \cdot (-\beta) \right] =$$

$$= \gamma \cdot (1-\beta)^{-n+r-1} = \frac{N}{a_{\overline{n}|-\beta}} \cdot (1-\beta)^{-n+r-1}$$

multiplicando y dividiendo por $(1-\beta)^n$,

$$\boxed{\sigma_r = N \frac{(1-\beta)^{r-1}}{s_{\overline{n}|-\beta}}}$$

expresión que coincide con la utilizada en el método francés de amortización de préstamos, sustituyendo, como en las expresiones anteriores, el número de títulos emitidos N, por el nominal del préstamo C y $-\beta$ por el tipo de interés efectivo del préstamo I_m.

La magnitud σ_r sigue una progresión geométrica creciente, de razón $(1-\beta)$:

$$\sigma_r = \frac{N}{s_{\overline{n}|-\beta}} \cdot (1-\beta)^{r-1} = \sigma_1 \cdot (1-\beta)^{r-1}$$

ya que:

$$\sigma_1 = \mu_1 = N \cdot \frac{s_{\overline{1}|-\beta}}{s_{\overline{n}|-\beta}} = \frac{N}{s_{\overline{n}|-\beta}}$$

VI - CONCLUSIÓN

Tal como se indica en la introducción, en este artículo se han obtenido expresiones generales válidas para el análisis de cualquier empréstito, sin ningún tipo de restricciones, en función del estudio dinámico de la operación reflejado por una ecuación en diferencias finitas. Se han obtenido fórmulas para los empréstitos que pueden ser descritos por una ecuación en diferencias lineal y de primer orden. Particularizando más en el análisis, disponemos de expresiones muy operativas para empréstitos normalizables, es decir, para las emisiones de obligaciones cuya ecuación presenta coeficientes constantes. En todos los casos se pone de manifiesto la relación de este estudio con el análisis clásico de las operaciones de préstamo, realizando un cambio en las magnitudes fundamentales utilizadas. La incorporación de la magnitud Fraccionamiento del Empréstito con unidad de medida el título, permite establecer un paralelismo riguroso entre ambos análisis.

Bibliografía

ALEGRE ESCOLANO, A. y BIAYNA MULET, A. (1987). Operadores Discretos y Ecuaciones en Diferencias Lineales de Primer Orden con Aplicaciones Económicas. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Barcelona.

ALEGRE ESCOLANO, A. y FONTANALS ALBIOL, H. (1989). Análisis financiero de un empréstito: Comparación entre los empréstitos normal y cupón cero. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Barcelona.

ESTRUGO ESTRUGO, J.A. (1943). La Sucesión Financiera Aplicada a los Préstamos y Empréstitos. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*. Madrid. Año 1, primer número, págs. 111-122.

GEL PELÁEZ, L. (1987). *Matemática de las Operaciones Financieras*. Ed A.C. Madrid.

LEVI, E. (1973). *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Vols. I y II. Ed. Bosch. Barcelona.

LÓPEZ URQUÍA, J. (1968). *Matemática Financiera*. Ed. El autor Barcelona.

NIETO DE ALBA, U. (1967). Estructura racional de la teoría de los empréstitos con criterio financiero. *Riesgo y Seguro*. Madrid. Epoca segunda. Núm. 17 ler. trim. págs. 69-93.

NIETO DE ALBA, U. (1979). *Matemática de las Operaciones Financieras*. I.C.A.I. Madrid

NIETO DE ALBA, U. (1985). *Matemática Financiera y Cálculo Bancario*. Centro de Formación del Banco de España. Madrid

PRIETO PÉREZ, E. (1982). *Análisis Financiero de los Empréstitos de Obligaciones*. Ed. ICE. Madrid.

RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, A. (1962). Introducción a una Teoría Matemática General de los Empréstitos. *Técnica Económica*, Madrid, Tercera Epoca, Año VII, Núms. 9 y 10. Págs. 260-272.

RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, A. (1984). *Matemática de la Financiación*. Ed. El autor. Barcelona. Edición revisada y ampliada.