Cuadernos de Economía. Vol. 18 83-103 1990.

Rendimientos a escala, costes de ajuste y la inversión óptima de la empresa extractiva

Santiago J. Rubio
Departamento de Análisis Económico
Universidad de Valencia
Avda. Blasco Ibañez, 30 - 46010 Valencia

Rendimientos a escala, costes de ajuste y la inversión óptima de la empresa extractiva

RESUMEN

En este artículo se estudia el programa óptimo de inversión de una empresa minera competitiva para dos tecnologías diferentes y costes de ajuste del stock de capital. En la primera parte, se analiza el caso de una tecnología de proporciones variables con rendimientos decrecientes a escala y, se concluye que, para un precio del mineral constante, existirá una primera etapa en el periodo de explotación del depósito durante la cual aumentará el stock de capital. En la segunda parte, se determina cual es el programa óptimo de inversión cuando se dan rendimientos constantes a escala y la "regla Hotelling" gobierna la dinámica del precio del mineral.

Returns to Scale, Adjustment Costs and the Optimal Investment of the Extractive Firm

ABSTRACT

This paper analyses the optimal investment programme of a competitive mining firm for two different technologies and capital adjustment costs. In the firsts part, the case of a variable proportions technology with decreasing returns to scale is studied and, it is concluded that, under the assumption of a constant mineral price, a first stage in the exploitation period of the deposit will occur in which capital stock is increasing. In the second, the optimal investment, programme is determined when there are constant returns to scale and Hotelling's rule governs the dynamics of the mineral price.

Rendimientos a escala, costes de ajuste y la inversión óptima de la empresa extractiva

INTRODUCCIÓN

Desde 1968, año en que V.L. Smith presentó una teoría unificada de la explotación de los recursos naturales con una referencia explícita a los bienes de capital, se ha publicado un buen número de trabajos dedicados al tema de la inversión en las industrias extractivas, entre los que cabe destacar los de Burt y Cummings (1970), Puu (1977), Campbell (1980), Gaudet (1983), Brennan y Schwartz (1985), Lasserre (1985a, 1985b), Cairns y Lasserre (1986) y, más recientemente, Olsen (1989).

Estos trabajos tienen en común el interés de sus autores por determinar la dinámica del stock de capital y la tasa de extracción de las empresas extractivas, pero se diferencian en el conjunto de supuestos que cada autor establece sobre la función de producción y la inversión. Así, Burt y Cummings suponen una tecnología con un único factor de producción (capital), que está sujeto a depreciación, y rendimientos decrecientes a escala, mientras que consideran la inversión como irreversible y hacen depender la productividad de los factores del nivel de las reservas de mineral que explota la empresa (efectos agotamiento).

Puu añade una restricción adicional sobre la inversión, fijando un límite superior al valor que ésta puede tomar en cada momento, y modifica las condiciones tecnológicas suponiendo que el coste de convertir una unidad de mineral en la cantidad de metal que contiene es constante.

Campbell, sin embargo, basa su modelo en un conjunto bastante diferente de hipótesis. No toma en cuenta los efectos agotamiento y supone que el capital no se deprecia y que la inversión es irreversible. Por otro lado, considera que la función de beneficios es estrictamente cóncava y que la función de producción es de proporciones fijas con rendimientos decrecientes a escala.

Gaudet presenta un modelo de inversión reversible con costes de ajuste y una tecnología con un sólo factor de producción o dos factores que se utilizan en proporciones fijas, mientras que Lasserre (1985a) publica un modelo basado en una tecnología neoclásica con dos factores de producción, capital y trabajo, donde el capital no se deprecia y la inversión es reversible. Este mismo autr, en otro trabajo publicado el mismo año, expone una extensión de este modelo en la que incluye costes de ajuste y efectos agotamiento, pero que no desarrolla analíticamente debido a que su interés es la aplicación empírica del modelo en cuestión.

Cairns y Lasserre retoman el modelo de Puu con el objeto de explicar la dinámica de la industria con un enfoque de equilibrio parcial[1]. Finalmente, en el trabajo de Olsen, se analiza la dinámica de la inversión en capital y la tasa de extracción de la empresa cuando se supone que cada yacimiento es de distinta calidad[2].

En este trabajo, nos interesamos básicamente por las aportaciones de Gaudet y Lasserre que pasamos a comentar un poco más extensamente[3].

Como ya hemos apuntado, el modelo de Gaudet incorpora la novedad de los costes de ajuste en el análisis de la inversión de las empresas extractivas. Frente al resultado habitual de la teoría de la empresa extractiva, que establece que la tasa óptima de extracción fijada por una empresa competitiva que se enfrenta a un precio dado y *constante* disminuye monotónicamente a lo largo del período de explotación, Gaudet concluye que, para un stock de capital inicial suficientemente pequeño, nos encontraremos con una fase inicial de "mise en valeur" durante la cual la capacidad de extracción será creciente, seguida de una fase de producción propiamente dicha, para la que, la senda óptima de extracción recuperará su forma habitual.

El trabajo de Lasserre (1985a) es una buena revisión de la literatura sobre la inversión de las empresas extractivas, que incluye los trabajos de Puu, Campbell y Gaudet. Su principal atractivo radica en que presenta de forma homogénea las distintas aportaciones tomando como base la teoría neoclásica de la inversión. Con este objeto, plantea un modelo de referencia inicial, incorporando al

1. Otro papel en el que se presenta un análisis de equilibrio parcial es el de Mizzi (1987). Este autor estudia cual es la estrategia óptima de una empresa dominante en un mercado con una franja competitiva cuando se dan costes de ajuste.

2. Mención a parte merece el trabajo de Brennan y Schwartz, en el que se estudia la inversión en las industrias extractivas cuando existe incertidumbre sobre los precios futuros del mineral. En la misma línea (análisis de las decisiones de inversión en condiciones de incertidumbre), se puede mencionar el trabajo de Mackie-Mason (1988), en el que estos autores aplican un modelo de equilibrio general intertemporal de valoración de activos para determinar los valores de las minas, y evaluar el programa óptimo de inversión bajo diferentes tipos impositivos.

3. Comentarios más extensos sobre estos trabajos, así como un análisis del efecto de las distintas restricciones tecnológicas sobre la dinámica de la inversión y la tasa de extracción pueden encontrarse en el segundo capítulo de mi tesis doctoral, Rubio (1989).

modelo neoclásico una ecuación diferencial que representa la dinámica de las resevas de mineral, del que deriva, como casos particulares, el resto de modelos.

Sin embargo, aunque Lasserre plantea adecuadamente el problema y las condiciones de optimalidad que caracterizan la demanda de factores, omite el estudio de la dinámica del stock de capital y el nivel de empleo de la empresa extractiva.

Tomando como punto de partida estas aportaciones, el objeto de nuestro trabajo es profundizar en el modelo de Lasserre, investigando la dinámica del empleo de factores productivos por parte de una empresa extractiva competitiva.

En el siguiente apartado exponemos el problema de optimización que representa el comportamiento de las empresas extractivas, obtenemos las condiciones de optimalidad que caracterizan la demanda de factores y las que rigen la dinámica de estas variables y caracterizamos el proceso de inversión para la hipótesis de un precio del mineral constante a lo largo del período de explotación.

En el apartado tercero, introducimos los costes de ajuste y resolvemos el problema para una tecnología con dos factores de produción, obteniendo una generalización de las conclusiones del trabajo de Gaudet. En el apartado cuarto, abordamos el análisis de la dinámica de la inversión para una tecnología con rendimientos constantes a escala y costes de ajuste del stock de cpaital. El recurso a este supuesto sobre la tecnología, nos permite utilizar los resultados sobre la dinámica del precio que se derivan del modelo de equilibrio parcial con costes medios de extracción constantes establecido por Hotelling (1931), y desarrollado posteriormente por Herfindahl (1967). De esta forma, podemos analizar la dinámica de la inversión de las empresas extractivas dada la dinámica óptima del precio del mineral, abandonando así la hipótesis simplificadora de un precio constante.

En el último apartado, se recogen las conclusiones y se sugieren posibles extensiones en el marco del análisis del programa óptimo de inversión de las empresas extractivas.

LA INVERSIÓN ÓPTIMA DE LA EMPRESA EXTRACTIVA

La determinación de la tasa óptima de inversión de la empresa extractiva[4] se

4. No se considera el caso de una empresa extractiva que explote más de un yacimiento, por lo que se está identificando el término empresa con el de mina, yacimiento o depósito.

sigue del problema de maximización del valor presente descontado de las reservas de mineral, que podemos escribir de la siguiente manera

$$\underset{L,I,T}{\text{MAX}} \int_{0}^{T} [pf(K,L) - wL - qI]\, e^{-rt}\, dt \tag{1}$$

$$\text{s.a. } \dot{R} = - f(K,L),\ \dot{K} = I \tag{1.1}$$

$$R(0) = R_o,\ K(0) = K_o \tag{1.2}$$

$$K(t),\ L(t),\ R(t) \geq 0 \tag{1.3}$$

donde K y L representan la cantidad de bienes de capital y horas de trabajo utilizada por la empresa, I la inversión[5], R las reservas y T el periodo de explotación de las reservas, siendo p, w y q los precios del mineral, el trabajo y los bienes de capital, respectivamente[6].

El problema presenta dos variables de control, la demanda de trabajo y la inversión, y dos variables de estado, el stock de capital y las reservas. Las ecuaciones diferenciales (1.1) describen la dinámica de las variables de estado, que viene dada por la inversión para el stock de capital y por la tasa de extracción para las reservas[7]. La restricción (1.2) representa las condiciones iniciales para las dos variables de estado, siendo Ro las reservas iniciales de mineral, cuya dimensión se supone conocida por la empresa, mientras que (1.3) recoge las restricciones normales de no negatividad[8].

La solución a este problema de control óptimo requiere la maximización del correspondiente Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H = H(R,K,L,I,\mu 1,\mu 2,t) = pf(K,L) - wL - qI \\ - \mu_1 f(K,L) + \mu_2 I \end{aligned} \tag{2}$$

5. No distinguiremos entre inversión neta y bruta, o lo que es lo mismo supondremos que el stock de capital no se deprecia. La incorporación de una tasa de depreciación constante no modificaría de forma sustancial los resultados que se obtienen de este problema.

6. Adicionalmente supondremos que los precios de los factores permanecen constantes y que el precio de reventa de los bienes de capital es idéntico al precio de compra.

7. Con un punto encima de una variable indicamos que se trata de la derivada de esta variable respecto al tiempo.

8. El problema de control óptimo ha sido formulado como un problema con restricciones puras sobre las variables de estado [K(t), R(t) ≥ 0], sin embargo, estas restricciones podrían haberse escrito como restricciones mixtas exigiendo que el stock de capital más la inversión fuese igual o mayor que cero, y que la tasa de extracción fuese igual o inferior a las reservas. En ambos casos, restricciones puras o mixtas, se tiene que satisfacer una "constraint qualification"; ver, p.e., Seierstad and Sydsaeter (1987, cap. 4 y 5).

donde μ_1 y μ_2 son las variables adjuntas asociadas a las ecuaciones diferenciales (1.1). Suponiendo que la "constraint qualification" se satisface, las condiciones necesarias para un óptimo interior serán

$$H^*_L = pf_L (K^*,L^*) - w - \mu_1 f_L (K^*,L^*) = 0 \tag{3}$$
$$H^*_I = - q + \mu_2 = 0 \tag{4}$$
$$\mu_1 = r\mu_1 - H^*_R \tag{5}$$
$$\mu_2 = r\mu_2 - H^*_K \tag{6}$$
$$e^{-rT^*} \mu_1 (T^*) \geq 0, \;\; e^{-rT^*} \mu_1 (T^*) R^* (T^*) = 0 \tag{7}$$
$$e^{-rT^*} \mu_2 (T^*) \geq 0, \;\; e^{-rT^*} \mu_2 (T^*) K^* (T^*) = 0 \tag{8}$$
$$H(R^*(T^*),K^*(T^*),L^*(T^*),I^*(T^*), \mu_1 (T^*), \mu_2 (T^*),T^*) = 0 \tag{9}$$

donde (7), (8) y (9) son las condiciones de transversalidad.

Directamente de (3) podemos obtener

$$(p - \mu_1) f_L = w \tag{10}$$

y de (4) y (6)

$$(p - \mu_1) f_K = rq \tag{11}$$

que son las condiciones habituales que establecen que, en el óptimo, el valor del producto marginal del factor debe igualar a su coste marginal. La única observación a hacer es que, cuando se trata de una empresa extractiva, la valoración del producto marginal del factor viene dada por el precio neto del coste marginal de uso $(p - \mu_1)$, que a partir de ahora llamaremos v[9].

Para conocer la dinámica de los factores de producción diferenciamos las condiciones (10) y (11) con respecto al tiempo[10]:

$$v f_L + v (f_{LK} K + f_{LL} L) = 0 \tag{12}$$

$$v f_K + v (f_{KK} K + f_{KL} L) = 0 \tag{13}$$

9. Para evitar confusiones, llamaremos al producto vfi valor *neto* del producto marginal de un factor.
10. A partir de ahora eliminaremos el asterisco de las variables del problema para simplificar la notación.

que pueden reescribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} f_{KK} & f_{KL} \\ f_{LK} & f_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} = - v \begin{pmatrix} f_K \\ f_L \end{pmatrix} \qquad (14)$$

donde v es la tasa de crecimiento de dicha variable. El sistema de ecuaciones (14) permite establecer las condiciones que determinan la dinámica del empleo de los factores de producción.

Resolviendo por la regla de Cramer nos queda

$$K = \frac{- v\,(f_K f_{LL} - f_L f_{KL})}{f_{KK} f_{LL} - (f_{KL})^2} \qquad (15)$$

entonces, si la función de producción es estrictamente cóncava, con productividades marginales positivas y decrecientes, el signo de la tasa de variación del stock de capital viene dado por el signo del numerador, de donde se concluye que, primero, si los factores de producción son rivales o sustitutivos la tasa de variación del capital permanece indeterminada y, segundo, que si los factres de producción son técnicamente complementarios la dinámica del stock de capital depende de la dinámica del precio neto del mineral, de manera que, si el precio neto disminuye a lo largo del periodo de explotación, la tasa de extracción será decreciente.

Para obtener este último resultado, compruébese que, para un precio neto (v) del mineral decreciente, la complementariedad da lugar a un stock de capital decreciente (véase (15)), y puesto que la relación de complementariedad entre los factores de producción es simétrica, de (14) se obtiene el mismo resultado para el empleo de trabajo, por lo que, al ser positivas las productividades marginales, la tasa de extracción también será decreciente.

En el caso de un precio del mineral (p) constante, el precio neto (v) será decreciente, ya que el coste marginal de uso de las reservas de mineral (μ_1) aumenta a una tasa igual al tipo de interés (véase la condición (5): "regla de Hotelling"). En consecuencia, si los factores de producción son complementarios, la tasa de extracción será inequívocamente decreciente.

COSTE DE AJUSTE DEL CAPITAL

En el apartado anterior se ha supuesto que el único coste en el que incurre la empresa cuando modifica su stock de capital es el precio de mercado de los bienes de capital, y que este precio no se ve alterado por la demanda de la empresa. Sin embargo, ya en los años sesenta, autores como Lucas (1967), Gould (1968) y Treadway (1969, 1970), señalaron que un cambio en el nivel de utilización de un factor de producción puede originar unos costes adicionales al precio de compra de dicho factor. Este tipo de costes se denominan costes de ajuste y aparecen cuando la empresa modifica el nivel de utilización de un factor.

Más recientemente, economistas como Gaudet (1983), Frank y Babunovic (1984) y Lasserre (1985a, 1985b) han revisado el problema de la determinación del programa óptimo de inversión de la empresa extractiva cuando existen costes de ajuste. En este apartado retomamos esta cuestión.

Siguiendo a Gould, Gaudet y Lasserre, adoptamos una función separable de costes de ajuste del stock de capital del tipo[11]

$$C(I) = qI + A(I) \tag{16}$$

donde A(I) representa los costes de ajuste de la capacidad que no se recogen el precio de mercado de los bienes de capital. Suponemos que A(I) es cero cuando la inversión es cero, que $A_I \geq 0$ y $A_I < 0$ cuando $I < 0$ y que $A_{II} > 0$ para todo I. Esto último significa que para la empresa es más costoso aumentar el stock de capital rápidamente que lentamente.

Ahora, el Hamiltoniano asociado al problema de optimización presenta un término adicional

$$H = pf\,(K,L) - wL - qI - A(I) - \mu_1 f(K,L) + \mu_2 I \tag{17}$$

De la condición necesaria (4) se obtiene

$$\mu_2 = q + AI\,(I) \tag{18}$$

que nos indica que el coste marginal de la inversión es creciente. Si sustituimos μ_2 en (6) por (18), la tasa de variación de μ_2 viene dada por la ecuación diferencial

$$\mu_2 = r\,[q + A_I\,(I)] - vf_K \tag{19}$$

11. Una forma alternativa, pero equivalente, de representar los costes de ajuste es incorporando la inversión a la función de producción: F(K,L.I), con FI < 0 y FII < 0. Ver p.e. Lucas (1967).

Diferenciando (18) respecto al tiempo, igualando a (19) y despejando la tasa de variación de la inversión, llegamos a

$$I = \{r\,[q + A_I\,(I)] - vf_K\}/A_{II}\,(I) \tag{20}$$

Como el signo de A_I depende del signo de la inversión, y f_K y A_{II} son positivos, el signo de la tasa de variación de la inversión queda indeterminado. Pero esta indeterminación puede resolverse recurriendo a la expresión (19).

Si tenemos en cuenta que el primer término del miembro de la derecha de (19) es el coste de uso de incrementar el stock de capital en una unidad adicional, que el segundo término es el valor neto del producto marginal del capital, y que la empresa demanda este factor hasta que el coste de uso marginal iguala al valor neto del producto marginal, la empresa estará en equilibrio cuando

$$r\,[q + A_I\,(I)] = vf_K \tag{21}$$

Entonces, si se representan ambas funciones en un gráfico y se da un valor inicial al stock de capital, se puede determinar cual será la dinámica de la inversión a lo largo del periodo de explotación de la mina[12].

En el gráfico puede observarse que si los costes de modificar el stock de capital fueran iguales al precio de compra de los bienes de capital, la inversión inicial sería igual al stock óptimo de capital, y el ajuste sería instantáneo. Sin embargo, si existen costes de ajuste, el proceso se relentiza. La empresa necesita un periodo de tiempo T para alcanzar el stock de capital deseado.

Cuando se ha llevado a cabo la inversión inicial y el stock de capital es igual a $K\,(t_1)$, la curva del coste de uso marginal se desplaza hacia la derecha cortando en su nueva posición a la línea rq justo para el valor $K\,(t_1)$. Entonces el coste de uso marginal será menor que el valor neto del producto marginal, y se reiniciará un proceso de inversión hasta que la desigualdad desaparezca. El punto en que se intersectan la curva del coste de uso marginal y la del valor neto del producto marginal nos dará el nuevo stock de capital $K(t_2)$, y la diferencia $K(t_2) - K(t_1)$ el valor de la inversión. Así, la curva del coste de uso marginal se desplazará gradualmente hasta que corte a la curva del valor neto del producto marginal sobre la línea recta rq. En ese momento, el stock de capital de la empresará será el stock deseado y el proceso de inversión cesará. Este razonamiento es válido

12. A partir de la ecuación (10) podemos despejar L en función de K, w y v, y eliminarla de la expresión del valor neto del producto marginal mediante sustitución. Por otra parte, supondremos que el stock de capital inicial es cero.

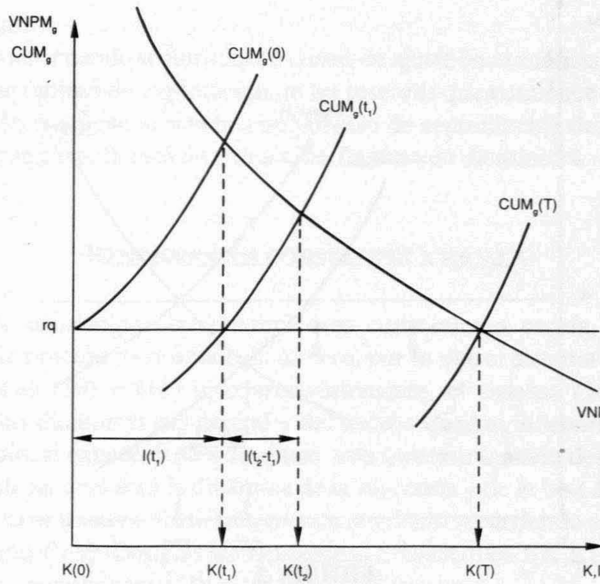

FIGURA 1.
INVERSIÓN Y STOCK DE CAPITAL ÓPTIMOS.

para cualquier tipo de empresa, lo que significa que estamos suponiendo que la curva del valor neto del producto marginal no se desplaza durante el proceso de inversión, y que v es el precio de mercado del producto que fabrica la empresa.

En cambio, si se estudia el comportamiento de una empresa extractiva, el valor neto del producto marginal depende, como ya se ha señalado, de la dinámica del precio del mineral. Si se supone que este precio permanece constante entonces el valor neto del producto marginal disminuirá con el paso del tiempo como consecuencia de la disminución del precio neto v. En este caso, la dinámica del valor neto del producto marginal impide que exista un stock de capital óptimo estacionario. Así, mientras la curva del coste de uso marginal se desplaza hacia la derecha, la curva del valor neto del producto marginal se desplaza hacia la izquierda lo que provoca que, para un momento t' < T, la curva del coste de uso marginal intersecte la curva del valor neto del producto marginal sobre la línea rq. Esto significa que durante un periodo inicial, hasta el momento t', la inversión será positiva y el stock de capital creciente.

En el momento t', el proceso de acumulación se invertirá, y la empresa tendrá que reducir su stock de capital debido a que el desplazamiento hacia la izquierda de la curva del valor neto del producto marginal da lugar a un coste de uso marginal superior al valor neto del producto marginal del stock de capital K(t').

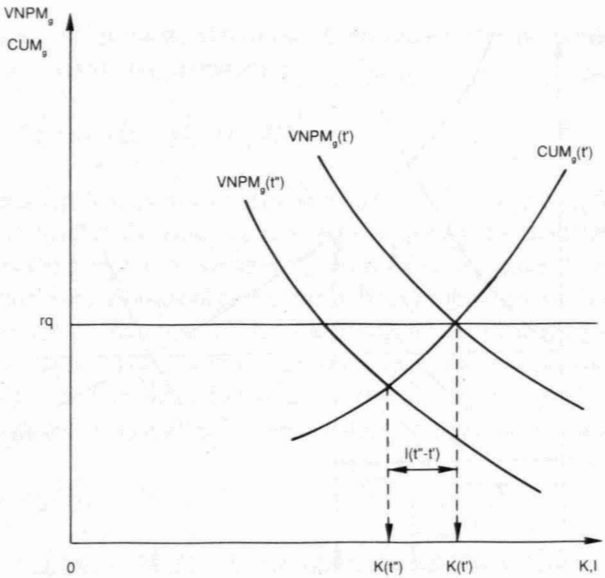

FIGURA 2.
INVERSIÓN Y STOCK DE CAPITAL ÓPTIMOS DE LA EMPRESA EXTRACTIVA.

Este proceso de desinversión no finalizará hasta que la empresa extractiva agote las reservas de la mina, razón por la cual se puede afirmar que, cuando existen costes de ajuste, se darán dos etapas en el periodo de explotación de la mina. Durante la primera, la inversión será positiva y la demanda de servicios del stock de capital creciente, mientras que durante la segunda, la inversión será negativa y la empresa reducirá gradualmente su stock de capital.

Esta dinámica se distingue de la obtenida en el apartado anterior en que, por un lado, el periodo de explotación de la mina se prolongará y, consecuentemente, el momento del agotamiento de las reservas se retrasará, y, por otro lado, en que la inversión será positiva durante una primera etapa del periodo de explotación.

En lo que respecta a las dinámicas de la demanda de trabajo y de la tasa de extracción, se puede recurrir a la expresión (12), que, bajo la hipótesis de un precio constante del mineral, se escribe como

$$L = r\mu_1 \, f_L / v f_{LL} - (f_{LK}/f_{LL}) \, K \qquad (22)$$

de donde se concluye que, independientemente de que los factores de producción sean complementarios o sustitutivos, *puede* existir una primera etapa en el periodo de explotación de la mina durante la cual la tasa de extracción sea *creciente*.

En resumen, cuando se introducen costes de ajuste en el análisis, puede darse un programa óptimo de explotación de las reservas que comience con una tasa de extracción creciente asociada a un proceso de acumulación de capital, pero incluso en ese caso, la tasa de extracción finalmente disminuirá.

Rendimientos constantes a escala

Para una tecnología con rendimientos constantes a escala, el hessiano asociado a la función de producción es cero, por lo que el sistema formado por las ecuaciones (10) y (11) y, consecuentemente, el sistema (14) no tienen solución y las dinámicas del capital y del trabajo quedan indetemrinadas[13].

En cambio, si existen costes de ajuste, esta indeterminación desaparece y se puede establecer cual será la dinámica de la inversión y de la tasa de extracción de la empresa extractiva. Ilustraremos este resultado recurriendo a una función de producción Cobb-Douglas de rendimientos constantes $f(K,L) - K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. En este caso, las condiciones (10) y (11) se escriben como

$$v\,(1-\alpha)\,(K/L)^{\alpha} = w \qquad (23)$$

$$v\alpha\,(L/K)^{1-\alpha} = rq \qquad (24)$$

Si se resuelve este sistema, despejando L de (23) y sustituyendo la expresión obtenida en (24), nos queda

$$v\alpha\,[v\,(1-\alpha)/w]^{1-\alpha/\alpha} = rq \qquad (25)$$

donde el coste de uso marginal (el miembro de la derecha de la ecuación) es independiente del stock de capital de la empresa como consecuencia de la hipótesis de empresas precio-aceptantes y ausencia de costes de ajuste, y el valor neto del producto marginal es función de v, w y α. De ahí que, cuando se cumpla la condición (25), el problema queda indeterminado.

Sin embargo, cuando existen costes de ajuste, el coste de uso marginal del capital es creciente, entonces, en cada momento del tiempo, existe un solo valor del stock de capital para el que el coste de uso marginal es igual al valor neto del

13. Este resultado se corresponde con el conocido problema de indeterminación de la cantidad de la empresa competitiva cuando los costes medios son constantes.

producto marginal, resolviéndose así la indeterminación señalada[14].

Introduciendo ahora una función de costes de ajuste como $A(I) = aI^2$, donde $a > 0$, se puede continuar con el ejemplo para ilustrar el proceso de resolución del problema con rendimientos constantes a escala y costes de ajuste[15].

En ese caso, las condiciones (18) y (19) se escriben de la siguiente manera

$$\mu_2 = q + 2aI \tag{26}$$

$$\mu_2 = r(q + 2aI) - v\alpha\,[v(1-\alpha)/w]^{1-\alpha/\alpha} \tag{27}$$

Diferenciando la expresión (26) respecto al tiempo, igualando a (27) y reordenando, llegamos a la ecuación diferencial[16]

$$I = (1/2a)\,(r(q + 2aI) - v\alpha(\alpha(1-\alpha)/2)^{1-\alpha/\alpha}) \tag{28}$$

Al igual que en el apartado anterior, el signo de la inversión en cada momento dependerá de la relación existente entre el valor neto del producto marginal y rq, como puede observarse en la siguiente expresión

$$r\,(q + 2aI) = v\alpha(\alpha(1-\alpha)/w)^{1-\alpha/\alpha} \tag{29}$$

De manera que, si el valor neto del producto marginal es mayor que rq, la inversión será positiva, mientras que, si ocurre lo contrario, tendrá lugar un procesod e desinversión.

En lo que respecta a la dinámica de la inversión resultante del modelo, sabemos que dependerá de la dinámica del precio del mineral, pero ahora, con costes medios de extracción constantes, la hipótesis de un precio del mineral constante no se sostiene porque hace inviable la existencia de una solución al problema planteado. Si suponemos un precio constante, como los costes medios de extracción también lo son, es imposible que el coste de uso aumente a una tasa

14. En este caso, la curva del valor neto del producto marginal del capital en la figura 2 sería una línea recta, pero aun así, como el coste de uso marginal es creciente, habría un único punto de intersección que permitiría definir el nivel óptimo de inversión para cada momento del periodo de explotación.

15. Esta especificación de la función de costes de ajuste puede eliminar la linealidad de la función de costes de extracción, originando, pese a los rendimientos constantes a escala, unos costes de extracción medios crecientes. En nuestro trabajo, el supuesto de que el stock de capital no se deprecia resuelve este problema. Si se abandonara este supuesto y se considerara una tasa de depreciación positiva, se tendría que recurrir a otras especificaciones de la función de costes de ajuste compatibles con la linealidad de la función de costes. P.e., Pindyck (1982, p. 419) propone la isugiente formulación $A(I) = \phi\,(I/K)$ con $\phi' > 0$.

16. Esta ecuación diferencial es la ecuación (20) cuando la función de costes de ajuste es A(I) = aI2 y la función de producción es una Cobb-Douglas.

igual al tipo de interés ("regla de Hotelling"), como la condición (5) requiere. Así pues, en el caso de costes medios constantes, la optimalidad exige que el precio del mineral aumente de acuerdo con la siguiente expresión

$$p = \alpha p,\ r > \alpha = r\,(p - c)/p > 0 \qquad (30)$$

donde c representa los costes de extracción medios a largo plazo[17].

Una vez sabemos cual va a ser la dinámica del precio, podemos obtener la dinámica de la inversión de la empresa extractiva subyacente al modelo de equilibrio parcial de Hotelling.

Tal y como se acaba de definir la dinámica del precio, resulta fácil comprobar que el precio neto (v) será una constante; téngase en cuenta que el precio neto, en equilibrio, es igual a los costes de extracción marginales y que si éstos son constantes aquel también lo será. Así, la condición (29) puede escribirse como

$$r\,(q + 2aI) = c\alpha\,(c(1-\alpha)/w)^{1-\alpha/\alpha} \qquad (31)$$

En base a esta condición se pueden derivar dos conclusiones: primera, si el valor neto del producto marginal del capital es mayor que o igual a rq y los factores son complementarios, el recurso no se explotará competitivamente. Segunda, si el valor neto del producto marginal es inferior a rq, el plan de inversión óptimo para una empresa extractiva, cuando se dan costes de ajuste y rendimientos constantes a escala, consiste en una inversión inicial positiva (recuérdese que hemos supuesto que K0 = 0) para dimensionar adecuadamente el stock de capital, seguida de un proceso continuo de desacumulación a lo largo de todo el periodo de explotación[18].

Veamos como puede demostrarse la primera proposición. Si la empresa decide explotar el depósito de mineral cuando el valor neto del producto marginal es mayor que rq, según la condición (31) la inversión tendrá que ser positiva para todo el periodo de explotación del depósito, en ese caso, como los factores son complementarios, de acuerdo con (12), el empleo de trabajo aumentará con el stock de capital y, con productividades marginales positivas,

17. Esta dinámica se obtiene del modelo de equilibrio parcial definido por Hotelling (1931). En ese modelo, el problema de maxiización del VPD de la mina se plantea en términos de la tasa de extracción, y el coste marginal presenta dos componentes: los costes de extracción marginales (c), que se consideran constantes, y el coste de uso marginal ($\mu 1$), que aumenta a una tasa igual al tipo de interés. De manera que, la condición habitual de optimalidad, precio igual a coste marginal, se escribe $p = c + \mu 1$, de donde se deduce de forma inmediata la ecuación diferencial (30) y el valor de α.

18. En el apéndice se resuelve la ecuación diferencial (28) y se presenta el proceso de resolución del problema de control óptimo correspondiente al ejemplo definido en este apartado.

la tasa de extracción será creciente. Pero cuando se dan costes de extracción medios constantes, sabemos, por el Teorema de Herfindahl[19], que sólo las minas con idénticos costes serán puestas en explotacion, lo que significa que el valor neto del producto marginal del capital es el mismo para todas las minas en explotación, de donde se puede concluir que la producción de la industria también será creciente, lo que resulta incompatible con un precio del mineral creciente para una función de demanda temporalmente estable.

En lo que se refiere a la segunda proposición, se puede establecer, de lo apuntado en el párrafo anterior, que la inversión será negativa ya que el valor neto del producto marginal es estrictamente inferior a rq, y, que, por lo tanto, la tasa de extracción será decreciente para la empresa y para el conjunto de la industria.

Si el valor neto del producto marginal es igual a rq, el stck de capital y la tasa de extracción serán constantes, pero una tasa de extracción constante solamente es compatible con un precio del mineral creciente si el número de empresas disminuye con el paso del tiempo. En ese caso, no puede mantenerse el supuesto de empresas precio-aceptantes en el marco de un análisis a largo plazo, de manera que podemos concluir que, si $VNPM_{gK} \geq rq$, un recurso natural no renovable no se explotará de forma competitiva.

CONCLUSIONES

Lo primero que cabe destacar en el estudio del programa óptimo de inversión de una empresa extractiva, es que la dinámica del stock de capital y el empleo de trabajo dependen de la dinámica del precio *neto* del mineral. Esto nos indica que para cerrar el análisis de la inversión de las empresas extractivas se requiere la determinación previa, o simultánea, de la dinámica del precio del mineral.

De todas formas, de los resultados obtenidos en este trabajo, se deduce de forma inmediata que, si el precio neto del mineral disminuye a lo largo del periodo de explotación, es condición suficiente que los factores de producción sean complementarios para que el programa óptimo de explotación de la mina se caracterice por un stock de capital y una tasa de extracción decrecientes.

Por otra parte, cuando existen costes de ajuste del capital, pueden distinguirse dos etapas en el periodo de explotación de la mina. Durante la primera, la inversión es positiva y la dinámica de la tasa de extracción queda indeterminada,

19. El Teorema de Herfindahl (1967) establece que minas de diferente calidad, esto es, con costes medios de extracción diferentes, no pueden ponerse en explotación simultáneamente, y que la explotación del recurso tendrá un carácter secuencial iniciándose en los depósitos de mejor calidad.

durante la segunda, el stock de capital y la tasa de extracción recuperan su perfil habitual decreciente. Este resultado es una generalización, para una tecnología de proporciones variables, de las conclusiones obtenidas por Gaudet (1983).

En el caso de rendimientos constantes a escala, la hipótesis de un precio del mineral constante debe abandonarse. Pero por otra parte, la dinámica del precio que se deriva del modelo de Hotelling puede incorporarse a la teoría de la empresa extractiva para cerrar así el análisis de la dinámica de la inversión. Obviamente, los resultados obtenidos estarán condicionados al supuesto tecnológico establecido.

Finalmente, dado que la dinámica del precio, cuando los costes de extracción medios son constantes, es igual a la dinámica del coste de uso marginal de las reservas de mineral, el precio neto del mineral será constante y la curva del valor neto del producto marginal no se desplazará con el paso del tiempo. Este resultado nos ha permitido llegar a la última conclusión que se presenta en este trabajo: la caracterización que se presenta en este trabajo: la caracterización del programa óptimo de inversión de la empresa extractiva con costes de ajuste del capital y una tecnología de proporciones variables con rendimientos constantes a escala. En este caso, si el stock de capital inicial es cero, y existe un programa óptimo de inversión, éste consiste en una inversión inicial positiva seguida de un proceso de desinversión que se extiende durante todo el periodo de explotación de la mina.

En lo que respecta a posibles extensiones de este trabajo, citaré dos aportaciones de Pindyck (1982) y (1988) a la teoría de la empresa que señalan posibles líneas de investigación. La primera examina los efectos que la incertidumbre de precios tiene sobre la inversión y la producción de la empresa cuando existen costes de ajuste. La segunda conecta con los trabajos ya mencionados de Brennan y Schwartz (1985) y Mackie-Mason (1988), y en ella se estudian las implicaciones que el valor de la opción de una inversión tiene sobre la determinación de la capacidad, su utilización, el valor de la empresa y el coste marginal a largo plazo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRENNAN, M.J. y SCHWARTZ, E.S. (1985): "Evaluating natural resource investments", *Journal of Business*, vol. 58, nº 2, Abril, págs. 135-157.

BURT, O.R. y CUMMINGS, R.G. (1970): "Production and investment in natural resource industries", *American Economic Review*, Septiembre, págs. 576-590.

CAIRNS, R.D. y LASSERRE, P. (1986): "Sectoral supply of minerals of varying quality", *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 88, nº 4, págs. 605-626.

CAMPBELL, H.F. (1980): "The effect of capital intensity on the optimal rate of extraction of a mineral deposit", *Canadian Journal of Economics*, vol. 13, nº 2, Mayo, págs. 349-356.

CRABBÉ, P.J. (1982): "The effect of capital intensity on the optimal rate of extraction of a mineral deposit: A comment", *Canadian Journal of Economics*, vol. 15, nº 3, Agosto, págs. 534-541.

FRANK, J. y BABUNOVIC, M. (1984): "An investment model of natural resource markets", *Economica*, vol. 51, nº 201, Febrero, págs. 83-95.

GAUDET, G. (1983): "Investissement optima êt couts d'adjustement dans la théorie économique de la mine", *Canadian Journal of Economics*, vol. 16, nº 1, Febrero, págs. 39-51.

GOULD, J. (1968): "Adjustment costs in the theory of investment of the firm", *Review of Economic Studies*, vol. 35, nº 101, págs. 47-55.

HERFINDAHL, .C. (1967): "Depletion and economic theory" en Gaffney, M. (ed.), *Extractive Resources and Taxation*, Madison, University of Wisconsin Press, págs. 63-90.

HOTELLING, H. (1931): "The economics of exhaustible resources", *Journal of Political Economy*, vol. 39, nº 2, Abril, págs. 137-175.

KAMIEN, M.I. y SCHWARTZ, N.L. (1981): *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Amsterdam, North-Holland.

LASSERRE, P. (1985a): "Exhaustible resource extraction with capital", en Scott, A. (ed.), *Progress in Natural Resource Economics*, Oxford, Clarendon Press, págs. 176-194.

LASSERRE, P. (1985b): Capacity choice by Mines", *Canadian Journal of Economics*, vol. 18, nº 4, Noviembre, págs. 831-842.

LEWIS, T.R. (1985): "A note on mining with investment in capital", *Canadian Journal of Economics*, vol. 18, nº 3, Agosto, págs. 665-667,

LUCAS, R.E. (1967): "Adjustment costs and the theory of supply", *Journal of Political Economy*, vol. 75, Agosto, págs. 321-334.

MACKIE-MASON, J.K. (1988): "Nonlinear taxation of risky assets and investment, with application to mining", Working Paper No. 2631, *National Bureau of Economic* Research, Junio.

MIZZI, P.J. (1987): "Capital adjustment costs: A nonrenewable resource industry", *Southern Economic Journal*, vol. 54, nº 1, Julio, págs. 168-173.

OLSEN, T.E. (1989): "Capital investments and resource extraction from non-identical deposits", *Journal of Environmental Economics and Management*, vol. 17, nº 2, Septiembre, págs. 127-139.

PINDYCK, R.S. (1982): "Adjustment costs, uncertainty, and the behavior of the firm", *American Economic Review*, vol. 72, nº 3, Junio, págs. 415-427.

PINDYCK, R.S. (1988): "Irreversible investment, capacity choice, and the value of the firm", *American Economic Review*, vol. 78, nº 5, Diciembre, págs. 969-985.

PUU, T. (1977): "On the profitability of exhausting natural resources", *Journal of Environmental Economics and Management*, vol. 4, nº 3, págs. 185-199.

RUBIO, S. (1989): "Explotación de un recurso natural no renovable bajo competencia perfecta", Tesis Doctoral, Universidad de Valencia.

SEIERSTAD, A. y SYDSAETER, K. (1987): *Optimal Control Theory with Economic Applications*, Amsterdam, North-Holland.

SMITH, V.L. (1968): "Economics of production from natural resources", *American Economic Review*, vol. 58, nº 3, págs. 409-431.

TREADWAY, A.B. (1969): "On rational entrepreneurial behavior and the demand for investment", *Review of Economic Studies*, vol. 36, págs. 227-239.

TREADWAT, A.B. (1970): "Adjustment costs and variable inputs in the theory of the competitive firm", *Journal of Economic Theory*, vol. 2, págs. 329-347.

APÉNDICE

La ecuación diferencial (28) puede reescribirse como

$$I - rI = (1/2a)\ (rq - v\alpha(v(1\text{-}\alpha)/w)^{1\text{-}\alpha/\alpha}) \tag{1}$$

siendo v una constante. Su solución es:

$$I = Ce^{rt} - (1/2ar)\ (rq - v\alpha(v(1\text{-}\alpha)/w)^{1\text{-}\alpha/\alpha}) \tag{2}$$

De las condiciones necesarias se obtiene que I*(T*), K*(T*) y L*(T*) deben ser cero para que se verifiquen las condiciones de transversalidad. Entonces, a partir de estos valores podemos calcular la constante de integración C y obtener la dinámica de la inversión

$$I^* = (1/2ar)\ (rq - v\alpha(v(1\text{-}\alpha)/w)^{1\text{-}\alpha/\alpha})\ (e^{-r(T^*\text{-}t)}\text{-}1) \tag{3}$$

donde T* es el periodo óptimo de explotación. Integrando (3) y calculando la nueva constante de integración, tendremos la dinámica del stock de capital

$$K^* = (1/2ar)\ (rq - v\alpha(v(1\text{-}\alpha)/w)^{1\text{-}\alpha/\alpha})$$

$$((1/r)\ (e^{-r(T^*\text{-}t)}\text{-}1) + T^* - t) \tag{4}$$

Esta función nos permite calcular el valor inicial de la inversión

$$I(0)^* = K(0)^* = (1/2ar)\ (rq - v\alpha(v(1\text{-}\alpha)/w)^{1\text{-}\alpha/\alpha})$$

$$((1/r)\ (e^{-rT^*}\text{-}1) + T^*) \tag{5}$$

Este valor será positivo ya que hemos supuesto que el stock de capital inicial es cero. De ahí que se de una discontinuidad en t = 0 para la senda temporal de la inversión. Obsérvese que el valor de la inversión que se obtiene de (3), para t = 0, es negativo.

Recurriendo a la expresión (3) para obtener L*(t), y sustituyendo L*(t) y K*(t) en la función de producción, llegamos a la siguiente expresión:

$$f(K,L) = (1/2ar)\ (rq - v\alpha(v(1\text{-}\alpha)/w)^{1\text{-}\alpha/\alpha})$$

$$((1/r)\ (e^{-r(T^*\text{-}t)}\text{-}1) + T^* - t)\ (v(1\text{-}\alpha)/w)^{1\text{-}\alpha/\alpha} \tag{6}$$

Finalmente, calculamos T* a partir de la condición (7). Esta condición exige el agotamiento físico del depósito, de manera que el programa óptimo de explotación debe verificar la siguiente igualdad

$$\int_0^{t^*} f(K,L)\, dt = R_0 \qquad (7)$$

La solución a esta integral nos da una ecuación para calcular T*

$$(1/r^2)\,(1-e^{-rT^*}) + ((T^*)^2/2) - (T^*/r) = R_0/D \qquad (8)$$

donde

$$D = (1/2ar)\,(rq - v\alpha(v(1-\alpha)/w)^{1-\alpha/\alpha})\,(v(1-\alpha)/w)^{1-\alpha/\alpha}$$

De esta ecuación se obtiene el periodo óptimo de explotación (T*) en función de los parámetros del problema.

Como puede observarse, la política de inversión de la empresa depende del valor de Ro (las reservas iniciales) y no de R(t), de manera que se puede concluir que la solución al problema de optimización dinámica definido en este trabajo es del tipo "open-loop".