ANTONIO ALEGRE ESCOLANO

Las funciones homogéneas y sus características de mayor relevancia en su utilización como instrumentos de modelización de ciertos tipos de relaciones entre variables económicas

I. INTRODUCCION

En este trabajo, pretendemos efectuar un análisis sistemático de un tipo de funciones, tan importantes desde el punto de vista de la modelización económica, como son las *funciones homogéneas.*

La característica de homogeneidad que califica a estas funciones, se basa en el comportamiento especial de sus valores, para cambios en los correspondientes a las variables independientes, cuando dichas variaciones conservan la proporcionalidad en los valores asignados a todas y cada una de dichas variables, esto significa que estamos interesados en destacar el comportamiento de la función a lo largo de trayectorias rectilíneas, en el espacio R^n en el que estan definidas las variables independientes, pasando estas trayectorias por el origen, para que de este modo en toda la trayectoria se conserve la proporcionalidad en las componentes de los puntos que la forman.

Analizaremos aquí las definiciones adoptadas para designar esta característica de homogeneidad y sus caracterizaciones alternativas, así como sus propiedades más características junto con la interpretación y justificación del sentido económico que ellas conllevan. Trataremos asimismo de efectuar algunas generalizaciones, como las correspondientes a las funciones vectoriales homogeneas y estudiaremos detenidamente las relaciones entre *las funciones homogéneas* y las llamadas *funciones homotéticas.*

II. DEFINICION

Con la finalidad de dar una definición lo más precisa posible de lo que entendemos por *función homogénea*, consideraremos previamente la posición de la amplia literatura existente sobre el tema; como rasgo fundamental, podemos observar, en una primera aproximación, que la mayoría de las definiciones adoptadas carecen de precisión, tanto en lo que hace referencia al campo de definición de la función como a la constante de proporcionalidad que debe actuar sobre el vector de las variables independientes, de esta forma nos encontramos con que la mayoría de autores no precisan estos términos, y los menos dan condiciones restrictivas tanto para el dominio como para los posibles valores de la constante de proporcionalidad, siendo estas condiciones generalmente distintas de un autor a otro.

En primer lugar, analizaremos la constante de proporcionalidad λ, que debe afectar a las componentes del vector $\vec{x}$ de variables independientes. En este tema las posiciones son las siguientes, la primera consiste en considerar que λ puede tomar cualquier valor real la segunda que λ puede tomar cualquier valor real excepto el cero y por último que λ puede tomar exclusivamente valores reales positivos. En esta situación debe tenerse en cuenta que cuanto más amplio sea el conjunto de valores posibles para λ, más restrictivo será el concepto de homogeneidad, pues funciones que cumplan los requerimientos de homogeneidad para un conjunto menor de valores de λ pueden dejarlos de cumplir para un conjunto mayor. Además dada la utilización de este tipo de funciones en el ámbito de las relaciones entre variables económicas, éstas tendrán sentido normalmente sólo cuando las variables tomen valores positivos y sea por ello positiva también la constante de proporcionalidad que relacione un vector de variables con otro. Por todo ello, nosotros adoptaremos en lo que sigue la hipótesis, formalmente especificada, de que el parámetro de proporcionalidad que relaciona dos vectores dados de las variables independientes, toma siempre valores exclusivamente positivos, esto es que $\lambda \in R^+$ o de forma equivalente que $\lambda \in [\lambda \,/\, \lambda \in R \text{ y } \lambda > 0]$.

Respecto al dominio $D \subset R^n$ de la función, existen dos posiciones claramente diferenciadas, la de aquellos que no ponen condición alguna sobre el dominio y en el extremo contrario los que consideran como característica previa, el que la función que será calificada como *homogénea*, debe cumplir que su dominio sea un cono del espacio R^n para poder asegurar que para cualquier $\vec{x} \in D$ y para cualquier $\lambda \geqslant 0$ tengamos también que $\lambda \cdot \vec{x} \in D$. Nosotros aquí, también nos inclinamos por lo menos restrictivo, esto es, no poner condiciones al dominio D de la función, ya que en la mayor parte de las aplicaciones económicas existen restricciones sobre las variables que forman el vector $\vec{x}$, impidiendo que el dominio sea precisamente un cono del espacio R^n, sin que esto lleve consigo la pérdida de sentido en lo que se refiere a las características de la homogeneidad que aquí estamos contemplando. Por todo ello adoptaremos la siguiente definición de función homogénea.

"*La función* $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ *es "homogénea en* D" *si y solo si existe un* $\alpha \in R$ *tal que para cualquier par* $(\vec{x}, \lambda) \in D \times R^+$ *para el que* $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, *se cumple que* $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})$. *La constante* α *recibe el nombre de grado de homogeneidad*".

De esta definición genérica de función homogénea, puede extraerse de forma inmediata la definición particular de función homogénea de grado α con $\alpha \in R$, así podemos decir:

"*La función* $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ *es homogénea de grado* α *en* D *si y solo si para cualquier par* $(\vec{x}, \lambda) \in D \times R^+$ *para el que* $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, *se cumple que* $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})$."

Siendo ésta, la definición que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo.

2.1. Interpretación de la caracteristica de homogeneidad.

Como hemos visto en la definición de *función homogénea de grado* α, los valores que toma ésta para distintos vectores de las variables independientes que mantengan la proporcionalidad de sus componentes, esto es que esten asociados a la misma semirrecta soporte que pasa por el origen, estan relacionados por una constante de proporcionalidad igual a la que corresponde a las variables elevada al grado de homogeneidad α. Esto nos permite decir que, cambios proporcionales en las componentes del vector de variables independientes afectan a la función de la siguiente forma:

a – Si $\alpha = 0$, el valor de la función permanece constante a lo largo de la trayectoria de proporcionalidad de las variables.

b – Si $0 < \alpha < 1$, el valor de la función cambia en el mismo sentido que las variables y proporcionalmente menos que éstas, ya que $\lambda^{\alpha} < \lambda$.

c – Si $\alpha = 1$, el valor de la función cambia en el mismo sentido y proporcionalmente igual que las variables y la función se denomina *linealmente homogénea.*

d – Si $\alpha > 1$, el valor de la función cambia en el mismo sentido que las variables y proporcionalmente más que éstas, ya que $\lambda^{\alpha} > \lambda$.

e – Si $\alpha < 0$, el valor de la función cambia en sentido inverso al del cambio en las variables.

III. GENERALIZACION DE LA DEFINICION DE HOMOGENEIDAD A LAS FUNCIONES VECTORIALES

En este epígrafe generalizaremos la noción de homogeneidad a las funciones vectoriales, para posteriormente utilizar esta definición generalizada en algunas de las propiedades a desarrollar.

Sea la función vectorial $\vec{f} : D \subset R^n \longrightarrow R^m$ donde el espacio imagen es m-dimensional, y llamamos f_j con $j = 1, 2, ..., m$ a sus "m" componentes unidimensionales tales que $f_j : D \subset R^n \longrightarrow R$ y $f_j(x) = y_j$ siendo entonces $\vec{f} \equiv (f_1 \ldots f_j \ldots f_m)$ tal que:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_j(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

Daremos la siguiente definición de la función vectorial homogénea:

"*La función vectorial* $\vec{f} : D \subset R^n \longrightarrow R^m$ *es homogénea de grado* α *en* D *si y solo si para cualquier par* $(\vec{x}, \lambda) \in D \times R^+$ *para el que* $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, *se cumple que* $\vec{f}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^\alpha \cdot \vec{f}(\vec{x})$."
por medio de la cual, se ha extendido de forma directa la definición dada de función homogénea, a las funciones vectoriales, manteniéndose con ello la interpretación dada a la característica de homogeneidad, sin más que sustituir donde decía "el valor de la función" por "vector de valores de la función" para cada vector de valores de las variables independientes.

Veamos ahora que la generalización es compatible con la dada inicialmente, para ello demostraremos el siguiente teorema.

3.1. Teorema de compatibilidad de la generalización

Este teorema es el que siempre debe demostrarse cuando se efectua la generalización de cualquier definición en lo referente a la dimensionalidad de su campo de aplicación, el enunciado del teorema puede plantearse en los siguientes términos:

"*La función vectorial* $\vec{f} \equiv (f_1 \ldots f_j \ldots f_m) : D \subset R^n \longrightarrow R^m$ *es homogénea de grado* α *si y solo si son homogéneas de grado* α *todas y cada una de sus componentes* $f_j : D \subset R^n \longrightarrow R$ *con* $j = 1, 2, \ldots, m$".

La demostración de este teorema resulta inmediata, sin más que considerar que, si la función vectorial $\vec{f} : D \subset R^n \longrightarrow R^m$ es homogénea, para cualquier par $(\vec{x}, \lambda) \in D \times R^+$ para el que $\lambda \cdot \vec{x} \in D$ se cumple que,

$$\vec{f}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^\alpha \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \lambda^\alpha \cdot \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_j(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^\alpha \cdot f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \lambda^\alpha \cdot f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \lambda^\alpha \cdot f_m(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

y además por la definición de $\vec{f}$ también sabemos que:

$$\vec{f}(\lambda \cdot \vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda \cdot \vec{x}) \\ \vdots \\ f_j(\lambda \cdot \vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\lambda \cdot \vec{x}) \end{bmatrix}$$

e igualando las dos expresiones anteriores, obtenidas para $\vec{f}(\lambda \cdot \vec{x})$ tenemos que, el ser $\vec{f}$ homogénea de grado α, equivale a que,

$$f_j(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^\alpha \cdot f_j(\vec{x}) \quad \text{con } j = 1, 2, \ldots, m$$

y esto equivale a su vez a que las componentes $f_j : D \subset R^n \longrightarrow R$ con $j = 1, 2, \ldots, m$ son homogéneas de grado α.

La demostración de este teorema nos proporciona la coherencia necesaria en la definición generalizada para hacerla compatible con la definición original de función homogénea de grado α, realizada como es usual para funciones reales de variable n-dimensional.

IV. Comportamiento en el origen de las funciones homogeneas

Como hemos visto, las funciones homogéneas quedan caracterizadas por su comportamiento peculiar, a lo largo de trayectorias vectoriales que inciden en el origen $\vec{x} = \vec{0}$, analizaremos ahora su comportamiento en dicho punto, considerando en primer lugar que $\vec{0} \in D$, o sea que la función $f(\vec{x})$ está definida en un dominio al que pertenece el origen $\vec{0}$, y estudiando seguidamente su comportamiento en un entorno del origen en el que no será preciso que esté definida la función.

4.1. **Valor que debe tomar en el origen una función homogénea de estar definida en dicho punto.**

Si la función homogénea $f(\vec{x})$ de grado α está definida en el origen, esto significa que $\vec{0} \in D$ y para cualquier $\lambda \in R^+$ tenemos que $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \in D$, con lo que se obtienen las dos expresiones siguientes para $f(\lambda \cdot \vec{0})$, por ser $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ tenemos que cualquier $\lambda \in R^+$ nos dará,

$$f(\lambda \cdot \vec{0}) = f(\vec{0})$$

y por ser homogénea de grado α tenemos que para cualquier $\lambda \in R^+$ será,

$$f(\lambda \cdot \vec{0}) = \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{0})$$

y de estas dos expresiones obtenemos que:

$$f(\vec{0}) = \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{0})$$

para cualquier $\lambda \in R^+$.

De esta última relación podemos sacar las siguientes conclusiones:

a) *"Si* f(x) *es homogénea de grado* $\alpha \neq 0$ *en* D *y* $\vec{0} \in D$ *entonces* $f(\vec{x}) = 0$".

b) *"Si* f $(\vec{x})$ *es homogénea de grado* $\alpha = 0$ *en* D *y* $\vec{0} \in$ D *entonces* f $(\vec{x})$ *puede tomar cualquier valor real".*

Para aclarar el significado de esta propiedad, consideremos el siguiente ejemplo del caso a).
Sea en principio la función:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

definida en el recindo $D = R^2 - [(0,0)]$, podemos ver que para cualquier $(x_1, x_2) \in D$ y $\lambda \in R^+$ tenemos:

$$f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) = \frac{\lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot x_2}{(\lambda \cdot x_1)^2 + (\lambda \cdot x_2)^2} = \frac{\lambda \cdot (x_1 - x_2)}{\lambda^2 \cdot (x_1^2 + x_2^2)} = \lambda^{-1} \cdot f(x_1, x_2)$$

luego la función f (x_1, x_2) es homogénea de grado $\alpha = -1$ en D.

Si la función estuviese definida en $D = R^2$, para seguir siendo homogénea debería forzosamente ser $f(0,0) = 0$, supongamos que $f(0,0) = k$, para $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, seguiría cumpliéndose para cualquier $\lambda \in R^+$ que $f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) = \lambda^{-1} \cdot f(x_1, x_2)$

y ahora para $(0,0) \in D$ tendríamos que:

$$f(\lambda \cdot 0, \lambda \cdot 0) = f(0,0) = k$$

y para que fuese homogénea de grado $\alpha = -1$, debería cumplirse para cualquier $\lambda \in R^+$

$$k = \lambda^{-1} \cdot f(0,0) = \lambda^{-1} \cdot k$$

lo que no será cierto salvo en el caso de que $k = 0$.

4.2. **Límite en el origen para una función homogénea definida en un entorno de dicho punto.**

Analizaremos aquí el límite en el origen de las funciones homogéneas, para ello consideraremos los límites direcccionales correspondientes a los vectores de los puntos $\vec{x}$ del entorno del origen.

Dado un punto $\vec{x}$ del entorno del origen, la trayectoria que seguiremos para obtener el límite en el origen, será la correspondiente a la semirrecta $\lambda\vec{x}$ con $\lambda \in R^+$, calculando el límite cuando λ tiende a cero tenemos, por ser $f(\vec{x})$ homogénea de grado α,

$$\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})$$

aquí, se puede dar los dos casos siguientes,

$$\text{si } f(\vec{x}) = 0 \text{ tenemos que } \lim_{\lambda \to 0} f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lim_{\lambda \to 0} 0 = 0$$

y si $f(\vec{x}) \neq 0$ será,

$$\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda \cdot \vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{\alpha}$$

surgiendo los tres casos siguientes, según sea el grado de homogeneidad α; si $\alpha = 0$ el límite será $f(\vec{x})$ valor constante de la función en toda la trayectoria, si $\alpha > 0$ el límite será 0 y por último si $\alpha < 0$ el límite será $+\infty$ ó $-\infty$ según el signo de $\mathbf{f}(\vec{x})$.

Resumiendo, podemos sacar las siguientes conclusiones respecto al límite de la función $f(\vec{x})$ en el origen.

a) *"Una función homogénea de grado $\alpha = 0$, no tendrá límite en el origen, salvo que dicha función sea constante".*

b) *"Una función homogénea de grado $\alpha <$ 0 no tiene límite en el origen".*

c) *"Una función homogénea de grado $\alpha >$ 0 de tener límite en el origen, éste es igual a cero".*

4.3. Continuidad en el origen de una función homogénea definida en dicho punto.

De lo analizado en los puntos anteriores, sobre el valor de la función y el límite de la misma en el origen, podemos concluir que:

a) *"Toda función homogénea de grado $\alpha = 0$ que no sea una constante es discontinua en el origen".*

b) *"Toda función homogénea de grado $\alpha < 0$ es discontinua en el origen".*

c) *"Toda función homogénea de grado $\alpha > 0$, que no tome el valor cero en el origen, es discontínua en dicho punto".*

V. Operaciones con funciones homogéneas

Una vez estudiado el comportamiento de las funciones homogéneas caracterizado por la *propiedad de homogeneidad,* vamos a considerar, como se ve afectada esta característica por las diversas operaciones entre funciones.

5.1. Suma de funciones homogéneas

En general, dadas las funciones vectoriales $\vec{f}$ y $\vec{g}$ definidas ambas en el subconjunto $D \subset R^n$, y tomando valores en R^m, veamos que sucede con la función suma $\vec{f} + \vec{g}$ cuando ambos sumandos son funciones homogéneas del mismo grado α sobre D.

$$(\vec{f} + \vec{g})(\lambda \cdot \vec{x}) = \vec{f}(\lambda \cdot \vec{x}) + \vec{g}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot \vec{f}(\vec{x}) + \lambda^{\alpha} \cdot \vec{g}(\vec{x}) =$$

$$= \lambda^{\alpha} \cdot [\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})] = \lambda^{\alpha} \cdot (\vec{f} + \vec{g})(\vec{x})$$

en el caso de que $m = 1$ obtenemos la misma relación con funciones reales, luego podemos afirmar con toda generalidad que:

> *"La suma de funciones homogéneas de grado α es otra función homogénea del mismo grado".*

5.2. Producto de una función homogénea por un escalar

Dada la función vectorial $\vec{f} : D \subset R^n \longrightarrow R^m$, homogénea de grado α en D y con $k \in R$, si analizamos la función $k \cdot \vec{f}$, obtenemos:

$$(k \cdot \vec{f})(\lambda \cdot \vec{x}) = k \cdot \vec{f}(\lambda \cdot \vec{x}) = k \cdot \lambda^{\alpha} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot k \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot (k \cdot \vec{f})(\vec{x})$$

y aquí también con $m = 1$ obtendríamos la misma relación para funciones reales, luego podemos afirmar con toda generalidad que:

> *"El producto de una función homogénea de grado α por un escalar, es otra función homogénea del mismo grado".*

5.3. Subespacio vectorial de las funciones homogeneas de grado α sobre D,

Sabemos que el conjunto $F(D \subset R^n, R^m)$ de las funciones vectoriales con la suma y el producto por un número real, toma la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo real, con ello y a partir de las dos propiedades anteriores para las funciones homogéneas, llamando $F_{H\alpha} \subset F$ al conjunto de las funciones homogéneas de grado α sobre D, podemos decir que la suma y producto por un escalar son operaciones internas en $F_{H\alpha}$ y por tanto afirmar que:

> *"El conjunto de funciones homogéneas de grado α sobre D, $F_{H\alpha}(D \subset R^n, R^m)$ con la suma y el producto por un escalar es un Subespacio Vectorial del Espacio de las funciones".*

En particular esto será cierto para las funciones reales en las que $m = 1$.

De aquí se deduce de forma inmediata que, dado un conjunto de funciones homogéneas de grado α sobre D, $\vec{f}_j \in F_{H\alpha}(D \subset R^n, R^m)$ con $j = 1, 2, ..., s$, y "s" números reales k_j con $j = 1, 2, ..., s$ la función $\vec{f} = \sum_{j=1}^{s} k_j \cdot \vec{f}_j$ combinación lineal del conjunto de funciones homogéneas, será también una función homogénea de grado α sobre D.

5.4. **Producto de funciones homogénas**

Sean $f_1 \in F_{H\alpha_1}(D \subset R^n, R)$ y $f_2 \in F_{H\alpha_2}(D \subset R^n, R)$ ambas homogéneas, y consideremos la función producto

$f_1 \cdot f_2 : D \subset R^n \longrightarrow R$, tendremos que:

$$(f_1 \cdot f_2)(\lambda \cdot \vec{x}) = f_1(\lambda \cdot \vec{x}) \cdot f_2(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{\alpha_1} \cdot f_1(\vec{x}) \cdot \lambda^{\alpha_2} f_2(\vec{x}) =$$

$$= \lambda^{\alpha_1} \cdot \lambda^{\alpha_2} \cdot f_1(\vec{x}) \cdot f_2(\vec{x}) = \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot (f_1 \cdot f_2)(\vec{x})$$

lo que nos permite afirmar que:

> *"Dadas dos funciones homogéneas sobre un mismo subconjunto $D \subset R^n$ la función producto es también homogénea sobre D y su grado de homogeneidad es igual a la suma de los grados de homogeneidad de las funciones factores".*

5.5. Función reciproca de una homogénea y cociente de funciones homogenas

Sea $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ una función homogénea de grado α sobre D y supongamos además que para cualquier $\vec{x} \in D$ es $f(\vec{x}) \neq 0$, podemos entonces definir la función recíproca $1/f : D \subset R^n \longrightarrow R$, obteniéndose que:

$$[1/f](\lambda \cdot \vec{x}) = \frac{1}{f(\lambda \cdot \vec{x})} = \frac{1}{\lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})} = \lambda^{-\alpha} \cdot \frac{1}{f(\vec{x})} = \lambda^{-\alpha} \cdot (1/f)(\vec{x})$$

con lo que podemos afirmar que:

"Dada una función homogénea de grado α sobre D *y tal que para cualquier* $\vec{x} \in D$, $f(\vec{x}) \neq 0$, *la función recíproca es homogénea de grado* $-\alpha$ *sobre* D*".*

Dado el resultado anterior y sabiendo que dadas dos funciones, se puede definir la función cociente como el producto de la primera de ellas por la función recíproca de la segunda, podemos concluir afirmando que:

"Dadas dos funciones homogéneas sobre D *de estar definida la función cociente sobre* D*, ésta es también homogénea sobre* D *y su grado de homogeneidad es la diferencia de los grados entre las funciones numerador y denominador del cociente".*

5.6. Composición de funciones homogéneas

Consideremos la función vectorial $\vec{f} : D \subset R^n \longrightarrow R^m$ homogénea de grado α sobre D y la función $\vec{g} : C \subset R^m \longrightarrow R^k$ tal que $\vec{f}(D) \subset C$ y sea $\vec{g}$ homogénea de grado β sobre $\vec{f}(D)$, entonces veamos que sucede con la función compuesta $\vec{f} \circ \vec{g} : D \subset R^n \longrightarrow R^k$ tendremos que:

$$(\vec{f} \circ \vec{g})(\lambda \cdot \vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\lambda \cdot \vec{x})) = \vec{g}[\lambda^{\alpha} \cdot \vec{f}(\vec{x})] = (\lambda^{\alpha})^{\beta} \cdot \vec{g}[\vec{f}(\vec{x})] =$$

$$= \lambda^{\alpha \cdot \beta} \cdot (\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x})$$

con lo que podemos afirmar con toda generalidad que:

"Dadas dos funciones vectoriales homogéneas cuya composición está bien definida, la función compuesta es

también homogénea y el grado de homogeneidad es igual al producto de los grados correspondientes a las componentes".

VI. OTRAS CARACTERIZACIONES DE LAS FUNCIONES HOMOGENEAS

En este punto vamos a obtener dos caracterizaciones de las funciones homogéneas, alternativas a la definición dada antes y que tienen importancia por su alto significado económico.

6.1. Descomposición en producto de funciones homogéneas

Sea la función $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ y supongamos que $\vec{0} \in D$ y que $D \cup (\vec{0})$ es un cono en el espacio R^n, en estas condiciones, cualquier par $(\vec{x}, \lambda) \in D \times R^+$ cumplirá que $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, si además tenemos que cualquier $\vec{x} \in D$ es tal que todas sus componentes son no negativas, caso éste que se dará con frecuencia al analizar relaciones entre variables económicas, una de cuyas características será la de no negatividad; podemos enunciar la siguiente caracterización de las funciones homogéneas de grado α en D, apoyándonos en las siguientes definiciones previas:

Definimos subconjuntos del dominio D, de la siguiente forma:

$$D^{i)} = (\vec{x} \,/\, \vec{x} \in D \text{ y } x_i \neq 0) \subset D \quad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,\ldots,n$$

y a partir de ellos se definen las siguientes transformaciones:

$$\vec{T}^{\,i)} : D^{i)} \subset R^n \longrightarrow R^{n-1}$$

tales que para cualquier $\vec{x} \in D^{i)} \subset D$ tenemos,

$$\vec{T}^{i} (\vec{x}) = \left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right]$$

con estos instrumentos enunciamos así el teorema de equivalencia:

"*Dada una función* $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ *cumpliendo en su dominio las antedichas condiciones,* f *es homogé-*

nea de grado α sobre D *si y solo si para* $i = 1, 2,...,n$ *existen* n *funciones* $\phi^{i)} : R^{n-1} \longrightarrow R$ *tales que para cualquier* $\vec{x} \in D^{i)}$ *tenemos que* $f(\vec{x}) = x_i^{\alpha} \cdot \phi^{i)}(\vec{x})$ *siendo* $\phi^{i)} : D^{i)} \rightarrow R$ *homogénea de grado* 0 *en* $D^{i)}$ y $\phi^{i)} = \vec{T}^{i)}$ ó $\phi^{i)}$".

cuya demostración sería la siguiente:

Teorema directo.

Si $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ es homogénea de grado α en D, significa que para cualquier par $(x, \lambda) \in D \times R^+$ tenemos que

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})$$

en particular si la componente i-ésima de $\vec{x}$ es $x_i > 0$, hagamos $\lambda = 1/x_i > 0$ y entonces

$$\lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x}) = \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha} \cdot f(\vec{x}) = f\left(\frac{1}{x_i} \cdot \vec{x}\right) = \left(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{1-i}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ... \frac{x_n}{x_i}\right)$$

luego para cualquier $\vec{x} \in D^{i)}$ tenemos que

$$f(\vec{x}) = x_i^{\alpha} \cdot f\left[\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}\right] =$$

$$= x_i^{\alpha} \cdot \phi^{i)}\left[\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}\right]$$

siendo entonces

$$\phi^{i)} : D^{i)} \longrightarrow R$$

tal que

$$\phi^{i)} = T^{i)} \text{ o } \phi^{i)}$$

y para $\vec{x} \in D^{i)}$ tenemos que

$$\phi^{i)}(\vec{x}) = \left[\vec{T}^{i)} \text{ o } \phi^{i)}\right](\vec{x}) = \phi^{i)}\left[\vec{T}^{i)}(\vec{x})\right] = \phi^{i)}\left[\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}\right]$$

siendo además

$$\phi^{i)}(\lambda\cdot\vec{x}) = \phi^{i)}\left[\vec{T}^{i)}(\lambda\cdot\vec{x})\right] = \phi^{i)}\left[\frac{\lambda\cdot x_1}{\lambda\cdot x_i},\ldots,\frac{\lambda\cdot x_{i-1}}{\lambda\cdot x_i},\frac{\lambda\cdot x_{i+1}}{\lambda\cdot x_i},\ldots,\frac{\lambda\cdot x_n}{\lambda\cdot x_i}\right] =$$

$$= \phi^{i)}\left[\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right] = \phi^{i)}\left[\vec{T}_i(\vec{x})\right] = \phi^{i)}(\vec{x})$$

luego $\phi^{i)}$ es homogénea de grado cero en $D^{i)}$ y podemos escribir $f(\vec{x}) = x_i^{\alpha}\cdot\phi^{i)}(\vec{x})$ para cualquier $\vec{x}\in D^{i)}$.

Teorema recíproco

Si con $i = 1, 2,\ldots, n$ podemos escribir que para $\vec{x}\in D^{i)}$ tenemos $f(\vec{x}) = x_i^{\alpha}\cdot\phi^{i)}(\vec{x})$, podemos considerar que $f(\vec{x})$ es el producto de dos funciones homogéneas ya que $\phi^{i)}(\vec{x})$ lo es de grado cero en $D^{i)}$ por hipótesis y x_i^{α} puede considerarse como una función de $D^{i)} \longrightarrow R$ que será homogénea de grado α en $D^{i)}$, luego $f(\vec{x})$ por ser producto de funciones homogéneas en $D^{i)}$ es homogénea de grado $\alpha = \alpha + 0$ en $D^{i)}$ con $i = 1,2,\ldots,n$ luego es homogénea de grado α en $D = \bigcup_{i=1}^{n} D^{i)}$.

Con ello hemos demostrado la equivalencia entre la definición de homogeneidad y la caracterización propuesta, siempre y cuando el dominio $D \subset R^n$ sea tal que todo $\vec{x}\in D$ tenga todas sus componentes no negativas y por lo menos una estrictamente positiva y $D \cup (0)$ sea un cono en R^n.

6.1.1. Algunos casos particulares

Como casos particulares que merecen ser mencionados, consideremos en primer lugar que $f(\vec{x})$ sea homogénea de grado 0 en D, por la caracterización anterior podemos decir que $f(\vec{x}) = \phi^{i)}(\vec{x})$ para todo $\vec{x}\in D$ lo que nos indica que

$$f(\vec{x}) = \phi^{i)}\left[\frac{x_i}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right]$$

con lo que $f(\vec{x})$ puede expresarse como función de "n-1" variables que son los "n-1" valores relativos de "n-1" de las primitivas variables respecto al valor de la n-ésima, que evidentemente debe ser no nulo.

Si consideramos ahora que f es homogénea de grado 1 en D, por la caracterización anterior obtenemos que

$$f(\vec{x}) = x_i \cdot \phi^{i)} (\vec{x})$$

o de forma análoga:

$$\frac{f(\vec{x})}{x_i} = \phi^{i)} (\vec{x})$$

siendo $\phi^{i)} (\vec{x})$ una función homogénea de grado 0 en $D^{i)}$.

Como el primer miembro nos da el *valor relativo de la función respecto a una de las variables,* éste será constante con relación a cambios proporcionales en todas las variables. Siendo esta propiedad característica de las funciones linealmente homogéneas.

En particular si f es una función de producción, esta relación nos dice que, el rendimiento de la producción por unidad de un cierto factor, permanece constante cuando se modifican proporcionalmente las asignaciones de todos los factores y siempre que la función de producción sea linealmente homogénea, como lo es por ejemplo la de Cobb-Douglas.

6.1.2. Un ejemplo donde no se cumple las condiciones sobre el dominio

Sea la función real de variable real bidimensional dada por

$$f : D \subset R^2 \longrightarrow R$$

donde $D = [(x_1, x_2) / x_1 + x_1 \geqslant 0]$

y $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = +\sqrt{x_1 + x_2}$

como puede observarse, en este caso D es un cono en R^2 que coincide con un semiplano cerrado, y para todo par $(\vec{x}, \lambda) \in D x R^+$ tenemos que $\vec{x} \in D$ nos indica que $x_1 + x_2 \geqslant 0$, luego por ser $\lambda > 0$ tenemos que $\lambda \cdot (x_1 + x_2) = \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 \geqslant 0$, y por tanto $\lambda \cdot \vec{x} \in D$.

Por la definición de función homogénea:

$$f(\lambda\cdot\vec{x}) = f(\lambda\cdot x_1 , \lambda\cdot x_2) = +\sqrt{\lambda\cdot x_1 + \lambda\cdot x_2} = +\sqrt{\lambda\cdot(x_1+x_2)} =$$

$$= +\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{x_1+x_2} = \lambda^{1/2} \cdot \sqrt{x_1 + x_2}$$

luego es homogénea de grado $\alpha = 1/2$ en D. No obstante, esta función no admite la caracterización considerada en este epígrafe 6.1, ya que $(0,0) \in D$ y además x_1 y x_2 admiten ambos valores negativos, así en este caso tendríamos que poner:

$$f(x_1,x_2) = +\sqrt{x_1+x_2} = \left[|x_1| \cdot \frac{(x_1+x_2)}{|x_1|}\right]^{1/2} =$$

$$= |x_1|^{1/2} \cdot \left[\frac{x_1}{|x_1|} + \frac{x_2}{|x_1|}\right]^{1/2} =$$

$$= \begin{cases} x_1^{1/2} \cdot \left(1 + \dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1/2} & \text{si } x_1 > 0 \\[2ex] (-x_1)^{1/2} \cdot \left(-1 - \dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1/2} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

con lo que no existe la función real $\phi^{i)}(\vec{x})$ definida en $D^{i)}$ tal que para cualquier $\vec{x} \in D^{i)}$ pueda ponerse $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \cdot \phi^{i)}(x_1, x_2)$ y no obstante $f(x_1, x_2)$ es homogénea de grado $\alpha = 1/2$ en D.

6.2. **Teorema de Euler para las funciones homogeneas**

Una segunda caracterización de las funciones homogéneas viene dada por el teorema de Euler, para cuya aplicación es necesario que la función $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ a caracterizar, admita derivadas parciales contínuas en todos los puntos $\vec{x} \in D$. Si ésto es así, podemos enunciar el teorema de la siguiente forma:

"Dada la función $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ *admitiendo derivadas parciales contínuas en todo* $\vec{x} \in D$, f *es homogénea de grado* α *en* D *si y solo si para todo* $\vec{x} \in D$ *se cumple que* $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot x_i = \alpha \cdot f(\vec{x})$, *o*

en forma vectorial a través de gradiente, si $\nabla f(\vec{x})' \cdot \vec{x} = \alpha \cdot f(\vec{x})$".

cuya demostración es la siguiente:

Teorema directo

Si f es homogénea de grado α en D podemos escribir para todo par $(\vec{x}, \lambda) \in DXR^+$ con $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, que

$$f(\lambda, \vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})$$

derivando ambos miembros de esta igualdad respecto a λ, considerando el primer miembro como una función compuesta, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \lambda \cdot x_i} (\partial \cdot \vec{x}) \cdot \frac{d(\lambda \cdot x_i)}{d\lambda} = \alpha \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot f(\vec{x})$$

y lo que es idéntico,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot x_i = \alpha \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot f(\vec{x})$$

como en particular el par $(\vec{x}, 1) \in DxR^+$ siempre cumple que $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \in D$ poniendo $\lambda = 1$ tenemos que:

para todo $\vec{x} \in D$ se satisface la relación:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x}) \cdot x_i = \alpha \cdot f(x)$$

que escrita matricialmente sería:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot f(\vec{x})$$

lo que nos dá:

$$\nabla f(\vec{x})' \cdot \vec{x} = \alpha \cdot f(\vec{x})$$

que es la igualdad de Euler para funciones homogéneas con derivadas parciales contínuas en todo $x \in D$, condición suficiente para asegurar la existencia de la derivada de la función compuesta del primer miembro de la igualdad.

Teorema recíproco

Si se cumple la igualdad de Euler

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x}) \cdot x_i = \alpha \cdot f(\vec{x})$$

para todo $\vec{x} \in D$, dado el par $(\vec{x}, \lambda) \in DxR^+$ tal que $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, también se cumplirá para este punto, obteniéndose:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot \lambda x_i = \alpha \cdot f(\lambda \cdot \vec{x})$$

y multiplicando por $\lambda^{\alpha-1}$, la anterior igualdad queda:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot x_i \right] \cdot \lambda^{\alpha} - \alpha \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot f(\lambda \cdot \vec{x}) = 0$$

válida para todo par $(\vec{x}, \lambda) \in D \times R^+$ con $\lambda \cdot \vec{x} \in D$.

Como puede observarse, esta expresión no es otra cosa que el numerador de

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{f(\lambda \cdot \vec{x})}{\lambda^{\alpha}} \right]$$

lo que nos dice que si se cumple la igualdad de Euler, esta derivada respecto al parámetro de proporcionalidad λ, es igual a cero, lo que significa que la función que hemos derivado es constante respecto a λ, o sea que:

$$\frac{f(\lambda \cdot \vec{x})}{\lambda^{\alpha}} = k$$

como en particular siempre puede ser $\lambda = 1$, tendremos que

$$f(\vec{x}) = k$$

lo que nos lleva a poder escribir que

$$\frac{f(\lambda \cdot \vec{x})}{\lambda^{\alpha}} = f(\vec{x})$$

para todo par $(\vec{x}, \lambda) \in DxR^+$ con $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, luego $f(\lambda, \vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})$ lo que nos dice que si satisface la igualdad de Euler, la función es homogénea de grado α en D.

Con ello disponemos de otra caracterización alternativa para las funciones homogéneas, en el caso de que la función $f(\vec{x})$ posea derivadas parciales continuas para todo $\vec{x} \in D$.

6.2.1. Generalización del teorema de Euler a funciones vectoriales homogéneas

Nos disponemos en este epígrafe a generalizar el teorema de Euler al caso de funciones vectoriales, para ello consideramos la función vectorial, $\vec{f} : D \subset R^n \longrightarrow R^m$ con matriz jacobiana

$$J\,[\vec{f}\,(\vec{x})] = J\begin{bmatrix} \dfrac{f_1 \;,\ldots\ldots,\; f_j \;,\ldots\ldots,\; f_m}{x_1 \;,\ldots\ldots,\; x_i \;,\ldots\ldots,\; x_n} \end{bmatrix} = J\begin{bmatrix} \dfrac{\vec{f}}{\vec{x}} \end{bmatrix}$$

definida para todo $\vec{x} \in D$, entonces podemos dar la siguiente caracterización de función vectorial homogénea, resultante de generalizar el teorema de Euler:

> *"Dada la función vectorial* $\vec{f} : D \subset R^n \longrightarrow R^m$ *con matriz jacobiana* $J\,[\vec{f}\,(\vec{x})]$ *definida para todo* $\vec{x} \in D$, $\vec{f}$ *es homogénea de grado* α *sobre* D *si y solo si se cumple que* $J[\vec{f}\,(\vec{x})] \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{f}\,(\vec{x})$".

como ya sabemos, el que $\vec{f}$ sea homogénea de grado α en D equivale a decir que sus componentes $f_j : D \subset R^n \longrightarrow R$ con $j = 1,2,\ldots,m$ son todas ellas homogéneas de grado α en D por lo que pueden caracterizarse según el teorema de Euler diciendo que

$$\nabla f_j\,(\vec{x})' \cdot \vec{x} = \alpha \cdot f_j\,(\vec{x}) \qquad \text{con } j = 1,2,\ldots,m$$

y escribiendo estas "m" igualdades en forma vectorial tendremos

$$\begin{bmatrix} \nabla f_1\,(\vec{x})' \\ \vdots \\ \nabla f_m\,(\vec{x})' \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} f_1\,(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m\,(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

que no es otra cosa sino

$$J\ [\vec{f}(\vec{x})] \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{f}(\vec{x})$$

lo que prueba la caracterización de las funciones vectoriales homogéneas con matriz jacobiana definida para todo $\vec{x} \in D$, mediante la generalización vectorial del teorema de Euler.

VII. OTRAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES HOMOGENEAS

En este epígrafe analizaremos otras propiedades de las funciones homogéneas que se refieren en primer lugar al comportamiento de sus derivadas sucesivas, consideraremos la característica de homogeneidad de las derivadas primeras y del vector gradiente formado por el conjunto de éstas, obtenidas de una función homogénea de grado α en D, veremos también que esta característica no es recíproca, en cuanto a que el gradiente puede ser homogéneo y corresponder a una función que no lo sea. Generalizaremos el estudio a las derivadas sucesivas, relacionando la homogeneidad con la matriz hessiana de las derivadas segundas.

Finalmente, consideraremos la elasticidad de rendimiento en las funciones homogéneas y su relación con el grado de homogeneidad y su interpretación económica.

7.1. **Derivadas de las funciones homogéneas**

Supongamos que la función $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ es homogénea de grado α en D y admite derivadas sucesivas en D, analizaremos el comportamiento de estas funciones derivadas en lo referente a la característica de homogeneidad.

Si f es homogénea de grado α sobre D, tenemos que para todo par $(\vec{x}, \lambda) \in D x R^+$ con $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, se satisface la igualdad,

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})$$

y derivando parcialmente esta expresión respecto a la variable x_i con $i = 1, 2, \ldots, n$ tendremos que,

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda \cdot x_i)} (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot \lambda = \lambda^{\alpha} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x})$$

y como siempre será cierta la siguiente igualdad simbólica,

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda \cdot x_i)}(\lambda \cdot \vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda \cdot \vec{x}), \qquad \text{quedará,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{\alpha-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$$

que no es otra cosa que la definición de función homogénea aplicada a la función derivada parcial respecto a la variable x_i, por lo que podemos afirmar que:

"Dada una función homogénea de grado α en D y con derivadas parciales primeras para todo $\vec{x} \in$ D, éstas funciones derivadas primeras son también homogéneas y de grado α-1 en D".

esto podría expresarse de forma alternativa, diciendo que:

"Dada una función $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ homogénea de grado α en D, el vector gradiente $\nabla f : D \subset R^n \longrightarrow R^n$ es una función vectorial homogénea de grado α-1 en D"

A partir de este resultado que nos dá el vector gradiente de la función f como homogéneo de grado α-1, podemos generalizar la derivada de $f(\vec{x})$, para considerarla, y no parcial sino, según un cierto vector $\vec{u} \in R^n$, sabemos que de ser las derivadas parciales contínuas, la derivada de $f(\vec{x})$ respecto al vector $\vec{u}$ será,

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})' \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot u_i$$

con lo que será también homogénea y de grado α-1 en D, pues como hemos visto toda combinación lineal de funciones homogéneas de grado α - 1 en D, es homogénea del mismo grado, con lo que podemos decir con toda generalidad que:

"Dada una gunción homogénea de grado α en D, si para todo $\vec{x} \in$ D existe la derivada respecto al vector $\vec{u}$, entonces dicha derivada es homogénea de grado α-1 en D".

Si la función f fuese derivable sucesivamente podríamos generalizar el resultado obtenido para las derivadas primeras, sin más que considerar que la derivada segunda es la derivada primera de la primera derivada, que al ser homogénea por lo anterior, hace que la segunda también lo sea y así sucesivamente, con lo que podemos decir con toda generalidad que:

"*Dada una función* $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ *homogénea de grado* α *en* D, *si existe su derivada parcial h-ésima en todo* $\vec{x} \in D$, *tendremos que:*

$$\frac{\partial^h f}{\partial x_{1\,h_1},\ldots,\partial x_{i\,h_i},\ldots,\partial x_{n\,h_n}} : D \subset R^n \longrightarrow R$$

con $h_1 + \ldots + h_n = h$

es una función homogénea de grado α-1 *en* D".

7.1.1. Condición necesaria de homogeneidad de segundo orden, homogeneidad y matriz hessiana.

A partir de esta propiedad de homogeneidad de las derivadas parciales, si suponemos que la función $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ posee derivadas primeras y segundas contínuas en D podemos aplicar el teorema de Euler, tanto en la función f, como a las funciones derivadas primera, con lo que tendremos para la función f,

$$\nabla f(\vec{x})' \cdot \vec{x} = \alpha \cdot f(\vec{x})$$

y para el vector gradiente $\nabla f : D \subset R^n \longrightarrow R^n$

$$J\ [\nabla f(\vec{x})] \cdot \vec{x} = (\alpha - 1) \cdot \nabla f(\vec{x})$$

trasponiendo los dos miembros de esta igualdad y postmultiplicando por el vector $\vec{x}$ queda:

$$\vec{x}' \cdot J\,[\nabla f(\vec{x})]' \cdot \vec{x} = (\alpha - 1) \cdot \nabla f(\vec{x})' \cdot \vec{x}$$

y como $J\,[\nabla f(\vec{x})]'$ es matriz hessiana de $f(\vec{x})$, sustituyendo la primera igualdad respecto a f en la correspondiente a ∇f queda,

$$\vec{x}' \cdot H\,[f(\vec{x})] \cdot \vec{x} = (\alpha\text{-}1) \cdot \alpha \cdot f(\vec{x})$$

que es una generalización de la igualdad de Euler expresada mediante las segundas derivadas de la función homogénea, con lo que tenemos el siguiente teorema:

"*Dada la función* $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ *homogénea de grado* α *en* D *y con derivadas primeras y segundas contínuas en* D, *se cumple que* $\vec{x}' \cdot H[f(\vec{x})] \cdot \vec{x}' = (\alpha-1) \cdot \alpha \cdot f(\vec{x})$".

7.1.2. La homogeneidad de la derivada no implica la de la función

Hasta aquí tenemos visto que si una función es homogénea de grado α sus derivadas primeras lo son de grado α-1, daremos aquí, simplemente un ejemplo de que este teorema no es válido con generalidad en el sentido inverso, sea la función

$$f(x_1 , x_2) = x_2 + \frac{x_2}{x_1}$$

definida en $D = R^2 - [\ \vec{x} / \vec{x} \in R^2 \text{ y } x_1 = 0]$.

En este caso para cualquier par $(\vec{x}, \lambda) \in D\text{x}R$ tenemos que $\lambda \cdot \vec{x} \in D$ y:

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot x_2 + \frac{\lambda \cdot x_2}{\lambda \cdot x_1} = \lambda \cdot x_2 + \frac{x_2}{x_1} \neq \lambda^{\alpha} \cdot f(\vec{x})$$

luego la función f no es homogénea en D, pero dicha función es derivable en D con funciones derivadas dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{-x_2}{x_1^2} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 + \frac{1}{x_1}$$

de aquí podemos ver que la función derivada parcial respecto a x_1, cumple que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda \cdot x) = -\frac{\lambda \cdot x_2}{(\lambda \cdot x_1)^2} = -\frac{x_2}{\lambda \cdot x_1^2} = \lambda^{-1} \cdot \left[-\frac{x_2}{x_1^2}\right] = \lambda^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})$$

para todo par $(\vec{x}, \lambda) \in D\text{x}R^+$ luego es homogénea de grado -1 en D, sin implicar esto que f sea homogénea de grado 0 como ya hemos visto.

En este caso, la parcial respecto a la variable x_1 tampoco es homogénea.

Pero incluso podría ocurrir, que dada una función $f : D \subset R^n \longrightarrow R$ su vector gradiente $\nabla f : D \subset R^n \longrightarrow R^n$ fuese homogéneo de grado α y esto no implica forzosamente que la función fuese homogénea de grado $\alpha + 1$.

Como ehemplo puede considerarse la función $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2$ definida en $D = R^2$, no homogénea y cuya gradiente es:

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

evidentemente homogéneo de grado 1.

7.2. Elasticidad de rendimiento en las funciones homogéneas.

Dada una función homogénea de grado α en D y con derivadas parciales contínuas en D, podemos considerar para un cierto punto $\vec{x}_0 \in D$ las variaciones en la función debidas a cambios en las componentes de $\vec{x}_0$ pero manteniendo su proporcionalidad, consideremos la función de rendimiento $\phi_0 : D_\lambda \subset R \longrightarrow R$ definida tal como sigue, sea $D_\lambda = [\lambda / \lambda \in R^+ \text{ y } \lambda \cdot \vec{x}_0 \in D]$ y $\phi_0(\lambda) = f(\lambda \cdot \vec{x}_0)$, entonces la *elasticidad de rendimiento de la función* $f(\vec{x})$ *en el punto* $\vec{x}_0 \in D$ *será* la derivada elástica de la función $\phi_0(\lambda)$ con $\lambda = 1$.

Así tendremos que:

$$\epsilon_\lambda \phi_0(\lambda) = \frac{\lambda}{\phi_0(\lambda)} \cdot \frac{d\phi_0(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\lambda}{\phi_0(\lambda)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\lambda \cdot \vec{x}_0)}{\partial(\lambda \cdot x_i)} \cdot x_i^0 =$$

$$= \frac{1}{\phi_0(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\lambda \cdot \vec{x}_0)}{\partial x_i} \cdot \lambda \cdot x_i^0$$

y según el teorema de Euler aplicado a la función homogénea $f(\vec{x})$ tendremos que:

$$\epsilon_\lambda \phi_0(\lambda) = \frac{1}{\phi_0(\lambda)} \cdot \alpha \cdot f(\lambda \cdot \vec{x}_0) = \alpha$$

con lo que la elasticidad de rendimiento para una función homogénea es constante para todo $\vec{x}_0 \in D$ y es igual al grado de homogeneidad, concordado el sentido económico de la elasticidad de rendimiento con el dado para el grado de homogeneidad al ser definido éste.

7.2.1. Teorema de Wicksell-Johnson.

En la teoría de la Producción, dada una función de producción $y = f(\vec{x})$ cualquiera, se define para una determinada combinación de factores $\vec{x}_0$, *la función de rendimiento,* como hemos hecho antes,

$$\phi_0(\lambda) = f(\lambda \cdot \vec{x}_0)$$

la elasticidad de rendimiento es,

$$\epsilon = \epsilon_\lambda \, \phi_0(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\lambda \cdot \vec{x}_0)}{\partial x_i} \cdot \lambda \cdot x_i^0}{f(\lambda \cdot \vec{x}_0)}$$

y llamando $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}_0$, tenemos que

$$\epsilon \cdot f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot x_i$$

expresión que se conoce como el "teorema de Wicksell-Johnson", y por el cual,

> *"La cantidad de producto por la elasticidad es igual a las cantidades de factores por su productividad marginal, sumadas todas ellas".*

Si la función es homogénea, la elasticidad de rendimiento es constante e igual al grado de homogeneidad α, coincidiendo este teorema con el de Euler.

En particular si $\epsilon = 1$ independientemente de $\vec{x}_0$ y λ, la función sería linealmente homogénea.

En general, como a partir de la función de rendimiento se puede definir, el *rendimiento marginal* como $\phi_0'(\lambda)$ y el *rendimiento medio* como $\phi_0(\lambda) / \lambda$, obtendremos la *"línea del óptimo técnico"* como aquella que iguala a ambos rendimientos, $\phi'_0(\lambda) = \phi_0(\lambda) / \lambda$, con lo que la elasticidad será $\epsilon = 1$, características que fundamenta la teoría marginalista de la distribución o formación de rentas, ya que de la relación,

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \quad x_i$$

multiplicándo por p, precio de venta del producto, se obtiene que:

$$f(\vec{x}) \cdot p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot p$$

donde el primer miembro representa el valor de mercado de la producción, entonces si los factores se retribuyen por su productividad marginal, se produce el equilibrio entre renta generada y distribuida.

VIII. Las funciones homoteticas de K. Lancaster

K. Lancaster en su libro Economía Matemática[1], nos dice que: "las funciones homogéneas son un caso especial de una clase más general de funciones que satisfacen la relación $f(t \cdot x) = \phi(t) \cdot f(x)$. Este tipo más general de funciones se le llama homotéticas". Según esta definición, sustituyendo la variable t por la λ, utilizada por nosotros, podemos ver que las funciones homogéneas serían aquellas homotéticas para las que $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha}$.

Para este tipo de funciones llamadas homotéticas puede darse una expresión que corresponde al teorema directo de Euler para las funciones homogéneas llamadas por K. Lancaster "el teorema de Euler generalizado". Cuyo enunciado sería el siguiente:

"Si la función f *es homotética y tal que* $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \phi(\lambda) \cdot f(\vec{x})$ *entonces se cumple que* $\phi'(1) \cdot f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})' \cdot \vec{x}$ ".

cuya demostración es idéntica a la realizada para el Teorema de Euler, o sea que, derivando la expresión $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \phi(\lambda) \cdot f(\vec{x})$ respecto a λ tendríamos,

$$\sum_{i=1}^{n} f'_{\lambda \cdot x_i} (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot x_i = \phi'(\lambda) \cdot f(\vec{x})$$

1. K. Lancaster, "Mathematical Economics" 1968 traducción al castellano "Economía Matemática" Ed. Bosch. Barcelona 1972 (pág. 407-409).

y haciendo $\lambda = 1$ queda en particular:

$$\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\vec{x}) \cdot x_i = \phi'(1) \cdot f(\vec{x})$$

que escrita en forma vectorial, a partir del gradiente de la función $f(\vec{x})$, nos dá como queríamos comprobar:

$$\nabla f(\vec{x})' \cdot \vec{x} = \phi'(1) \cdot f(\vec{x})$$

que como podemos ver si hacemos $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha}$, siendo entonces $\phi'(\lambda) = \alpha \cdot \lambda^{\alpha-1}$ y $\phi'(1) = \alpha$ nos llevaría a la ecuación de Euler para funciones homogéneas de grado α,

$$\nabla f(\vec{x})' \cdot \vec{x} = \alpha \cdot f(\vec{x})$$

A pesar de esta aparente generalización, veamos que en realidad no lo es, pues como hemos visto hasta aquí, toda función homogénea es homotética, y ahora demostraremos que el recíproco también es cierto. Ello quedará patente mediante la demostración del siguiente teorema:

"Toda función homotética es homogénea"

cuya demostración podría ser la siguiente: supongamos que $y = f(\vec{x})$ es homotética por lo que existirá una función $\phi(\lambda)$ tal que $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \phi(\lambda) \cdot f(\vec{x})$ siendo esto válido para todo par $(\vec{x}, \lambda) \in DxR^+$ tal que $\lambda \cdot \vec{x} \in D$, hagamos $\vec{z} = \lambda \cdot \vec{x} \in D$ y sea el par $(\vec{z}, \mu) \in DxR^+$ tal que $\mu \cdot \vec{z} \in D$, de aquí por ser $f(\vec{x})$ homotética tendremos que:

$$f(\vec{z}) = f(\lambda \cdot \vec{x}) = \phi(\lambda) \cdot f(\vec{x}) \quad \text{y} \quad f(\mu \cdot \vec{z}) = \phi(\mu) \cdot f(\vec{z})$$

luego, sustituyendo la primera igualdad en la segunda quedará:

$$f(\mu \cdot \lambda \cdot \vec{x}) = \phi(\mu) \cdot f(\lambda \cdot \vec{x}) = \phi(\mu) \cdot \phi(\lambda) \cdot f(\vec{x})$$

y como también tenemos que el par $(\vec{x}, \mu \lambda) \in DxR^+$ es tal que $(\mu \cdot \lambda) \cdot \vec{x} = \mu \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \mu \cdot \vec{z} \in D$ entonces será:

$$f(\mu \cdot \lambda \cdot \vec{x}) = \phi(\mu \cdot \lambda) \cdot f(\vec{x})$$

con lo que identificando estas dos últimas expresiones de $f(\mu \cdot \lambda \cdot \vec{x})$ tenemos que la función ϕ (λ) debe satisfacer la siguiente ecuación funcional,

$$\phi(\mu \cdot \lambda) = \phi(\mu) \cdot \phi(\lambda)$$

que no es sino una de las tres bien conocidas ecuaciones funcionales de Cauchy[2], cuya solución general viene dada por la familia de funciones,

$$\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha}$$

con α un parámetro arbitrario.

Con ello hemos visto que si una función es homotética la función $\phi(\lambda)$ debe ser potencial y por tanto nos encontramos en realidad ante una función homogénea de grado α.

Esto nos permite asegurar que los conceptos *"función homogénea"* y "función homotética" son equivalentes y que las funciones homotéticas no constituyen una familia más general que las homogénas.

2. Para un estudio exhaustivo de las ecuaciones funcionales de Cauchy puede verse. J. ACZEL, "Lectures on Functional Equations and their Applications", Academic Press. New York 1966 (págs. 31-48).

BIBLIOGRAFIA

ALCAIDE, Angel. – Cálculo infinitesimal para economistas. Ed. Aguilar. Madrid 1980. Cap. 10, ep. 4 y 5

ALLEN, R.G.D. – Análisis matemático para economistas. Ed. Aguilar. Madrid, 1971. Cap XII, ep. 7-9.

BORRELL FONTELLES, José. – Métodos matemáticos para la economía. Campos y Autosistemas. Ed. Pirámide. Madrid 1981, Cap 6.

LANCASTER, Kelvin. – Economía Matemática Ed. Bosch. Barcelona 1972. Revisión 8, ep. 6

RODRIGUEZ, Alfonso. – Matemáticas para economístas (II), Ed. Autor. Barcelona, 1980. Cap 15.

VEGAS PEREZ, Angel y LOPEZ CACHERO, Manuel. – Elementos de matemáticas para economistas (II). Ed. Pirámide. Madrid 1976. Cap 1, ep. 10.

YAMANE, Taro. – Matemáticas para economistas. Ed. Ariel, S.A. Barcelona. 1965. Cap. 4, ep. 9 y 10.