



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

ESTIMACIÓN DE VELOCIDADES DE ONDA DE CORTE: REGISTRO DE ONDAS
SUPERFICIALES LOVE V/S REFRACCIONES DE ONDAS INTERNAS SH

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN
GEOFÍSICA

FELIPE ANDRÉS GONZÁLEZ ROJAS

PROFESOR GUÍA:
EMILIO VERA SOMMER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALFREDO EISENBERG GRIMBERG
JAVIER RUIZ PAREDES

SANTIAGO DE CHILE
AGOSTO 2015

Resumen

En el presente trabajo se estudia la estimación de estructuras de velocidad unidimensionales de onda de corte mediante el análisis de ondas internas SH refractadas e independientemente de ondas superficiales Love, ambas, muchas veces presentes en un mismo registro sísmico multicanal. El método de ondas superficiales Love permite determinar un modelo de velocidad mediante la modelación de curvas de dispersión, mientras que el método de refracción sísmica SH se basa en la modelación de las primeras llegadas de las ondas SH, correspondientes a las ondas de cuerpo refractadas en cada una de las capas del medio.

Se desarrolló la metodología completa para obtener un modelo de velocidad desde el registro de ondas superficiales Love. Este proceso incluye el cálculo de curvas de dispersión teóricas desde un modelo de velocidad; el cálculo de curvas de dispersión empíricas desde registros sísmicos reales o sintéticos; y finalmente la modelación de estas curvas por prueba y error para la determinación de la estructura de velocidad de onda de corte en profundidad.

El objetivo final es comparar la metodología desarrollada con el método de refracción sísmica aplicado a ondas de cuerpo SH, discutiendo las ventajas y desventajas de cada uno con respecto a la estimación de velocidades. Si bien estos métodos se basan en el análisis de distintas porciones del mismo registro sísmico, ambos buscan el mismo resultado, y es por lo tanto natural compararlos.

La aplicación de los dos métodos mencionados se desarrolló sobre datos sísmicos reales correspondientes a ondas SH generadas y registradas mediante una fuente y receptores horizontales. La modelación de las curvas de dispersión teóricas versus experimentales indicó gran sensibilidad de estas a las propiedades del medio en las capas superficiales (primeros metros) y una sensibilidad descendiente en profundidad, probablemente debido a la ausencia de datos en bajas frecuencias ($< 10 \text{ Hz}$). Por otra parte, el método de refracción sísmica muestra resultados consistentes con los del método de ondas superficiales Love, pero alcanzando mayores profundidades con mayor certeza.

La utilización de los métodos mencionados puede llevarse a cabo complementariamente, aprovechando las ventajas de cada uno para disminuir las incertezas en los modelos de velocidad resultantes. Además, ambos métodos podrían ser empleados adicionalmente a estudios sísmicos enfocados a conocer la estructura de la velocidad compresional P en profundidad, obteniendo una estructura de velocidades bien determinada.

A mis padres Ilia y Jorge

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todas las personas que de alguna u otra forma estuvieron presentes en mi vida en el período en que desarrollé este trabajo. A mi familia, a mis padres Ilia y Jorge por el apoyo incondicional, a mi hermano Sebastián por ser mi clon, a mis amigos Janisse y Adolfo por la eterna compañía y estupideces varias, y en general a toda la gente que me contagió con su buena onda, risas y cariños, ellos saben quienes son.

Además quiero agradecer a mis compañeros de trabajo, al NGA por la buena onda, el aprendizaje y la buena disposición para darme el espacio y tiempo necesario para terminar mi tesis como se debe. A mi profesor guía Emilio Vera por la dedicación y entusiasmo durante todo el proceso.

Por último quisiera hacer un reconocimiento a Alfredo Eisenberg, que junto a su empresa Geoexploraciones contribuyeron con datos sísmicos para el desarrollo de parte de mi tesis.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.1.1. Métodos sísmicos para la caracterización de suelos	2
1.1.2. Métodos de ondas superficiales	3
1.2. Motivación	5
1.2.1. Aplicaciones en Ingeniería Civil	5
1.2.2. ¿Por qué ondas Love? Ventajas y desventajas	6
1.3. Objetivos	7
1.3.1. Objetivo general	7
1.3.2. Objetivos específicos	7
2. Marco teórico	8
2.1. Ondas Superficiales	8
2.2. Ondas SH en un medio homogéneo	8
2.3. Ondas Love: Una capa sobre un semi-espacio	11
2.3.1. Curvas de dispersión	13
2.4. Ondas SH planas en un medio estratificado	15
2.4.1. Coeficientes de reflexión generalizados	18
2.4.2. Condición de superficie libre y curvas de dispersión	20
2.5. Inclusión de fuente lineal y sismogramas sintéticos SH	22
2.5.1. Inclusión de la superficie libre	25
2.5.2. Sismogramas sintéticos en el dominio temporal	25
2.5.3. Inversión de sismogramas onda SH y curvas de dispersión	27
3. Metodología	31
3.1. Cálculo de curvas de dispersión	31
3.1.1. Método de la matriz de transferencia	31
3.1.2. Método de coeficientes de reflexión y transmisión generalizados	35
3.1.3. Algoritmo para el cálculo de curvas de dispersión	39
3.1.4. Alcances físicos	42
3.2. Curvas de dispersión desde sismogramas (x, t)	46
3.2.1. Transformación de (x, t) a (τ, p)	46
3.2.2. Transformación de (τ, p) a (ω, p)	48
3.2.3. Alcances sobre inversión	50
3.3. Adquisición y procesamiento de datos	50
3.4. Comparación ondas superficiales vs refracción de ondas SH	51

4. Resultados	53
4.1. Sismogramas utilizados	53
4.1.1. Linderos, Enero 2013 (LIN)	53
4.1.2. Río Itata (ITA)	55
4.2. Modelación de curvas de dispersión	57
4.2.1. Modelación datos LIN	58
4.2.2. Modelación datos ITA	60
4.3. Modelación 1D de ondas refractadas	62
4.3.1. Refracción sísmica datos LIN	62
4.3.2. Refracción sísmica datos ITA	65
5. Discusión y conclusiones	68
5.1. Discusión	68
5.1.1. Modelación de curvas de dispersión	68
5.1.2. Modelos de velocidad desde método de ondas Love	68
5.1.3. Uso de modos superiores de propagación	69
5.1.4. Comparación entre métodos Love y refracción SH	71
5.2. Conclusiones	76
Bibliografía	78
A. Coeficientes de reflexión y transmisión	81
B. Inclusión de superficie libre en sismogramas sintéticos SH	85
C. Transformada $\tau - p$: Registro sísmico completo	91

Índice de tablas

2.1. Medio compuesto por dos capas y un semi-espacio	22
4.1. Modelo de velocidad para datos LIN (método ondas Love)	60
4.2. Modelo de velocidad estratificado para ITA-P1 (ondas Love)	61
4.3. Modelo de velocidad estratificado para ITA-P2 (ondas Love)	62
4.4. Modelo de velocidad para LIN (refracción SH)	64
4.5. Modelo de velocidad para LIN (refracción onda P)	64
4.6. Modelo de velocidad para ITA-P1 (refracción SH)	66
4.7. Modelo de velocidad para ITA-P2 (refracción SH)	67

Índice de figuras

1.1.	Esquema general de métodos sísmicos activos - no invasivos	3
1.2.	Esquema general de métodos sísmicos activos - invasivos	4
1.3.	Tabla de clasificación de suelos según la norma chilena	6
2.1.	Propagación y movimiento de las ondas SH	9
2.2.	Propagación de ondas planas en un medio homogéneo	11
2.3.	Medio basado en una capa sobre un semi-espacio	11
2.4.	Ej. de amplitud de desplazamiento (una capa sobre un semi-espacio)	14
2.5.	Ej. de curvas de dispersión (una capa sobre un semi-espacio)	16
2.6.	Medio estratificado sobre un semi-espacio	17
2.7.	Ej. de curvas de dispersión (dos capas sobre un semi-espacio)	21
2.8.	Medio estratificado entre semi-espacios	23
2.9.	Ej. de sismogramas $U(\omega, p)$ (dos capas sobre un semi-espacio)	26
2.10.	Ej. de sismogramas sintéticos $x - t$ (dos capas sobre un semi-espacio)	28
2.11.	Curvas camino-tiempo sobre zoom de sismogramas sintéticos	29
3.1.	Tiempo de cálculo de modo fundamental v/s cantidad de capas	40
3.2.	Ej. de función de dispersión para dos frecuencias distintas (método MCRTG)	41
3.3.	Dispersión geométrica de las ondas superficiales	42
3.4.	Ejemplos de dispersión geométrica	43
3.5.	Interferencia constructiva de ondas SH	44
3.6.	Sensibilidad del modo fundamental con respecto a propiedades del medio	45
3.7.	Ej. de sismogramas (τ, p) , calculados teóricamente y desde sismogramas sintéticos (x, t)	47
3.8.	Resolución de sismogramas (f, p) con respecto a la distancia entre geófonos	49
3.9.	Esquema general en planta de adquisición de datos en terreno	51
3.10.	Esquema de método de refracción sísmica	52
4.1.	Sismogramas $x - t$ SH de Linderos, 2013	54
4.2.	Configuración de terreno de línea sísmica experimento Linderos, 2013	54
4.3.	Configuración de terreno de líneas sísmicas Itata	55
4.4.	Sismogramas $x - t$ SH de Itata	56
4.5.	Ejemplo de programa utilizado para la transformación de los datos	57
4.6.	Ejemplo de programa utilizado para la modelación de las curvas de dispersión.	58
4.7.	Amplitud espectral de sismogramas LIN en el espacio (f, p)	59
4.8.	Modelación de curvas de dispersión de datos LIN.	59
4.9.	Amplitud de sismogramas ITA en el espacio (f, p)	60

4.10. Modelación de curvas de dispersión de datos ITA	61
4.11. Digitalización del tiempo de arribo de las primeras llegadas de ondas SH para datos LIN	63
4.12. Digitalización del tiempo de arribo de las primeras llegadas de ondas P para datos LIN	63
4.13. Modelación directa de las primeras llegadas de datos LIN	64
4.14. Digitalización del tiempo de arribo de las primeras llegadas para datos ITA .	65
4.15. Modelación directa de las primeras llegadas datos ITA-P1.	66
4.16. Modelación directa de las primeras llegadas datos ITA-P2.	66
5.1. Comparación de modelos V_s Love para datos ITA	70
5.2. Comparación de modelos de V_s para datos LIN, 2013.	71
5.3. Comparación entre tiempos de arribo observados y predichos por modelo Love, datos LIN.	72
5.4. Comparación de modelos de V_s para ITA-P1	73
5.5. Comparación de modelos de V_s para ITA-P2	73
5.6. Comparación entre tiempos de arribo observados y predichos por modelo Love, datos ITA	74
A.1. Propagación de ondas SH en dos medios separados por una interfaz	81
A.2. Onda incidente desde el medio superior	84
B.1. Capa homogénea limitada por dos interfaces	85
B.2. Ondas reflejadas dentro de la capa homogénea	86
B.3. Tipos de ondas que se propagan en la capa homogénea	88
B.4. Representación de la onda directa	89
C.1. Interpretación gráfica de la transformada $\tau - p$	92
C.2. Interpretación gráfica de la transformada $\tau - p$	92
C.3. Simetría entre la transformada $\tau - p$ y su inversa	94

Capítulo 1

Introducción

Las características geotécnicas del subsuelo se han convertido en una información valiosa para la ingeniería de obras civiles y construcción. Esto se hace particularmente importante en Chile debido, entre otras cosas, a la ocurrencia de grandes terremotos que han hecho necesario desarrollar metodologías enfocadas a disminuir sus daños y consecuencias. En este contexto, durante las últimas décadas los métodos geofísicos han contribuido de manera importante a las metodologías aplicadas en ingeniería civil, mostrando ser muy efectivos y de menor costo que métodos invasivos típicamente utilizados para la caracterización del subsuelo (Stokoe et al. 2004).

Parámetros geotécnicos importantes están asociados a las velocidades de las ondas elásticas que se propagan por el subsuelo. En particular, el módulo de rigidez tiene una relación directa con la velocidad de onda S u onda de corte (V_s o β):

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.1)$$

por lo que encontrar valores de ésta versus profundidad, se ha convertido en una tarea valiosa en el contexto de estudios de suelos asociados a la geotecnia e ingeniería en general. Los métodos geofísicos de exploración del subsuelo asociados a propagación de ondas sísmicas, reflexión, refracción y ondas superficiales, han sido entonces ampliamente utilizados en este tipo de estudios. En este sentido, el uso de ondas superficiales ha tomado últimamente gran relevancia, debido básicamente a que constituyen un gran porcentaje (60-90 %) de la energía contenida en los registros sísmicos de terreno. La velocidad de las ondas superficiales, por otro lado, depende mayoritariamente de la variación de V_s con profundidad, que es tal vez el parámetro más importante en la determinación de la calidad de suelos. En las últimas décadas, diversas metodologías y configuraciones de terreno se han desarrollado para obtener perfiles de V_s a partir del registro de ondas superficiales (Park et al. 1999b, Stokoe et al. 1994).

En este estudio se propone estudiar el uso de ondas superficiales de Love para determinar la estructura de velocidad de las ondas de corte, comparando esta metodología con la modelación directa de las refracciones de las ondas de cuerpo SH.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Métodos sísmicos para la caracterización de suelos

Como se ha explicado anteriormente, la caracterización geotécnica del subsuelo se ha convertido en una tarea importante en el ámbito de la ingeniería civil y geotécnica. En este contexto, los métodos geofísicos, particularmente relacionados con ondas sísmicas, han sobresalido sobre los demás por sus características en cuanto a costo y eficiencia.

Los métodos utilizados tradicionalmente se pueden clasificar de dos formas: de acuerdo a la fuente sísmica usada, estos pueden ser métodos activos o pasivos, o de acuerdo al nivel de perturbación producida en el entorno del lugar de estudio en métodos invasivos o no invasivos.

Las ventajas presentes en los métodos no invasivos con respecto a los invasivos son: en primer lugar, el ahorro de tiempo y dinero, debido a que la instrumentación se despliega en la superficie del suelo; en segundo lugar, se evitan posibles consecuencias ambientales asociadas a las perforaciones del subsuelo donde se configuran los instrumentos; y por último, la utilización del espacio es más efectiva.

Métodos activos y no invasivos

Dentro de los métodos activos, no invasivos utilizados se encuentran: Reflexión sísmica, Refracción sísmica y Ondas superficiales (Fig. 1.1). Estos métodos están orientados a la caracterización 1D o 2D del subsuelo mediante la determinación de una estructura de velocidad de onda compresional y/o de corte en profundidad.

Cabe destacar que, para los tres métodos aquí mencionados, se utiliza regularmente una fuente sísmica que produce una perturbación vertical, acompañada de geófonos uni-axiales para registrar también en la dirección vertical. En el presente trabajo sin embargo se estudiarían las ondas de tipo Love, generadas a partir de una fuente horizontal con geófonos que miden movimiento horizontal, especialmente para aprovechar sus características en la determinación de estructuras de velocidad de onda de corte (onda S) en profundidad, parámetro relevante en la caracterización geotécnica de suelos.

Métodos activos e invasivos

Dentro de los métodos activos e invasivos se encuentran: Ensayo Crosshole, Downhole, Penetrómetro de cono sísmico y Sonda de suspensión (Fig. 1.2). Estos métodos permiten la determinación in situ de la estructura de velocidad de onda P y/o onda S a partir de la propagación y registro de ondas directas mediante perforaciones realizadas a distintas profundidades del subsuelo.

En general, la ventaja de los métodos invasivos mencionados es que las mediciones son realizadas directamente en el medio de estudio, mejorando la resolución de los resultados.

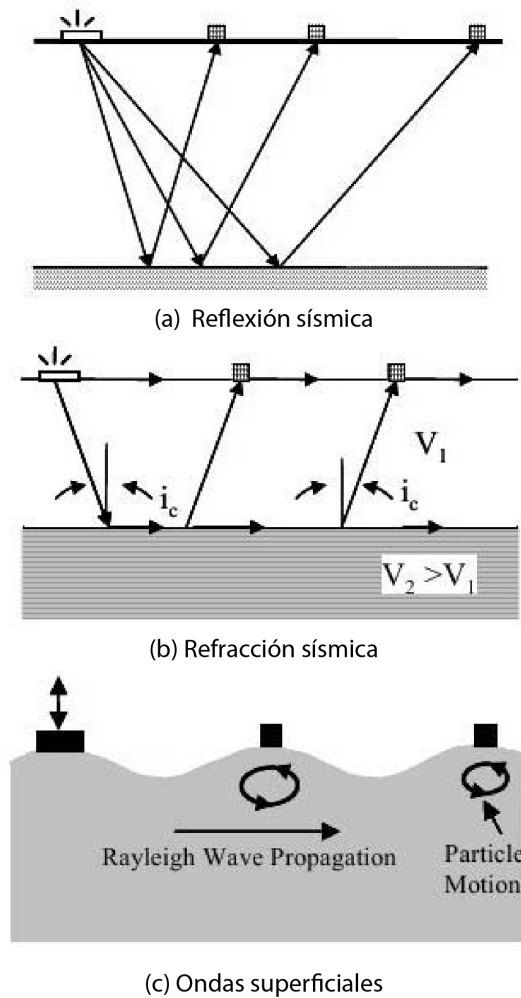


Figura 1.1: Esquema general de métodos sísmicos activos - no invasivos (modificado desde Stokoe et al. 2004). En (a) se muestra la configuración típica de un estudio de reflexión sísmica; en (b) correspondiente al método de refracción sísmica y en (c) al estudio de ondas superficiales, generalmente de tipo Rayleigh.

Sin embargo, el costo monetario y de tiempo destinado a estos métodos son mucho mayores que en los métodos no invasivos.

1.1.2. Métodos de ondas superficiales

La ventaja de los métodos asociados a ondas superficiales con respecto a los demás métodos geofísicos es su efectividad y simpleza en cuanto a la medición de datos en terreno. La naturaleza no invasiva del método permite realizar una cantidad significativa de mediciones rápidamente y abarcando grandes porciones de terreno.

El procesamiento posterior a la medición de datos incluye la determinación de la velocidad de fase de las ondas superficiales dependiente de la frecuencia de estas (curvas de dispersión).

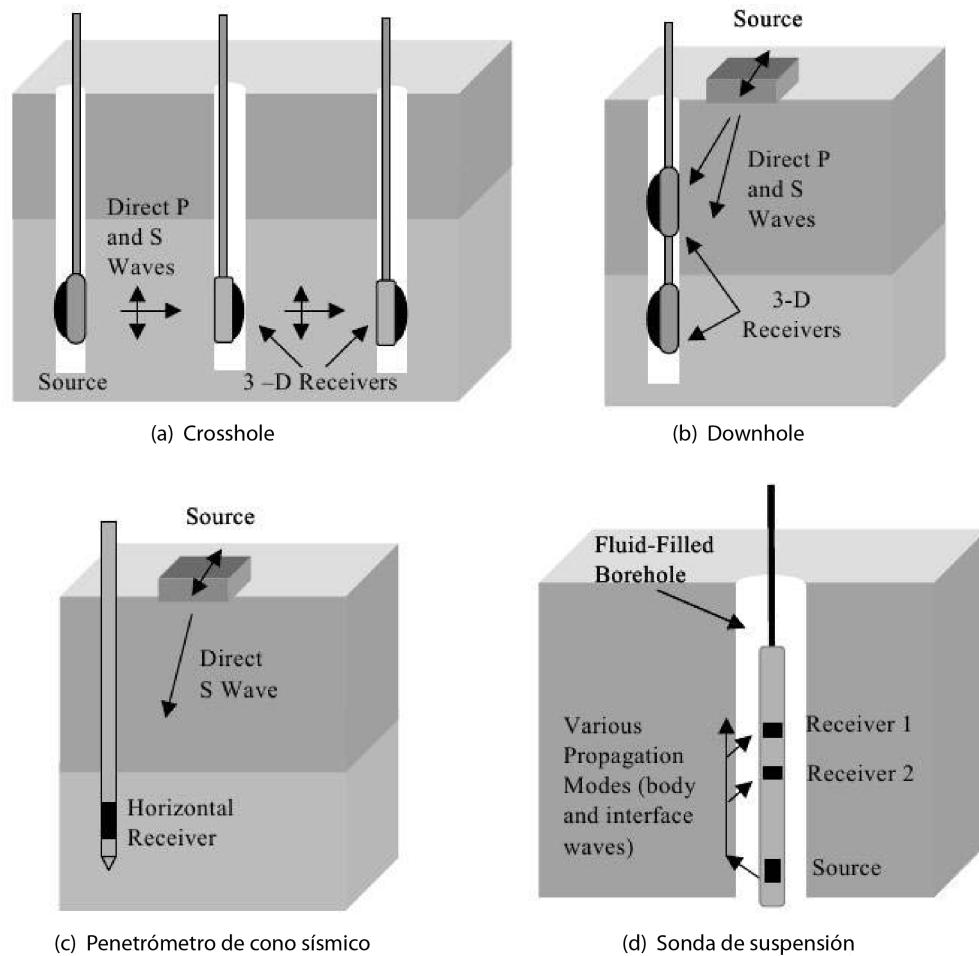


Figura 1.2: Esquema general de métodos sísmicos activos - invasivos (modificado desde Stokoe et al. 2004). En (a) se presenta la configuración del ensayo geotécnico de Crosshole; en (b) el correspondiente al ensayo Downhole; en (c) al Penetrómetro de cono sísmico y en (d) el ensayo de Sonda de suspensión.

Además, la determinación de la estructura de velocidad del medio requiere la modelación de estas curvas de dispersión. El cálculo de estas curvas (a partir de los datos y teóricamente) se realiza a partir de distintos métodos. Dentro de esos métodos se encuentran: SASW (Spectral Analysis of Surface Waves method) [Stokoe et al. 1994], Frecuencia-número de onda (f-k spectrum method) [Gabriels et al. 1987], MASW (Multi-channel Analysis of Surface Waves method) [Park et. al 1999; Park et al, 2001], CSW (Continuous Surface Wave) [Matthews et al. 1996; Menzies and Matthews, 1996].

En este trabajo, el método de determinación de las curvas de dispersión experimentales se basará en la transformada tau-p (ej. McMechan and Yedlin, 1981). Para esto se utilizarán datos generados a partir de una configuración fuente-receptores convencional de sísmica de reflexión o refracción.

1.2. Motivación

1.2.1. Aplicaciones en Ingeniería Civil

La estructura de velocidad de onda de corte (V_s) es una variable de gran valor para la caracterización geotécnica de suelos. En particular, en las normas de diseño sísmico de edificios existen artículos específicos donde la importancia del valor de V_s o derivados de este es esencial para la aplicación de la norma.

El 6 de Diciembre de 2011 se aprueba en Chile el reglamento que fija el diseño sísmico de edificios, el cual indica en su artículo 5° sobre la Exploración geotécnica asociada a la clasificación sísmica de suelos que: "Teniendo en consideración la tecnología disponible a lo largo del país, la clasificación sísmica de suelos se ha optado por centrarla en el parámetro que se estima más relevante en una primera aproximación, éste es el parámetro de rigidez a bajas deformaciones de los estratos superiores, correspondiente a la velocidad de ondas de corte promedio de los 30 metros superiores del terreno, V_{s30} ". Este parámetro se determina de acuerdo a la siguiente expresión:

$$V_{s30} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{V_{s-i}}} \quad (1.2)$$

Donde:

V_{s-i} : velocidad de ondas de corte del estrato i , en m/s .

h_i : espesor del estrato i , en metros.

n : número de estratos en los 30 metros superiores del terreno.

Además indica que: 'La velocidad de propagación de las ondas de corte puede ser medida por ensayos down-hole, cross-hole o sonda de suspensión o a partir de mediciones de ondas superficiales (Rayleigh), por métodos como SASW, MASW o ReMi. En estos casos se deben informar las curvas de dispersión y los resultados del perfil de velocidades en profundidad para dos mediciones preferentemente ortogonales'.

Por último, el artículo 6° de dicho decreto se refiere a la clasificación sísmica de suelos (Figura 1.3), donde el valor de V_{s30} forma parte esencial en la determinación de la calidad geotécnica del terreno de fundación.

De manera similar al V_{s30} , existen otros parámetros empíricos ligados a la litología del suelo como V_{s2} , V_{s5} , V_{s10} , V_{s50} , etc (ej. Clahan et al, 2010). Estas velocidades de onda de corte promedio en distintos rangos de profundidad dan una buena aproximación a las características y comportamiento del suelo para distintas aplicaciones de ingeniería civil y geotecnia.

Suelo Tipo		V_{s30} (m/s)	RQD	q_u (MPa)	(N_1) (golpes/pie)	S_u (MPa)
A	Roca, suelo cementado	≥ 900	$\geq 50\%$	≥ 10 ($\epsilon_{qu} \leq 2\%$)		
B	Roca blanda o fracturada, suelo muy denso o muy firme	≥ 500		$\geq 0,40$ ($\epsilon_{qu} \leq 2\%$)	≥ 50	
C	Suelo denso o firme	≥ 350		$\geq 0,30$ ($\epsilon_{qu} \leq 2\%$)	≥ 40	
D	Suelo medianamente denso, o firme	≥ 180			≥ 30	$\geq 0,05$
E	Suelo de compacidad, o consistencia mediana	< 180			≥ 20	$< 0,05$
F	Suelos Especiales	*	*	*	*	*

presión de confinamiento de 0,1 MPa. Aplicable sólo a suelos que clasifican como arenas

- RQD : Rock Quality Designation, según norma Astm D 6032
- q_u : Resistencia a la compresión simple del suelo
- : Deformación unitaria desarrollada cuando se alcanza la resistencia máxima en el ensayo de compresión simple
- S_u : Resistencia al corte no-drenada del suelo

Figura 1.3: Tabla de clasificación de suelos según la norma chilena (desde Decreto 61 MINVU, 2011).

1.2.2. ¿Por qué ondas Love? Ventajas y desventajas

Como se explicará en una sección posterior (Capítulo 2), las ondas Love se forman a partir de ondas de cuerpo SH que están atrapadas y reverberando en las capas superficiales de la tierra producto de una fuente sísmica. De manera análoga, las ondas superficiales Rayleigh están compuestas de ondas P y SV (onda S vertical), cuyas componentes están acopladas dentro del movimiento P-SV. Una de las ventajas de usar ondas Love vs ondas Rayleigh está relacionada justamente con esto: las ondas SH no interactúan con ninguna otra componente de ondas, a diferencia de las ondas P-SV, que se propagan acopladas una de la otra.

Lo anterior es una ventaja para el objetivo de este trabajo (1.3), puesto que la velocidad de fase de las ondas Love no depende de la velocidad de las ondas P, lo que hace la relación entre el método y el objetivo mucho más directa y limpia. Una consecuencia de esto es que se cuenta con una menor cantidad de parámetros en la modelación de las curvas de dispersión, lo que hace menos ambiguo el resultado.

Resultado de lo mismo, la formulación matemática que hay detrás de la modelación es mucho más simple también, reduciendo los tiempos de programación y computación del método. Además las curvas de dispersión tienden a ser más simples y no producen grandes superposiciones o 'mode kissing' como en el caso de las ondas Rayleigh (Strobbia 2005).

Una de las desventajas principales de utilizar ondas Love es la relativa complejidad de adquisición de datos, puesto que, a diferencia de las ondas Rayleigh, la generación de ondas

SH requiere una fuente con componente horizontal. La energía aplicada al terreno tiende a ser menor con una fuente horizontal (ondas SH-Love) que con una vertical, produciendo señales con menor calidad (menor índice señal-ruido).

Otra desventaja del método es que teóricamente las ondas Love no existen en todos los casos, mientras que las ondas Rayleigh si, lo que lo hace menos robusto (Strobbia 2005). Las ondas Love no existen por ejemplo en un medio homogéneo, y tampoco en el caso en que la velocidad de onda de corte disminuya sistemáticamente en profundidad (medio inversamente dispersivo).

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Este trabajo propone desarrollar una metodología para encontrar estructuras de V_s versus profundidad a partir de registros de ondas SH internas refractadas, e independientemente, de ondas superficiales (Love). Esta metodología hará posible comparar los resultados obtenidos a partir de las ondas superficiales con aquellos obtenidos por modelación directa de las ondas SH internas.

1.3.2. Objetivos específicos

- Familiarizarse con la teoría de propagación de ondas elásticas en medios estratificados con énfasis en ondas SH, tanto internas (refractadas) como superficiales (Love).
- Diseño de metodologías de terreno para la generación de ondas SH.
- Construcción de curvas de dispersión de ondas superficiales para medios estratificados unidimensionales.
- Obtención de curvas de dispersión a partir de registros sísmicos.
- Obtención de un modelo de V_s versus profundidad a partir de la modelación de curvas de dispersión.
- Obtención de un modelo de V_s versus profundidad a partir de la modelación directa de ondas SH internas (refractadas).
- Comparación de resultados obtenidos por metodologías de ondas superficiales Love y refracción de ondas de cuerpo SH.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Ondas Superficiales

Las ondas superficiales se propagan horizontalmente, paralelamente a la superficie de la Tierra, y bajo la superficie libre. Debido a que estas ondas se propagan sólo horizontalmente, el decaimiento de la amplitud con la distancia es menor que el de las ondas de cuerpo, cuya propagación es volumétrica. Además, la energía sísmica proveniente de las ondas superficiales y contenida en los sismogramas es de alrededor del 70 % del total de la energía en los registros sísmicos (Aki and Richards, 1980).

Una característica importante de las ondas superficiales es que son dispersivas, es decir, que su velocidad de propagación (velocidad de fase) depende de la frecuencia de la onda (Stokoe et al. 1994). En este capítulo se estudiará la propagación bidimensional (2D) de las ondas superficiales en un medio verticalmente heterogéneo. Cabe destacar que, debido a que este trabajo está enfocado en las ondas SH, en este capítulo se pondrá énfasis en las ondas superficiales Love.

2.2. Ondas SH en un medio homogéneo: Solución elemental de ondas planas

Para un medio verticalmente estratificado (en dirección z), las ondas SH corresponden a ondas S donde el movimiento de partículas al paso de la onda posee sólo componente horizontal. Las ondas SH interactúan sólo consigo mismas y, por lo tanto, no originan conversiones a ondas P u ondas SV (ondas S con componente vertical). Sin pérdida de generalidad, se considera aquí una onda SH plana cuya dirección de propagación (vector normal al frente de ondas), está contenida en el plano $(x - z)$. Para esta onda, el movimiento de partículas v es estrictamente en el sentido del eje y , depende de las coordenadas espaciales (x, z) , del tiempo t , y es independiente de la coordenada y , es decir $v = v(x, z, t)$ (Fig. 2.1).

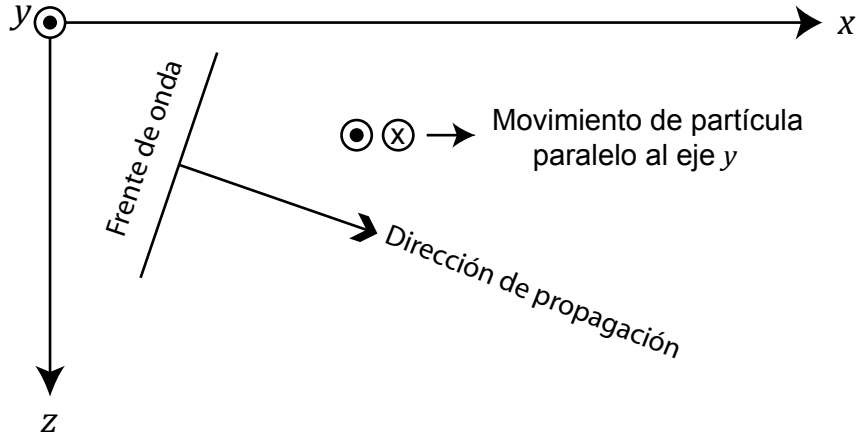


Figura 2.1: Esquema general de la propagación y movimiento de las ondas SH.

En un medio homogéneo, $v(x, z, t)$ cumple con la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \beta^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

donde β es la velocidad de propagación de onda S en el medio.

Aplicando una transformada de Fourier temporal¹ a (2.1), se tiene:

$$(i\omega)^2 v = \beta^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

donde ω es la frecuencia angular, y ahora $v = v(x, z, \omega)$ es la transformada de Fourier temporal del desplazamiento $v = v(x, z, t)$.

Para (2.2) se busca una solución por separación de variables del estilo:

$$v(x, z, \omega) = F(x, \omega)G(z, \omega) \quad (2.3)$$

Insertando (2.3) en (2.2), se llega a:

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} = -\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2}$$

En esta última expresión, el miembro izquierdo depende sólo de z , mientras que el lado derecho depende exclusivamente de x . Así, ambos miembros deben ser igual a una constante que se denominará k^2 . Se deben entonces cumplir las siguientes ecuaciones:

¹Definición de transformada de Fourier utilizada es: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$. La transformada inversa correspondiente es: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$.

$$\frac{d^2F}{dx^2} + k^2F = 0$$

$$\frac{d^2G}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2\right)G = 0$$

cuyas soluciones son del tipo:

$$F = a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} \quad (2.4a)$$

$$G = c(k)e^{i\nu z} + d(k)e^{-i\nu z} \quad (2.4b)$$

donde $\nu = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2}$ y $-\infty < k < +\infty$. Si en ν el radicando es negativo o la raíz es compleja en general, se elegirá la rama negativa $Im(\nu) < 0$. Desde (2.4a), dada la equivalencia entre las soluciones $\propto e^{ikx}$ con $k < 0$ y las soluciones $\propto e^{-ikx}$ con $k > 0$, desde (2.3), (2.4a) y (2.4b) se tomará la solución elemental para un número de onda k como:

$$v(x, z, \omega) = e^{-ikx}[D(k)e^{-i\nu z} + U(k)e^{i\nu z}] \quad (2.5)$$

En términos de la lentitud horizontal o parámetro de rayo $p = k/\omega$, se tiene:

$$\nu = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2} = \omega \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p^2} = \omega q$$

donde $q = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p^2}$ es la lentitud vertical y $p^2 + q^2 = \frac{1}{\beta^2}$.

Considerando lo anterior, desde (2.5) la solución elemental para un rayo de parámetro p es:

$$v(x, z, \omega) = e^{-i\omega p x}[De^{-i\omega q z} + Ue^{i\omega q z}] \quad (2.6)$$

Tanto en (2.5) como en (2.6), los términos $\propto De^{-i\omega q z}$ y $\propto Ue^{i\omega q z}$ se interpretan como ondas planas que se propagan hacia abajo (Down) y hacia arriba (Up) respectivamente (Fig. 2.2).

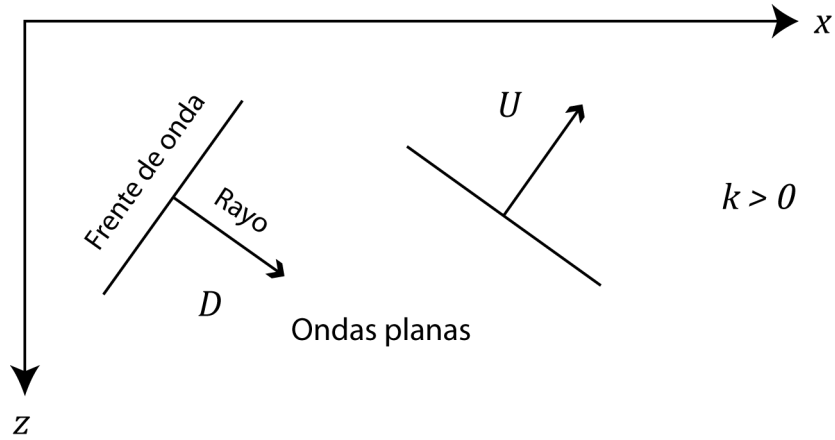


Figura 2.2: Propagación de ondas planas en un medio homogéneo.

2.3. Ondas Love: Una capa sobre un semi-espacio

En presencia de una superficie libre, el campo de ondas SH genera ondas superficiales de tipo Love que se propagan horizontalmente en el medio. En esta sección se analizará el caso más simple: un medio consistente de una capa homogénea sobre un semi-espacio homogéneo (Fig. 2.3).

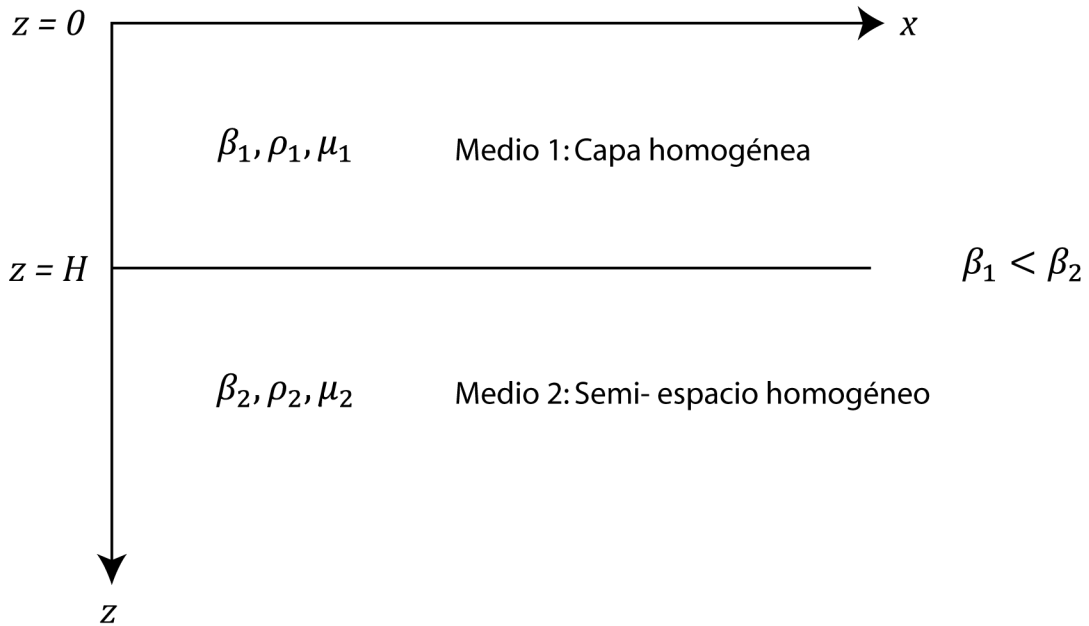


Figura 2.3: Esquema de un medio basado en una capa sobre un semi-espacio.

Considerando nuevamente la propagación de ondas planas, de la expresión (2.6) se tiene que:

$$v_1 = e^{-i\omega px} [D_1 e^{-i\omega q_1 z} + U_1 e^{i\omega q_1 z}] \quad (2.7a)$$

$$v_2 = e^{-i\omega p x} [D_2 e^{-i\omega q_2 z}] \quad (2.7b)$$

donde $q_i = \sqrt{\frac{1}{\beta_i^2} - p^2}$ es la lentitud vertical en el medio i , donde $i = 1, 2$. Por otra parte, v_1 y v_2 corresponden a los desplazamientos en la capa homogénea ($0 \leq z \leq H$) y semi-espacio inferior ($z \geq H$) respectivamente. En (2.7b) se ha tomado en cuenta que en el semi-espacio no existen ondas provenientes desde abajo. El término $\propto e^{i\omega q_2 z}$, cuya interpretación física es la de una onda que se propaga hacia arriba, debe despreciarse (evitando también crecimiento exponencial con profundidad), y se toma por lo tanto $U_2 = 0$.

Para encontrar la solución al problema, se deben imponer las condiciones de borde:

1. Superficie libre: esfuerzo tangencial σ_{yz} nulo en $z = 0$. Esto es:

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.8)$$

2. Continuidad del esfuerzo tangencial σ_{yz} en la interfaz ($z = H$). Esto es:

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=H} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \Big|_{z=H} \quad (2.9)$$

3. Continuidad de desplazamientos en la interfaz ($z = H$). Esto es:

$$v_1|_{z=H} = v_2|_{z=H} \quad (2.10)$$

De (2.7a) y (2.7b) se calculan las derivadas verticales correspondientes:

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = i\omega q_1 e^{-i\omega p x} [U_1 e^{i\omega q_1 z} - D_1 e^{-i\omega q_1 z}] \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = -i\omega q_2 e^{-i\omega p x} [D_2 e^{-i\omega q_2 z}] \quad (2.11b)$$

Desde (2.8) y (2.11a), la condición de superficie libre implica que:

$$U_1 = D_1 \quad (2.12)$$

Por otro lado, desde (2.9) junto con (2.11a) y (2.11b), la continuidad de esfuerzos impone que:

$$\mu_1 q_1 [D_1 e^{-i\omega q_1 H} - U_1 e^{i\omega q_1 H}] = \mu_2 q_2 D_2 e^{-i\omega q_2 H} \quad (2.13)$$

Por último, utilizando (2.10) con (2.7a) y (2.7b), la continuidad de desplazamientos lleva a que:

$$D_1 e^{-i\omega q_1 H} + U_1 e^{i\omega q_1 H} = D_2 e^{-i\omega q_2 H} \quad (2.14)$$

Imponiendo (2.12) en (2.13) y (2.14) se tiene:

$$-2i\mu_1 q_1 D_1 \sin(\omega q_1 H) = \mu_2 q_2 D_2 e^{-i\omega q_2 H} \quad (2.15)$$

$$2D_1 \cos(\omega q_1 H) = D_2 e^{-i\omega q_2 H} \quad (2.16)$$

Con las condiciones anteriores, para una onda de frecuencia angular ω , el campo de desplazamientos entonces es:

$$v_1(x, z, t) = 2D_1 \cos(\omega q_1 z) e^{i\omega(t - px)} \quad (2.17a)$$

$$v_2(x, z, t) = 2D_1 \cos(\omega q_1 H) e^{-\omega \hat{q}_2 (z - H)} e^{i\omega(t - px)} \quad (2.17b)$$

Estas expresiones corresponden a una onda Love armónica que se propaga en dirección del eje x , es decir paralela a la superficie, con velocidad $c = 1/p$. La amplitud del desplazamiento es inhomogénea y depende de la profundidad z ; en el medio inferior decrece exponencialmente a partir de la interfaz $z = H$ (Fig. 2.4).

2.3.1. Curvas de dispersión

Dada una velocidad de fase $c = 1/p$, la frecuencia angular ω no puede ser cualquiera.

De la división entre (2.15) y (2.16) se obtiene la condición o relación de dispersión:

$$\tan(\omega q_1 H) = \frac{\mu_2 \hat{q}_2}{\mu_1 q_1} \quad (2.18)$$

donde $\hat{q}_2 = iq_2 = \sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta_2^2}}$.

Explícitamente, en función del parámetro p , (2.18) toma la forma:

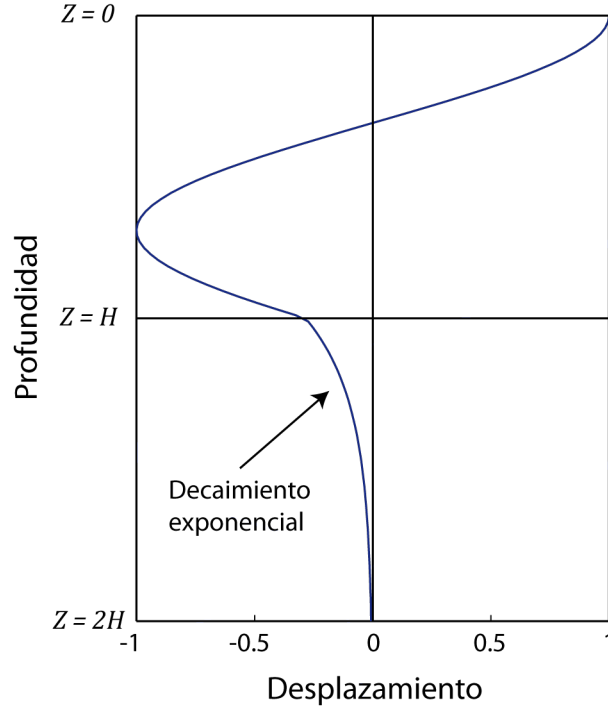


Figura 2.4: Ejemplo de la amplitud del desplazamiento v para un modelo de una capa sobre un semi-espacio. Esta amplitud está normalizada con respecto a su valor en la superficie $z = 0$.

$$\tan \left(\omega H \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2} \right) = \frac{\mu_2 \sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta_2^2}}}{\mu_1 \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2}} \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) impone que, dado un parámetro de rayo p (o velocidad de fase $c = 1/p$), la frecuencia ω no puede ser cualquiera. Para que las cantidades involucradas en ambos lados de la ecuación sean reales, se debe cumplir que:

$$\frac{1}{\beta_2} \leq p \leq \frac{1}{\beta_1} \quad (2.20a)$$

$$\beta_1 \leq c \leq \beta_2 \quad (2.20b)$$

La condición anterior indica que las ondas Love existen sólo en el rango post-crítico de parámetros de rayo, donde existe reflexión total. Es decir, las ondas Love se propagan en la dirección de x (con velocidad c) como un tren de ondas que están atrapadas, interfiriendo constructivamente por reverberación dentro de la capa superficial, mientras que en el semi-espacio la amplitud de estas ondas decrece exponencialmente.

Debido a la periodicidad de la función tangente, de (2.19) se deduce que:

$$\omega H \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2} = \arctan[F(p)] + n\pi \quad (2.21)$$

donde $F(p) = \frac{\mu_2 \sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta_2^2}}}{\mu_1 \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2}}$, y $n = 0, 1, 2, \dots$ representa el modo de propagación. De (2.21) se tiene que:

$$f_n = \frac{\arctan[F(p)] + n\pi}{2\pi H \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2}} \quad (2.22)$$

donde f_n es la frecuencia del n -ésimo modo de propagación. Dado un parámetro p (o velocidad de fase c), existen infinitas frecuencias que cumplen con la relación de dispersión. Por otra parte, como el rango de p (o c) es limitado al rango post-crítico ((2.20a) o (2.20b)), las curvas de dispersión no existen para todas las frecuencias. La frecuencia mínima en la cual aparece el modo n se le llama frecuencia de corte (f_{cn}), y se obtiene evaluando en $p = 1/\beta_2$:

$$f_{cn} = \frac{n}{2H \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}} \quad (2.23)$$

Para frecuencias menores a f_{cn} , el modo n de propagación no existe. En Fig. 2.5 se grafican las curvas de dispersión calculadas a partir de (2.22). Se observa que, tanto la posición de las curvas de dispersión como la frecuencia de corte dependen de las propiedades del medio. En una sección posterior se analizará el caso de las curvas de dispersión para medios más complejos que el expuesto aquí, donde la relación de dispersión no se puede en general resolver analíticamente y se debe recurrir a métodos numéricos para su evaluación.

2.4. Ondas SH planas en un medio estratificado, y coeficientes de reflexión generalizados

Se considera ahora el caso general, consistente de un conjunto de n capas planas horizontales homogéneas y un semi-espacio inferior (Fig. 2.6). Cada capa homogénea está caracterizada por su densidad (ρ), velocidad de onda S (β), parámetro de rigidez (μ) y espesor (d).

De acuerdo a (2.5), la solución elemental correspondiente a la capa l se puede escribir como:

$$v_l(x, z, \omega) = e^{-ikx} [D_l e^{-i\nu_l(z-z_l)} + U_l e^{i\nu_l(z-z_l)}] \quad (2.24)$$

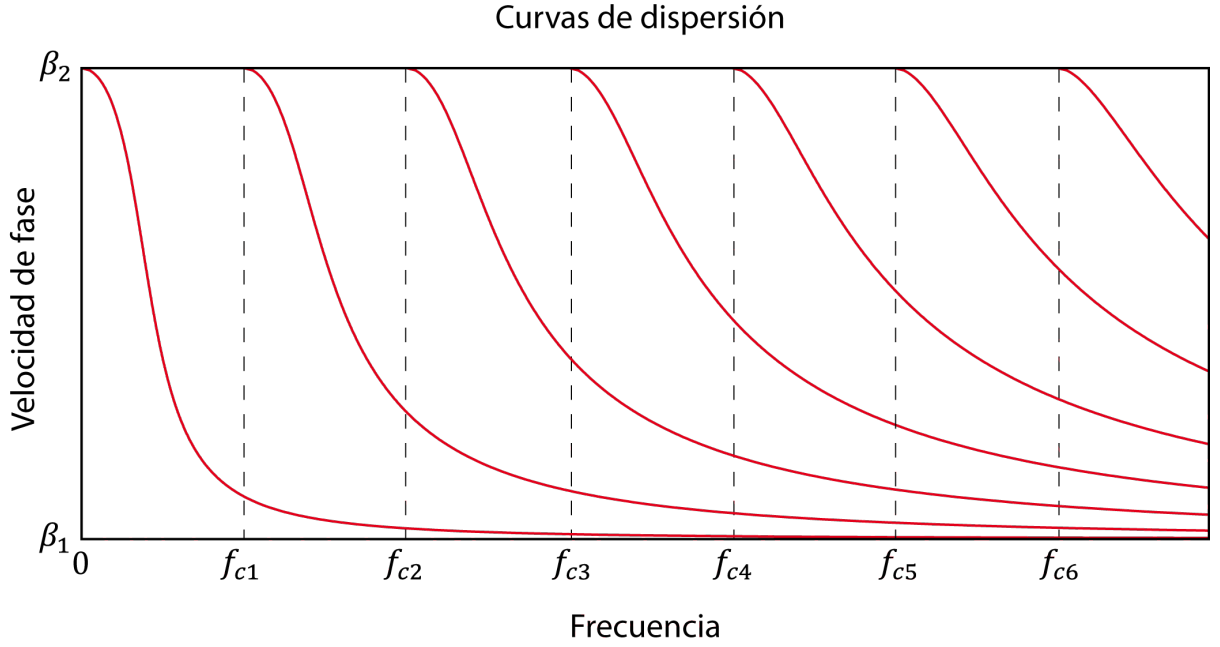


Figura 2.5: Ejemplo de curvas de dispersión para un medio compuesto de una capa sobre un semi-espacio.

donde $l = 0, 1, 2, \dots, n$; $\nu_l = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_l^2} - k^2}$, $Im(\nu_l) < 0$, y z_l es la coordenada z del tope de la capa l .

En términos del parámetro de rayo p , (2.24) se puede escribir como:

$$v_l(x, z, \omega) = e^{-i\omega p x} [D_l e^{-i\omega q_l (z - z_l)} + U_l e^{i\omega q_l (z - z_l)}] \quad (2.25)$$

donde $q_l = \sqrt{\frac{1}{\beta_l^2} - p^2}$ y $l = 0, 1, 2, \dots, n$.

En este caso, las condiciones de borde que se deben imponer son:

1. Superficie libre: esfuerzo tangencial σ_{yz} nulo en $z = z_0$. Esto es:

$$\mu_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0 \quad (2.26)$$

2. Continuidad del esfuerzos tangenciales σ_{yz} en cada interfaz $z = z_{l+1}$, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$\mu_l \frac{\partial v_l}{\partial z} \Big|_{z=z_{l+1}} = \mu_{l+1} \frac{\partial v_{l+1}}{\partial z} \Big|_{z=z_{l+1}} \quad (2.27)$$

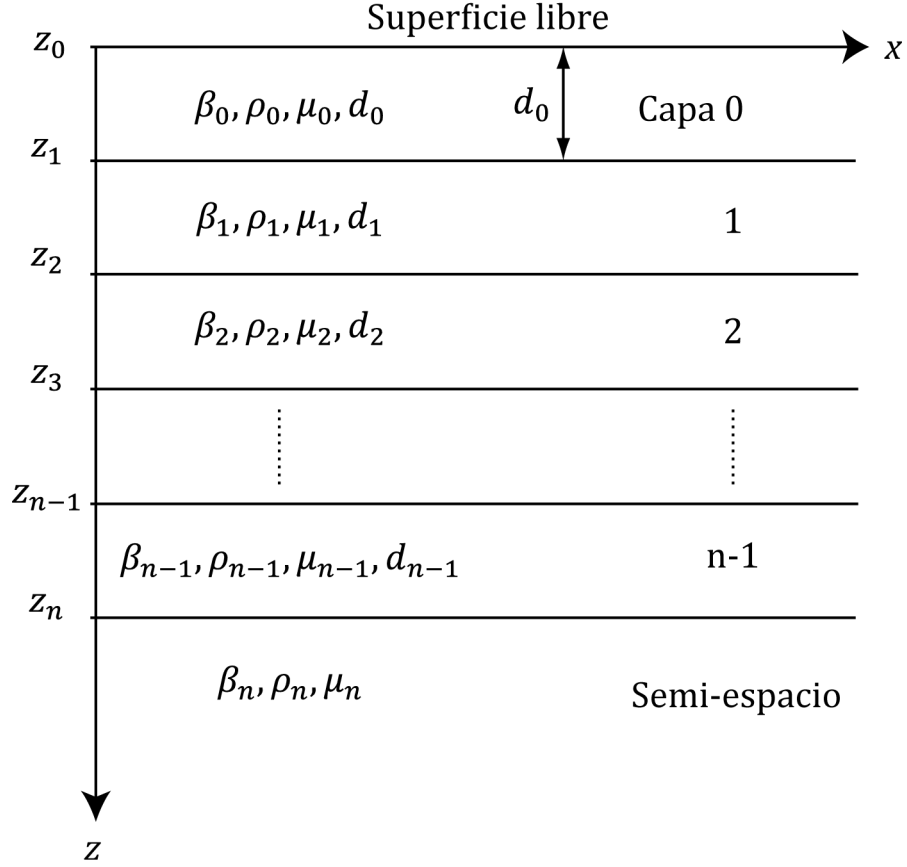


Figura 2.6: Esquema de un medio compuesto por una superficie libre sobre un medio estratificado y un semi-espacio inferior.

3. Continuidad de desplazamientos en cada interfaz $z = z_{l+1}$, $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$:

$$v_l|_{z=z_{l+1}} = v_{l+1}|_{z=z_{l+1}} \quad (2.28)$$

En el medio estratificado en consideración, la propagación de ondas planas se lleva a cabo conservando la lentitud horizontal p constante a través de todas las capas (ley de Snell). En la aplicación de las condiciones de borde, se puede entonces omitir el factor $e^{-i\omega p x}$ común a todas las capas.

Usando la continuidad de desplazamientos (2.28) junto con (2.25) se llega a la condición:

$$D_l e^{-i\omega q_l d_l} + U_l e^{i\omega q_l d_l} = D_{l+1} + U_{l+1} \quad (2.29)$$

donde $d_l = z_{l+1} - z_l$ es el espesor de la capa l .

Por otra parte, la condición de continuidad de esfuerzos (2.27) y (2.25) producen una segunda condición:

$$\mu_l q_l (-D_l e^{-i\omega q_l d_l} + U_l e^{i\omega q_l d_l}) = \mu_{l+1} q_{l+1} (-D_{l+1} + U_{l+1}) \quad (2.30)$$

2.4.1. Coeficientes de reflexión generalizados

Se definen los coeficientes de reflexión generalizados al tope (RT) y fondo (RB) de la capa l como: (apuntes E.Vera)

$$RT_l = \frac{U_l}{D_l} \quad (2.31a)$$

$$RB_l = RT_l e^{2i\omega T_l} \quad (2.31b)$$

donde $T_l = q_l d_l$.

Estos coeficientes corresponden a una generalización de los coeficientes de reflexión convencionales (ver Apéndice A). Además de la amplitud de las ondas, estos coeficientes dependen también de su frecuencia, tomando así en consideración las ondas con distinta fase que se propagan por el medio en cuestión. Las ecuaciones (2.31a) y (2.31b) muestran que la diferencia entre los coeficientes en el tope y en el fondo de la capa l es simplemente un desfase temporal de $2T_l$, que corresponde al tiempo de ida y vuelta que demora un rayo de parámetro p en recorrer la capa l .

De las condiciones de continuidad (2.29) y (2.30), se obtiene:

$$D_l e^{-i\omega T_l} \left(1 + \frac{U_l}{D_l} e^{2i\omega T_l} \right) = D_{l+1} \left(1 + \frac{U_{l+1}}{D_{l+1}} \right) \quad (2.32)$$

y

$$\mu_l q_l D_l e^{-i\omega T_l} \left(\frac{U_l}{D_l} e^{2i\omega T_l} - 1 \right) = \mu_{l+1} q_{l+1} D_{l+1} \left(\frac{U_{l+1}}{D_{l+1}} - 1 \right) \quad (2.33)$$

Haciendo la división entre (2.33) y (2.32), y considerando las definiciones de los coeficientes de reflexión generalizados (2.31a) y (2.31b), se tiene:

$$\gamma_l (RB_l - 1) (1 + RT_{l+1}) = (1 + RB_l) (RT_{l+1} - 1)$$

con

$$\gamma_l = \frac{\mu_l q_l}{\mu_{l+1} q_{l+1}} \quad (2.34)$$

de donde se obtiene:

$$RB_l = \frac{\left(\frac{\gamma_l - 1}{\gamma_l + 1}\right) + RT_{l+1}}{1 + \left(\frac{\gamma_l - 1}{\gamma_l + 1}\right) RT_{l+1}} \quad (2.35)$$

Reconociendo desde (2.34) que:

$$\frac{\gamma_l - 1}{\gamma_l + 1} = R_{l+1} = \frac{\mu_l q_l - \mu_{l+1} q_{l+1}}{\mu_l q_l + \mu_{l+1} q_{l+1}} \quad (2.36)$$

es el coeficiente de reflexión simple independiente de la frecuencia correspondiente a la interfaz $z = z_{l+1}$ (ver Apéndice A, ec. (A.12)), (2.35) se puede escribir como:

$$RB_l = \frac{R_{l+1} + RT_{l+1}}{1 + R_{l+1} RT_{l+1}} \quad (2.37)$$

De (2.31b) también se tiene:

$$RT_l = RB_l e^{-2i\omega T_l} \quad (2.38)$$

Las ecuaciones (2.37) y (2.38) permiten calcular el coeficiente de reflexión generalizado en el fondo de la primera capa (RB_0), partiendo desde el semi-espacio inferior. Considerando que en el semi-espacio no existen ondas propagándose hacia arriba, entonces $U_n = 0$. A partir de (2.31a) se tiene entonces que $RT_n = 0$, y de (2.37) con $l = n - 1$ se concluye que:

$$RB_{n-1} = \frac{R_n + RT_n}{1 + R_n RT_n} = R_n$$

lo que corresponde al coeficiente de reflexión generalizado en el fondo de la capa $n - 1$. Utilizando (2.38) con $l = n - 1$, se calcula entonces el coeficiente al tope de la capa $n - 1$, es decir $RT_{n-1} = R_n e^{-2i\omega T_{n-1}}$. Aplicando ahora (2.37) con $l = n - 2$ se puede calcular:

$$RB_{n-2} = \frac{R_{n-1} + R_n e^{-2i\omega T_{n-1}}}{1 + R_{n-1} R_n e^{-2i\omega T_{n-1}}}$$

y por (2.38) de inmediato:

$$RT_{n-2} = RB_{n-2} e^{-2i\omega T_{n-2}}$$

El proceso se repite y de esta manera, entre las ecuaciones (2.37) y (2.38) se aplica una recursión iterativa hasta llegar al fondo de la primera capa, obteniendo finalmente RB_0 , que representa la respuesta espectral del medio inferior en el fondo de la capa más superficial.

2.4.2. Condición de superficie libre y curvas de dispersión de ondas Love

De manera similar al caso de una capa sobre un semi-espacio, en el caso de un medio estratificado de n capas las ondas superficiales de tipo Love aparecen al imponer la condición de superficie libre en el sistema de estudio. La condición de superficie libre exige que las tracciones sean nulas en $z = z_0$.

En la primera capa del sistema ($l = 0$) la solución elemental (2.25) tiene la forma:

$$v_0(x, z, \omega) = e^{-i\omega px} [D_0 e^{-i\omega q_0(z-z_0)} + U_0 e^{i\omega q_0(z-z_0)}]$$

Usando lo anterior, el esfuerzo σ_{yz} en la capa superficial se puede escribir como:

$$\mu_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} = i\omega q_0 \mu_0 e^{-i\omega px} [U_0 e^{i\omega q_0(z-z_0)} - D_0 e^{-i\omega q_0(z-z_0)}] \quad (2.39)$$

Aplicando la condición de superficie libre en (2.39) se tiene que:

$$\mu_0 \left. \frac{\partial v_0}{\partial z} \right|_{z=z_0} = i\omega q_0 \mu_0 e^{-i\omega px} [U_0 - D_0] = 0$$

lo que implica que debe cumplirse que, si los demás factores son no nulos, entonces:

$$U_0 = D_0 \quad (2.40)$$

En términos del coeficiente de reflexión generalizado en el tope de la capa superficial (2.31a), de (2.40) se concluye que:

$$RT_0 = \frac{U_0}{D_0} = 1 \quad (2.41)$$

o utilizando el coeficiente en la base (2.31b):

$$RB_0 = RT_0 e^{2i\omega T_0} = e^{2i\omega T_0} \quad (2.42)$$

De (2.42) se encuentra la expresión:

$$RB_0 - e^{2i\omega T_0} = 0 \quad (2.43a)$$

o bien:

$$1 - RB_0 e^{-2i\omega T_0} = 0 \quad (2.43b)$$

La expresión (2.43b) corresponde a la relación de dispersión del sistema, donde RB_0 se interpreta como la respuesta espectral de las capas inferiores en la base de la capa superficial, y se obtiene desde una secuencia iterativa a partir de las ecuaciones (2.37) y (2.38). De manera análoga al caso de una capa sobre un semi-espacio (Ec. (2.21)), esta relación refleja que las ondas Love existen solo para ciertas frecuencias y parámetros de rayo específicos, cuya evaluación, a diferencia del caso más simple, no puede realizarse analíticamente.

Es importante destacar que, de (2.43b), las cantidades involucradas corresponden a números complejos en general, por lo que, tanto la parte real como imaginaria del miembro izquierdo deben ser nulas.

En la Fig. 2.7 se muestra un ejemplo de las curvas de dispersión para el sistema de dos capas sobre un semi-espacio especificado en la Tabla 2.1.

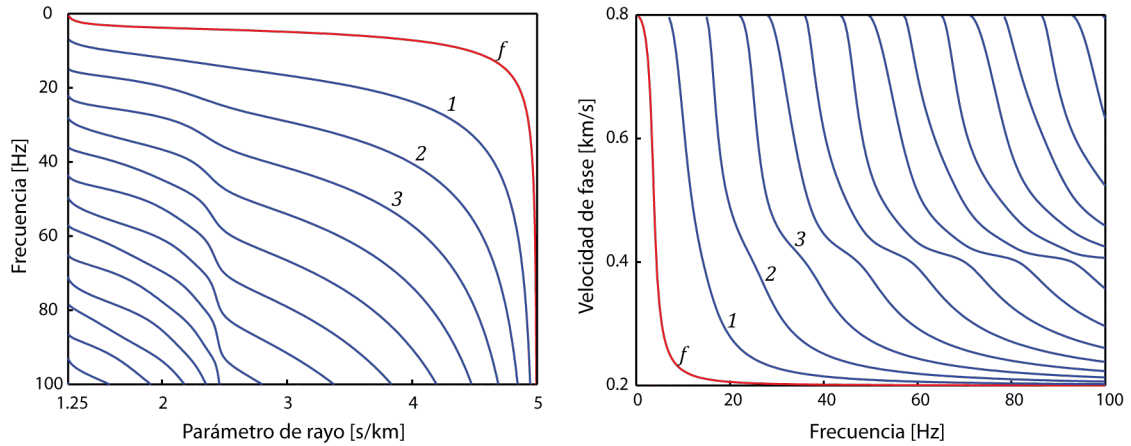


Figura 2.7: Ejemplo de curvas de dispersión para un medio de dos capas sobre un semi-espacio (Tabla 2.1). En rojo se muestra el modo fundamental y en azul los modos de propagación superiores. Izquierda: gráfico de frecuencia en función del parámetro de rayo p . Derecha: gráfico de velocidad de fase ($c = 1/p$) en función de la frecuencia.

Capa	Espesor [m]	Velocidad β [m/s]	Densidad [gr/cm ³]
0	10	200	1.9
1	10	400	1.9
2 (semi-espacio)	-	800	1.9

Tabla 2.1: Propiedades del medio compuesto por dos capas y un semi-espacio infinito usado en la confección de la Fig. 2.7.

2.5. Inclusión de fuente lineal y sismogramas sintéticos SH: sistema de capas entre semi-espacios

Se considera ahora un sistema de capas entre semi-espacios superior e inferior infinitos como el de la Fig. 2.8. Se sitúa una fuente y un receptor en el semi-espacio superior ($l = 0$). La fuente lineal infinita de ondas SH paralela al eje y , se encuentra a una altura h_S sobre la primera interfaz ($z = z_1$), mientras que el receptor se ubica a una distancia horizontal x de la fuente y a una altura h_R de la primera interfaz.

En la sección 2.2 (Pag. 10) se halló la expresión para la solución elemental de la ecuación de ondas correspondiente en un medio homogéneo. A partir de esta solución elemental (2.5) o (2.6), la solución completa se obtiene a través de una superposición de ondas planas, integrando sobre todo el rango de números de onda k o parámetros de rayo p . Entonces, el campo de desplazamientos en la capa l se puede escribir como:

$$v_l(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} [D_l e^{-i\nu_l(z-z_l)} + U_l e^{i\nu_l(z-z_l)}] dk \quad (2.44)$$

donde $l = 0, 1, 2, \dots, n$; $\nu_l = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_l^2} - k^2}$, $Im(\nu_l) < 0$, y z_l es la coordenada z del tope de la capa l (excepto para z_0 que es un nivel arbitrario y no corresponde al límite de ninguna capa). En términos del parámetro de rayo p , se obtiene que:

$$v_l(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega p x} [D_l e^{-i\omega q_l(z-z_l)} + U_l e^{i\omega q_l(z-z_l)}] \omega dp \quad (2.45)$$

donde $q_l = \sqrt{\frac{1}{\beta_l^2} - p^2}$ y $Im(q_l) < 0$.

En principio, en el semi-espacio superior la propagación hacia abajo ($\propto D_0$) está directamente relacionada a la radiación de la fuente lineal de ondas SH. En este sentido, U_0 representa la respuesta del sistema de capas al impulso inicial de la fuente. Para introducir la fuente en las soluciones del tipo (2.44) o (2.45), esta debe ser expresada en términos de ondas planas. De esta manera, prescindiendo de factores multiplicativos constantes, una fuente impulsiva $\delta(x)\delta(z - z_S)\delta(t)$ (Aki-Richards, ec. 6.45) se puede representar como:

$$v_S(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{e^{-i\nu_0|z-z_S|}}{i\nu_0} dk \quad (2.46)$$

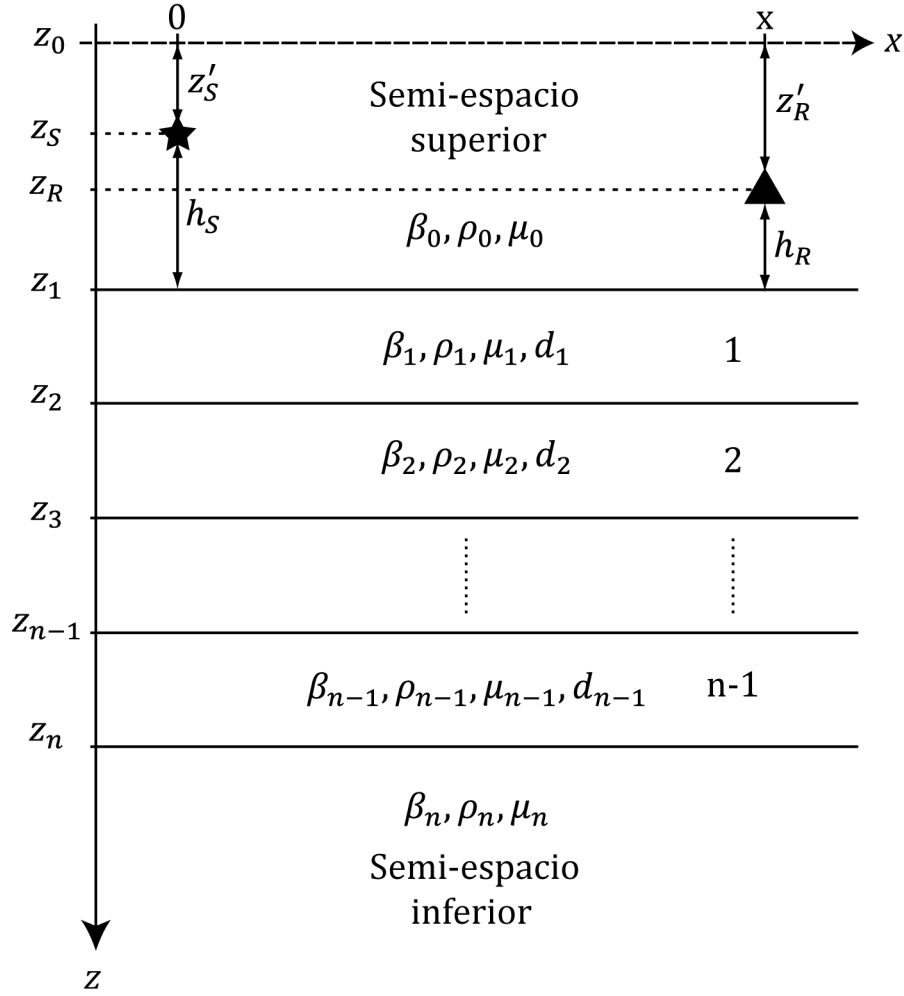


Figura 2.8: Esquema de un medio compuesto por un sistema de capas planas entre semi-espacios.

donde z_S es la profundidad de la fuente. En función del parámetro de rayo p se tiene:

$$v_S(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega p x} \frac{e^{-i\omega q_0 |z - z_S|}}{i q_0} dp \quad (2.47)$$

Incluyendo la fuente de (2.47) en la solución general (2.45), los desplazamientos en el semi-espacio superior quedan caracterizados por:

$$v_0(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega p x} \left[\frac{e^{-i\omega q_0 |z - z_S|}}{i\omega q_0} + U_0 e^{i\omega q_0 (z - z_0)} \right] \omega dp \quad (2.48)$$

Suponiendo que $z > z_S$ y notando que $|z - z_S| = z - z_S = (z - z_0) + (z_0 - z_S)$, (2.48) se puede escribir como:

$$v_0(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega px} [D_0 e^{-i\omega q_0(z-z_0)} + U_0 e^{i\omega q_0(z-z_0)}] \omega dp \quad (2.49)$$

donde

$$D_0 = \frac{e^{-i\omega q_0(z_0-z_S)}}{i\omega q_0} \quad (2.50)$$

Lo anterior permite integrar la fuente al esquema general ya desarrollado. Considerando además el tratamiento sobre coeficientes de reflexión generalizados, según (2.31a) y (2.31b) se tiene:

$$RT_0 = \frac{U_0}{D_0} = RB_0 e^{-2i\omega T_0}$$

o más bien:

$$U_0 = D_0 RB_0 e^{-2i\omega T_0} \quad (2.51)$$

Usando (2.50) en (2.51), se concluye que:

$$U_0 = \frac{e^{-i\omega q_0(z_0-z_S)}}{i\omega q_0} RB_0(\omega, p) e^{-2i\omega T_0} \quad (2.52)$$

Luego, considerando la parte reflejada del sismograma (v_{0R}), desde (2.49) se obtiene:

$$v_{0R}(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega px} U_0 e^{i\omega q_0(z-z_0)} \omega dp \quad (2.53)$$

Se debe notar (Fig. 2.8) que para cualquier valor de z_0 se cumple que $d_0 = z_1 - z_0$, $z_0 - z_S = h_S - d_0$ y $z_R - z_0 = d_0 - h_R$. Considerando esto y evaluando en el receptor ($z = z_R$), al reemplazar (2.52) en la parte reflejada del sismograma (2.53) se tiene finalmente que:

$$v_{0R}(x, z_R, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{RB_0(\omega, p) e^{-i\omega q_0 H}}{i q_0} e^{-i\omega px} dp \quad (2.54)$$

donde $H = h_S + h_R$.

Para considerar una fuente no impulsiva, se debe multiplicar (2.54) por el espectro de esta fuente $S(\omega)$. Así, en general se tiene:

$$v_{0R}(x, z_R, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\omega, p)}{iq_0} e^{-i\omega px} dp \quad (2.55)$$

donde

$$U(\omega, p) = S(\omega)RB_0(\omega, p)e^{-i\omega q_0 H} \quad (2.56)$$

La ecuación (2.56) implica una fuente que emite energía homogéneamente en todas direcciones. En este punto, si se requiere, se podría considerar la directividad de la fuente, simplemente asumiendo $S = S(\omega, p)$. Además, es importante destacar que en el caso desarrollado no se incluye una superficie libre.

2.5.1. Inclusión de la superficie libre

Para incluir la superficie libre se debe realizar un análisis como el presentado en (Apéndice B). Entonces, en presencia de una superficie libre en $z = z_0$ tal que $z_0 \leq z_R$, $z_0 \leq z_S$ y $z_0 < z_1$, el factor $U(\omega, p)$ incluye las curvas de dispersión y se modifica tal que:

$$U(\omega, p) = \frac{4S(\omega)RB_0(\omega, p)e^{-2i\omega T_0} \cos(\omega q_0 z'_S) \cos(\omega q_0 z'_R)}{1 - RB_0(\omega, p)e^{-2i\omega T_0}} \quad (2.57a)$$

O bien, en función de RT_0 :

$$U(\omega, p) = \frac{4S(\omega)RT_0(\omega, p) \cos(\omega q_0 z'_S) \cos(\omega q_0 z'_R)}{1 - RT_0(\omega, p)} \quad (2.57b)$$

donde $z'_S = z_S - z_0$ y $z'_R = z_R - z_0$ corresponden a las profundidades de la fuente y receptor respectivamente, medidas desde la superficie libre ($z = z_0$) (Fig. 2.8). Es importante notar que las curvas de dispersión se encuentran explícitamente en el denominador de (2.57a) y (2.57b), cuya expresión corresponde efectivamente a la relación de dispersión presentada en (2.43b). Así, los polos (o singularidades) de (2.57a) o (2.57b) proporcionan las condiciones de frecuencia ω y parámetro de rayo p para las cuales se cumple la condición de superficie libre del sistema. En la Fig. 2.9 se muestra un ejemplo de los sismogramas $U(\omega, p)$ calculados a partir de (2.57a) o (2.57b) para el modelo presentado en la Tabla 2.1. Es posible apreciar que los máximos corresponden exactamente a la posición de las curvas de dispersión en el espacio $\omega - p$ calculadas anteriormente para este modelo (Fig. 2.7).

2.5.2. Sismogramas sintéticos en el dominio temporal

De (2.55) se puede notar que el integrando de esta expresión corresponde a la transformada de Fourier de una función con una traslación temporal de px . Es decir, $U(\omega, p)$ es la versión

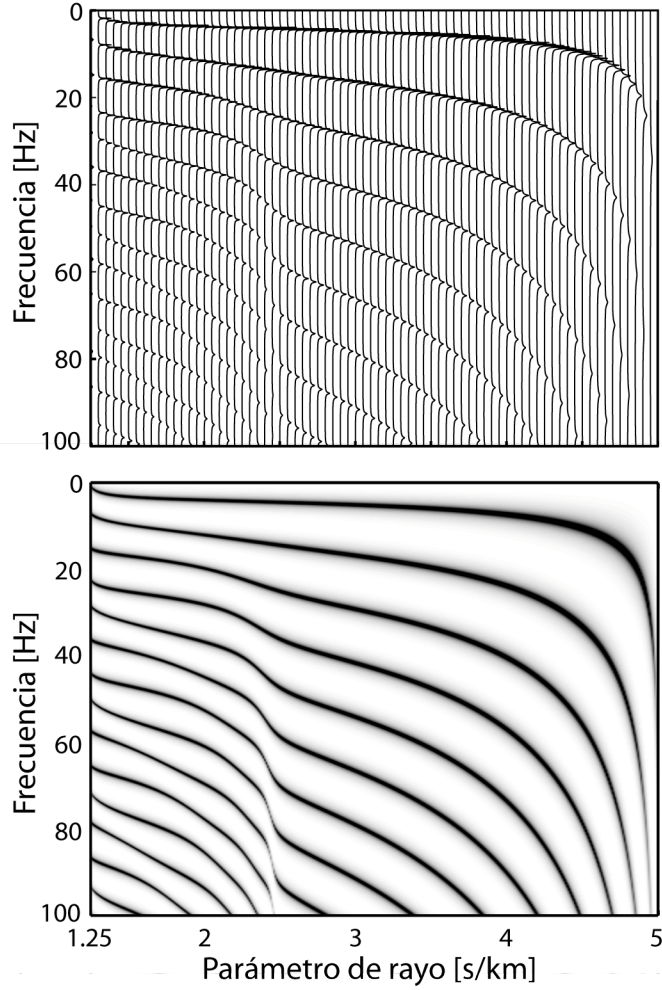


Figura 2.9: Sismogramas $U(\omega, p)$ para el modelo de la Tabla 2.1. Arriba: Gráfico tipo wiggle, con la amplitud de cada traza sobre el plano $\omega - p$. Abajo: Amplitud interpolada en escala de grises, donde las amplitudes mayores se acercan al color negro y las menores al color blanco.

en frecuencia de los sismogramas en el espacio de tiempo de intercepción y lentitud horizontal o parámetro de rayo (τ, p) (ver Apéndice C). En efecto, utilizando la función auxiliar

$$Q(\omega, p) = \frac{U(\omega, p)}{iq_0} \quad (2.58)$$

y transformando a tiempo se tiene que:

$$v_{0R}(x, z_R, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} v_{0R}(x, z_R, \omega) d\omega$$

de donde se obtiene en forma explícita:

$$v_{0R}(x, z_R, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t - px, p) dp \quad (2.59)$$

una expresión que permite calcular sismogramas sintéticos en tiempo. La ecuación (2.59) representa una transformación $\tau - p$ inversa al plano (x, t) desde el espacio (τ, p) , donde $\tau = t - px$ es el tiempo de intercepción.

En forma resumida, para obtener sismogramas sintéticos de ondas SH con una fuente lineal infinita se deben seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el coeficiente de reflexión generalizado del sistema en el fondo de la primera capa $RB_0(\omega, p)$ a partir de las expresiones recursivas (2.37) y (2.38).
2. Calcular $U(\omega, p)$ desde (2.56) sin incluir una superficie libre, o bien desde (2.57a) o (2.57b) para incluir la superficie libre. Este término incluye el espectro de la fuente y factores de fase que dan cuenta de la posición de la fuente y receptor.
3. Calcular $Q(\omega, p) = \frac{U(\omega, p)}{iq_0}$, cuyo denominador es un factor proveniente de la fuente lineal infinita.
4. Calcular la transformada de Fourier inversa del término $Q(\omega, p)e^{-i\omega px}$, para obtener los sismogramas en el espacio $\tau - p$: $Q(\tau, p)$
5. Calcular finalmente $v_{0R}(x, z_R, t)$ (sismogramas en tiempo) mediante (2.59), cuya expresión es equivalente a una transformada $\tau - p$ (Radon) inversa (ver Apéndice C).

En la Fig. 2.10 se presenta un ejemplo de sismogramas $x - t$ sintéticos. Los gráficos de la parte superior corresponden a sismogramas (tipo wiggle y en escala de grises, a la izquierda y derecha respectivamente) calculados para el modelo de Tabla 2.1, incluyendo la superficie libre. En concordancia con lo expuesto anteriormente, además de las ondas de cuerpo SH, en la figura se observa el tren de ondas superficiales Love, que corresponden a ondas atrapadas en las capas, reverberando debido a la presencia de la superficie libre. En cambio, en la sección inferior de la figura se muestran sismogramas calculados sin considerar una superficie libre, en los cuales se observan solamente las ondas de cuerpo propias de las reflexiones y refracciones en las capas correspondientes (Fig. 2.11). Cabe destacar que en estos sismogramas no se incluye la onda directa, por lo que no se observa en las figuras adjuntas (ver Apéndice B).

2.5.3. Inversión de sismogramas onda SH y curvas de dispersión

Según lo desarrollado en la secciones anteriores, si se incluye una superficie libre como condición de borde del problema, la obtención de $U(\omega, p)$ mediante (2.57a) implica, entre otras cosas, encontrar las curvas de dispersión teóricas de ondas Love para el medio en cuestión. En concordancia con lo anterior, si es posible obtener $U(\omega, p)$ a partir de los sismogramas temporales (que contengan el efecto de la superficie libre), entonces es esperable obtener las

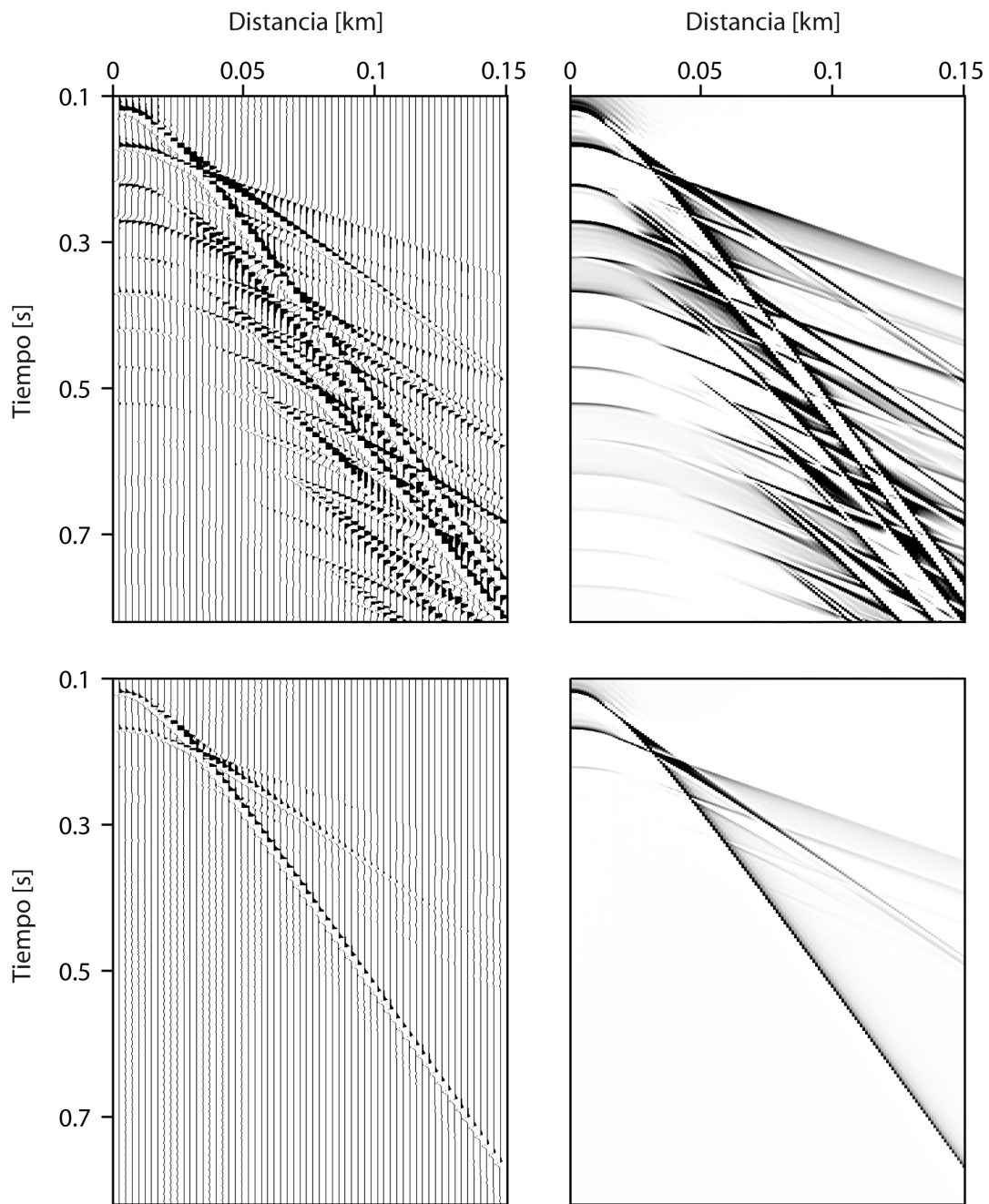


Figura 2.10: Sismogramas sintéticos $x - t$, calculados desde el modelo de velocidad 1D de la Tabla 2.1. Arriba: modelo con superficie libre incluida. Abajo: modelo sin superficie libre. El cálculo se realizó desde la ecuación (2.59), considerando una fuente y receptores en la superficie, con distancia entre trazas de 2 m , intervalo de muestreo temporal de $0,001 \text{ s}$, en un rango de parámetro de rayo p de $-5 \leq p \leq 5 \text{ s/km}$ y con una discretización de este de $0,1 \text{ s/km}$.

curvas de dispersión empíricas, con lo que se resuelve el problema inverso con respecto a las características dispersivas de las ondas Love.

Para obtener $U(\omega, p)$ se requiere invertir los sismogramas (x, t) al espacio (τ, p) , para luego pasar a (ω, p) . Para esto es necesario utilizar algunas propiedades importantes sobre la

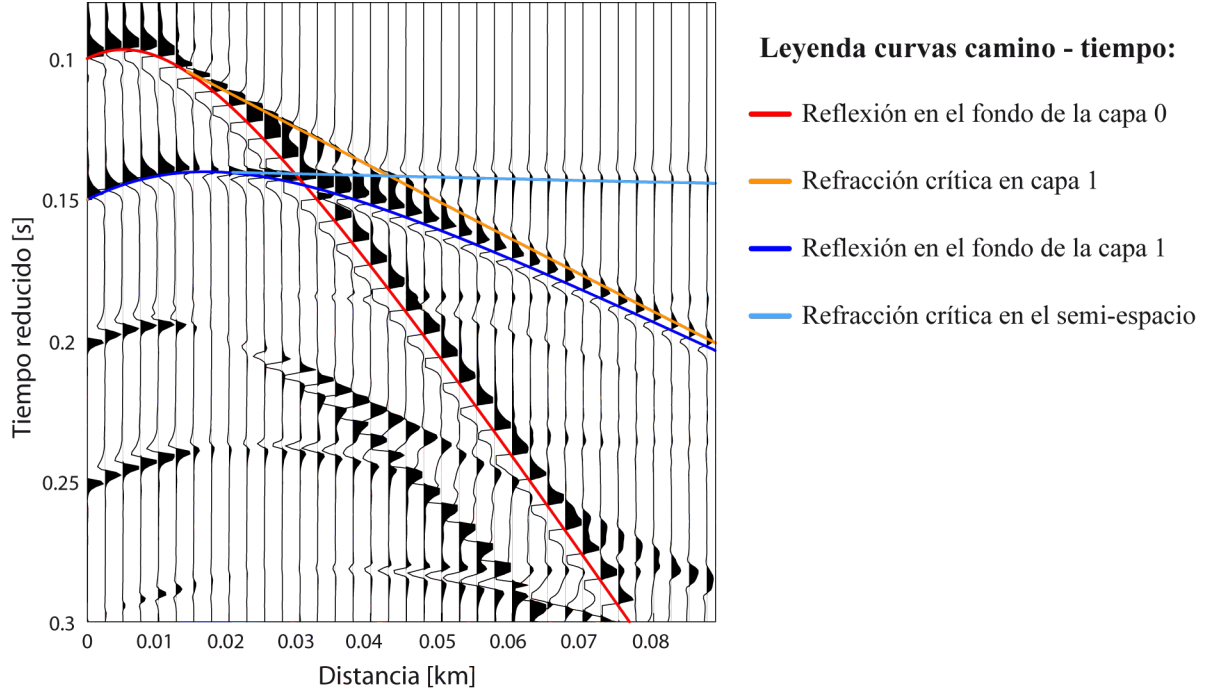


Figura 2.11: Zoom de sismogramas sintéticos $x-t$ de la Fig. 2.10 (panel superior), calculados desde el modelo de velocidad 1D de la Tabla 2.1. Para el despliegue de las trazas y curvas camino-tiempo se aplicó una velocidad de reducción de 0.8 km/s . En las líneas de colores: curvas camino-tiempo calculadas numéricamente para el modelo de velocidad de estudio.

transformada $\tau - p$ (Radon) (ver detalles en Apéndice C).

Brevemente, si $f(x, t)$ es una función equivalente a un registro sísmico a lo largo de un perfil, donde t es el tiempo y x es la distancia entre la fuente y receptor (offset), entonces su transformada al plano (τ, p) es:

$$\tilde{f}(\tau, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \tau + px) dx \quad (2.60)$$

Para volver a $f(x, t)$ a partir de $\tilde{f}(\tau, p)$ se tiene:

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(t - px, p) dp \quad (2.61)$$

donde

$$\tilde{F}(\omega, p) = |\omega| \tilde{f}(\omega, p) \quad (2.62)$$

En (2.62), $\tilde{f}(\omega, p)$ corresponde a la transformada de Fourier temporal de $\tilde{f}(\tau, p)$. De acuerdo a (2.61), de (2.59) es posible identificar \tilde{F} con $2\pi Q$ y f con v_{0R} . Entonces se tiene que

$$2\pi Q(\omega, p) = 2\pi \frac{U(\omega, p)}{iq_0} = |\omega| \tilde{v}_{0R}(\omega, p) \quad (2.63)$$

es decir:

$$U(\omega, p) = \frac{q_0 i |\omega| \tilde{v}_{0R}(\omega, p)}{2\pi} \quad (2.64)$$

Como se observó anteriormente, $U(\omega, p)$ es la función buscada y contiene, entre otras cosas, las curvas de dispersión siempre y cuando los sismogramas $v_{0R}(x, t)$ incluyan el efecto de la superficie libre como condición de borde.

En resumen, para obtener la función $U(\omega, p)$ a partir de datos $v_{0R}(x, t)$, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Transformación de $v_{0R}(x, t)$ a $\tilde{v}_{0R}(\tau, p)$ mediante una transformada $\tau - p$:

$$\tilde{v}_{0R}(\tau, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{0R}(x, \tau + px) dx \quad (2.65)$$

2. Transformación de $\tilde{v}_{0R}(\tau, p)$ al dominio de las frecuencias $\tilde{v}_{0R}(\omega, p)$. Esto es:

$$\tilde{v}_{0R}(\omega, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_{0R}(\tau, p) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.66)$$

3. Se multiplica el resultado anterior por factores que dependen de la frecuencia ω y el parámetro p (ec. (2.64)):

$$U(\omega, p) = \frac{q_0 i |\omega|}{2\pi} \tilde{v}_{0R}(\omega, p)$$

Capítulo 3

Metodología

En el capítulo 2 se presentó la base teórica en lo concerniente a la propagación de ondas SH y ondas superficiales Love en medios verticalmente heterogéneos (sistema de capas planas). Dentro de este contexto, las curvas de dispersión son de vital importancia, puesto que reflejan la característica dispersiva de las ondas superficiales. Como se mostró anteriormente, es posible recurrir a la modelación de las curvas de dispersión con el objetivo de obtener información acerca de la estructura de velocidad de la onda de corte en profundidad.

3.1. Cálculo de curvas de dispersión

En esta sección se describen brevemente dos de los métodos comúnmente utilizados para el cálculo de las curvas de dispersión teóricas: el método de la matriz de transferencia (Aki and Richards, 1980) y el método de los coeficientes de reflexión generalizados (E. vera; Kenneth 1983; Chen 1993). Ambos métodos se programaron computacionalmente y se emplearon en este trabajo.

3.1.1. Método de la matriz de transferencia (MMT)

Este procedimiento está basado en lo desarrollado por Thomson (1950) y Haskell (1953). Consiste en la construcción de la ecuación de dispersión a partir de la resolución numérica de un sistema de ecuaciones matriciales.

En esta metodología, y al igual que en lo expuesto en el primer capítulo de teoría, en el caso de ondas Love se consideran ondas superficiales propagándose a través de un medio elástico, isotrópico y estratificado según un conjunto de capas planas homogéneas. Siguiendo la misma notación que en Aki & Richards (1980), en cada capa se busca la solución a la ecuación de ondas SH (ec. (2.1)), de la forma:

$$v(x, z, t) = l_1(k, z, \omega)e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.1)$$

Dado que lo anterior se generalizará a un medio estratificado de capas planas, se hará necesario considerar y aplicar la continuidad vertical de la componente de esfuerzo σ_{yz} a través de cada una de las capas, cuya expresión a partir de (3.1) es:

$$\sigma_{yz}(x, z, t) = l_2(k, z, \omega)e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.2)$$

donde

$$l_2 = \mu \frac{dl_1}{dz} \quad (3.3)$$

Reemplazando (3.1) en (2.1) y considerando (3.3), se concluye que:

$$-\omega^2 \rho l_1 = \frac{dl_2}{dz} - k^2 \mu l_1 \quad (3.4)$$

Las expresiones (3.3) y (3.4) se pueden resumir matricialmente como:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ k^2 \mu - \omega^2 \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

donde $(l_1, l_2)^t$ es el denominado vector desplazamiento-esfuerzo para ondas Love.

En un medio de capas planas (Fig. 2.6), al imponer las condiciones de borde del problema el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.5) tiene una solución no trivial. Estas condiciones son: superficie libre ($l_2(z_0) = 0$), continuidad de desplazamientos y esfuerzos en cada interfaz, y la condición de radiación en el semi-espacio (ausencia de ondas propagándose hacia arriba). La ecuación (3.5) se puede escribir, de manera general, como:

$$\frac{df(z)}{dz} = A(z)f(z) \quad (3.6)$$

donde $f = (l_1, l_2)^t$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ k^2 \mu - \omega^2 \rho & 0 \end{pmatrix}$. La solución a este sistema se presenta en términos de la matriz de transferencia, cuya definición es la siguiente:

$$P(z, z_0) = I + \int_{z_0}^z A(\zeta_1) d\zeta_1 + \int_{z_0}^z A(\zeta_1) \int_{z_0}^{\zeta_1} A(\zeta_2) d\zeta_2 d\zeta_1 + \dots \quad (3.7)$$

La matriz de transferencia P satisface la ecuación (3.6), y de su definición en (3.7) se concluye la propiedad:

$$f(z) = P(z, z_0)f(z_0) \quad (3.8)$$

Es decir, la matriz $P(z, z_0)$ genera el vector desplazamiento-esfuerzo f en la profundidad z cuando se aplica al mismo vector pero en la profundidad $z = z_0$. Así, la matriz P se puede utilizar para propagar el vector $f(z)$ desde el semi-espacio a la superficie (o viceversa).

Cuando la matriz A es independiente de la profundidad z (ej. dentro de una capa homogénea), la matriz de transferencia P se puede expresar como:

$$P(z, z_0) = e^{(z-z_0)A} = \begin{pmatrix} \cosh[\hat{\nu}(z - z_0)] & (\hat{\nu}\mu)^{-1} \sinh[(z - z_0)] \\ \hat{\nu}\mu \sinh[\hat{\nu}(z - z_0)] & \cosh[\hat{\nu}(z - z_0)] \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde $\hat{\nu} = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2}}$, con $Im(\hat{\nu}) < 0$.

Para encontrar la solución al sistema (3.5), se requiere propagar el vector desplazamiento-esfuerzo f desde el semi-espacio a la superficie $z = z_0$ para aplicar las condiciones de borde. Desde la propiedad (3.8), la propagación superficie-semi-espacio se puede expresar como:

$$f(z_n) = P(z_n, z_0)f(z_0) \quad (3.10)$$

donde

$$P(z_n, z_0) = \prod_{l=0}^{n-1} P(z_{l+1}, z_l) \quad (3.11)$$

Además, desde (3.9) se puede calcular la matriz de transferencia entre capas consecutivas como:

$$P(z_{l+1}, z_l) = e^{d_l A_l} = \begin{pmatrix} \cosh[\hat{\nu}_l d_l] & (\hat{\nu}_l \mu_l)^{-1} \sinh[\hat{\nu}_l d_l] \\ \hat{\nu}_l \mu_l \sinh[\hat{\nu}_l d_l] & \cosh[\hat{\nu}_l d_l] \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

donde $d_l = z_{l+1} - z_l$ es el espesor de la capa l (Fig. 2.6).

Por otra parte, para imponer las condiciones de borde de radiación en el semi-espacio y de superficie libre en $z = z_0$, es necesario considerar la relación entre el vector desplazamiento-esfuerzo $f = (l_1, l_2)^t$ y las amplitudes de los desplazamientos de la onda SH en términos de ondas que viajan hacia arriba (S^u) y hacia abajo (S^d). Esta relación se traduce en que, para cada capa, se cumple que (detalles en Aki & Richards (1980), capítulo 7):

$$w = \begin{pmatrix} S^d \\ S^u \end{pmatrix} = \frac{1}{2\hat{\nu}\mu} \begin{pmatrix} \hat{\nu}\mu e^{\hat{\nu}z} & -e^{\hat{\nu}z} \\ \hat{\nu}\mu e^{-\hat{\nu}z} & e^{-\hat{\nu}z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

o bien

$$w = Ff$$

donde

$$F = \frac{1}{2\hat{\nu}\mu} \begin{pmatrix} \hat{\nu}\mu e^{\hat{\nu}z} & -e^{\hat{\nu}z} \\ \hat{\nu}\mu e^{-\hat{\nu}z} & e^{-\hat{\nu}z} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Así, desde (3.10) y (3.13), las amplitudes de las ondas en el semi-espacio se pueden relacionar con el vector $f = (l_1, l_2)^t$ en la superficie $z = z_0$ mediante:

$$w_n = Bf(z_0) \quad (3.15)$$

donde

$$B = F_n P(z_n, z_0) \quad (3.16)$$

Finalmente, en la expresión (3.15) es posible imponer directamente las condiciones de borde de superficie libre ($l_2(z_0) = 0$) y de radiación ($S_n^u = 0$). Explícitamente, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} S_n^d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(z_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Así, la solución no trivial del sistema (3.17) está dada por:

$$B_{21} = 0 \quad (3.18)$$

La expresión (3.18) corresponde a la ecuación de dispersión del sistema, cuya solución se presenta como las curvas de dispersión buscadas. Cabe destacar que el término B_{21} depende del número de onda k y la frecuencia ω , cuyos valores determinan las curvas de dispersión cuando se cumple la relación de dispersión (3.18).

Consideraciones con respecto a la implementación del método

En este caso (ondas Love) se tienen expresiones matriciales de tamaño 2×2 . Debido a esto, la programación del método es relativamente simple comparado con el caso de ondas Rayleigh, cuyos términos matriciales son de tamaño 4×4 (Aki & Richards, 1980). Sin embargo, para

acceder a la ecuación de dispersión se requiere multiplicar matrices (en este caso de tamaño 2×2) sucesivamente. Así, mientras mayor sea la cantidad de capas del modelo y más fina sea la discretización del número de onda y frecuencias, el cálculo de estas multiplicaciones matriciales puede incrementar de manera importante el tiempo de cálculo y despliegue de las curvas de dispersión.

Además, la metodología puede tener ciertos problemas de estabilidad para frecuencias altas y profundidades mayores, debido a los términos exponenciales involucrados. Esta inestabilidad numérica puede ser tratada con algún amortiguamiento que disminuya la amplitud del argumento exponencial con el fin de acelerar la convergencia de la serie que representa la función exponencial numéricamente.

A pesar de lo anterior, este método es simple en la búsqueda de raíces debido a que la parte imaginaria de la función de dispersión (3.18) es siempre nula en el rango de parámetros de rayo (o velocidad de fase) importante, por lo que solo se requiere buscar raíces (o ceros) en la parte real de la función de dispersión.

3.1.2. Método de coeficientes de reflexión y transmisión generalizados (MCRTG)

Este método está basado en la definición de coeficientes de reflexión y transmisión generalizados para la resolución no trivial de la ecuación de onda bajo las condiciones de borde del problema (Chen, 1993), lo que se traduce en el cálculo de curvas de dispersión en conjunto con los desplazamientos y esfuerzos. La formulación de los coeficientes de reflexión y transmisión está fundamentada en Kennett (1983) y Luco & Apsel (1983).

Nuevamente, el punto de partida es la ecuación de ondas para la componente SH (2.1). Al igual que en lo desarrollado en Aki & Richards (1980), si se considera un medio estratificado verticalmente, el sistema de ecuaciones a resolver, para cada capa, es (3.5), que se puede escribir también como en (3.6).

En el sistema de capas planas (Fig. 2.6), la solución preliminar del sistema (3.5) se puede expresar, para la capa j como:

$$f_j(z) = E_j A_j(z) w_j \quad (3.19)$$

donde $z_j < z < z_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$. La matriz E_j depende de las propiedades del medio:

$$E_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mu_j \hat{\nu}_j & \mu_j \hat{\nu}_j \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

La matriz diagonal

$$A_j = \begin{pmatrix} e^{-\hat{\nu}_j z} & 0 \\ 0 & e^{\hat{\nu}_j z} \end{pmatrix}$$

contiene las fases de las ondas con respecto a la dirección de propagación en la vertical. Por otra parte, el vector $w_j = (S_j^d, S_j^u)^t$ contiene los coeficientes de amplitud correspondientes a las ondas que viajan hacia abajo (d) y hacia arriba (u) respectivamente.

En este punto, en Chen (1993) se redefine el sistema (3.19) de tal manera que:

$$A_j = \begin{pmatrix} e^{-\hat{\nu}_j(z-z_j)} & 0 \\ 0 & e^{-\hat{\nu}_j(z_{j+1}-z)} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

incluye términos constantes con el objetivo de reducir las soluciones con error por el crecimiento exponencial. Junto con lo anterior, el vector w_j absorbe los factores constantes correspondientes para compensar la modificación.

Antes de definir los coeficientes de reflexión y transmisión generalizados, se definen los coeficientes de reflexión y transmisión modificados (coeficientes R/T modificados), los cuales corresponden a coeficientes simples entre dos capas (Luco & Apsel, 1983). Así, los coeficientes R/T modificados para la interfaz j ($R_j^{du}, R_j^{ud}, T_j^u, T_j^d$) se definen en términos de:

$$S_j^d = T_j^d S_{j-1}^d + R_j^{ud} S_j^u \quad (3.22a)$$

$$S_{j-1}^u = R_j^{du} S_{j-1}^d + T_j^u S_j^u \quad (3.22b)$$

donde $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Para la interfaz $j = n$ se tiene que:

$$S_n^d = T_n^d S_{n-1}^d \quad (3.23a)$$

$$S_{n-1}^u = R_n^{du} S_{n-1}^d \quad (3.23b)$$

Para encontrar las expresiones explícitas de los coeficientes R/T modificados, se impone la condición de continuidad de desplazamientos y tracciones en (3.19), requerida en cada una de las interfaces para evitar la existencia de fuentes sísmicas artificiales. Es decir, para la interfaz j es necesario imponer que:

$$f_{j-1}(z_j) = f_j(z_j) \quad (3.24)$$

Imponiendo (3.24) en (3.19), y comparando con las expresiones en (3.22a) y (3.22b) junto con (3.23a) y (3.23b), se encuentra que:

$$R_j^{du} = \left(\frac{\eta_{j-1} - \eta_j}{\eta_j + \eta_{j-1}} \right) e^{-\hat{\nu}_j d_{j-1}} \quad (3.25a)$$

$$R_j^{ud} = \left(\frac{\eta_j - \eta_{j-1}}{\eta_j + \eta_{j-1}} \right) e^{-\hat{\nu}_j d_j} \quad (3.25b)$$

$$T_j^u = \left(\frac{2\eta_j}{\eta_j + \eta_{j-1}} \right) e^{-\hat{\nu}_j d_j} \quad (3.25c)$$

$$T_j^d = \left(\frac{2\eta_{j-1}}{\eta_j + \eta_{j-1}} \right) e^{-\hat{\nu}_j d_{j-1}} \quad (3.25d)$$

donde $\eta_j = \mu_j \hat{\nu}_j$, $d_j = z_{j+1} - z_j$ es el espesor de la capa j . Para las expresiones en (3.25), $j = 1, 2, \dots, n-1$. En el caso específico de la interfaz $z = z_n$, solo (3.25a) y (3.25d) son fórmulas válidas, debido a la condición de radiación (no existen ondas provenientes desde el semi-espacio).

Luego, los coeficientes R/T generalizados (\hat{R}_j^{du} y \hat{T}_j^d) para la interfaz j se definen como:

$$S_j^d = \hat{T}_j^d S_{j-1}^d \quad (3.26a)$$

$$S_{j-1}^u = \hat{R}_j^{du} S_{j-1}^d \quad (3.26b)$$

para $j = 1, 2, \dots, n$. En el caso de la superficie libre ($z = z_0$), se tiene que:

$$S_0^d = \hat{R}_0^{ud} S_0^u \quad (3.27)$$

Por otra parte, al imponer la condición de superficie libre ($l_2(z_0) = 0$), desde (3.19) se tiene que:

$$l_2(z_0) = E_{21} S_0^d + E_{22} e^{-\hat{\nu}_0(z_1 - z_0)} S_0^u = 0$$

Desarrollando la expresión anterior junto con (3.27), se debe cumplir que:

$$\hat{R}_0^{ud} = e^{-\hat{\nu}_0 d_0} \quad (3.28)$$

Finalmente, reemplazando (3.26a) y (3.26b) en (3.22a) y (3.22b) se obtiene una fórmula recursiva para el cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión generalizados:

$$\hat{T}_j^d = [1 - R_j^{ud} \hat{R}_{j+1}^{du}]^{-1} T_j^d \quad (3.29a)$$

$$\hat{R}_j^{du} = R_j^{du} + T_j^u \hat{R}_{j+1}^{du} \hat{T}_j^d \quad (3.29b)$$

con $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Notar que desde las definiciones en (3.26a), (3.26b), (3.23a) y (3.23b), los coeficientes R/T generalizados y modificados para la interfaz $j = n$ son idénticos:

$$\hat{R}_n^{du} = R_n^{du} \quad (3.30a)$$

$$\hat{T}_n^d = T_n^d \quad (3.30b)$$

Así, con (3.28), (3.29a), (3.29b), (3.30a) y (3.30b) es posible calcular los coeficientes R/T generalizados correspondientes a cada una de las interfaces del sistema estratificado.

Finalmente, dentro de la primera capa, desde (3.26b) se cumple que:

$$S_0^u = \hat{R}_1^{du} S_0^d \quad (3.31)$$

Combinando (3.31) con (3.27), y considerando (3.28) se encuentra que:

$$1 - \hat{R}_1^{du} e^{-i\hat{\nu}_0 d_0} = 0 \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) es la solución no trivial del sistema para las ondas superficiales Love. Por lo tanto, corresponde a la relación de dispersión del sistema.

El cálculo de las curvas de dispersión, en este caso, está basado en el cálculo de los coeficientes R/T generalizados. La formulación para este cálculo está dada por las expresiones recursivas (3.29a) y (3.29b), las cuales requieren un valor inicial que está dado por (3.30a) y (3.30b), cuyos coeficientes R/T corresponden al interfaz ($j = n$). Así, el cálculo comienza en el semi-espacio, y luego se propaga recursivamente hasta el fondo de la primera capa, hasta obtener el coeficiente \hat{R}_1^{du} . Finalmente, con (3.32) se pueden encontrar las frecuencias ω y números de onda k (o parámetros de rayo p) que satisfacen todas las condiciones del problema (curvas de dispersión).

Cabe destacar que el procedimiento aquí presentado es similar al mostrado en el capítulo 2 de teoría (sección 2.4.2), donde también se definieron coeficientes de reflexión generalizados

para el desarrollo de la base teórica de la propagación de ondas Love en un medio estratificado. Si bien se utilizan definiciones distintas, es importante notar que ambos procedimientos son utilizados para resolver el mismo problema, con las mismas condiciones de borde. Por lo tanto, ambos procedimientos son equivalentes en cuanto a las soluciones (curvas de dispersión y desplazamientos-esfuerzos).

Consideraciones con respecto a la implementación del método

En este caso, y a diferencia del método anterior (matriz de transferencia), el procedimiento necesario para llegar a la ecuación de dispersión implica el cálculo de expresiones escalares simples (no hay multiplicación de matrices), lo que podría disminuir el tiempo de cálculo del programa computacional, sobretodo en presencia de un modelo con una gran cantidad de capas y una discretización muy fina.

Además, el método incluye una modificación en los términos exponenciales para disminuir el error de las soluciones (curvas de dispersión) asociado al crecimiento exponencial en presencia de frecuencias altas (Chen, 1993).

A diferencia del método anterior, en el proceso de búsqueda de raíces de la función de dispersión, tanto la parte real como la parte imaginaria deben ser nulas, por lo que este procedimiento requiere consideraciones para la búsqueda de raíces con respecto a ambas partes (imaginaria y real).

En la Fig. 3.1 se presentan los tiempos de cálculo de la curva de dispersión correspondiente al modo fundamental para modelos con distinta cantidad de capas, manteniendo una discretización muy fina en frecuencia ω y parámetro de rayo p fija en todos los casos. Se observa que, a pesar de lo discutido con respecto a las operaciones matemáticas utilizadas en ambos métodos, el tiempo de cálculo no difiere demasiado al emplear un modelo que no supere las alrededor de treinta capas planas. Para un modelo mejor discretizado verticalmente, el método de los coeficientes de reflexión y transmisión generalizados (MCRTG) es una mejor alternativa para disminuir los tiempos de cálculo y descartar problemas asociados al crecimiento exponencial.

3.1.3. Algoritmo general para el cálculo de las curvas de dispersión

En general, sea cual sea el método con el cual se proceda a calcular las curvas de dispersión de ondas Love, el objetivo es el mismo. Es decir, a partir de la misma teoría, bajo distintas definiciones matriciales o escalares, el fin es calcular la ecuación de dispersión, cuya solución bajo ciertas condiciones representa las curvas de dispersión.

En términos generales, el algoritmo utilizado para el cálculo de las curvas de dispersión es el siguiente:

1. Lectura del modelo de velocidades 1D y declaración de propiedades del medio (cantidad de capas nl ; espesores d_i , velocidades β_i , densidades ρ_i y rigideces μ_i para cada capa

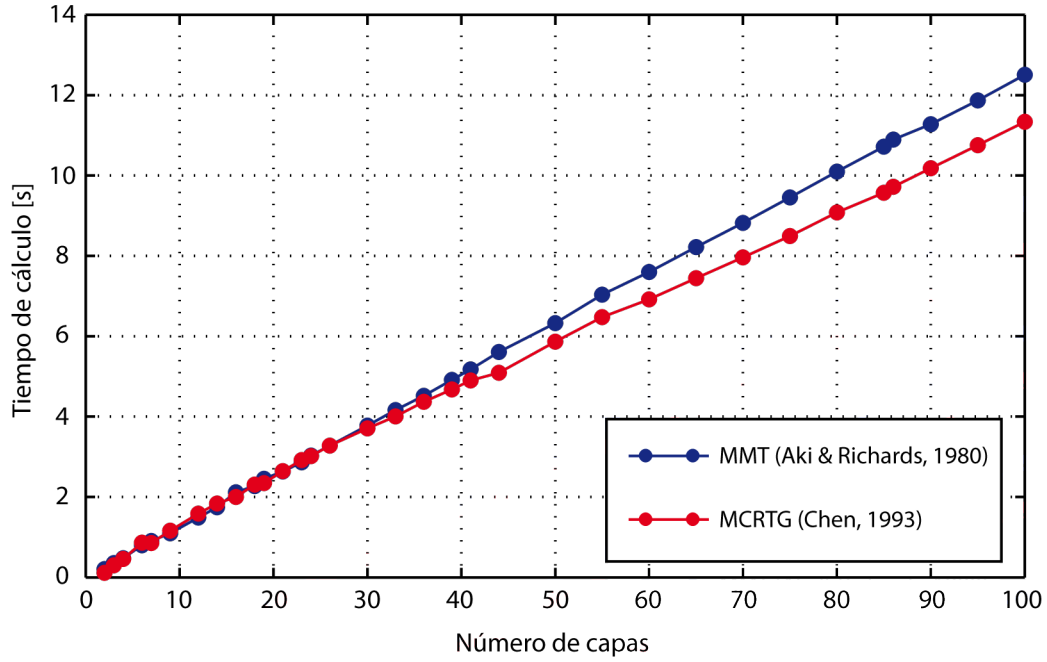


Figura 3.1: Tiempo de cálculo de la curva de dispersión correspondiente al modo fundamental para los dos métodos presentados. En azul: método de la matriz de transferencia (MMT). En rojo: Método de coeficientes de reflexión y transmisión generalizados (MCRTG).

$$i = 0, 1, 2, \dots, nl).$$

2. Definición de arreglos de frecuencia ω y parámetro de rayo p , para los cuales se va a evaluar la ecuación de dispersión. Esto implica definir las frecuencias mínima y máxima, parámetros de rayo mínimo y máximo, y la discretización de ambos arreglos. Mientras más fina es la discretización, mayor es la precisión del resultado, pero mayor es el tiempo de cálculo.
3. Para cada frecuencia del arreglo ω :
 - 3.1. Para cada parámetro de rayo del arreglo p :
 - 3.1.1. Calcular la matriz de transferencia (MMT) (3.12) o los coeficientes R/T modificados (MCRTG) (3.25) para cada capa $i = 0, 1, 2, \dots, nl$.
 - 3.1.2. Propagar recursivamente la matriz de transferencia P mediante (3.11) o los coeficientes R/T generalizados mediante (3.29a) y (3.29b) desde el semi-espacio hasta la superficie $z = z_0$.
 - 3.1.3. Definición de la función objetivo para la búsqueda de raíces (función de dispersión): mediante (3.18) para MMT y (3.32) para MCRTG.
 - 3.2. Evaluación de la ecuación de dispersión: Búsqueda de raíces a partir de algún método numérico estable y preciso (ej. Fig. 3.2) para este fin (método de bisección, de Newton, de la secante, etc.). En este sentido, cada raíz encontrada corresponde a un modo de vibración del sistema. Es decir, para cada frecuencia existe al me-

nos una raíz (modo fundamental). A mayores frecuencias se observa una mayor cantidad de raíces, que corresponden a los modos superiores (Fig. 3.2, B).

- Despliegue de las curvas de dispersión para cada frecuencia ω y parámetro de rayo p que satisfacen la ecuación de dispersión (encontrados en 3.2) mediante un gráfico que facilite la interpretación (p v/s ω , ω v/s velocidad de fase, período v/s velocidad de fase, etc).

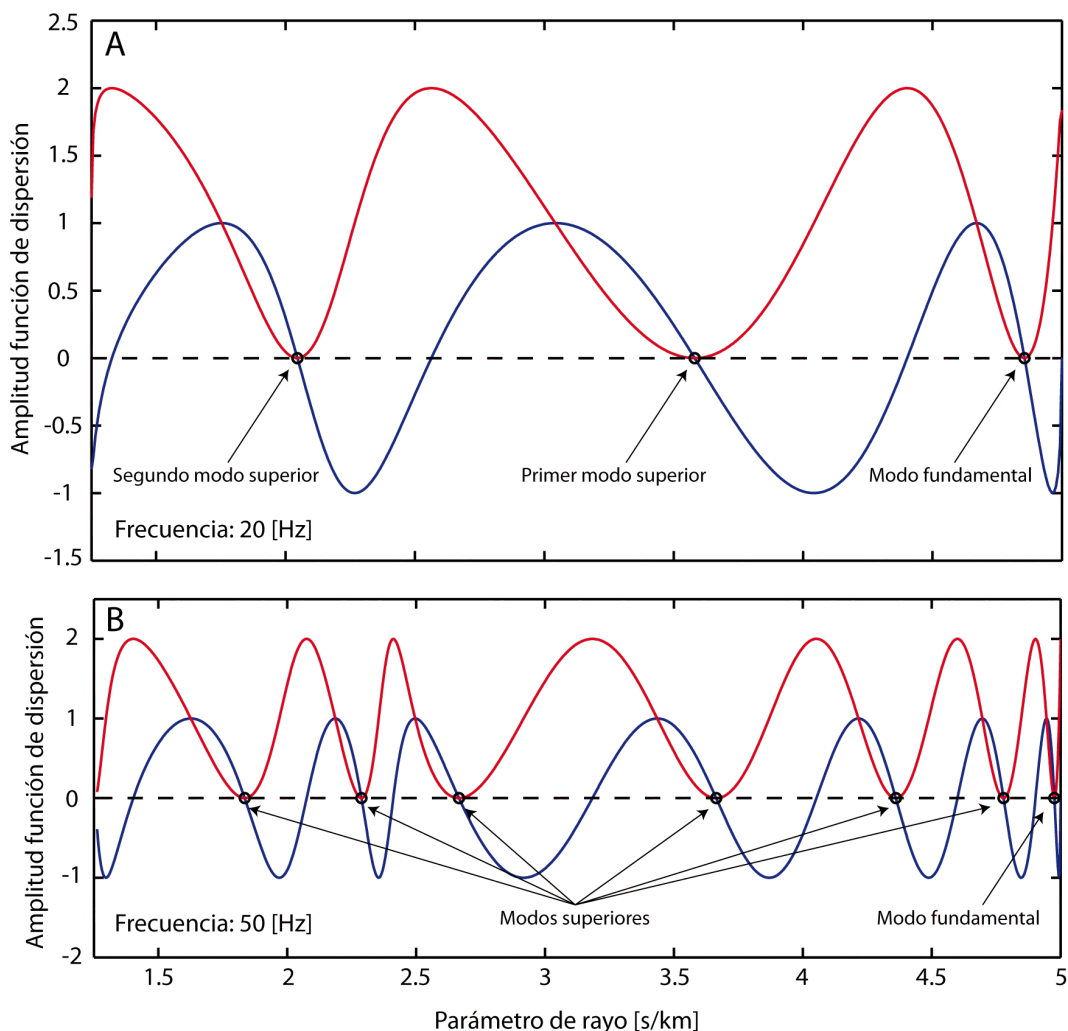


Figura 3.2: Ejemplo de la función objetivo correspondiente al modelo de velocidad de la Tabla 2.1, para una frecuencia de 20 Hz (A) y 50 Hz (B) (método MCRTG). Las raíces representan la solución de la ecuación de dispersión. En rojo y azul se muestra la parte real e imaginaria del término izquierdo en (3.32) respectivamente.

En la figura de ejemplo (Fig. 3.2) se puede notar que, si bien la parte imaginaria de la función de dispersión tiene una mayor cantidad de raíces que las señaladas, es necesario que la parte real también sea nula. Por lo tanto, para una frecuencia en particular, solo los parámetros de rayo (o velocidades de fase) que cumplan con (3.32) en su completitud (parte imaginaria y real nula) forman parte de las ondas superficiales Love.

3.1.4. Alcances físicos sobre las curvas de dispersión

Dispersión geométrica

En general, en un medio verticalmente heterogéneo, la característica dispersiva de las ondas superficiales se debe a que las fases con distintas longitudes de onda penetran distintas profundidades (Fig. 3.3). Así, a mayor longitud de onda (menor frecuencia), más profundo es el muestreo del medio. Al contrario, la propagación de ondas con menor longitud de onda (mayor frecuencia) extrae las características de las capas más superficiales.

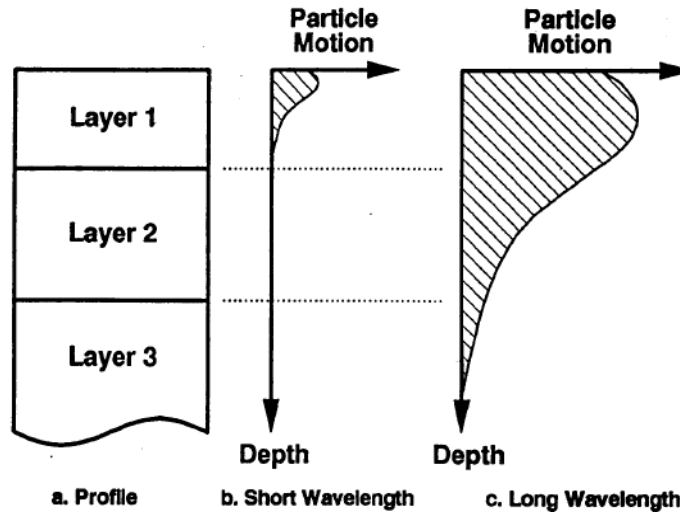


Figura 3.3: Dispersión geométrica de las ondas superficiales (desde Rix, 1988).

La forma de las curvas de dispersión, por su parte, depende de la forma en que varían las propiedades del medio en profundidad. Debido a la dispersión geométrica (Fig. 3.3), la velocidad de fase de las ondas superficiales depende de la velocidad de propagación de las ondas de cuerpo en el medio donde se propagan. Así, si la velocidad de propagación en el medio aumenta con la profundidad, la velocidad de fase disminuye con la frecuencia (o aumenta con la longitud de onda) y a este efecto se le denomina dispersión normal (Fig. 3.4a). De forma contraria, si la velocidad en el medio disminuye con la profundidad, la velocidad de fase de las ondas aumenta con la frecuencia (o disminuye con la longitud de onda), produciendo una dispersión inversa (Fig. 3.4b).

Interferencia constructiva

En el caso de las ondas superficiales de Love, la existencia de estas y sus distintos modos de propagación se puede explicar en términos de la interferencia constructiva de las múltiples ondas de cuerpo SH reflejadas en las distintas capas del medio estratificado en el rango post-crítico de parámetros de rayo, que se propagan de manera horizontal a la superficie de la Tierra, atrapadas en las capas superficiales (Fig. 3.5).

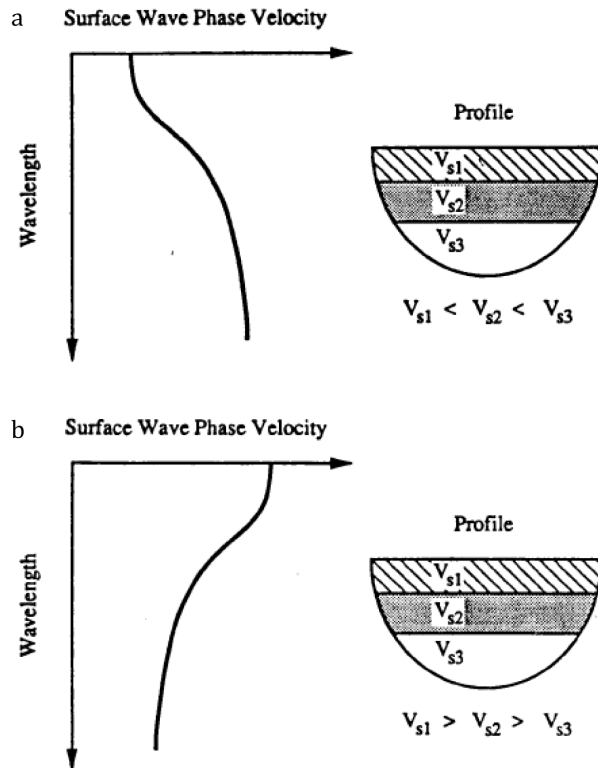


Figura 3.4: Ejemplos de dispersión geométrica. En a. dispersión normal. En b. dispersión inversa (desde Rix, 1988).

En el caso más simple (una capa sobre un semi-espacio), el rango post-crítico del parámetro p del rayo que se propaga por la capa no es suficiente para asegurar la existencia de una onda superficial Love. Para afirmar la existencia de esta última, la superposición de las ondas SH planas (hacia arriba y hacia abajo) que están atrapadas en la capa debe ser constructiva, pues en el caso contrario (interferencia destructiva) la amplitud del tren de ondas disminuye rápidamente con la distancia a lo largo de la capa y no se cumplen las condiciones para la propagación de una onda superficial Love. De esta manera, el tipo de interferencia depende de la frecuencia de las ondas, y es por esto que dado un parámetro de rayo p dentro del rango post-crítico, solo las frecuencias que permiten una diferencia de fase entre las ondas individuales que sea múltiplo de 2π satisfacen la relación de dispersión encontrada en las secciones anteriores, que está directamente relacionada con la condición de interferencia constructiva del campo de ondas planas.

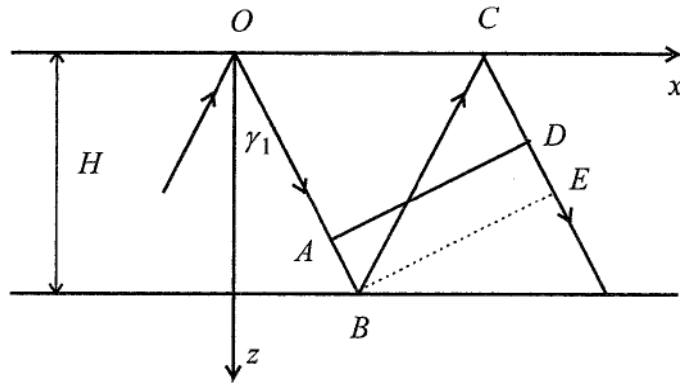


Figura 3.5: Interferencia de ondas SH dentro de una capa. Para un mismo frente de ondas definido por la línea AD , las onda incidente en A y la reflejada en D deben estar en fase para producir una onda superficial Love (figura desde O.Novotny, 1999).

Sensibilidad a las propiedades del medio

Como primera aproximación, es posible realizar un análisis de sensibilidad de las curvas de dispersión con respecto a las distintas propiedades del medio tomando en cuenta un medio simple de dos capas sobre un semi-espacio (Tabla 2.1). Considerando la variación de estas propiedades por separado (velocidades, espesores y densidades), se puede estudiar el efecto en las curvas de dispersión como, por ejemplo, el modo fundamental (Fig. 3.6).

En la Fig. 3.6 se observa que, en general, la velocidad de la onda de corte (β) es el parámetro más importante en el cálculo de las curvas de dispersión. Es decir, la velocidad β es la propiedad con más peso en la determinación de las curvas, siguiéndole el espesor de las capas (d) y en último lugar la densidad (ρ). Por otro lado, los cambios en las propiedades de la capa superficial y el semi-espacio producen, en general, mayores cambios en la curva de dispersión que los producidos por los parámetros de las capas intermedias.

En un medio normalmente dispersivo, la velocidad β de la capa superficial y el semi-espacio controlan los límites de la curva (asíntotas en frecuencias altas y bajas respectivamente), mientras que cambios en la velocidad de la capa intermedia solo produce una anomalía en las frecuencias intermedias y la amplitud de este cambio no es tan significativo como en las capas límite. Lo anterior implica que la velocidad β de las capas superficiales y del semi-espacio son variables con un peso considerable en la modelación de las curvas de dispersión.

Por otra parte, el efecto general de la variación de los espesores es tal que, cuando se aumenta el espesor de la capa superficial, las velocidades de fase originales se alcanzan a una menor frecuencia (profundidad mayor) en todo el rango de frecuencias, pues aumenta también la profundidad de las capas inferiores, produciendo una caída de la curva con respecto a la curva original en el espacio $c - \omega$. El efecto contrario sucede cuando se disminuye el espesor (la curva sube).

A diferencia de lo anterior, el cambio en el espesor de la capa intermedia solo afecta a lo que está por debajo de esta capa, por lo que ocurre el mismo efecto producido por el cambio

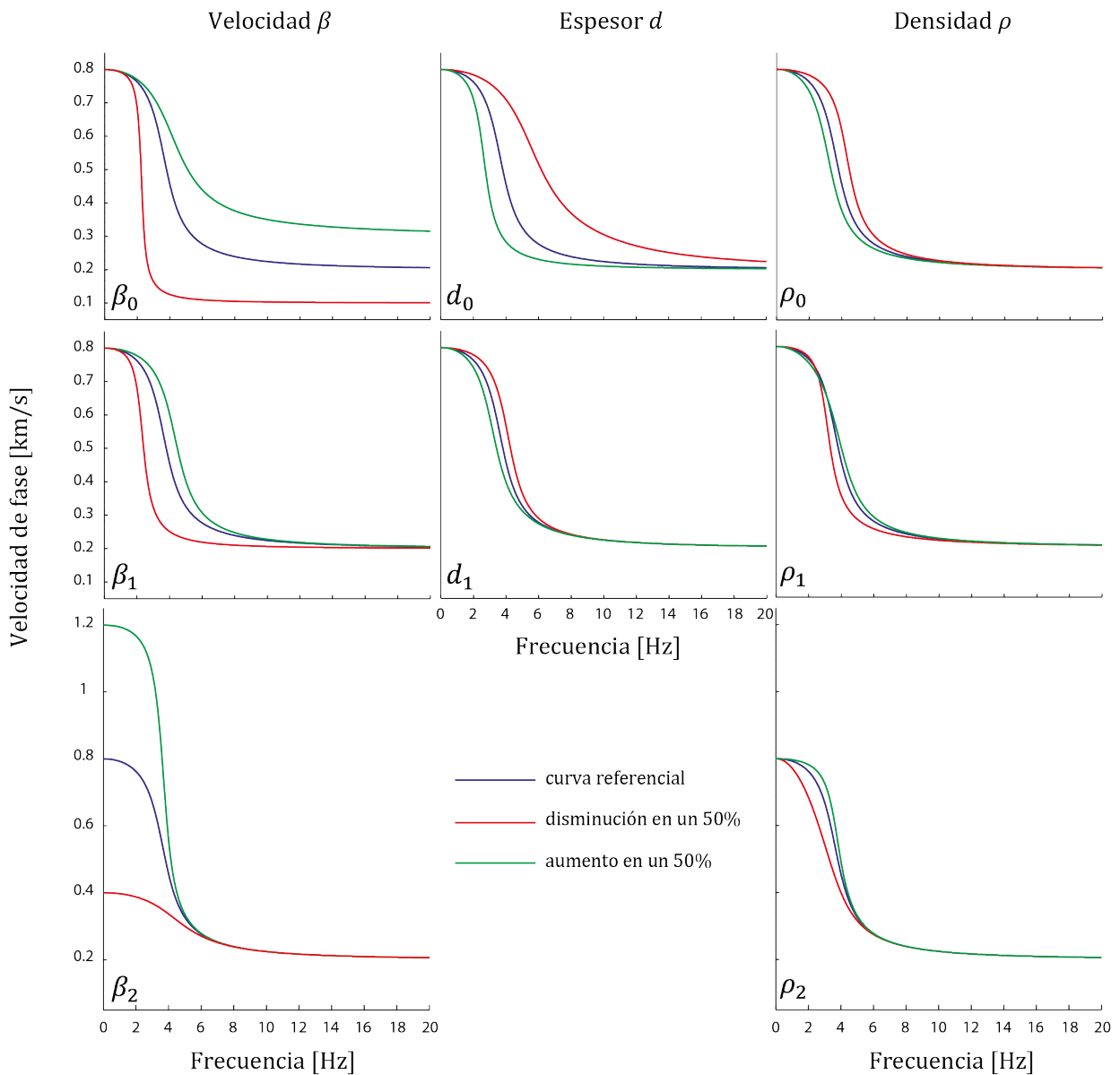


Figura 3.6: Análisis básico de sensibilidad de curva de dispersión correspondiente al modo fundamental con respecto a las propiedades del medio, utilizando como referencia la estructura de velocidad v/s profundidad expuesta en Tabla 1. Líneas azules: modo fundamental correspondiente al modelo de referencia (Tabla 1). Líneas rojas: modo fundamental correspondiente a una disminución de un 50 % de la propiedad con respecto al modelo de referencia. Líneas verdes: modo fundamental correspondiente a un aumento de un 50 % de la propiedad respectiva.

de espesor en la capa superficial, pero limitado al rango de frecuencias bajas (profundidades mayores) y con menor amplitud de cambio.

Por último, los cambios de la densidad provocan perturbaciones menores y casi no alteran la forma de la curva de dispersión en todo el rango de frecuencias. Esto es debido a que,

de todas maneras, el rango en que varían las densidades de los suelos es muy pequeño para provocar cambios significativos en las curvas de dispersión.

En resumen, la sensibilidad de las curvas de dispersión con respecto a las propiedades del medio se da en el siguiente orden, de mayor a menor contribución: velocidad de onda de corte, espesor y densidad. Por otra parte, las curvas son mayoritariamente sensibles a las propiedades de la primera capa y el semi-espacio. Estos aspectos básicos son fundamentales para entender y llevar a cabo la modelación de las curvas de dispersión.

3.2. Curvas de dispersión desde sismogramas (x, t)

Para modelar curvas de dispersión se requiere comparar las curvas teóricas con curvas empíricas o experimentales, las cuales se pueden obtener desde registros sísmicos en tiempo. Como se describió en la sección correspondiente (2.5.3), la transformación de los datos $x - t$ al espacio $\omega - p$ (donde teóricamente se observan las curvas de dispersión) consta de dos pasos básicos: transformación de los sismogramas $x - t$ al espacio de lentitud y tiempo de intercepción $\tau - p$ mediante una transformada $\tau - p$; y una transformación desde $\tau - p$ al espacio $\omega - p$ o $f - p$ a través de una transformada de Fourier temporal sobre la variable τ .

3.2.1. Transformación de (x, t) a (τ, p) : Descomposición en ondas planas

Según (2.65), la transformada $\tau - p$ de los sismogramas temporales implica sumar el campo $v_{0R}(x, t)$ a lo largo de líneas rectas paralelas de pendiente p y tiempo de intercepción τ (ver Apéndice C, Fig. C.2). Debido a que los sismogramas $v_{0R}(x, t)$ están discretizados tanto en distancia x como en tiempo t , es necesario interpolar las amplitudes de estos sismogramas sobre las rectas definidas por las variables τ y p dadas, para luego sumar las contribuciones de cada traza (x, t) sobre estas rectas.

La programación de esta transformada se realizó en tiempo, interpolando en las rectas correspondientes y sumando las contribuciones de cada traza (x, t) , considerando ciertos efectos de borde debido a que la señal de entrada es finita y discreta.

En la Fig. 3.7 se muestra un ejemplo de los sismogramas $\tau - p$. En la parte de arriba (*a* y *b*) la transformación está aplicada directamente sobre registros (x, t) de ondas SH sintéticos (Fig. 2.10) calculados cada 1 *m* (distancia entre trazas) mediante la versión en $\tau - p$ de Q desde (2.63). Por otra parte, abajo (*c* y *d*) se calcularon sismogramas $\tau - p$ teóricamente, desde la transformada de Fourier inversa de (2.58) teniendo en cuenta (2.57b). A la izquierda (*a* y *c*) y derecha (*b* y *d*) de la figura se muestran los sismogramas con y sin superficie libre respectivamente. Los sismogramas se calcularon considerando un intervalo de muestreo en tiempo de 0,001 *s* y distancia entre trazas (discretización del parámetro de rayo p) de 0,1 *s/km*.

Las trayectorias hiperbólicas de las reflexiones en el espacio (x, t) se transforman en tra-

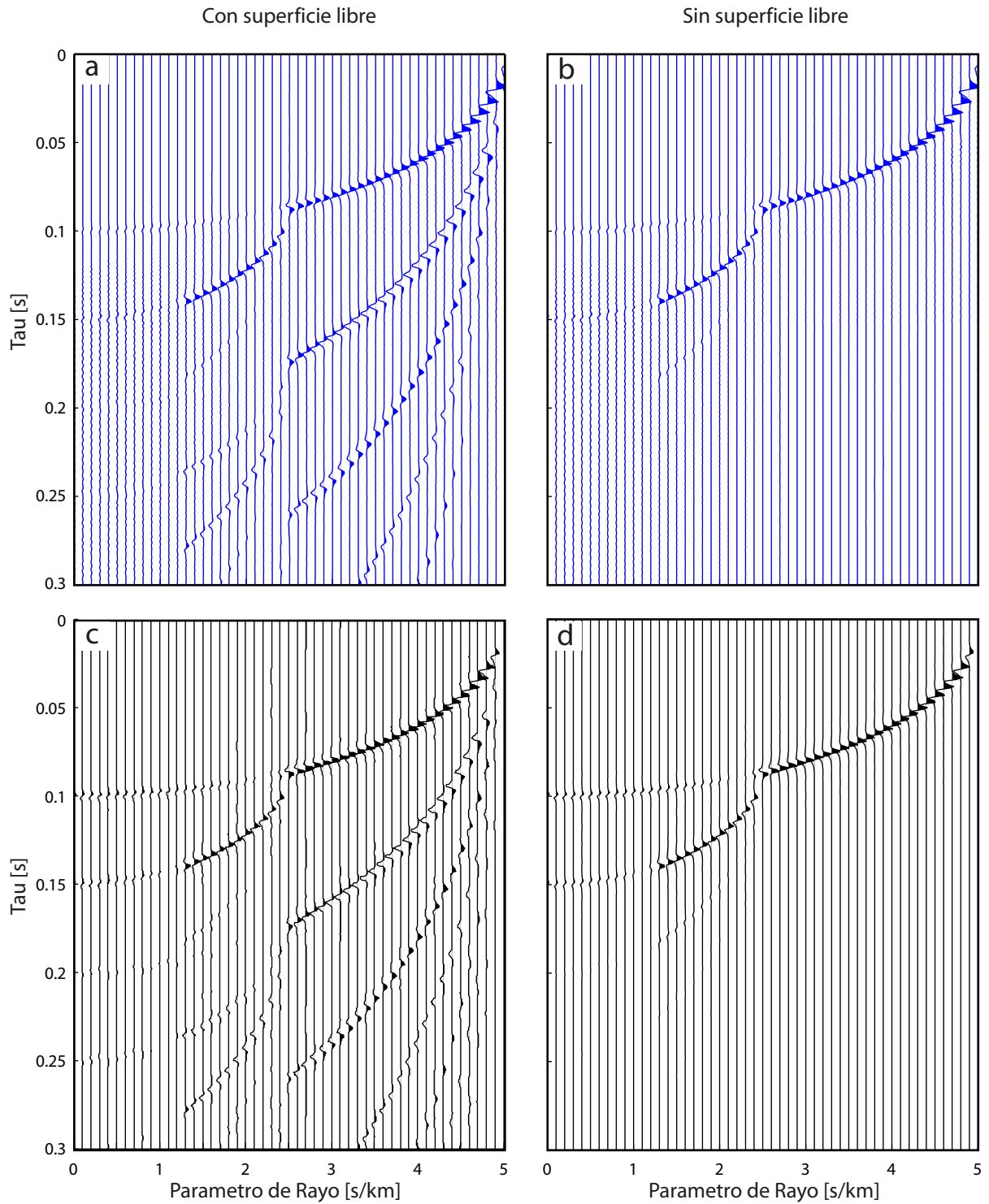


Figura 3.7: Ejemplo de sismogramas $\tau - p$. En (a) y (b) se calcularon desde sismogramas (x, t) (Fig. 2.10) sintéticos con y sin superficie libre incluida respectivamente. En (c) y (d) los sismogramas se computaron teóricamente considerando la versión en $\tau - p$ de (2.58) junto con (2.57b), para un medio con y sin superficie libre repectivamente.

vectorias elípticas en el espacio (τ, p) . En los sismogramas de la izquierda se observan las

reverberaciones producidas por reflexiones en la superficie libre, las que dan origen a ondas superficiales que se propagan atrapadas dentro de las capas superiores. En cambio, a la derecha se observan solo las reflexiones correspondientes a las interfaces al fondo de la primera y segunda capa del medio considerado, sin presencia de reverberaciones originadas por la superficie libre.

La comparación entre los sismogramas (τ, p) calculados teóricamente y desde sismogramas indica que, como era de esperarse, calzan perfectamente tanto en amplitud como en fase, lo cual valida el cálculo de la transformada $\tau - p$ programado y confirma que la metodología para la determinación de las curvas de dispersión tanto desde sismogramas como teóricas se realiza de manera efectiva.

3.2.2. Transformación de (τ, p) a (ω, p)

Esta transformación se lleva a cabo mediante una transformada de Fourier aplicada a los sismogramas $\tilde{v}_{0R}(\tau, p)$ con respecto a la variable temporal τ :

$$\tilde{v}_{0R}(\omega, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_{0R}(\tau, p) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.33)$$

Considerando que $\omega = 2\pi f$ se obtiene finalmente $\tilde{v}_{0R}(f, p)$.

Según (2.64), el siguiente paso es multiplicar (3.33) por un término de amplitud dependiente de la frecuencia y parámetro de rayo: $iq_0|\omega|/2\pi$. Sin embargo, $\tilde{v}_{0R}(\omega, p)$ por si solo ya contiene la información sobre la dispersión de las ondas superficiales. Las curvas de dispersión se pueden reconocer siguiendo los máximos del valor absoluto de $\tilde{v}_{0R}(\omega, p)$, a través de trazas contiguas con diferentes valores de p . En la práctica, los sismogramas se interpolan y se grafican en escala de colores para identificar las curvas de dispersión correspondientes al modo fundamental y superiores.

Normalización

Para una mejor visualización de las curvas de dispersión es necesario aplicar algún tipo de normalización a los sismogramas $\tilde{v}_{0R}(\omega, p)$. Con este objetivo, la manera más efectiva es normalizar con respecto a las amplitudes por frecuencia. Es decir, para cada frecuencia, se deben normalizar las amplitudes de los sismogramas con respecto al máximo del campo en esa frecuencia. El resultado resalta los máximos y, por lo tanto, las curvas de dispersión en todo el rango de frecuencias de interés. Sin embargo, es necesario tener cuidado en la interpretación pues la normalización también intensifica y amplifica detalles del campo que podrían no corresponder a la dispersión de las ondas superficiales.

Resolución de las curvas de dispersión

La resolución de las curvas de dispersión en el campo $\tilde{v}_{0R}(\omega, p)$ depende de ciertos parámetros provenientes de los sismogramas (x, t) originales y del medio por donde se propagan las ondas SH, como lo son: largo temporal, distancia entre geófonos, intervalo de muestreo, contenido de frecuencias de la fuente, etc. A partir de datos (x, t) sintéticos es posible observar como varía la resolución del gráfico con respecto a, por ejemplo, la distancia entre trazas (geófonos).

En la Fig. 3.8 se muestran los sismogramas en el espacio (f, p) (donde $f = \omega/2\pi$) obtenidos desde los datos (x, t) sintéticos generados a partir del modelo de velocidad expuesto en la Tabla 2.1 (ver curvas teóricas en Fig. 2.7, sismogramas (x, t) sintéticos en Fig. 2.10 y sismogramas (τ, p) en Fig. 3.7). Las cuatro sub-figuras corresponden a cuatro distancias entre geófonos distintas: 1, 5, 10 y 20 m respectivamente. Desde estas figuras es posible observar que la resolución de las curvas de dispersión es inversamente proporcional a la distancia entre geófonos. Es decir, a mayor resolución espacial, mayor resolución de las curvas de dispersión observadas en los sismogramas $\omega - p$. En particular, la resolución del modo fundamental no presenta una variación considerable, pero la resolución de los modos superiores aumenta significativamente con la resolución espacial. Esto implica que en el diseño de la configuración en terreno, la distancia entre geófonos, por ejemplo, es una variable que hay que tener en cuenta para obtener buenos resultados.

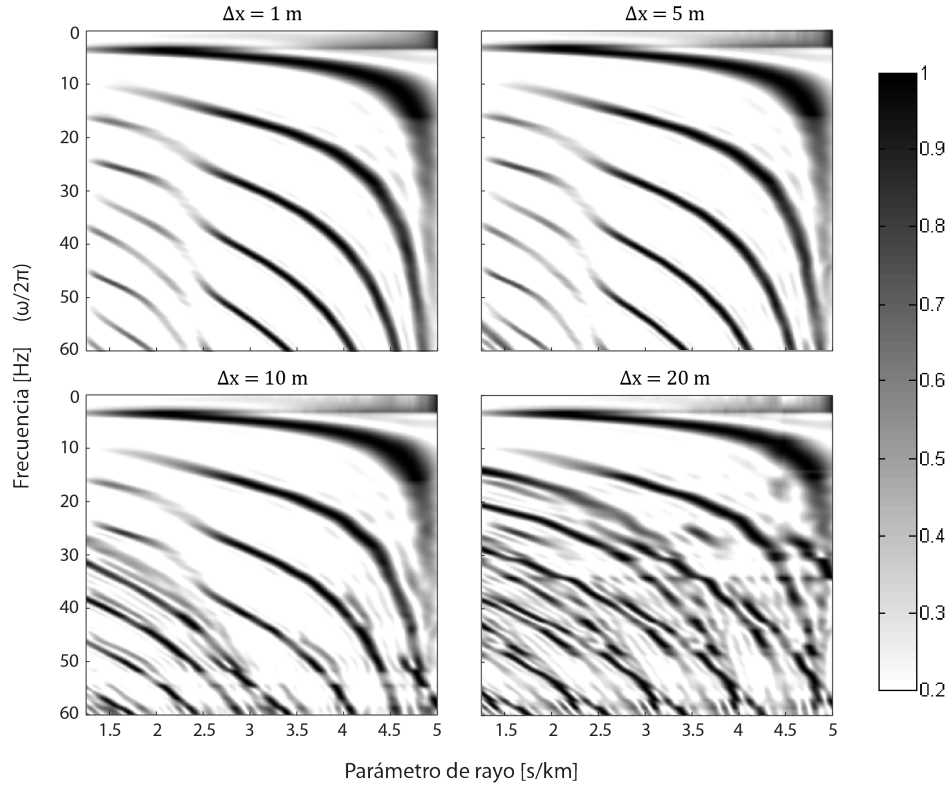


Figura 3.8: Sismogramas $f - p$ obtenidos desde sismogramas $x - t$ sintéticos considerando los mismos parámetros de cálculo que en la Fig. 2.10 a excepción de la distancia entre trazas (Δx), la cual varía para cada una de las subfiguras.

3.2.3. Alcances sobre inversión

La modelación de las curvas de dispersión teóricas permite recuperar o encontrar el modelo de velocidad v/s profundidad que satisface de mejor manera los datos observados (curvas empíricas). El presente trabajo está esencialmente enfocado en el proceso de obtención de curvas de dispersión teóricas a partir de un modelo de velocidad, y en el proceso paralelo de obtención de curvas de dispersión empíricas (reales) a partir de registros sísmicos (sintéticos o reales). Naturalmente, estos dos procesos permiten encontrar modelos de velocidad desde datos sísmicos reales a través de la modelación de las curvas de dispersión. Esta modelación puede realizarse de manera automática utilizando algún programa para invertir por mínimos cuadrados o algún método similar que reduzca óptimamente la diferencia entre las curvas de dispersión (teóricas v/s observadas o empíricas). Por otra parte, la modelación puede ser directa, a prueba y error, variando los parámetros teóricos manualmente con el fin de ajustar las curvas teóricas a las curvas obtenidas desde los datos. Este último es el tipo de modelación utilizada en este trabajo.

Para modelar las curvas de dispersión por prueba y error se necesita cierta experiencia y conciencia de las variaciones que produce cada parámetro del modelo teórico en las curvas de dispersión (ver 3.2.2).

Si bien este tipo de modelación puede ser un proceso tedioso y demoroso, evita soluciones espurias típicas de un proceso automático. Además, la modelación de ondas superficiales Love tiene la ventaja de que no requiere el conocimiento de la velocidad de propagación de la onda P, por lo que resulta en un proceso mucho menos complejo que en el caso de las ondas Rayleigh.

3.3. Adquisición y procesamiento de datos

La adquisición de datos sísmicos de la componente de onda SH es similar a la adquisición convencional para estudios de sísmica de reflexión o refracción, con la salvedad de contar con una fuente y geófonos horizontales (dirección perpendicular a línea sísmica) en lugar de fuente y receptores verticales (Fig. 3.9). La fuente de ondas SH consiste en golpes de martillo o combo horizontales sobre una viga de acero o madera desplegada en el suelo, la cual, para un tendido de geófonos medianamente corto aproxima una fuente lineal infinita (sección 2.5) en la dirección perpendicular al tendido sísmico. Durante la adquisición se golpea la viga desde sus dos extremos (Fig. 3.9) repetidamente para aumentar la razón señal - ruido.

Los registros obtenidos deben ser pre-procesados con el fin de ser utilizados en la aplicación de las dos técnicas presentadas (ondas superficiales Love y refracción SH). Durante este procedimiento se traslapan las trazas pertenecientes a los golpes realizados en sentido contrario asumiendo que teóricamente la polaridad de la fuente influye directamente en la polaridad del movimiento registrado en cada geófono, y luego se grafican. Si la propiedad anterior se cumple, entonces la lectura y digitalización de las primeras llegadas es mas simple para el método de refracción y si estas trazas se restan, es posible aumentar la señal por sobre el ruido para una aplicación efectiva del método de ondas superficiales.

Mientras mayor es la cantidad de geófonos y menor es la distancia entre ellos, mejor es la resolución de los resultados obtenidos por el método de ondas superficiales.

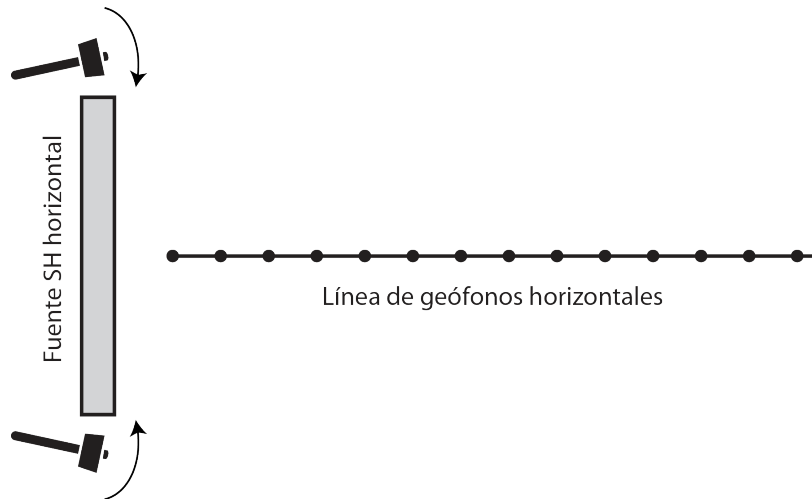


Figura 3.9: Esquema general en planta de adquisición de datos en terreno.

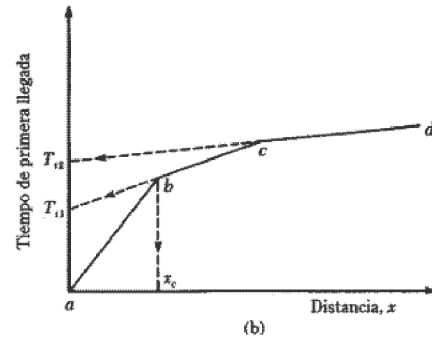
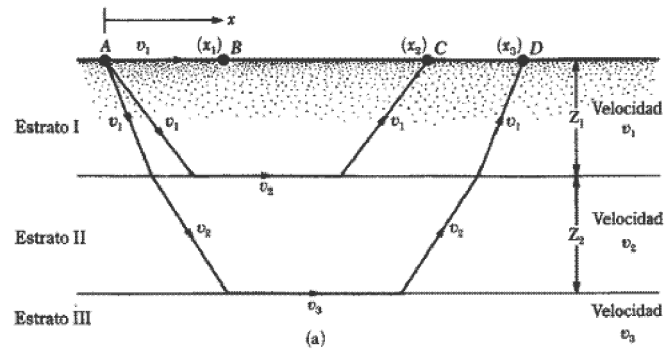
3.4. Comparación ondas superficiales vs refracción de ondas SH

Los registros sísmicos obtenidos aplicando el esquema de adquisición descrito en la figura 3.9, contienen tanto ondas superficiales (Love), como ondas SH internas refractadas.

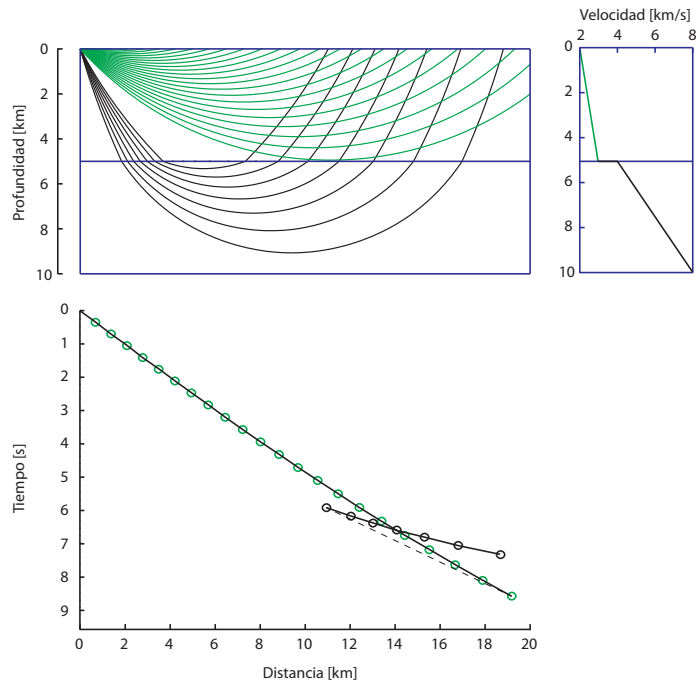
Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo es, entonces, la obtención de modelos de velocidad de ondas S a partir de ambas partes del registro separadamente. Es esperable que ambos métodos entreguen resultados similares en cuanto a velocidades y estratificación. Sin embargo, cada uno de ellos tiene sus limitaciones y ventajas, abriendo la posibilidad a que estos puedan utilizarse complementariamente.

La refracción sísmica se basa en la propagación y registro de ondas refractadas en las distintas capas del subsuelo. Mediante la modelación de las curvas camino - tiempo observadas, se logran obtener las velocidades y espesores de los diferentes estratos del medio (Fig. 3.10). Una de las limitaciones de este método es la incapacidad de reconocer capas intermedias de baja velocidad. Es decir, para que el método entregue buenos resultados es necesario que la velocidad de propagación de ondas sea creciente con la profundidad del medio.

En el contexto de este trabajo la modelación de las curvas camino-tiempo se realiza considerando modelos formados por una intercalación arbitraria de capas homogéneas, y capas con un gradiente lineal de velocidad con profundidad (programa mmodpg - E.Vera).



(a) Método de refracción sísmica convencional



(b) Método de refracción sísmica con capas de gradiente lineal constante

Figura 3.10: Esquema de método de refracción sísmica. En (a) se modela considerando capas planas, mientras que en (b) se consideran capas con un gradiente de velocidad constante.

Capítulo 4

Resultados

La metodología para el análisis de ondas superficiales presentada en el capítulo 3 se utilizó aquí en registros sísmicos reales. Además de ondas superficiales Love, estos registros contienen ondas internas SH, las que se analizan por medio de métodos de refracción convencionales, cuyos resultados (modelos de velocidad versus profundidad) pueden ser directamente comparados con aquellos entregados por el análisis de ondas superficiales. En principio ambas metodologías deberían entregar resultados similares en cuanto a la caracterización geofísica del subsuelo.

4.1. Sismogramas utilizados

Como se describió anteriormente (sección 3.4), los datos de entrada para la metodología de ondas superficiales Love deben ser registros sísmicos SH, los cuales se obtienen desde la componente horizontal de los geófonos, perpendicular a la línea sísmica. Estas ondas se producen a partir de una fuente horizontal artificial que aproxima a una fuente lineal infinita en la dirección perpendicular al tendido sísmico (Fig. 3.9). A continuación se describe brevemente el conjunto de datos reales utilizados en esta tesis.

4.1.1. Linderos, Enero 2013 (LIN)

Durante una campaña en la zona de Linderos (Buín) se generaron sismogramas de onda SH, desde los cuales se extrajo el mejor conjunto de datos para la aplicación del método de ondas Love (Fig. 4.1) y refracción sísmica SH. El terreno de medición está sobre un relleno fluvial típico del valle central de Chile.

Se dispuso de geófonos triaxiales de 8 Hz y una fuente horizontal perpendicular al tendido sísmico, con lo cual se produjo un registro de 15 trazas sísmicas separadas cada 5 m. Para ello se usaron dos tendidos de 9 geófonos traslapados en las trazas 7, 8 y 9 del primer tendido con las trazas 1, 2 y 3 del segundo (Fig. 4.2). La distancia entre la fuente y el primer geófono

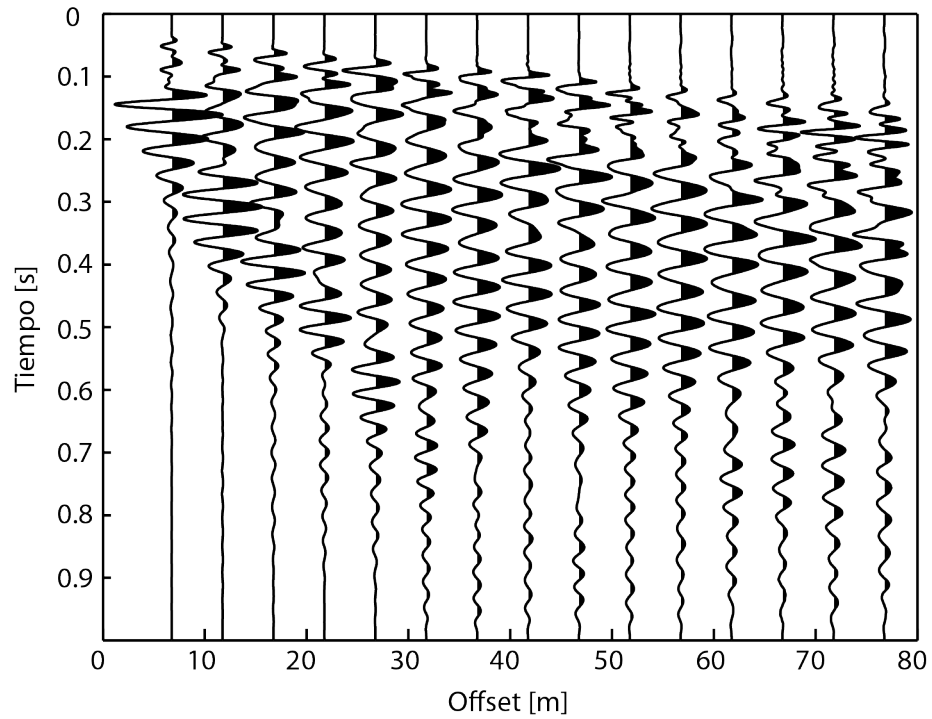


Figura 4.1: Sismogramas $x-t$, componente SH. Linderos, 2013. Se muestra el registro completo donde las trazas sísmicas han sido balanceadas para equiparar sus amplitudes dividiendo cada una de ellas por su valor RMS (Root Mean Square).

fue de 6.75 m, y el intervalo de muestreo de 0.0005 s.

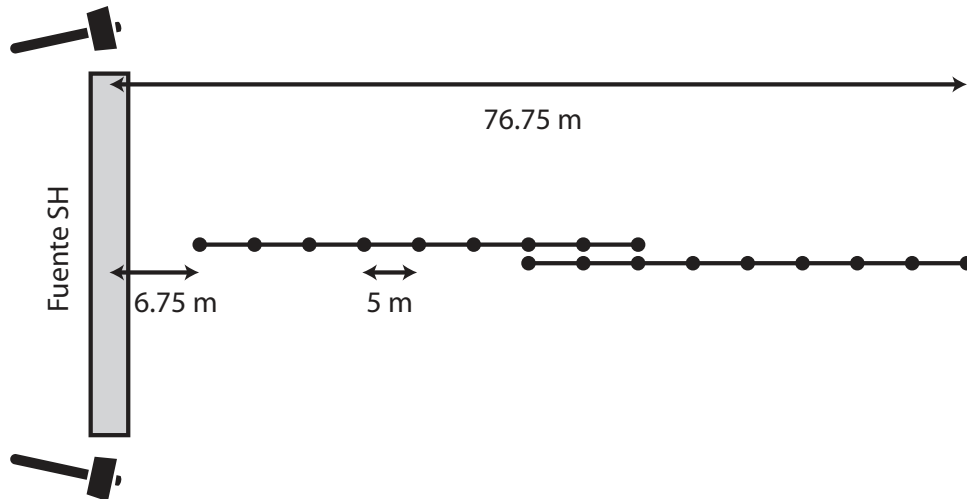


Figura 4.2: Configuración de terreno de línea sísmica experimento Linderos, 2013.

4.1.2. Río Itata (ITA)

El set de datos ITA fue facilitado por la empresa Geoexploraciones y se registró en un lugar cercano a la ribera del río Itata en la VII región de Chile. Se realizaron dos perfiles en el lugar: el perfil 1 (ITA-P1) se ejecutó sobre una isla de arena cercana a la ribera Noreste del río Itata. El perfil 2 (ITA-P2) se realizó hacia el centro del río aprovechando el bajo caudal que traían sus aguas, lo que permitía transitar hasta ese sector sin inconvenientes. La Figura 4.4 muestra los registros sísmicos completos de ambos perfiles.

Para la adquisición de estos perfiles, se dispuso de 24 geófonos horizontales y una fuente horizontal perpendicular al tendido sísmico (Fig. 4.3). La distancia entre la fuente y el primer geófono fue de 2.5 m y 5 m para el perfil 1 y 2 respectivamente, y el intervalo de muestreo de 0.000031 s para ambos perfiles.

Es importante notar que los sismogramas ITA tienen un nivel de ruido mayor que los registros LIN, lo cual es un problema para la lectura y determinación de las primeras llegadas en el método de refracción sísmica. Sin embargo, como se verá más adelante, esto no significa necesariamente que los sismogramas en el espacio de frecuencia angular y parámetro de rayo (o velocidad de fase) $\omega - p$ sean más ruidosos en el caso de los datos ITA que en LIN, teniendo los datos ITA una ventaja en la aplicación del método de ondas superficiales por sobre el de refracción sísmica.

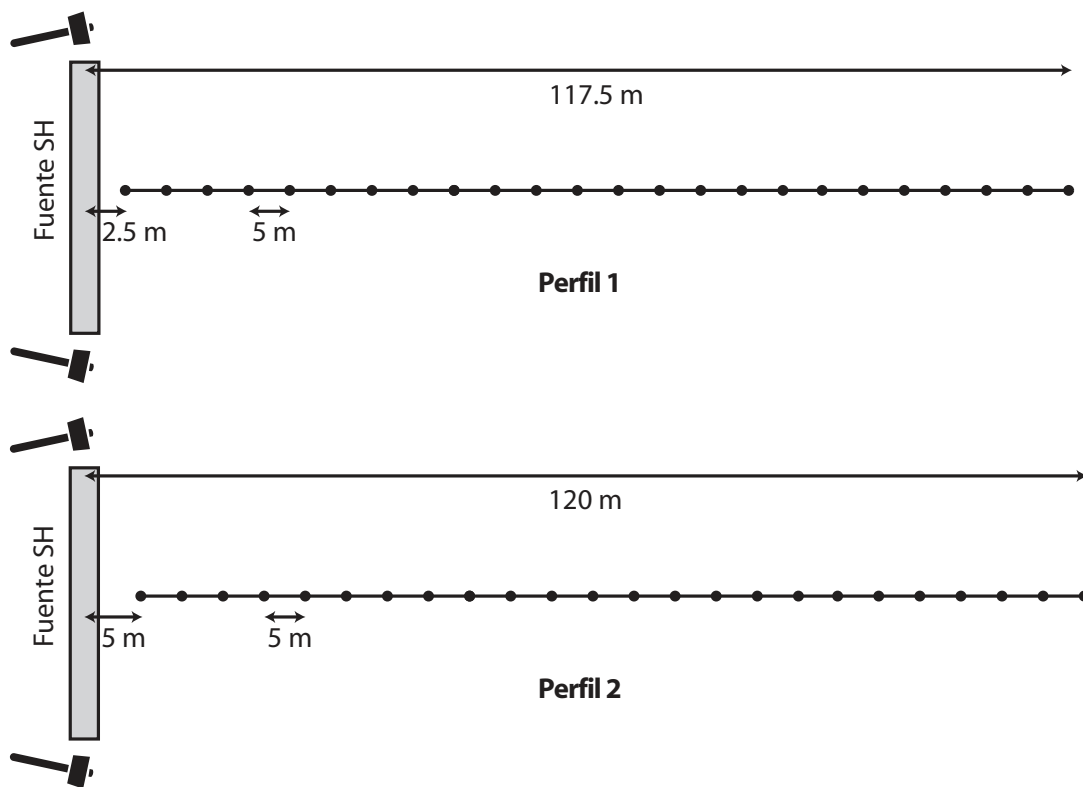
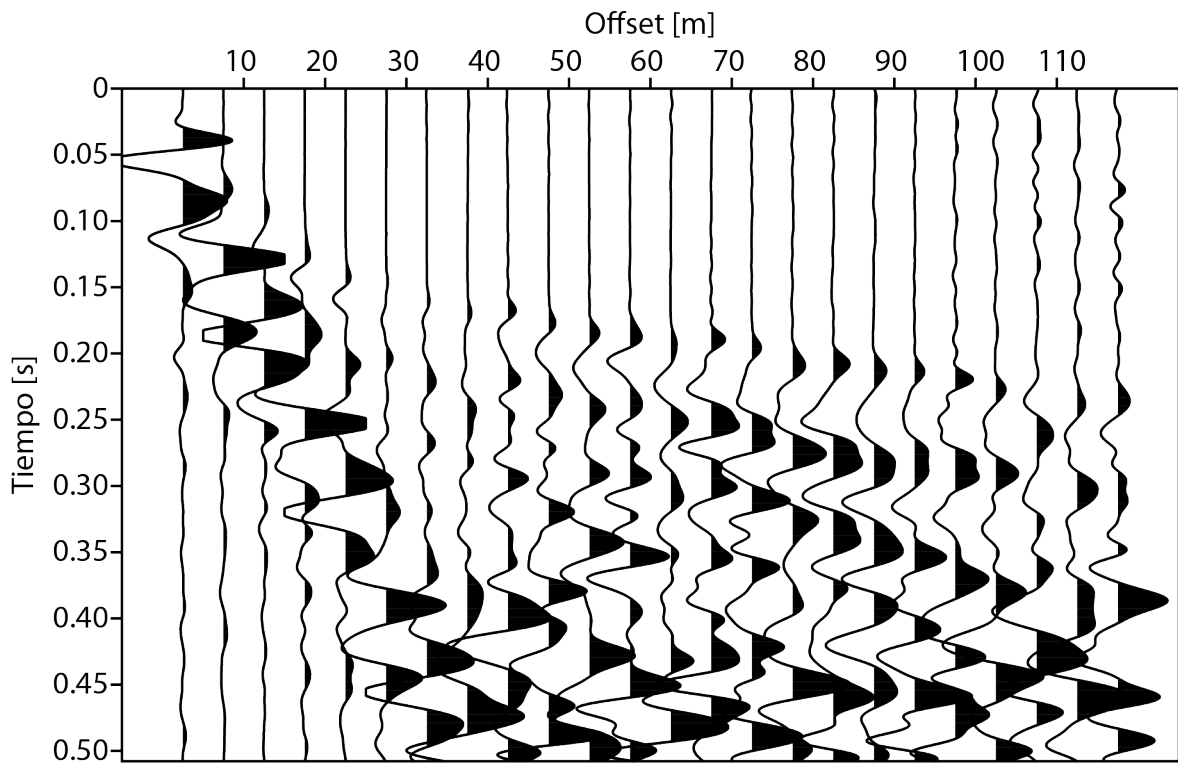
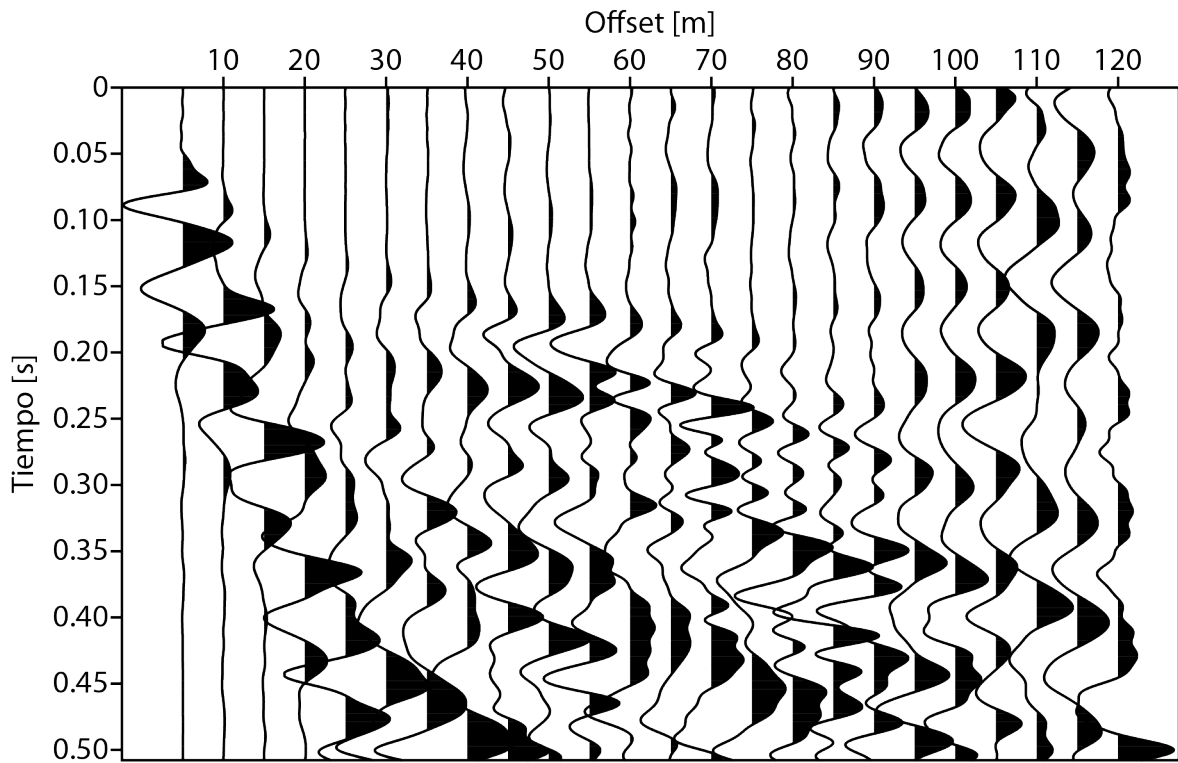


Figura 4.3: Configuración de terreno de líneas sísmicas Itata.



(a) Perfil 1



(b) Perfil 2

Figura 4.4: Sismogramas $x - t$, componente SH. Río Itata. Las trazas sísmicas han sido balanceadas para equiparar sus amplitudes dividiendo cada una de ellas por su valor RMS.

4.2. Modelación de curvas de dispersión

Para la transformación de los sismogramas temporales al espacio donde se observan las curvas de dispersión ($\omega-p$) se utilizaron los registros completos (ej. Fig. 4.1). En principio esta es la decisión correcta, puesto que, mientras mayor es el tiempo de medición en el sismograma, mayor es la cantidad de ondas superficiales registradas aportando a la dispersión requerida para el método.

El proceso de transformación descrito se llevó a cabo mediante un programa Matlab desarrollado durante este trabajo, cuyo objetivo es variar interactivamente los parámetros de cálculo de las transformaciones y visualizar las curvas de dispersión empíricas (ej. Fig. 4.5). El archivo de entrada requerido para el funcionamiento de este programa es un fichero con trazas sísmicas en el formato de Seismic Unix.

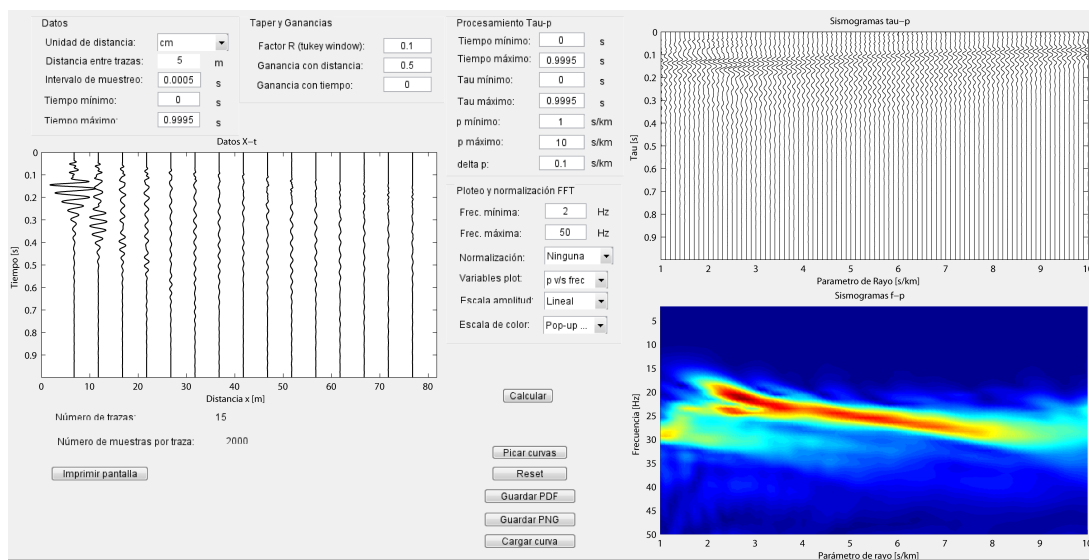


Figura 4.5: Ejemplo de programa utilizado para la transformación de datos (x, t) a (ω, p) . En el gráfico del panel izquierdo se muestra el registro sísmico (x, t) , mientras que en los paneles superior derecho e inferior derecho se observan los sismogramas (τ, p) y (ω, p) respectivamente.

Por otra parte, la modelación de las curvas de dispersión se efectuó mediante un programa que permite la determinación por prueba y error del modelo de velocidad del medio que ajuste la comparación visual entre las curvas observadas desde datos reales y teóricas (ej. Fig 4.6). Los datos de entrada corresponden a la curva extraída desde los sismogramas $\omega - p$ (Fig. 4.5, panel derecho inferior), y el programa entrega un modelo de velocidad estratificado como resultado de la modelación.

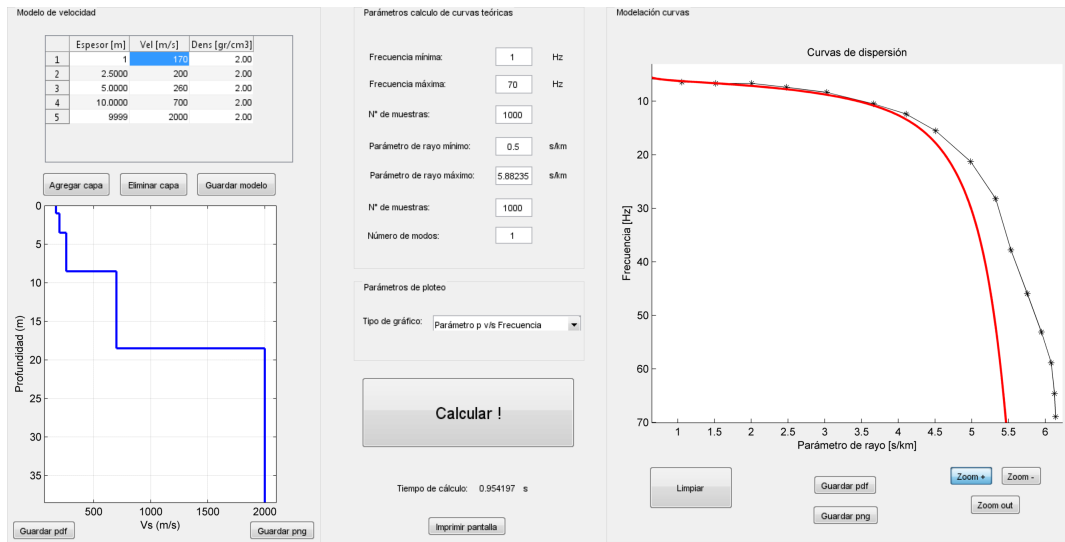


Figura 4.6: Ejemplo de programa utilizado para la modelación por prueba y error de las curvas de dispersión. En el gráfico del panel izquierdo se muestra el modelo de velocidad que produce la curva de dispersión roja que se observa en el panel derecho. En el panel derecho se visualiza la modelación de las curvas de dispersion obtenida desde datos (curva negra con asteriscos) con las curvas teóricas (curvas rojas). En la figura se muestran curvas que no coinciden en todo el rango de frecuencias intencionalmente, para retratar el proceso de modelación por prueba y error.

4.2.1. Modelación datos LIN

La Figura 4.7 muestra la amplitud de los sismogramas $\omega - p$, como resultado de la transformación de los registros (x, t) (Fig. 4.1) descrita en la sección 2.5.3. Lo observado en la figura se interpreta como la curva de dispersión del modo fundamental de propagación, cuyos valores digitalizados (puntos blancos) se importan posteriormente al programa de modelación de curvas de dispersión.

La Figura 4.8a muestra el resultado de la modelación de los datos (ω, p) correspondientes al modo fundamental (Fig. 4.7). La curva roja representa la curva teórica correspondiente al modelo de velocidad versus profundidad especificado en la Tabla 4.1 y graficado en la Figura 4.8b. Como se puede apreciar, esta curva ajusta adecuadamente los puntos digitalizados desde la transformada (ω, p) de los datos.

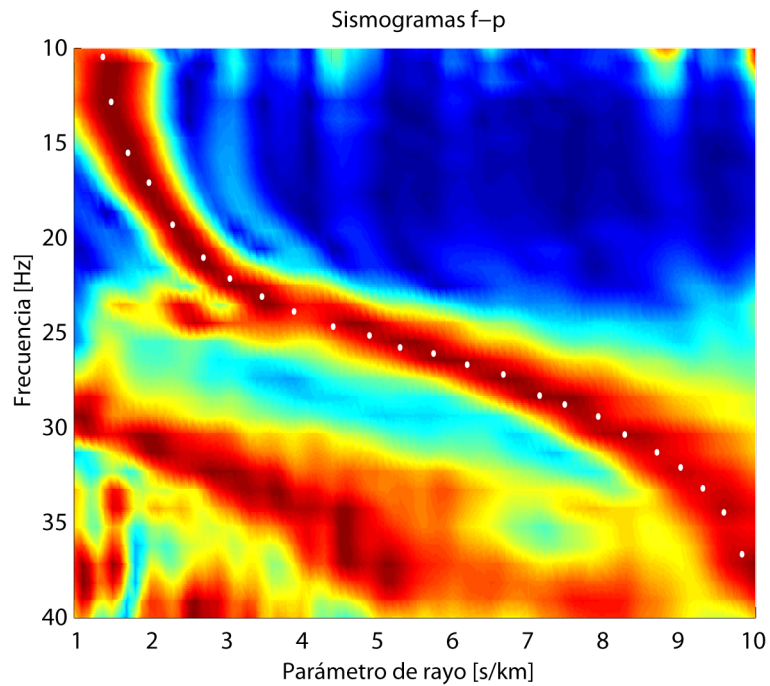


Figura 4.7: Amplitud espectral de sismogramas LIN en el espacio (f, p) , donde $f = \omega/2\pi$. En puntos blancos se muestra la digitalización del modo fundamental, realizada siguiendo los máximos de amplitud manualmente.

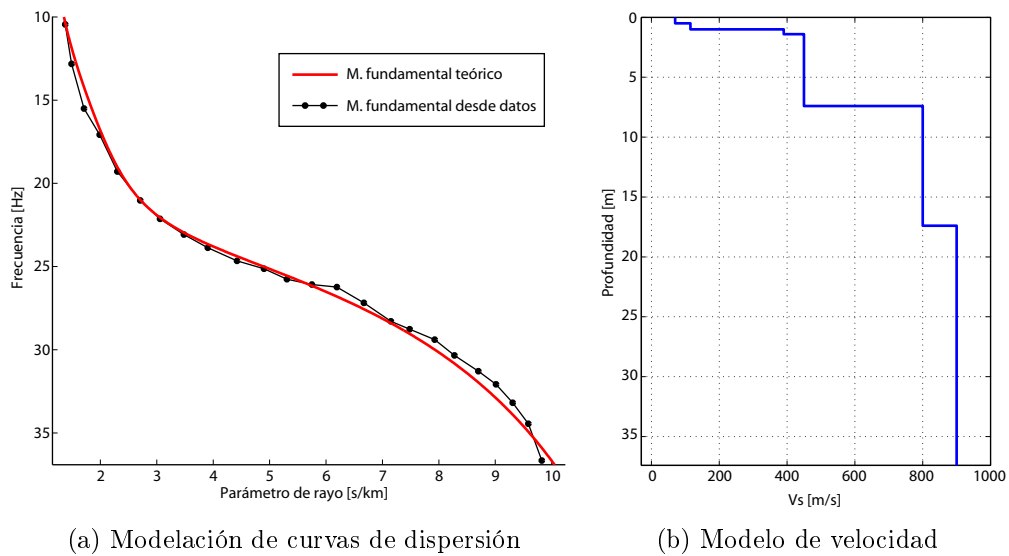


Figura 4.8: Modelación de curvas de dispersión de datos LIN. En (a) se muestra la comparación de la curva teórica (roja) con puntos digitalizados desde la transformada (ω, p) de los datos (Fig. 4.7). En (b) se observa el modelo de velocidad versus profundidad con que se calcula la curva teórica (roja) presentada en (a).

Índice de capa	Espesor [m]	Velocidad β [m/s]	Densidad [gr/cm ³]
0	0.5	70	2.0
1	0.5	115	2.0
2	0.4	390	2.0
3	6	450	2.0
4	10	800	2.0
5 (semi-espacio)	-	900	2.0

Tabla 4.1: Modelo de velocidad para datos LIN, determinado mediante método de ondas superficiales Love (Fig. 4.8b).

4.2.2. Modelación datos ITA

De la misma manera que para LIN, en la Figura 4.9 se presenta la amplitud de los sismogramas $\omega - p$ para el perfil 1 y perfil 2 de los registros sísmicos de Itata, 2005 (Fig. 4.4). Los puntos blancos corresponden a la digitalización del modo fundamental interpretado desde el gráfico.

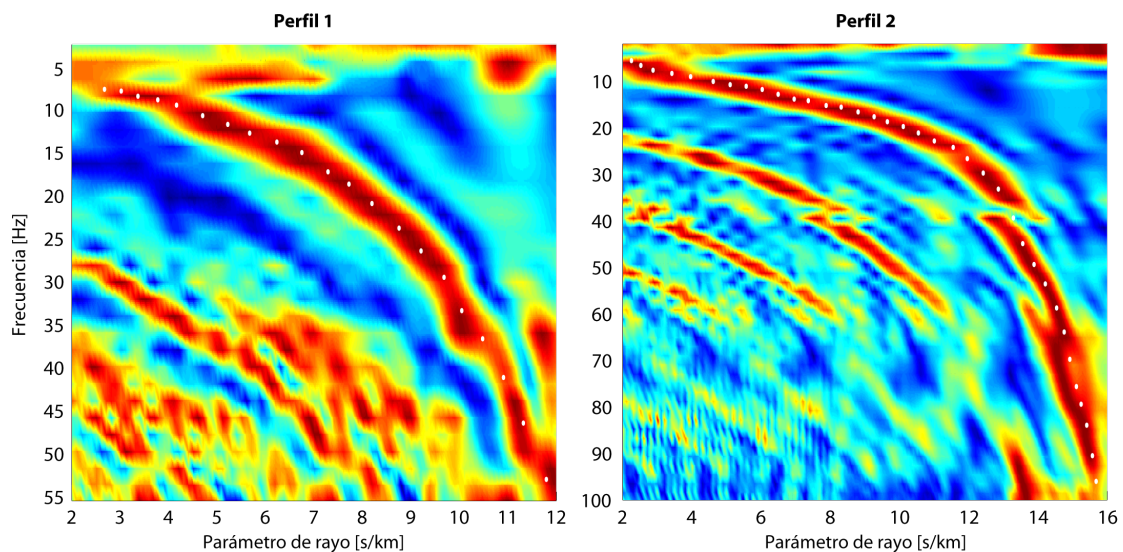
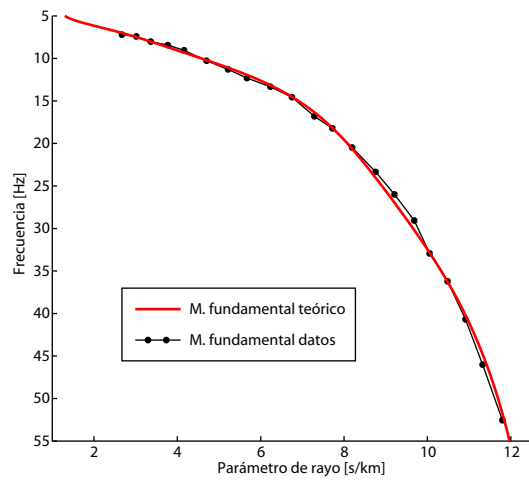
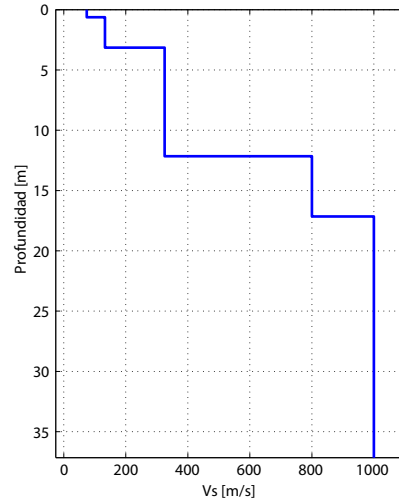


Figura 4.9: Amplitud de sismogramas ITA en el espacio (f, p) . Los puntos blancos muestran la digitalización del modo fundamental, realizada siguiendo los máximos de amplitud manualmente.

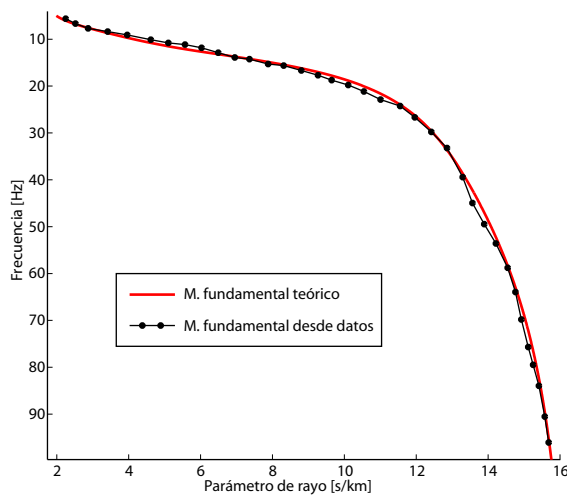
La Figura 4.10 muestra el resultado de la modelación de los datos (ω, p) correspondientes al modo fundamental (Fig. 4.9) para los dos perfiles. Las curvas rojas representan curvas teóricas correspondientes a los modelos de velocidad versus profundidad especificados en las Tablas 4.2 y 4.3, y graficados en las Figuras 4.10b y 4.10d.



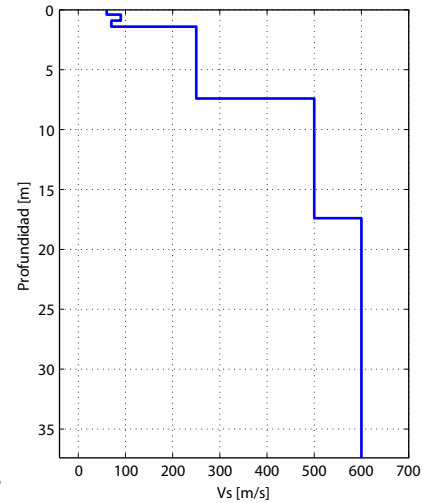
(a) Modelación de curvas de dispersión - P1



(b) Modelo de velocidad - P1



(c) Modelación de curvas de dispersión - P2



(d) Modelo de velocidad - P2

Figura 4.10: Modelación de curvas de dispersión de datos ITA. En (a) y (c) se muestra la comparación de la curva teórica (roja) con puntos digitalizados desde la transformada (ω, p) de los datos (Fig. 4.9) para los perfiles 1 y 2 respectivamente. En (b) y (d) se observan los modelos de velocidad versus profundidad con que se calculan las curvas teóricas presentadas en (a) y (c) respectivamente.

Índice de capa	Espesor [m]	Velocidad β [m/s]	Densidad [gr/cm^3]
0	0.63	74	2.0
1	2.52	133	2.0
2	9	325	2.0
3	5	800	2.0
4 (semi-espacio)	-	1000	2.0

Tabla 4.2: Modelo de velocidad estratificado para ITA-P1, determinado mediante el método de ondas Love (Fig. 4.10b).

Índice de capa	Espesor [m]	Velocidad β [m/s]	Densidad [gr/cm ³]
0	0.4	60	2.0
1	0.5	90	2.0
2	0.5	70	2.0
3	6	250	2.0
4	10	500	2.0
5 (semi-espacio)	-	600	2.0

Tabla 4.3: Modelo de velocidad estratificado para ITA-P2, determinado mediante el método de ondas Love (Fig. 4.10d).

4.3. Modelación 1D de ondas refractadas

Uno de los objetivos de este trabajo es comparar y/o validar los resultados obtenidos desde el método de ondas Love con alguna metodología ya probada. Uno de los métodos sísmicos convencionales utilizados para la caracterización de suelos es el de refracción sísmica (sección 3.4), para el cual es necesario generar sismogramas que además de ondas superficiales Love, contengan también ondas internas SH refractadas. En esta sección se expone el resultado de la modelación 1D de las curvas camino-tiempo correspondientes a las ondas de cuerpo SH.

4.3.1. Refracción sísmica datos LIN

Siguiendo la metodología presentada en la sección 3.4, la digitalización manual de las primeras llegadas se realizó sobre los sismogramas $x - t$ de ondas SH generados a partir de golpes de martillo ejecutados sobre una viga en direcciones contrarias, perpendiculares al tendido sísmico. Estos sismogramas se sobreponen para reconocer de mejor forma las primeras llegadas de las ondas refractadas SH, cuyas polaridades deberían ser contrarias debido a la forma en que estas ondas fueron generadas y a la naturaleza de las ondas SH (Fig. 4.11). Además de los registros SH, en la Figura 4.12 se muestran sismogramas generados mediante una fuente vertical y registrados en la componente vertical de los mismos geófonos triaxiales. Las primeras llegadas de estos sismogramas corresponden a ondas P, que como es de esperar se registran a tiempos menores que las ondas SH registradas en la componente horizontal de los geófonos (Fig. 4.11).

El resultado de la modelación de las primeras llegadas de las ondas refractadas SH y ondas refractadas P se presenta en la figura 4.13. En las tablas 4.4 y 4.5 se resumen los modelos de velocidad determinados por ajuste interactivo de las curvas camino tiempo y los tiempos de las primeras llegadas para ondas SH y ondas P respectivamente.

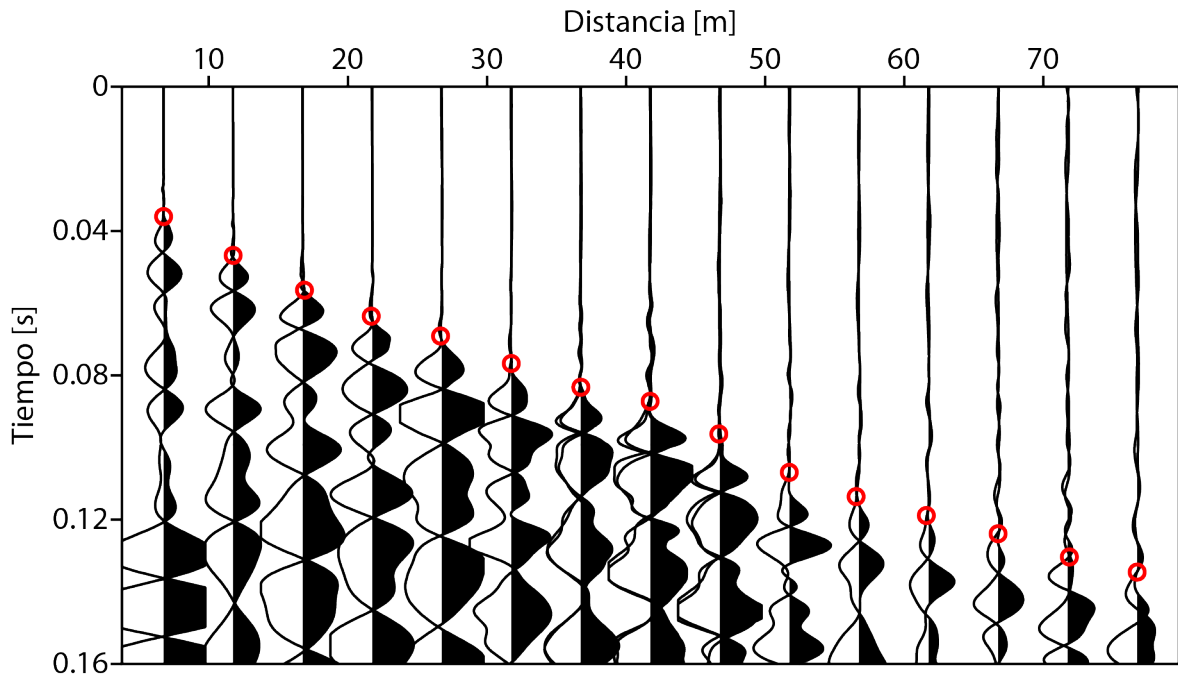


Figura 4.11: Digitalización del tiempo de arribo de las primeras llegadas de ondas SH para datos LIN. Los círculos de borde rojo muestran el picado manual para cada una de las trazas sísmicas, cuyas amplitudes han sido balanceadas dividiendo por su valor RMS.

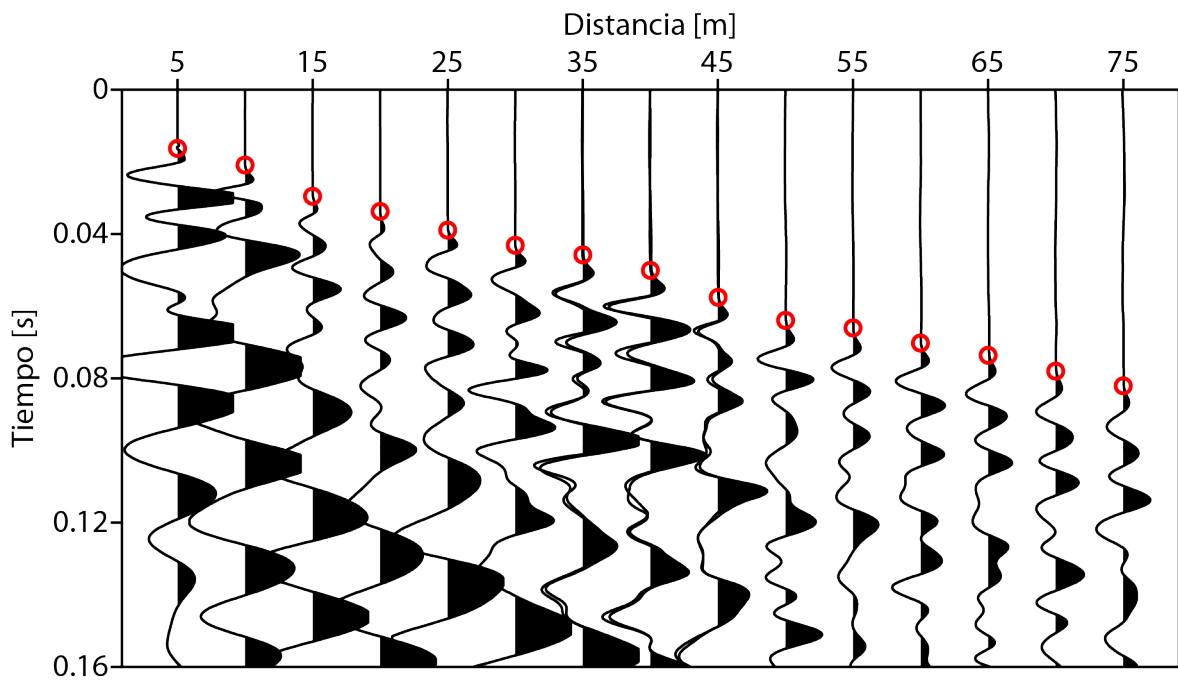


Figura 4.12: Digitalización del tiempo de arribo de las primeras llegadas de ondas P para datos LIN. Los círculos de borde rojo muestran el picado manual para cada una de las trazas sísmicas, cuyas amplitudes han sido balanceadas dividiendo por su valor RMS.

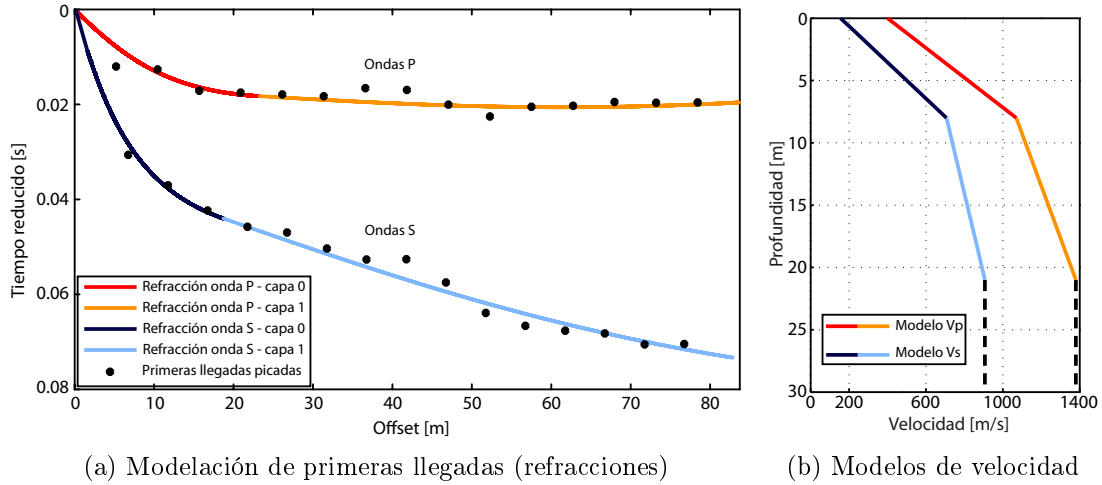


Figura 4.13: Modelación directa de las primeras llegadas datos LIN. En (a) se muestra el ajuste por prueba y error de las curvas camino tiempo y las primeras llegadas digitalizadas (puntos negros) para ondas P y ondas S. Para esto se utiliza un tiempo reducido considerando una velocidad de reducción de 1200 m/s . En (b) se muestran los modelos de velocidad que producen el ajuste mostrado en (a).

Índice de capa	H [m]	VTop [m/s]	VBott [m/s]
0	8	156	707
1	13	707	907
2 (semi-espacio)	-	907	907

Tabla 4.4: Modelo de velocidad para LIN a partir de refracción sísmica de ondas SH (Fig. 4.13b). H se refiere al espesor de la capa, $VTop$ y $VBott$ a la velocidad de onda S en el techo y base de la capa respectivamente. Notar que no se especifican densidades para cada capa, puesto que estas no influyen en el cálculo de primeras llegadas en el método de refracción sísmica.

Índice de capa	H [m]	VTop [m/s]	VBott [m/s]
0	8	400	1070
1	13	1070	1380
2 (semi-espacio)	-	1380	1380

Tabla 4.5: Modelo de velocidad para LIN a partir de refracción sísmica de ondas P (Fig. 4.13b). H se refiere al espesor de la capa, $VTop$ y $VBott$ a la velocidad de onda P en el techo y base de la capa respectivamente. Notar que no se especifican densidades para cada capa, puesto que estas no influyen en el cálculo de primeras llegadas en el método de refracción sísmica.

4.3.2. Refracción sísmica datos ITA

Al igual que para los datos LIN, en la Fig. 4.14 se muestra la digitalización manual de las primeras llegadas correspondientes a ondas SH refractadas para los perfiles ITA-P1 e ITA-P2.

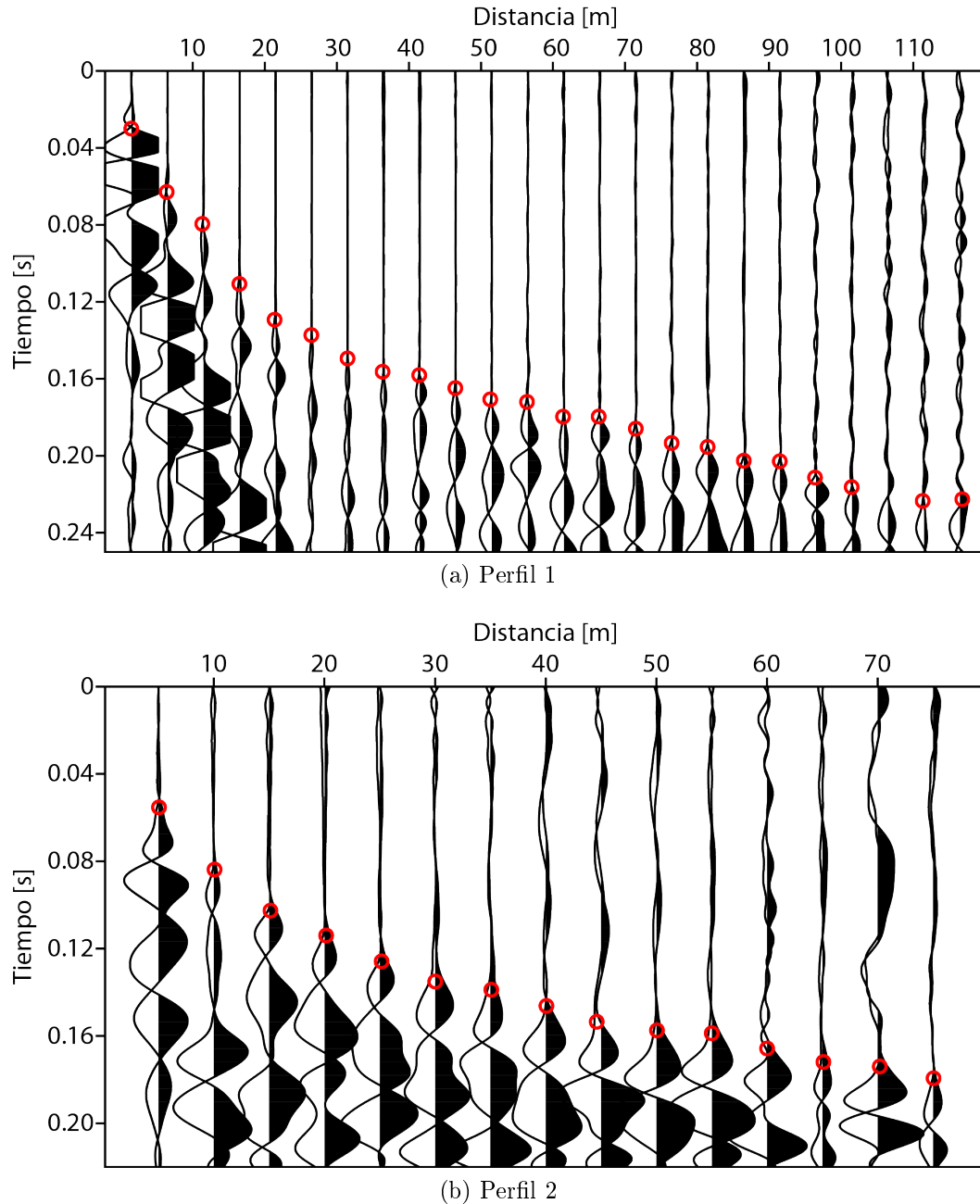


Figura 4.14: Digitalización del tiempo de arribo de las primeras llegadas para sismogramas ITA. Los círculos de borde rojo muestran el picado manual para cada una de las trazas sísmicas, cuyas amplitudes han sido balanceadas dividiendo por su valor RMS.

La modelación de las curvas camino tiempo para ambos perfiles sísmicos se muestra en las figuras 4.15 y 4.16. En las tablas 4.6 y 4.7 se resume el modelo de velocidad determinado

para cada uno de los perfiles (Figura 4.15b y Figura 4.16b respectivamente).

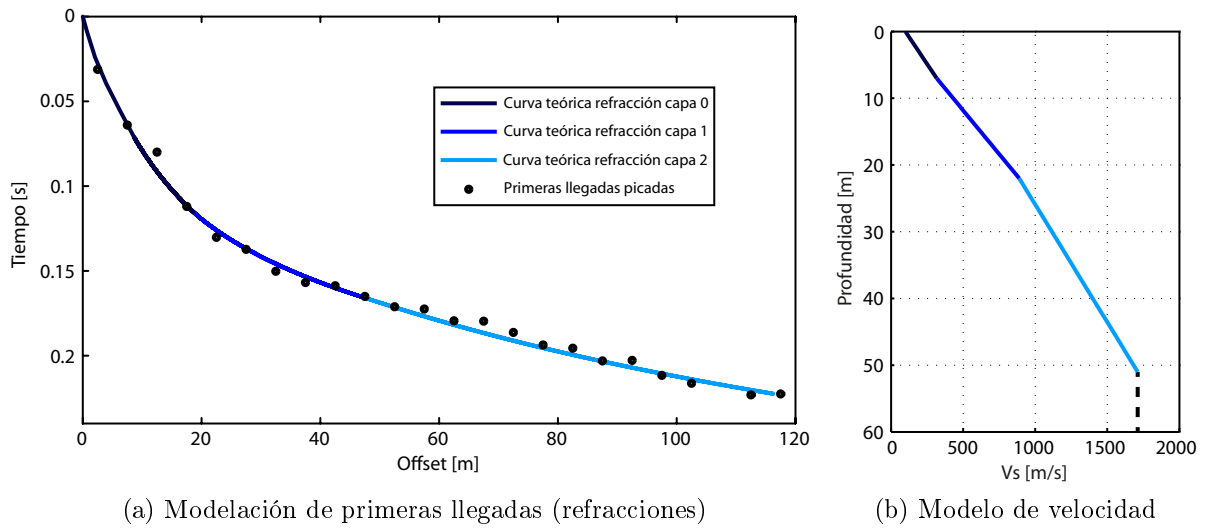


Figura 4.15: Modelación directa de las primeras llegadas para datos ITA-P1.

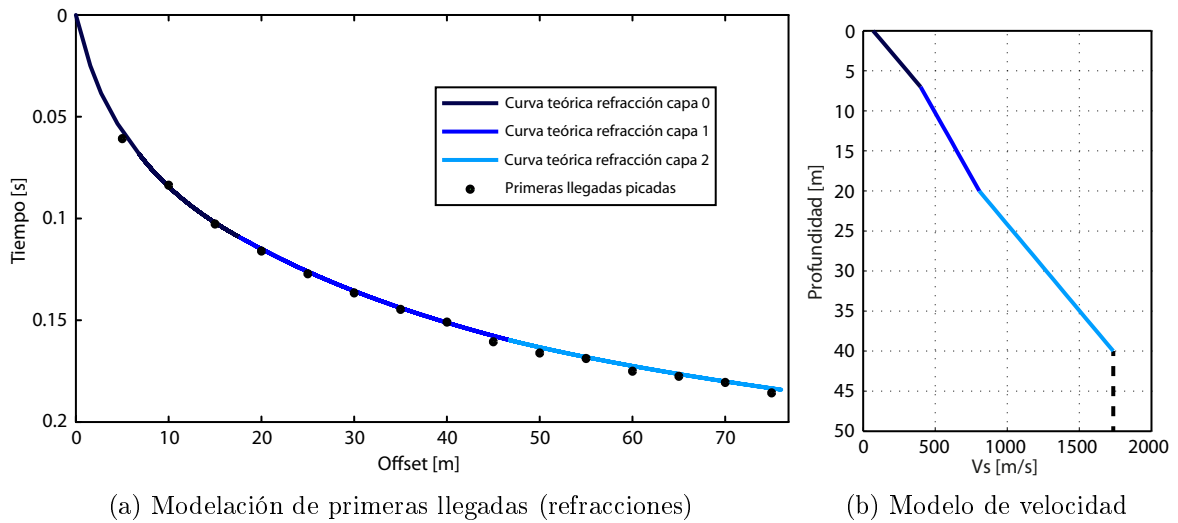


Figura 4.16: Modelación directa de las primeras llegadas para datos ITA-P2.

Índice de capa	H [m]	VTop [m/s]	VBott [m/s]
0	7	100	316
1	15	316	889
2	29	889	1711
3 (semi-espacio)	-	1711	1711

Tabla 4.6: Modelo de velocidad para ITA-P1 a partir de refracción sísmica de ondas SH (Fig. 4.15b). H se refiere al espesor de la capa, V_{Top} y V_{Bott} a la velocidad de onda S en el techo y base de la capa respectivamente.

Capa	H [m]	VTop [m/s]	VBott [m/s]
0	7	70	399
1	13	399	806
2	20	806	1735
3 (semi-espacio)	-	1735	1735

Tabla 4.7: Modelo de velocidad para ITA-P2 a partir de refracción sísmica de ondas SH (Fig. 4.16b). H se refiere al espesor de la capa, $VTop$ y $VBott$ a la velocidad de onda S en el techo y base de la capa respectivamente. Notar que no se especifican densidades para cada capa, puesto que estas no influyen en el cálculo de primeras llegadas en el método de refracción sísmica.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

5.1. Discusión

5.1.1. Modelación de curvas de dispersión

La modelación de las curvas de dispersión por prueba y error requiere del previo conocimiento de la sensibilidad de las curvas con respecto a los parámetros del medio (velocidad de onda S, espesor de capas, densidad). De lo contrario el proceso se vuelve tedioso y muchas veces se termina añadiendo capas innecesarias o con propiedades poco reales para el medio de estudio.

En este trabajo, la modelación de las curvas (Figuras 4.8a, 4.10a y 4.10c) reflejó alta sensibilidad a las propiedades de las capas superficiales, definiendo gran parte de la forma y posición de las curvas de dispersión. Esta característica puede ser explicada por el hecho de que las frecuencias alcanzadas por el conjunto de datos está centrada en alrededor de 15-20 Hz, perdiendo resolución en las frecuencias más bajas (< 10 Hz) y por lo tanto en las capas más profundas del modelo.

En este sentido los modelos de velocidad de onda de corte determinados tienen mejor resolución en las capas superficiales (del orden de unidades de metros), y pierden confiabilidad en las capas más profundas.

5.1.2. Modelos de velocidad desde método de ondas Love

Modelo Linderos, 2013 (Fig. 4.8b)

La modelación de la curva correspondiente al modo fundamental (Fig. 4.8a) muestra gran sensibilidad en las frecuencias medias-altas ($\sim 20 - 37$ Hz). Entonces pequeñas variaciones de velocidad y espesor (del orden de unidades de m/s y metros respectivamente) en las

capas superficiales provocan cambios significativos en el ajuste de las curvas de dispersión, indicando una buena determinación de las propiedades en las primeras capas. Sin embargo, a medida que el modelo se profundiza ($z \sim 10m$) las propiedades del medio tienen un error mayor debido a la ausencia de datos en las frecuencias bajas (< 10 Hz).

Relacionando el modelo final a la clasificación de suelos presentada en la norma chilena para el diseño sísmico de edificios (sección 1.2.1), el parámetro V_{s30} estimado es de 573 m/s, cuyo valor implicaría un suelo de tipo B (Fig. 1.3) caracterizado por ser muy denso o muy firme, de roca blanda o fracturada.

Modelos Itata (Fig. 4.10)

Similar al caso de Linderos, en la modelación del modo fundamental predominan las altas frecuencias (hasta 55 Hz en perfil 1 y 100 Hz en perfil 2), por lo cual las propiedades de los estratos superficiales quedan bien determinados por el método.

En la Figura 5.1 se muestran los modelos de velocidad finales para ambos perfiles en una misma gráfica. La estructura de velocidad del perfil 1 alcanza mayores velocidades que el perfil 2 en profundidades mayores a 15 metros, teniendo el perfil 2 mejor resolución en profundidades someras debido al mayor contenido de frecuencias altas presentes en los sismogramas. Cabe mencionar que el perfil 2 se realizó mas hacia el centro del río, donde probablemente el suelo está mas blando y con mayor cantidad de fluidos, lo que concuerda con las velocidades menores a profundidades mayores a 10 - 15 metros con respecto al perfil 1. Sin embargo, como se observa en la sección 4.3.2, los resultados del método de refracción aplicado a los datos ITA no muestran diferencia apreciable en las velocidades a profundidades mayores a 10 - 15 metros, por lo que se debe tener cuidado en la interpretación de los modelos obtenidos mediante ondas superficiales Love, sobretodo teniendo en cuenta que la resolución del modelo disminuye en profundidad debido a la ausencia de datos en bajas frecuencias.

Notar que el modelo de velocidad V_s para el perfil 2 muestra una capa de baja velocidad dentro de los primeros dos metros de profundidad. Esta característica puede ser justificada considerando que el método consigue una buena resolución en las capas mas superficiales (frecuencias mas altas), sobretodo para este perfil, cuyos datos alcanzan frecuencias de hasta 100 Hz.

El parámetro geotécnico V_{s30} resultó en 404 y 356 para el perfil 1 y perfil 2 respectivamente, cuyos valores califican suelos de tipo C (suelo denso o firme) en ambos casos.

5.1.3. Uso de modos superiores de propagación

Un tema de gran relevancia para la modelación de curvas de dispersión es la cantidad de modos utilizados. Como se vió anteriormente en el marco teórico, una estructura de velocidad en profundidad define un conjunto de curvas de dispersión que representa cada uno de los modos de propagación de las ondas en el medio. Sin embargo, en la práctica es difícil excitar todos estos modos debido a que la energía inyectada es insuficiente y el rango de frecuencias

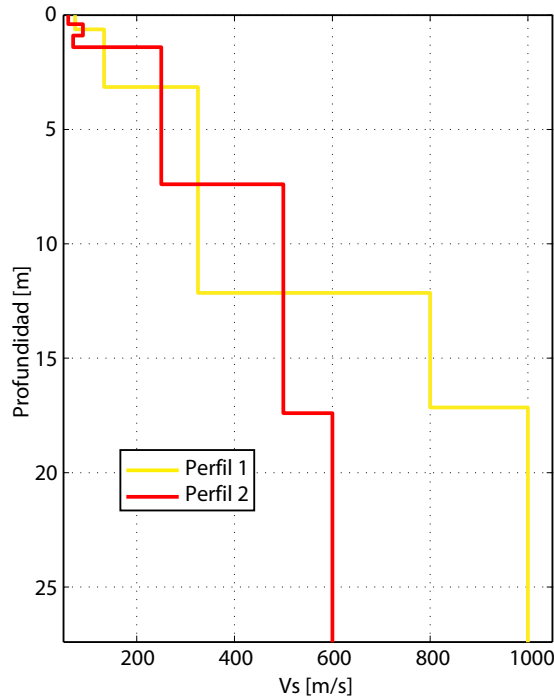


Figura 5.1: Comparación de modelos de V_s Love para datos Itata.

es limitado tanto en la generación como en el registro de las ondas superficiales. Es por esto que normalmente (no siempre) se observa solo el modo fundamental en los sismogramas transformados, que es justamente el que contiene mayor energía y el que finalmente se modela.

Si bien en teoría es el conjunto completo de modos el que define un modelo de velocidad, en general basta solo con modelar el modo fundamental para obtener un modelo de velocidad aproximado confiable. No obstante, el uso exclusivo del modo fundamental podría conllevar la obtención de modelos equivalentes pero no únicos. Además existen casos especiales en que la presencia y modelación de los modos superiores es esencial para la determinación de la estructura de velocidad (ej. O'Neill & Matsuoka, 2005). En particular, los modelos con capas de baja velocidad en su estratificación tienden a entregar imágenes de las curvas de dispersión de modos superiores con mejor definición y, en estos casos, debería utilizarse un método de inversión que incluya estos modos para la correcta determinación de la estructura de V_s . En este contexto, las ondas superficiales Love son idóneas para la determinación de estructuras complejas debido a que sus curvas de dispersión tienden a ser más simples y no se produce superposición (o "mode kissing") entre ellas como sucede con las ondas superficiales de Rayleigh en algunos casos particulares (Xia et al. 2012; Strobbia, 2005).

En la Figura 4.9 se aprecia que en los dos perfiles sísmicos de Itata 2005 es posible observar y eventualmente modelar al menos el primer modo superior con cierta confianza (particularmente el perfil 2). Sin embargo, la modelación directa por prueba y error utilizada en este trabajo es poco práctica para modelar más de una curva al mismo tiempo debido al grado de sensibilidad de las curvas a pequeñas variaciones en la velocidad y espesor de cada capa. Para estos casos es ideal contar con un software de inversión que permita la modelación conjunta de los múltiples modos bajo el principio de minimizar la diferencia entre las curvas empíricas y teóricas mediante mínimos cuadrados o similares.

5.1.4. Comparación entre métodos Love y refracción SH

La comparación entre los dos métodos presentados podría permitir la validación del uso de ondas Love para la caracterización sísmica de suelos. El método convencional de refracción sísmica aplicado a ondas SH es un método probado y confiable cuando las primeras llegadas de las ondas refractadas pueden ser visualizadas con cierta seguridad. Sin embargo, las ventajas de este método pueden ser opacadas por el ruido presente en los sismogramas, en cuyo caso el método de ondas superficiales Love podría tomar fuerza debido a la naturaleza dispersiva de estas.

Comparación datos LIN

La Figura 5.2 muestra la comparación gráfica entre los modelos unidimensionales obtenidos mediante las dos metodologías mencionadas. El modelo obtenido mediante ondas Love define una velocidad de onda de corte menor en la parte más superficial (alrededor de 70 m/s contra 156 m/s por refracción SH). En promedio ambos modelos concuerdan bien, diferenciándose sólo en la parte somera.

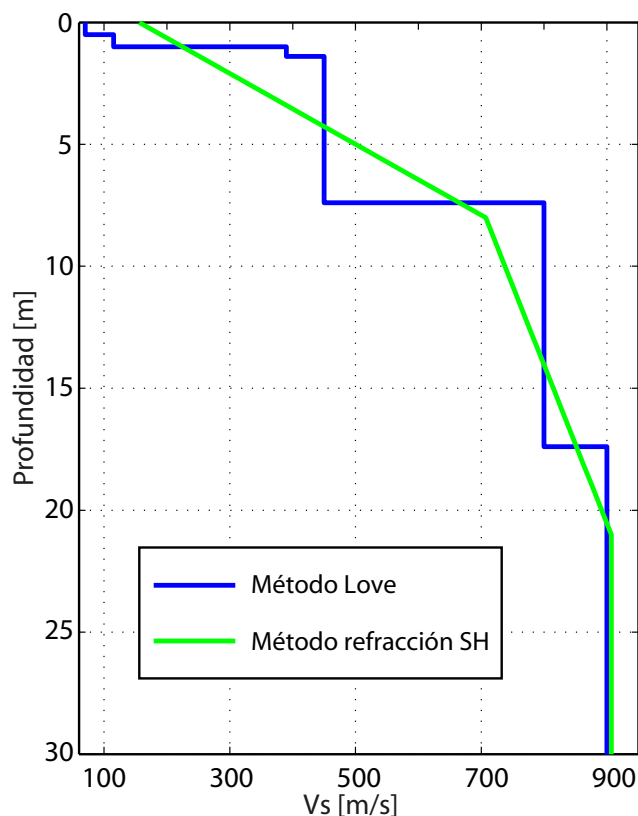


Figura 5.2: Comparación de modelos de V_s para datos de Linderos, 2013.

La Figura 5.3 muestra una comparación entre los tiempos de arribo de las ondas refractadas observadas (círculos negros) versus los tiempos de arribo predichos por el modelo de velocidad

estratificado (ver Figura 4.8b, Tabla 4.1) determinado con el método de ondas superficiales Love (curva verde). La curva roja punteada representa los tiempos de arribo de las ondas refractadas predichos por un modelo de capas modificado desde el modelo original, en el cual se ha extraído la primera capa.

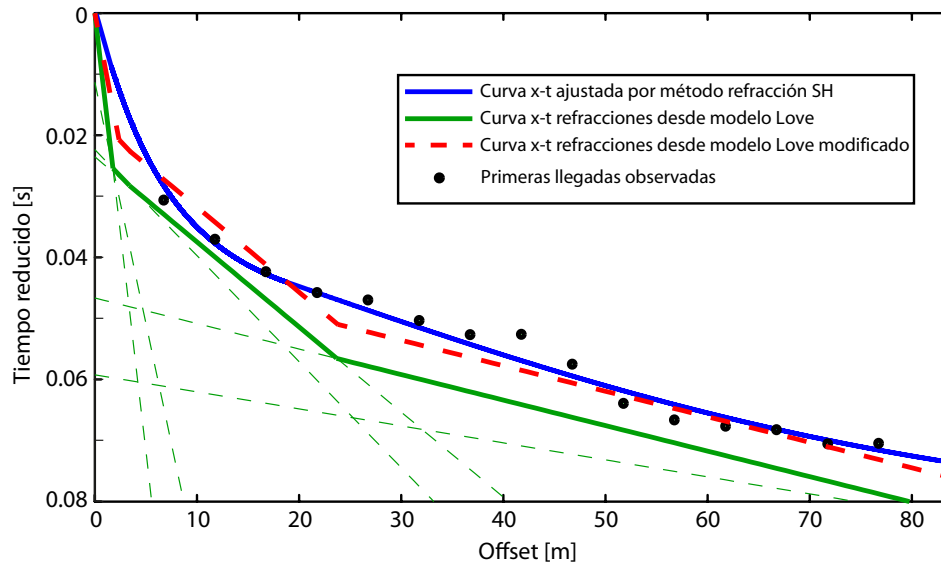


Figura 5.3: Comparación entre tiempos de arribo observados y predichos por modelo Love, datos LIN. Los círculos negros representan los tiempos de arribo observados. La curva azul corresponde a los tiempos ajustados con el método de refracción. Las curvas verdes y roja punteada indican los tiempos de arribo predichos por el modelo Love y por un modelo Love modificado quitando la primera capa del modelo Love original, respectivamente.

Desde la comparación entre las pendientes de las curvas verde y roja punteada con la curva observada (círculos negros) se puede notar que las velocidades son consistentes con lo observado. Sin embargo, el modelo de velocidad Love predice tiempos de arribo mayores a los observados, cuya característica puede ser ajustada fácilmente disminuyendo el espesor de alguna de las capas. Por ejemplo, el ejercicio de quitar la primera capa del modelo original (curva roja punteada) permite un ajuste mucho mejor entre lo predicho y lo observado. Esta observación indica que, si bien el ajuste entre los tiempos de arribo predichos por el modelo Love y los tiempos observados no es bueno, en realidad la diferencia entre los modelos de velocidad determinados mediante ambos métodos es mínima, y está controlada básicamente por las propiedades de las capas superficiales, que es justamente donde se ha observado que el método Love obtiene mejores resultados que el método de refracción.

Comparación datos ITA

Desde las Figuras 5.4 y 5.5 se puede observar que nuevamente, al igual que en el caso de Linderos, las velocidades de onda de corte en la parte superficial (pocos metros) tienden a ser menores en el modelo Love que en el modelo de refracción SH para ambos perfiles sísmicos. La variación de la velocidad en profundidad es consistente en ambos modelos de cada perfil, pero el modelo Love no es capaz de reconocer estratos a profundidades mayores a 30 m y 20

m (P1 y P2 respectivamente) donde el método de refracción SH alcanza profundidades de 50 m y 40 m respectivamente, con velocidades mayores de hasta alrededor de 1700 m/s .

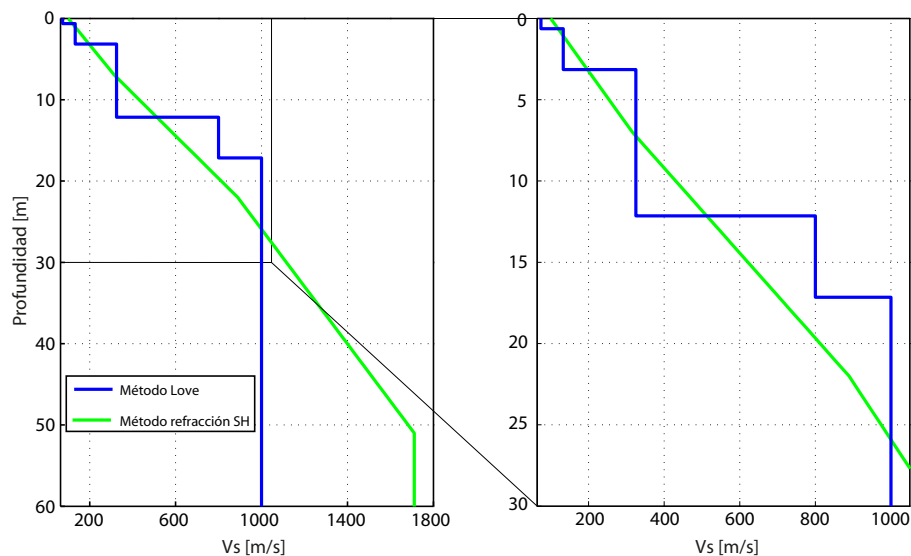


Figura 5.4: Comparación de modelos de V_s para ITA-P1. A la derecha se muestra un zoom de la parte superior para mejor visualización.

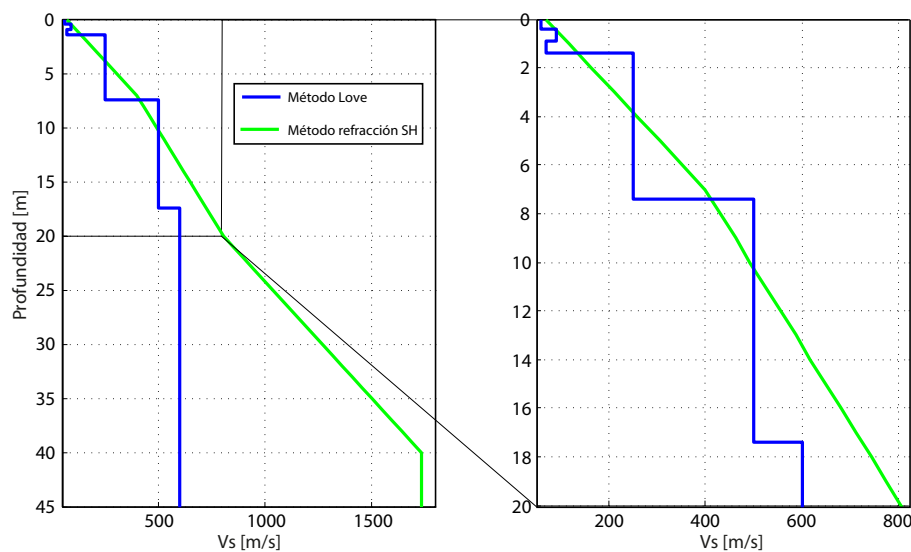
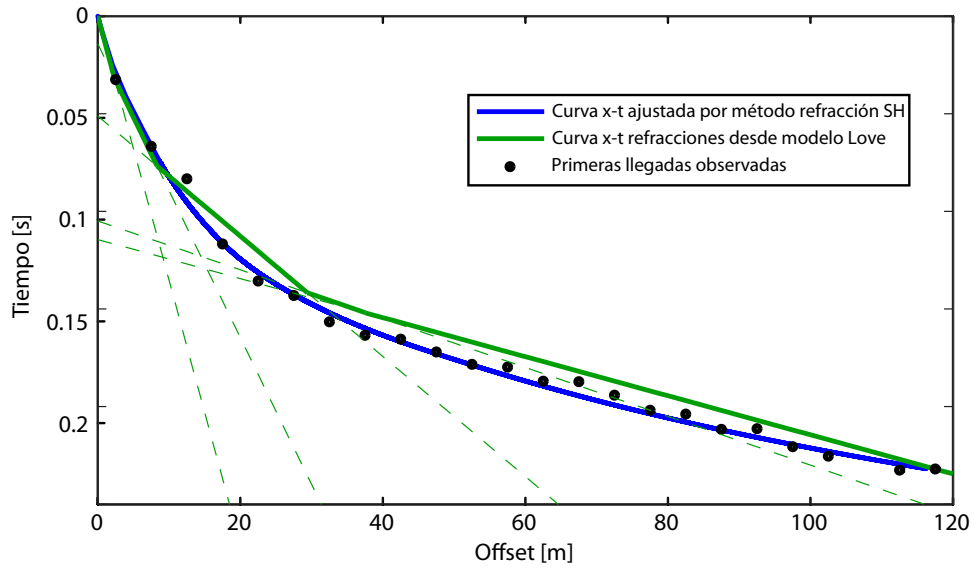


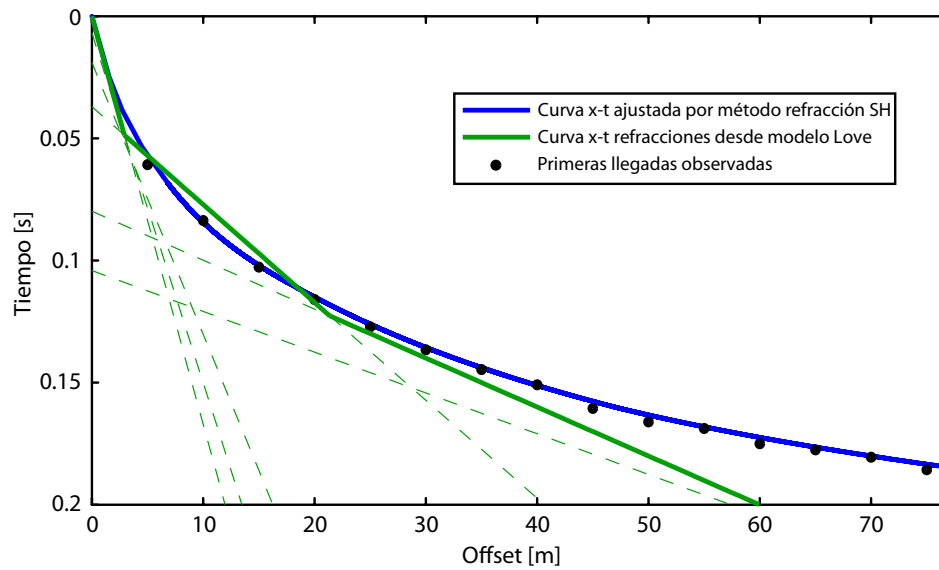
Figura 5.5: Comparación de modelos de V_s para ITA-P2. A la derecha se muestra un zoom de la parte superior para mejor visualización.

Las Figuras 5.6a y 5.6b muestran una comparación gráfica entre los tiempos de arribo observados (círculos negros) versus los tiempos de arribo predichos por el modelo de velocidad (ver Figuras 4.10b, 4.10d y Tablas 4.2, 4.3) determinado con el método de ondas superficiales Love (curva verde), para el perfil 1 y el perfil 2 respectivamente.

Desde la comparación entre las curvas verde con la curvas observadas (círculos negros) se puede notar que las velocidades y espesores son consistentes con lo observado, a excepción



(a) Comparación entre tiempos de arribo observados y predichos por modelo Love, datos ITA-P1



(b) Comparación entre tiempos de arribo observados y predichos por modelo Love, datos ITA-P2

Figura 5.6: Comparación entre tiempos de arribo observados y predichos por modelos Love, para los dos perfiles de datos ITA. Los círculos negros representan los tiempos de arribo observados. Las curvas azules corresponden a los tiempos ajustados con el método de refracción. Las curvas verdes indican los tiempos de arribo predichos por los modelos Love.

del perfil 2, donde la curva $x - t$ refractada en la última capa del modelo Love no ajusta bien a los datos observados. Esta diferencia podría ser explicada por la poca penetración en profundidad del método de ondas superficiales Love y conjunto de datos utilizados, cuyo modelo de velocidad es incapaz de reconocer estratos a profundidades mayores a $\sim 20 m$ con buena resolución.

Consideraciones generales

Desde lo observado en los resultados de ambos métodos, llama la atención la diferencia en profundidades alcanzadas y la resolución en las distintas profundidades. El modelo determinado por el método de ondas Love depende del contenido de frecuencias del registro para el cual se observan las curvas de dispersión, y a su vez este rango de frecuencias limita las profundidades que alcanza el método. En general se observó que para el rango de frecuencias contenido en los registros utilizados es posible determinar la estructura de velocidad en los primeros metros del suelo con buena resolución, mientras que la carencia de datos en bajas frecuencias ($< 10 \text{ Hz}$) no permite una buena definición de las propiedades del medio a profundidades mayores a las primeras decenas de metros, lo que hace menos creíble el modelo final a medida que la profundidad aumenta.

Por otra parte, la profundidad alcanzada por los modelos SH son mayores que en los modelos Love (Fig. 5.2, Fig. 5.4 y Fig. 5.5). La profundidad del modelo determinado por refracción sísmica depende de, entre otros aspectos, la distancia horizontal a la que es posible detectar las primeras llegadas en superficie, puesto que en un medio normalmente dispersivo donde la velocidad de propagación aumenta con profundidad, los rayos que viajan a mayores profundidades tienden a alcanzar una distancia horizontal mayor. La desventaja de este método es que no es capaz de reconocer capas de baja velocidad y que en casos de baja relación señal - ruido puede ser difícil reconocer las primeras llegadas, sobretodo en registros de refracción de ondas SH, cuyas amplitudes (dada la naturaleza de la fuente sísmica utilizada) son, en general, menores que en el caso de la sísmica convencional (fuente vertical).

Un factor importante a mencionar es el hecho de que los dos métodos mencionados utilicen el mismo registro sísmico. Si bien ambos se basan en el análisis de distintas porciones del registro, el resultado buscado es el mismo, y pueden entonces ser empleados complementariamente de manera independiente. Desde lo observado en este trabajo el método de ondas superficiales tiende a dar mejores resultados en las capas superficiales (primeras unidades de metros), mientras que el método de refracción determina directamente un modelo confiable a profundidades mayores. Por otro lado, el método Love utiliza el registro sísmico completo, independiente de la amplitud del ruido y de las primeras llegadas, y el método de refracción requiere solo de las primeras llegadas registradas en cada estación.

Notar que en el método de refracción sísmica es independiente de la densidad del medio, pues esta variable no es necesaria para el cálculo de velocidades ni tiempos de llegada. Si bien la densidad no juega un papel preponderante en la modelación de curvas de dispersión (ver Figura 3.6), la independencia con respecto a esta variable es una ventaja del método de refracción sísmica con respecto al de ondas superficiales Love.

En resumen, pareciera que algunas de las limitaciones de uno de los métodos pudiera suplirse con las ventajas del otro, ayudando no solo como una validación o comparación de resultados, si no como una complementación de ambos. Por último, si quisiera incluirse también un modelo de velocidad de onda P, utilizando una fuente sísmica y geófonos verticales, estos métodos podrían también complementarse con la modelación de curvas de dispersión de ondas superficiales Rayleigh y/o refracción sísmica convencional de onda P (como el desarrollado en los datos LIN - Figuras 4.12 y 4.13).

5.2. Conclusiones

Dentro de los procedimientos geofísicos empleados para la caracterización geotécnica de suelos, el uso de ondas superficiales ha logrado incorporarse como un método bien evaluado debido a su eficiencia y simpleza con respecto a la adquisición y procesamiento de datos. Sin embargo, la teoría y desarrollo que está detrás no es trivial y requiere de un buen entendimiento para su correcta aplicación.

En este trabajo se desarrolló e implementó la metodología completa para ondas superficiales Love, incluyendo la obtención experimental y teórica de las curvas de dispersión y la modelación directa para la determinación de una estructura de velocidad de onda de corte unidimensional en las primeras decenas de metros de profundidad. Entre las ventajas percibidas en la utilización de ondas superficiales Love con respecto a ondas Rayleigh se encuentran: menor cantidad de variables en la modelación, menor complejidad en formulaciones matemáticas y en la implementación computacional del método, independencia de la velocidad de la onda compresional P, menor ambigüedad en la interpretación y mejor visualización de las curvas de dispersión. Sin embargo, ambas metodologías pueden emplearse en conjunto para determinar tanto la estructura de V_s como de V_p restringiendo la cantidad de variables en la modelación de las curvas de dispersión de Rayleigh al conocer a priori la estructura de la velocidad de onda de corte a partir del método de ondas Love.

La modelación de las curvas de dispersión por prueba y error tiene ventajas y también algunas desventajas. Por una parte el proceso requiere de experiencia y conocimiento del grado de sensibilidad que tienen las curvas con respecto a cada una de las variables (velocidad, espesor y densidad, ordenadas de mayor a menor contribución), cuyo proceso puede ser demoroso. No obstante, tiene la ventaja de que, al no ser un proceso automatizado, es posible evitar soluciones erróneas o espurias y converger hacia un modelo realista. En el caso general en que se modela la curva de dispersión correspondiente al modo fundamental de propagación, este tipo de modelado es efectivo. Sin embargo, en algunos casos la información proveniente desde los modos superiores es necesaria y muy relevante (ej. estructuras de velocidad complejas, con capas de baja velocidad) para la determinación del modelo de velocidad V_s . En esos casos el método por prueba y error resulta poco práctico y es recomendable utilizar alguna técnica de inversión que considere las curvas de dispersión de todos los modos normales observados en conjunto para la determinación de la estructura de velocidad en profundidad.

Con respecto a los resultados obtenidos en la aplicación del método desarrollado, se comprobó que, al menos para los registros sísmicos utilizados, se obtiene buena resolución en los primeros metros de profundidad a expensas de baja resolución y menor alcance a profundidades mayores, cuya característica es explicada por la ausencia de datos en frecuencias menores a 10 Hz. En este sentido, los modelos determinados bajo este método podrían mejorar si los registros abarcaran un rango de frecuencias mayor, especialmente en las bajas frecuencias (dependiente de las características de los geófonos utilizados, tipo de fuente sísmica, etc). No obstante lo anterior, para aplicaciones de pequeña escala como en aplicaciones de ingeniería civil y/o geotécnica, el método funciona bien para estimar parámetros como el V_{s30} y similares.

Por último, la comparación entre el método de ondas Love con el de refracción sísmica aplicada a ondas de cuerpo SH, arrojó en promedio resultados muy similares con respecto

a la estructura de velocidad entregada, validando el uso de ambas metodologías e incluso abriendo la posibilidad de utilizarse complementariamente teniendo en cuenta que ambos métodos requieren el mismo registro sísmico como parámetro de entrada. Las limitaciones de profundidad del método de ondas superficiales pueden ser contrarrestadas con los buenos resultados de la refracción sísmica a esas profundidades, mientras que las desventajas del método de refracción con respecto a la lectura de las primeras llegadas y la incapacidad de muestrear capas de baja velocidad pueden ser compensadas con el método de ondas Love, cuya naturaleza permite trabajar datos ruidosos y, en principio, posibilita la determinación de capas de baja velocidad.

Bibliografía

Aki, K., and Richards, P. G. 1980. *Quantitative Seismology, Theory and Methods*, Vol. I and II, W.H. Freeman, San Francisco.

Chen, X. 1993. A systematic and efficient method of computing normal modes for multilayered half-space. *Geophysical Journal International*, 115: 391-409.

Clahan, K., Turner, J., Lutz, A., Zellman, M. 2010. Empirical Relationships between Lithology and Shear Wave Velocity; Revised Digital NEHRP Site Classification Maps for Albuquerque, New Mexico, Program Element 1 U.S. Geological Survey National Earthquake Hazards Program, Final Technical Report Award G09AP00129.

Dikmen, Ü., Arisoy, MO., and Akkaya, I. 2010. Offset and linear spread geometry in the MASW method, *Journal of Geophysics and Engineering*, 7(2), 211-222.

Durrani, T. S., and Bisset, D. 1984. The Radon Transform and its Properties. *Geophys.* 49, 1180-1187.

Foti, S. 2000. Multistation methods for geotechnical characterization using surface waves, PhD dissertation, Politecnico di Torino.

Gabriels, P., Snieder, R., and Nolet, G. 1987. In situ measurements of shear-wave velocity in sediments with higher-mode Rayleigh waves. *Geophys. Prospect.*, Vol. 35, pp. 187-196.

Harding, A. J. 1985. Slowness-time mapping of near offset seismic reflection data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 80: 463-492.

Haskell, N. A. 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seism. Soc. Am.* 73, 17- 34.

Kausel, E., and Roësset, J.M. 1981. Stiffness matrices for layered soils. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 71 (6), pp. 1743-1761.

Kennett, B. L. N. 1983. *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*, Cambridge University Press.

Lee, H. -Z. and McMechan, G. A. 1987. Estimation of shear-velocity profiles by imaging of surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 90: 649-667.

- Luco, J. E., and Apsel, R. J. 1983. On the Green's function for a layered half-space, Part I, *Bull. seism. SOC. Am.*, 73, 909-929.
- Matthews, M. C., Hope, V. S., and Clayton, C. R. I. 1996. The use of surface waves in the determination of ground stiffness profiles. *Geotechnical Eng.*, Vol. 119, *Proc. Inst. Civil Eng.*, pp. 84-95.
- McMechan, G.A., and Yedlin, M.J. 1981. Analysis of dispersive waves by wave field transformation. *Geophysics*, Vol. 46, pp. 869-874.
- Menzies, B., and Matthews, M. 1996. The continuous surface-wave system: a modern technique for site investigation. *Special Lecture: Indian Geot. Conf.*, Madras.
- Miller, R. D., Xia, J., and Park, C. B. 2001. Love Waves: A Menace to Shallow Shear Wave Reflection Surveying. *Society of Exploration Geophysicists*.
- Mithal, R., and Vera E. E. 1987. Comparison of plane-wave decomposition and slant stacking of point-source seismic data. *Geophysics* 52, 1631-1638.
- Novotny, O. 1999. *Seismic Surface Waves*. Salvador, CPGG, Universidade Federal da Bahia, 156 pp.
- O'Neill, A., and Matsuoka, T. 2005. Dominant higher surface-wave modes and possible inversion pitfalls. *Jour. of Environmental and Engineering Geophys.*, 10, 185-201.
- Park, C. B., Miller, R. D., and Xia, J. 1998. Imaging dispersion curves of surface waves on multi-channel record. *Soc. Explor. Geophys.*, 1377-1380.
- Park, C. B., Miller, R. D., and Xia, J. 1999b. Multichannel analysis of surface waves (MASW). *Geophysics*, 64, 800-808.
- Park, C. B., Miller, R. D., and Xia, J. 2001. Offset and Resolution of Dispersion Curve in Multichannel Analysis of Surface Waves (MASW). *Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems 2001*: pp. SSM4-SSM4.
- Park, C. B., Miller, R. D., and Xia, J., and Ivanov, J. 2001. Characterization of geotechnical sites by Multichannel Analysis of Surface Waves (MASW) method: submitted to the Tenth International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering (SDEE) in Philadelphia in October 2001.
- Park, J., and Kausel, E. 2006. Response of layered half-space obtained directly in the time domain, part I: SH sources, *Bull. Seism. Soc. Am.* 96, no. 5, 1795-1809.
- Park, J., and Kausel, E. 2006. Response of layered half-space obtained directly in the time domain, part II: SV-P and three-dimensional sources, *Bull. Seism. Soc. Am.* 96, no. 5, 1810-1826.
- Pei, D. 2007. Modeling and inversion of dispersion curves of surface waves in shallow site investigations. PhD Dissertation in Geophysics, University of Nevada, Reno.

- Phinney, R. A., Chowdhury, K. R., and Frazer, L. N. 1981. Transformation and analysis of record sections, *J. Geophys. Res.*, 86(B1), 359-377.
- Rix, G.J. 1988. Experimental study of factors affecting the Spectral Analysis of Surface Waves method, PhD Diss., Un. of Texas at Austin.
- Stokoe, K. H., II, Wright, S. G., Bay, J. A., and Roesset, J. M. 1994. Characterization of geotechnical sites by SASW method. *Geophysical Characteristics of Sites*, ISSMFEE, Technical Committee 10 for XIII ICSMFEE, International Science Publishers, New York, pp. 15-25.
- Stokoe, K. H., II, Joh, S. H., and Woods, R. D. 2004. Some contributions of in situ geophysical measurements to solving geotechnical engineering problems, *Proceedings, International Site Characterization ISC-2 Porto, Portugal*.
- Strobbia, C. 2005. Love wave analysis for the dynamic characterisation of sites, *Bollettino di Geofisica Teorica e Applicata*, 46:2/3, 135-152.
- Thomson, W. T. 1950. Transmission of elastic waves through a stratified soil medium, *J. Appl. Phys.* 21, 89- 93.
- Vera, E. E., Mutter, J. C., Buhl, P., Orcutt, J. A., Harding, A. J., Kappus, M. E., Detrick, R. S., and Brocher, T. M. 1990. The Structure of 0- to 0.2-m.y.-old Oceanic Crust at 9°N on the East Pacific Rise from Expanded Spread Profiles, *J. Geophys. Res.*, 95, 15,529-15,556.
- Xia, J., Miller, R. D., and Park, C. B. 1999a. Configuration of near-surface shear-wave velocity by inverting surface wave. *Proceedings of the Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems (SAGEEP 99)*, Oakland, CA, March 14-18, 95-104.
- Xia, J., Miller, R. D., and Park, C. B. 1999. Estimation of near-surface shear-wave velocity by inversion of Rayleigh wave. *Geophysics* 64(3):691-700.
- Xia, J., Xu, Y., Luo, Y., Miller, R. D., Cakir, R., Zeng, C. 2012a. Advantages of using multichannel analysis of Love waves (MALW) to estimate near-surface shear-wave velocity. *Surv. Geophys.* 33 (5). 841-860.

Apéndice A

Coeficientes de reflexión y transmisión en interfaz simple: Ondas planas SH

La propagación de ondas SH es similar al caso de ondas acústicas; ambos tipos de onda solo interactúan consigo misma, sin conversiones a otro tipo de ondas.

Se consideran dos medios de densidades ρ_1, ρ_2 , módulos de rigidez μ_1, μ_2 y velocidades de onda de corte β_1 y β_2 respectivamente, separados por una interfaz ubicada en $z = 0$ (Fig. A.1). En estos medios se propagan ondas SH planas y armónicas en el plano $x - z$, cuyos parámetros de rayo p son los mismos para los dos medios, de acuerdo a la ley de Snell.

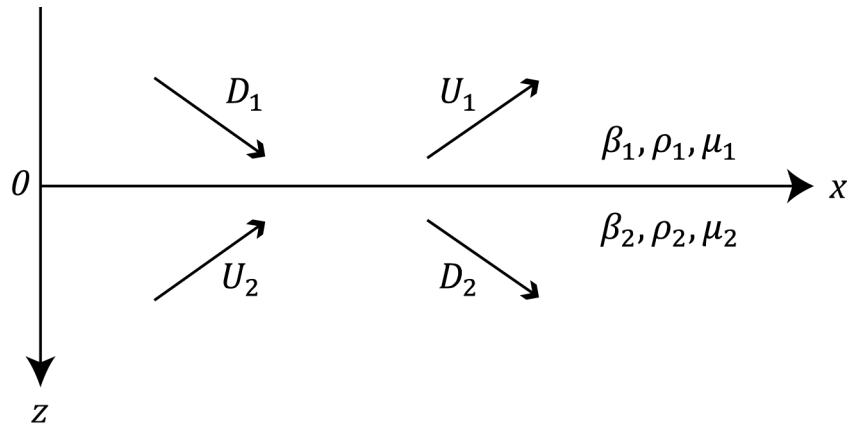


Figura A.1: Esquema de la propagación de ondas SH planas en dos medios separados por una interfaz simple.

Siguiendo lo desarrollado en el capítulo 2, la solución elemental que describe la propagación de ondas SH planas de parámetro de rayo p incluye ondas propagándose hacia arriba (U) y hacia abajo (D) donde para el desplazamiento de partículas en el sentido del eje y se tiene:

$$v(x, z, \omega) = e^{-i\omega px} [D e^{-i\omega qz} + U e^{i\omega qz}] \quad (\text{A.1})$$

donde $q = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p^2}$ es la lentitud vertical.

La especialización de (A.1) para las soluciones en los medios 1 y 2, por arriba y por debajo de la interfaz respectivamente, da:

$$v_1(x, z, \omega) = e^{-i\omega px} [D_1 e^{-i\omega q_1 z} + U_1 e^{i\omega q_1 z}] \quad (\text{A.2a})$$

$$v_2(x, z, \omega) = e^{-i\omega px} [D_2 e^{-i\omega q_2 z} + U_2 e^{i\omega q_2 z}] \quad (\text{A.2b})$$

donde

$$q_1 = \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{1}{\beta_2^2} - p^2} \quad (\text{A.2c})$$

Condiciones de borde

La relación entre los coeficientes de amplitud D_1 , U_1 , D_2 y U_2 se establece imponiendo condiciones de borde en la interfaz $z = 0$. Estas condiciones son:

1. Continuidad de desplazamiento:

$$v_1(0) = v_2(0) \quad (\text{A.3})$$

2. Continuidad de esfuerzo tangencial:

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (\text{A.4})$$

Si se aplican las condiciones (A.3) y (A.4) usando los desplazamientos dados en (A.2a) y (A.2b), fácilmente se encuentra que:

$$D_1 + U_1 = D_2 + U_2 \quad (\text{A.5})$$

y

$$\mu_1 q_1 [D_1 - U_1] = \mu_2 q_2 [D_2 - U_2] \quad (\text{A.6})$$

respectivamente; el término $e^{-i\omega px}$ es idéntico en todas las expresiones, por lo que se cancela.

Las expresiones (A.5) y (A.6) se pueden reordenar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} D_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu_2 q_2} \begin{pmatrix} \mu_2 q_2 + \mu_1 q_1 & \mu_2 q_2 - \mu_1 q_1 \\ \mu_2 q_2 - \mu_1 q_1 & \mu_2 q_2 + \mu_1 q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ U_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

relación que liga los coeficientes en ambos medios de manera general.

Onda incidente sobre interfaz desde medio 1

En este caso particular se considera una onda plana de parámetro p y amplitud D_1 , incidente sobre la interfaz, desde el medio superior (Fig. A.2). Se espera una reflexión dentro del medio 1 (U_1) y una transmisión en el medio 2 (D_2). Al no haber otras interfaces, D_2 se propaga indefinidamente por el medio 2, sin reflejarse en ninguna interfaz, y por lo tanto no existe una onda propagándose hacia arriba en el medio 2, por lo que se toma $U_2 = 0$. De (A.7) entonces se tiene:

$$(\mu_2 q_2 - \mu_1 q_1)D_1 + (\mu_2 q_2 + \mu_1 q_1)U_1 = 2\mu_2 q_2 U_2 = 0$$

de donde se concluye que:

$$R = \frac{U_1}{D_1} = \frac{\mu_1 q_1 - \mu_2 q_2}{\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2} \quad (\text{A.8})$$

R es el coeficiente de reflexión y corresponde a una cantidad adimensional que da la razón entre la amplitud de la onda reflejada y la incidente. Explícitamente:

$$R = \frac{\mu_1 \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2} - \mu_2 \sqrt{\frac{1}{\beta_2^2} - p^2}}{\mu_1 \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2} + \mu_2 \sqrt{\frac{1}{\beta_2^2} - p^2}} \quad (\text{A.9})$$

De (A.5) con $U_2 = 0$, se tiene:

$$1 + \frac{U_1}{D_1} = \frac{D_2}{D_1}$$

o

$$1 + R = T \quad (\text{A.10})$$

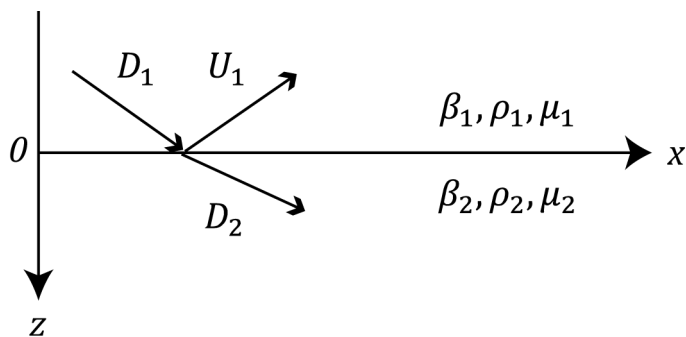


Figura A.2: Esquema de una onda plana incidente desde el medio superior (medio 1).

donde $T = D_2/D_1$ es el coeficiente de transmisión, cuyo valor da la razón entre la amplitud de la onda transmitida y la incidente. De (A.10) y (A.8) se concluye que:

$$T = \frac{2\mu_1 q_1}{\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2} \quad (\text{A.11})$$

En un sistema de varias capas homogéneas y planas existe más de una interfaz entre medios con distintas propiedades. En este caso, a cada una de las interfaces se le atribuyen coeficientes de reflexión y transmisión simples, cuyas cantidades dependen del parámetro de rayo p y de las propiedades de los medios en contacto, y son independientes de la frecuencia de las ondas que se propagan por el medio. De esta manera, los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a la interfaz i se pueden escribir como:

$$R_i = \frac{\mu_{i-1} q_{i-1} - \mu_i q_i}{\mu_{i-1} q_{i-1} + \mu_i q_i} \quad (\text{A.12})$$

$$T_i = \frac{2\mu_{i-1} q_{i-1}}{\mu_{i-1} q_{i-1} + \mu_i q_i} \quad (\text{A.13})$$

donde los subíndices $i - 1$ e i se refieren al medio superior e inferior a la interfaz respectivamente.

Apéndice B

Inclusión de superficie libre en sismogramas sintéticos SH

Se considera una fuente (S) y un receptor (R) dentro de una capa homogénea plana de espesor d_0 y velocidad de propagación β_0 (Fig. B.1), donde se propagan ondas planas con su vector normal contenido en el plano $x - z$, y caracterizadas por sus parámetros de rayo p . Esta capa está limitada por abajo y por arriba por interfaces, cuyos coeficientes de reflexión son R_1 y R_0 respectivamente. En el caso general, R_1 y R_0 son coeficientes de reflexión generalizados y dependen de la frecuencia de las ondas que se propagan por el medio. R_1 es calculado para ondas planas viajando hacia abajo, mientras que R_0 está definido para las ondas que viajan hacia arriba y se reflejan en la interfaz superior.

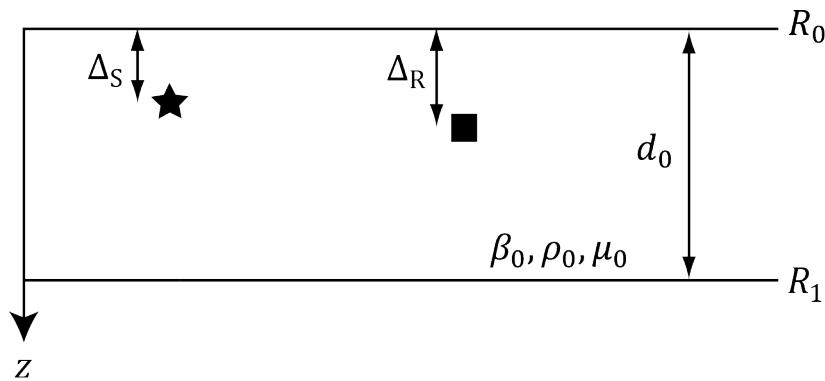


Figura B.1: Esquema de una capa homogénea limitada por dos interfaces, de coeficientes de reflexión R_1 y R_0 .

El pulso de parámetro p contiene dos ramas, una que a partir de la fuente se propaga hacia arriba, y otro hacia abajo. Estos pulsos se reflejan en las interfaces inferior y superior, siendo registrados en múltiples ocasiones a diferentes tiempos por el receptor R a profundidad Δ_R (Fig. B.2).

Estos pulsos están modulados por los coeficientes de reflexión R_1 y R_0 . En la Fig. B.2 se muestran nueve pulsos: 1, 4, 5, 8, 9, para una onda que se propaga hacia arriba desde la

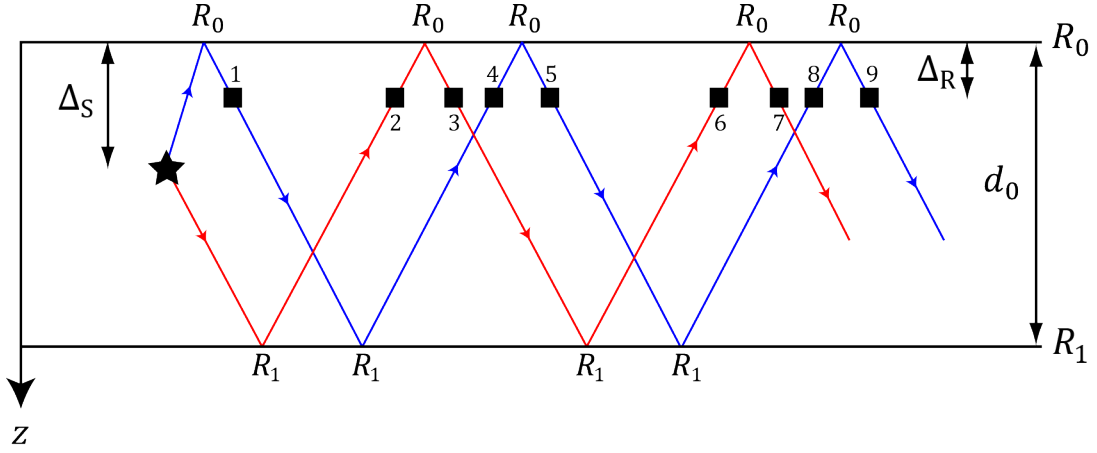


Figura B.2: Representación de ondas SH reflejadas dentro de la capa de espesor d_0 . Se muestran en azul y rojo las ondas que emanan desde la fuente hacia arriba y hacia abajo respectivamente.

fuentes, y 2, 3, 6, 7, para una onda que se propaga hacia abajo. Notar que se muestran solo las reflexiones, no considerándose la onda directa.

De esta manera, la respuesta total en el receptor está dada por la suma de todos estos pulsos. El análisis es realizado en el dominio de las frecuencias y se consideran dos series para los pulsos que viajan hacia arriba y hacia abajo (azules y rojos respectivamente) desde la fuente sísmica.

Serie de pulso hacia arriba (azul)

Para considerar los desfases correspondientes a las trayectorias fuente - interfaz superior - receptor, receptor - interfaz inferior - receptor, y receptor - interfaz superior - receptor, se definen las cantidades:

$$c = e^{-i\omega q_0(\Delta_S + \Delta_R)}, \quad (\text{B.1})$$

$$g = e^{-2i\omega q_0(d_0 - \Delta_R)}, \quad (\text{B.2})$$

$$f = e^{-2i\omega q_0\Delta_R}, \quad (\text{B.3})$$

donde $q_0 = \sqrt{\frac{1}{\beta_0^2} - p^2}$ es la lentitud vertical en la capa.

Para considerar los coeficientes de reflexión superior e inferior adicionalmente se definen:

$$y = R_0 c \quad (\text{B.4})$$

$$z = R_1 g \quad (\text{B.5})$$

$$w = R_0 f \quad (\text{B.6})$$

A partir de las ecuaciones (B.1 – B.6) es posible escribir la serie del pulso hacia arriba como:

$$\begin{aligned} U &= y + yz + ywz + ywz^2 + yw^2z^2 + yw^2z^3 + yw^3z^3 + yw^3z^4 + \dots \\ &= y(1 + z + wz + wz^2 + w^2z^2 + w^2z^3 + w^3z^3 + w^3z^4 + \dots) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Serie de pulso hacia abajo (rojo)

Para considerar en este caso el desfase de la trayectoria fuente - interfaz inferior - receptor, y la interacción con el coeficiente de reflexión inferior, se definen adicionalmente las cantidades:

$$d = e^{-i\omega q_0(2d_0 - \Delta_S - \Delta_R)} \quad (\text{B.8})$$

$$x = R_1 d \quad (\text{B.9})$$

Así, desde (B.5), (B.6) y (B.9) la serie de pulsos hacia abajo se puede expresar como:

$$\begin{aligned} D &= x + xw + xwz + xw^2z + xw^2z^2 + xw^3z^2 + xw^3z^3 + \dots \\ &= x(1 + w + wz + w^2z + w^2z^2 + w^3z^2 + w^3z^3 + \dots) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Respuesta total: $F = U + D$

La respuesta total en el receptor está dada entonces por la suma de las series de pulsos hacia arriba y hacia abajo. De (B.7) y (B.10) se tiene que:

$$F = (x+y)(1+wz+w^2z^2+w^3z^3+\dots) + yz(1+wz+w^2z^2+w^3z^3+\dots) + xw(1+wz+w^2z^2+w^3z^3+\dots)$$

de donde:

$$F = (x + y + xw + yz)(1 + wz + w^2z^2 + w^3z^3 + \dots)$$

Sumando la serie geométrica contenida en esta última expresión se tiene que:

$$F = (x + y + xw + yz) \frac{1}{1 - wz} \quad (\text{B.11})$$

En (B.11) el factor $(1 - wz)^{-1}$ es el operador reverberador y toma en cuenta todas las reflexiones múltiples que se producen dentro de la capa limitada por los coeficientes de reflexión R_0 y R_1 . Explícitamente:

$$\frac{1}{1 - wz} = \frac{1}{1 - R_1 R_0 f g} = \frac{1}{1 - R_1 R_0 a} \quad (\text{B.12})$$

donde

$$a = e^{-2i\omega q_0 d_0} \quad (\text{B.13})$$

es el factor que representa el desfase temporal de ida y vuelta dentro de la capa.

La respuesta en (B.11) corresponde entonces a cuatro rayos, x , y , xw , yz (Fig. B.3), y sus múltiplos dentro de la capa.

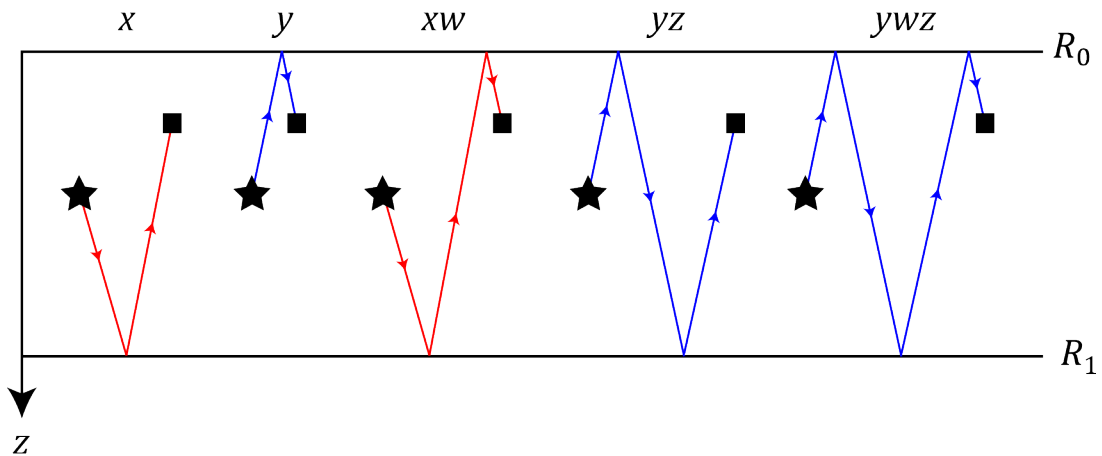


Figura B.3: Rayos que componen la respuesta total de los pulsos en el receptor R , sin incluir las reflexiones múltiples (reverberaciones).

Una forma alternativa de escribir (B.11) es:

$$F = (x + y + xw + yz + ywz - ywz) \frac{1}{1 - wz}$$

de donde se concluye que:

$$F = (x + xw + yz + ywz) \frac{1}{1 - wz} + y \quad (\text{B.14})$$

La respuesta total F está compuesta de los rayos x , xw , yz , ywz y sus múltiplos más el rayo y . En la sismica de reflexión, este último rayo forma parte de la onda directa. Sin embargo, en el análisis aquí realizado la onda directa entre fuente y receptor sin reflexiones no se ha incluido. En caso de incluirse, esta onda junto con la onda y constituyen la onda directa siempre y cuando la distancia entre la interfaz superior (R_0) y la fuente y/o receptor sea pequeña (Fig. B.4).

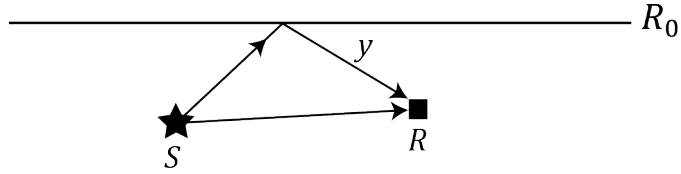


Figura B.4: Representación de la onda directa, que no está incluida en el análisis.

Luego, la parte reflejada de (B.14), sin incluir la onda directa es:

$$F' = (x + xw + yz + ywz) \frac{1}{1 - wz} \quad (\text{B.15})$$

De (B.15), si se factoriza y se considera que

$$yz = xv \quad (\text{B.16})$$

donde

$$v = R_0 e^{-2i\omega q_0 \Delta s} \quad (\text{B.17})$$

se concluye finalmente que:

$$F' = x(1 + v)(1 + w) \frac{1}{1 - wz} \quad (\text{B.18})$$

Explícitamente (B.18) se puede expresar como:

$$F' = R_1 e^{-i\omega q_0(2d_0 - \Delta_S - \Delta_R)} (1 + R_0 e^{-2i\omega q_0 \Delta_S}) (1 + R_0 e^{-2i\omega q_0 \Delta_R}) \frac{1}{1 - R_1 R_0 e^{-2i\omega q_0 d_0}} \quad (\text{B.19})$$

Inclusión de la superficie libre

En este punto, la inclusión de la superficie libre se realiza usando que $R_0 = 1$ (para ondas SH). Esto es considerando que la superficie libre corresponde a la interfaz superior en la Fig. B.1. Usando esto en (B.19) se concluye que:

$$F' = R_1 e^{-i\omega q_0(2d_0 - \Delta_S - \Delta_R)} (1 + e^{-2i\omega q_0 \Delta_S}) (1 + e^{-2i\omega q_0 \Delta_R}) \frac{1}{1 - R_1 e^{-2i\omega q_0 d_0}} \quad (\text{B.20})$$

0

$$F' = 4R_1 e^{-2i\omega q_0 d_0} \cos(\omega q_0 \Delta_S) \cos(\omega q_0 \Delta_G) \frac{1}{1 - R_1 e^{-2i\omega q_0 d_0}} \quad (\text{B.21})$$

En el caso en que tanto la fuente como el receptor están en la superficie libre, entonces de (B.21) se tiene que:

$$F' = \frac{4R_1 e^{-2i\omega q_0 d_0}}{1 - R_1 e^{-2i\omega q_0 d_0}} \quad (\text{B.22})$$

La expresión (B.22) representa la respuesta observada en el receptor para una onda que inicialmente se propaga hacia abajo desde la fuente y que luego regresa al receptor modulada por el coeficiente de reflexión generalizado R_1 .

Apéndice C

Transformada $\tau - p$: Registro sísmico completo

Si $f(x, t)$ es una función equivalente a un registro sísmico a lo largo de un perfil, donde t es el tiempo y x es el offset, entonces su transformada al plano (τ, p) se define como:

$$\tilde{f}(\tau, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \tau + px) dx \quad (\text{C.1})$$

En la práctica se tiene solo una versión discreta de $f(x, t)$ en tiempo t y en distancia x . Es decir, se tienen sismogramas digitalizados en ciertos tiempos (entre intervalos de tiempo Δt) para una serie de distancias (u offset) discretas. Debido a esto, la función f debe interpolarse en tiempo para obtener valores en los tiempos $t = \tau + px$ para los parámetros de rayo p y tiempos de intercepción τ requeridos.

La transformación al plano $\tau - p$ (C.1) se consigue integrando (sumando) $f(x, t)$ a lo largo de líneas rectas definidas por su pendiente p y su tiempo de intercepción τ (Fig. C.1).

En la Fig. C.2 se muestra un ejemplo esquemático de la transformada $\tau - p$ para un parámetro de rayo p dado.

Transformada $\tau - p$ inversa

Siguiendo a (Phinney et al, 1981), la transformada bidimensional de Fourier de $f(x, t)$ es:

$$U(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega t - kx)} f(x, t) dx \quad (\text{C.2})$$

En términos de la lentitud horizontal p , $k = \omega p$, y (C.2) puede evaluarse de la forma:

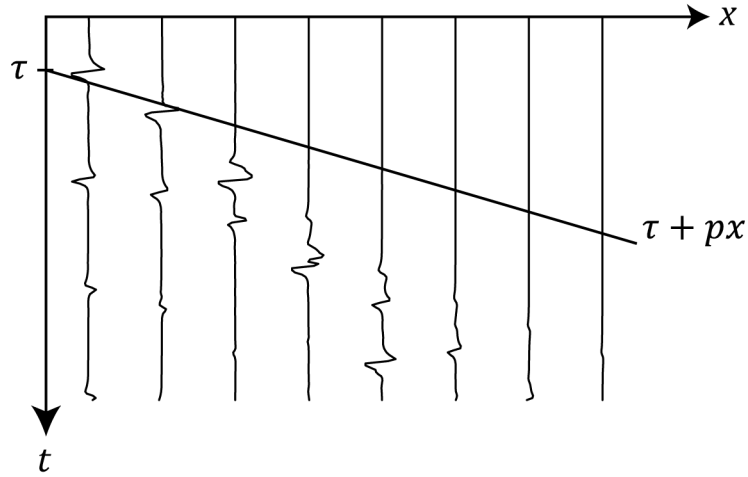


Figura C.1: Interpretación gráfica de la transformada $\tau - p$.

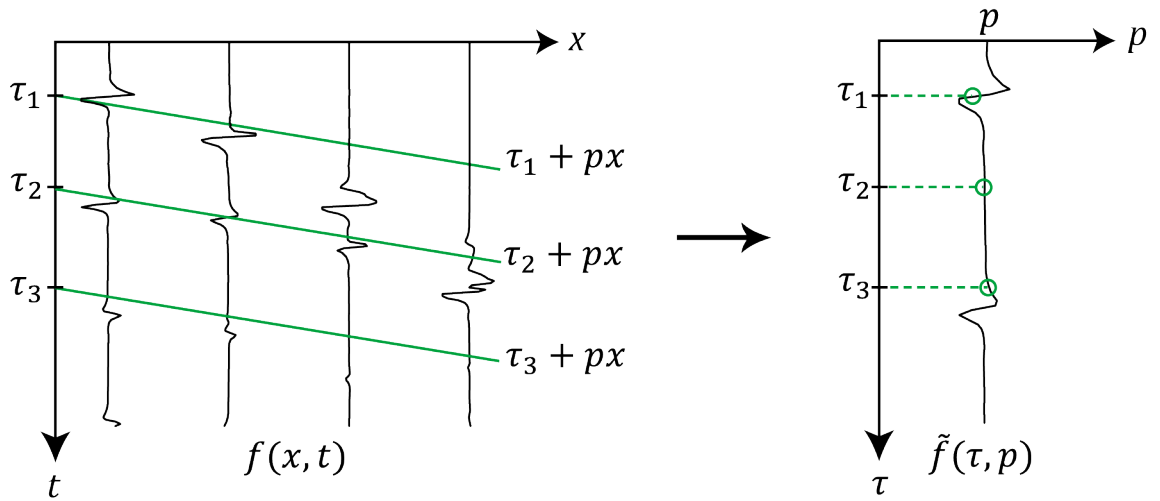


Figura C.2: Transformación de $f(x, t)$ al plano $\tau - p$. El ejemplo muestra la transformación para una pendiente p dada (una traza en el espacio $\tau - p$). Para cada τ_i se suma $f(x, t)$ a lo largo de la recta $t = \tau_i + px$, cuyo resultado es un punto $\tilde{f}(\tau_i, p)$ en el plano $\tau - p$. El resultado final es una traza $\tilde{f}(\tau, p)$.

$$U(\omega p, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-px)} f(x, t) dx \quad (\text{C.3})$$

Usando el cambio de variable:

$$\tau = t - px \quad (\text{C.4})$$

la expresión (C.3) se puede escribir como:

$$U(\omega p, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \tau + px) dx$$

pero desde la definición en (C.1) se tiene que:

$$U(\omega p, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \tilde{f}(\tau, p) d\tau = \tilde{f}(\omega, p) \quad (\text{C.5})$$

de donde se reconoce que (C.5) es la transformada de Fourier temporal de $\tilde{f}(\tau, p)$. Entonces por la transformada inversa se puede escribir que:

$$\tilde{f}(\tau, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} U(\omega p, \omega) d\omega \quad (\text{C.6})$$

Por otro lado, invirtiendo (C.2) espacialmente se tiene que:

$$f(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} U(k, \omega) dk \quad (\text{C.7})$$

pero también:

$$f(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(x, t) dt \quad (\text{C.8})$$

Considerando (C.7) en términos del parámetro de rayo p se encuentra que:

$$f(x, \omega) = \frac{|\omega|}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega px} U(\omega p, \omega) dp \quad (\text{C.9})$$

Invirtiendo (C.8) al dominio del tiempo:

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(x, \omega) d\omega$$

se tiene entonces usando (C.9) que:

$$f(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| U(\omega p, \omega) e^{i\omega(t-px)} dp d\omega \quad (\text{C.10})$$

o usando (C.5):

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \tilde{f}(\omega, p) e^{i\omega(t-px)} d\omega \right] dp \quad (\text{C.11})$$

La expresión (C.11) puede escribirse convenientemente como:

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(t - px, p) dp \quad (\text{C.12})$$

donde $\tilde{F}(\tau, p)$ se obtiene de $\tilde{f}(\omega, p)$ como:

$$\tilde{F}(\tau, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \tilde{f}(\omega, p) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{C.13})$$

La estructura de (C.13) es la de una transformada de Fourier inversa y entonces se puede escribir:

$$\tilde{F}(\omega, p) = |\omega| \tilde{f}(\omega, p) \quad (\text{C.14})$$

Las expresiones (C.1) y (C.12) dejan en evidencia la simetría entre la transformada $\tau - p$ y su inversa. En ambos casos se debe integrar (sumar) a lo largo de trayectorias rectas en el plano respectivo (Fig. C.3).

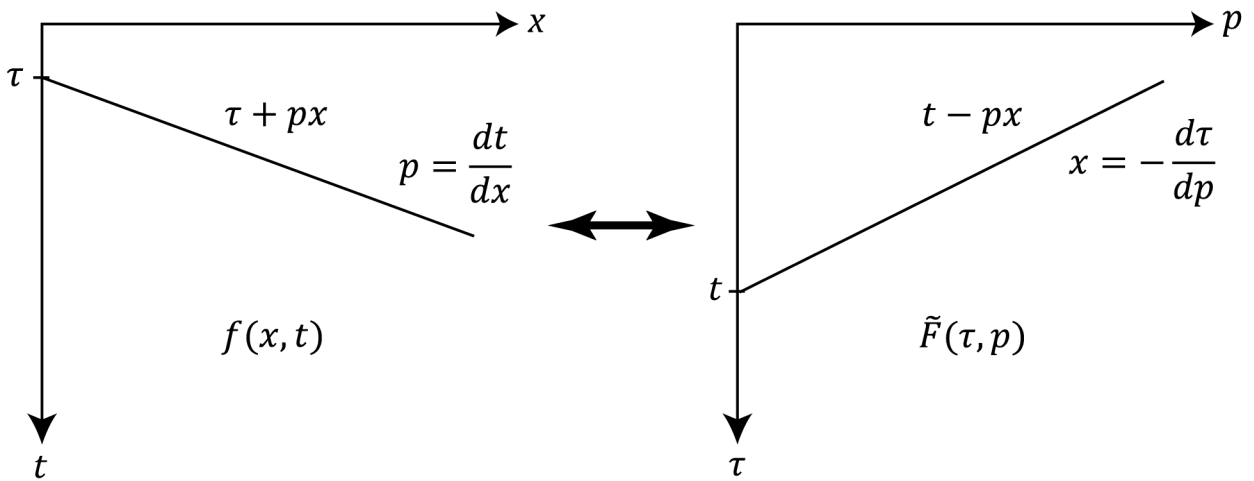


Figura C.3: Equivalencia entre la transformada $\tau - p$ y su inversa.