



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE MATEMÁTICA



Benjamim Pereira da Costa Júnior

Estabilidade de Difeomorfismos do Círculo:
Uma introdução à dinâmica discreta

Salvador

2017

Benjamim Pereira da Costa Júnior

Estabilidade de Difeomorfismos do Círculo:
Uma introdução à dinâmica discreta

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UFBA, como requisito parcial para a obtenção do grau de BACHAREL em Matemática.

Orientador: Dr. Kleyber Mota da Cunha

Salvador

2017

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

Costa Júnior, Benjamim Pereira da
Estabilidade de Difeomorfismos do Círculo: uma introdução à
dinâmica discreta / Benjamim Pereira da Costa Júnior. --
Salvador, 2017.
47 f.

Orientador: Kleyber Mota da Cunha.
TCC (Graduação - Bacharelado em Matemática) -- Universidade
Federal da Bahia, Instituto de Matemática, 2017.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Análise Matemática. I. Cunha,
Kleyber Mota da. II. Título.

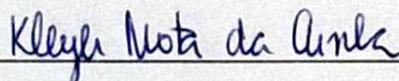
Benjamim Pereira da Costa Júnior

Estabilidade de Difeomorfismos do Círculo
Uma introdução à dinâmica discreta

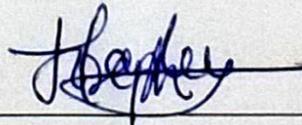
Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UFBA, como requisito parcial para a obtenção do grau de BACHAREL em Matemática.

Aprovado em 24 de abril de 2017

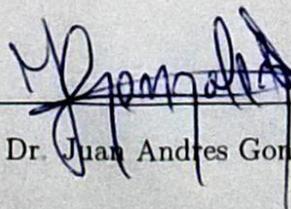
BANCA EXAMINADORA



Dr. Kleyber Mota da Cunha
(Orientador)



Dr. Joseph Nee Anyah Yartey



Dr. Juan Andres Gonzalez Marin

Resumo

Neste trabalho, fazemos um passeio por alguns conceitos da área de sistemas dinâmicos a partir de espaços unidimensionais, em especial o círculo. A principal noção desenvolvida é a de estabilidade, mas outras também são abordadas, como hiperbolicidade, transitividade topológica e minimalidade. O texto possui um caráter de iniciação ao campo de estudos dos sistemas dinâmicos discretos. Começa por desenvolver os conceitos mais simples de dinâmica discreta, como os de órbita periódica e convergência passada e futura. Uma nova maneira de ver o círculo é apresentada, fazendo a identificação com o intervalo $[0, 1]$. Provamos alguns resultados bem conhecidos, como o de que em rotações racionais todos os pontos são periódicos, já rotações irracionais são minimais. Abordamos o conceito de diferenciabilidade de funções do círculo a partir do que chamamos de levantamentos, em seguida definimos número de rotação. Depois de feita a iniciação ao assunto, começamos a trabalhar com o conceito de ponto hiperbólico. Mostramos as propriedades de atração e repulsão que possuem os pontos hiperbólicos tanto fixos quanto periódicos. Em seguida definimos o que são difeomorfismos Morse-Smale, que possuem um papel central neste trabalho. Exemplos de difeomorfismos Morse-Smale são expostos com detalhes. Por último, estabelecemos a noção de estabilidade estrutural e mostramos que difeomorfismos Morse-Smale são estruturalmente estáveis.

Palavras-chave: **ponto hiperbólico, difeomorfismo Morse-Smale, estabilidade estrutural.**

Agradecimentos

Agradeço imensamente aos meus pais, Benjamim Pereira da Costa e Dolores Dourado; às minhas irmãs, Gleice e Cleide; e aos meus padrinhos Lucimar e Aledir Dourado; por acreditarem em mim e por todo o apoio durante a elaboração deste trabalho, durante toda a graduação, durante toda a minha vida. Sem eles, nada seria possível.

Ao meu orientador, Professor Kleyber Mota da Cunha, que ouviu pacientemente as minhas considerações compartilhando comigo o seu conhecimento, ideias e experiência. Gostaria de expressar o meu reconhecimento e admiração pela sua competência profissional e pela forma humana com que conduziu minha orientação.

Aos amigos, que estiveram comigo no decorrer dessa trajetória. Juntos, comemoramos as vitórias e rimos das adversidades, tornando o caminhar muito mais agradável. Vocês não fazem ideia do quanto foram importantes para esta conquista.

Àqueles professores que me inspiraram, tanto durante a graduação, quanto durante a minha vida escolar. Grande parte dos meus valores profissionais eu devo a eles. Em particular, gostaria de agradecer à minha professora de matemática do ensino fundamental, Professora Maria Prado, a maior inspiração para a escolha pela graduação em Matemática.

Sumário

1	Introdução	4
2	Conceitos Iniciais	7
2.1	Sistemas dinâmicos discretos	7
2.2	O círculo	11
3	Homeomorfismos do círculo	19
3.1	Rotações	19
3.2	Diferenciabilidade no círculo	21
3.3	Número de rotação	25
4	Hiperbolicidade e difeomorfismos Morse-Smale	27
4.1	Hiperbolicidade	27
4.2	Intervalos Monótonos	33
4.3	Difeomorfismos Morse-Smale	34
5	Estabilidade	38
5.1	Estabilidade Estrutural	38
5.2	Estabilidade dos difeomorfismos Morse-Smale	42
5.3	Comentários finais	46
	Referências Bibliográficas	47

1 Introdução

Este trabalho aborda questões referentes a uma área relativamente recente da matemática chamada Sistemas Dinâmicos. Um sistema dinâmico pode ser pensado como algo que evolui ao longo do tempo de acordo com uma regra matemática. Essa regra pode assumir variadas formas, como uma equação diferencial, uma aplicação, ou um algoritmo.

Esse modo de conceituar um sistema dinâmico acentua o potencial dessa teoria para aplicações ao mundo real. De fato, na natureza, na ciência e tecnologia podemos listar inúmeros fenômenos que fazem propriedades de um dado sistema variar com o tempo. Por exemplo, o crescimento de uma população de bactérias, o movimento de um astro no espaço sideral, o fluxo de água em um duto, a passagem de corrente elétrica em um circuito, o rendimento de uma aplicação financeira, dentre muitos outros.

Para esses fenômenos é possível criar modelos matemáticos que os descrevem com maior ou menor grau de fidelidade. Um exemplo muito conhecido é o modelo de crescimento populacional de Malthus. Esse modelo pressupõe que a taxa segundo a qual a população de uma determinada espécie de seres vivos cresce é proporcional ao número de indivíduos daquela população existentes no momento. Assim, se $P(t)$ representa a população no instante de tempo t , o modelo de Malthus pode ser escrito

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

com $k > 0$ uma constante de proporcionalidade.

A solução dessa equação diferencial é dada por $P(t) = P_0 e^{kt}$, onde P_0 é a população inicial. Note que $P(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, o que interpretamos como um super crescimento da população.

Na maioria das vezes esse modelo não descreve o fenômeno da variação populacional com muita fidelidade, pois não leva em conta muitos fatores que podem influenciar o crescimento ou decréscimo da população, tais como número de predadores, severidade do clima, disponibilidade de alimentos e muitos outros. Contudo, ele pode ser utilizado no estudo de populações menos complexas em um pequeno intervalo de tempo, por exemplo, uma população de bactérias cultivada em laboratório.

Porém, os estudiosos da biologia das populações estão muitas vezes interessados justamente no comportamento em longo prazo de uma determinada população inicial P_0 . Esse é um problema típico dos sistemas dinâmicos. Eles gostariam de saber, por exemplo, se a população $P(t)$ irá variar de forma periódica ou aleatória, ou ainda tender a zero, levando-a a extinção. Buscam então estabelecer outros modelos matemáticos visando um melhor reflexo da realidade. Tais modelos consideram restrições e parâmetros obtidos experimentalmente ou por meio de observações, o que pode gerar equações diferenciais mais elaboradas. Mas não somente equações diferenciais.

Até agora consideramos o tempo como uma grandeza que varia continuamente. No entanto, em muitos modelos admite-se que a população varia com a passagem discreta do tempo. Em estudos, as vezes os dados são coletados uma vez ao ano, ou uma vez a cada geração, por exemplo. Nesses casos, o modelo de crescimento não será dado por uma equação diferencial.

Podemos obter um modelo discreto de crescimento populacional considerando que o número de indivíduos da população de cada geração é diretamente proporcional ao da geração anterior. Assim, seja P_n a população após n gerações. De acordo com esse novo modelo temos

$$P_{n+1} = kP_n,$$

com $k > 0$ uma constante.

Sendo P_0 a população inicial, podemos mostrar por indução que $P_n = k^n P_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $k > 1$, então $P_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, o que significa um super crescimento da população. Já se $0 < k < 1$, temos que $P_n \rightarrow 0$, ou seja, a população entraria em extinção.

Esse é novamente um modelo bastante simplificado. Contudo, ilustra como os chamados *sistemas dinâmicos discretos* podem ser aplicados na resolução de problemas do mundo real. É sobre esse ramo de estudo dos sistemas dinâmicos que trata esse trabalho.

Na verdade, sistemas dinâmicos, em particular os do caso discreto, possuem vasta aplicação também dentro da própria matemática. Por exemplo, na resolução de equações muitas vezes é difícil, ou mesmo impossível, usar métodos analíticos, como no caso da equação $3x^2 - x \cos(5x) = 6$. No entanto é possível encontrar soluções aproximadas usando métodos numéricos, como os chamados *método de iteração* e *método de Newton*. Tais métodos consistem em encontrar um sistema iterado de funções com sequências

convergentes que se aproximam da solução da equação. Isso constitui essencialmente um estudo de um determinado sistema dinâmico discreto.

As possibilidades de aplicações evidenciam a importância de estudar os sistemas dinâmicos discretos. Como se isso não bastasse, seu estudo também favorece o entendimento do caso contínuo. Sendo assim, este trabalho visa introduzir esse grande tema da matemática. Faremos isso a partir de um dos contextos mais simples, o de dinâmica diferenciável em espaços unidimensionais, com ênfase no círculo unitário.

No capítulo 2, trataremos dos nossos principais objetos de estudo: sistemas dinâmicos genéricos dados por uma aplicação de um espaço nele mesmo, e o círculo. No capítulo 3, começaremos a examinar o que ocorre quando o sistema dinâmico tem domínio no círculo, em especial quando ele é um homeomorfismo. No capítulo 4, trataremos dos fenômenos da atração e repulsão por pontos hiperbólicos. Introduziremos os difeomorfismos Morse-Smale. No capítulo 5, apresentaremos uma forma de comparar a dinâmica de duas aplicações, o que nos permitirá definir uma noção de estabilidade. Por último provaremos um resultado muito interessante envolvendo estabilidade e difeomorfismos Morse-Smale.

2 Conceitos Iniciais

Neste capítulo, apresentaremos as noções iniciais a respeito de sistemas dinâmicos discretos, além de introduzir o espaço ambiente em que focaremos nosso estudo: o círculo.

2.1 Sistemas dinâmicos discretos

Na introdução apresentamos um modelo discreto de crescimento populacional no qual a população de cada geração é diretamente proporcional à da geração anterior. Ou seja, se P_n é a população após n gerações e $k > 0$ a constante de proporcionalidade, então $P_{n+1} = kP_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, dada uma população inicial P_0 , temos:

$$\begin{aligned} P_1 &= kP_0 \\ P_2 &= kP_1 = k^2P_0 \\ P_3 &= kP_2 = k^3P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= k^n P_0 \end{aligned}$$

Note que o tamanho da população depende tanto de n (gerações/tempo) quanto da população inicial P_0 . Dessa forma, podemos definir uma função f que a cada valor possível para a população inicial P_0 associa o tamanho da população após uma geração. Vamos denotar por x a variável que representa os possíveis valores de P_0 . A lei dessa função será:

$$f(x) = kx.$$

A função definida acima aparentemente só nos fornece o valor da população após uma geração. E estamos interessados na evolução desse valor ao longo do tempo. Note, contudo, que os valores futuros podem ser obtidos a partir de iterações da função f , isto é, a partir de sucessivas composições da função. Veja:

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= f \circ f(x) = k^2x \\
f^3(x) &= f \circ f^2(x) = k^3x \\
&\vdots \\
f^n(x) &= f \circ f^{n-1}(x) = k^n x
\end{aligned}$$

Assim, $f^n(x)$ representa o tamanho da população inicial x após n gerações.

O que fizemos na introdução quando calculamos $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(P_0)$ foi analisar, para um valor específico de x , o comportamento dos iterados da função f quando n é grande. É isso que se faz ao estudar um sistema dinâmico discreto dado por uma aplicação f , exceto que não estamos interessados apenas em um valor específico que a variável pode assumir, mas sim em todos os valores do domínio de f .

De modo geral, um sistema dinâmico discreto é composto por um conjunto X e uma aplicação $f : X \rightarrow X$, que é dita a lei de evolução do sistema. Nos casos de interesse o conjunto X possui alguma estrutura adicional e a função f “respeita” tal estrutura. Por exemplo X é um espaço topológico e f uma função contínua, ou X é uma variedade diferenciável e f uma aplicação diferenciável.

Dado $x \in X$, consideramos a sequência $(x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots) = (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Nosso objetivo é tentar entender o comportamento desse tipo de sequências quando n cresce tendendo ao infinito. Nos casos em que elas não convergem, gostaríamos de entender diversas outras propriedades dinâmico-topológicas que serão abordadas no decorrer deste texto.

A partir de agora suporemos sempre que X é um espaço métrico. Vamos às definições formais:

Definição (Órbitas). Seja $f : X \rightarrow X$. Dado $x \in X$, a órbita futura de x é o conjunto $O^+(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N}\}$. Se f for invertível, chamaremos de órbita passada ao conjunto $O^-(x) = \{f^{-n}(x); n \in \mathbb{N}\}$ e simplesmente de órbita de x ao conjunto $O(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$.

Observações:

- Denotamos $f^{-n}(x) = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{n \text{ vezes}}(x)$. E $f^0 = id$, a função identidade.
- As órbitas futuras ou passadas de x serão tratadas às vezes como conjuntos, às vezes como sequências. O contexto deixará claro o caso considerado.

Dois conceitos muito importantes no estudo da dinâmica são os de ponto fixo e ponto periódico.

Definição (Ponto fixo e ponto periódico). Seja $f : X \rightarrow X$. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto fixo de f se $f(x) = x$. Dizemos que x é ponto periódico de f se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, ou seja, x é ponto fixo de f^n . O menor número natural n satisfazendo essa condição é dito período de x .

NOTAÇÃO. Denotamos por $Fix(f)$ o conjunto de pontos fixos da função f , e por $Per(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de f .

Quando um ponto é periódico de período n , sua órbita futura é uma sequência onde os termos se repetem a cada n posições. Considerada como conjunto, a órbita é finita: $O^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$.

Definição. Seja (X, d) um espaço métrico. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow X$, dizemos que um ponto $x \in X$ converge no futuro para $a \in X$ com respeito à f se $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$. A convergência é dita exponencial se existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(f^{n+1}(x), a) \leq \lambda \cdot d(f^n(x), a) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podemos verificar rapidamente por indução que se convergência é exponencial, em particular vale $d(f^n(x), a) \leq \lambda^n \cdot d(x, a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se f for uma bijeção, dizemos também que um ponto x converge no passado para a se x converge para a no futuro em relação à f^{-1} . As expressões “no futuro” e “no passado” reforçam a ideia de que as iterações podem ser vistas como a passagem discreta do tempo.

Proposição 2.1. *Seja $f : X \rightarrow X$ contínua. Se $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $p \in X$, então p é um ponto fixo de f .*

Demonstração. Temos que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ f^{n-1})(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(x))$. Aqui, a última igualdade segue da hipótese de f ser contínua. Além disso, sabemos que $f^{n-1}(x)$ converge para o mesmo valor que $f^n(x)$. Logo, $f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(x)) = f(p)$. Portanto $p = f(p)$, isto é, p é ponto fixo. ■

Vamos analisar um exemplo simples de sistema dinâmico, no qual aparecem os conceitos tratados até o momento.

Exemplo 1. Seja $X = \mathbb{R}_+$ e $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Seja $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1,5$. Os primeiros iterados desses pontos são:

$$\begin{aligned} x_0 = 0,5 & \quad f(x_0) \simeq 0,71 & f^2(x_0) \simeq 0,84 & f^3(x_0) \simeq 0,92 & f^4(x_0) \simeq 0,96 \dots \\ x_1 = 1,5 & \quad f(x_1) \simeq 1,22 & f^2(x_1) \simeq 1,11 & f^3(x_1) \simeq 1,05 & f^4(x_1) \simeq 1,03 \dots \end{aligned}$$

Note que ambos os pontos parecem estar convergindo no futuro para o valor 1. De fato, verificamos facilmente por indução que $f^n(x) = x^{1/2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 1$, para todo $x \neq 0$.

Note também que o ponto 0 é um ponto fixo para f , logo converge no futuro para ele mesmo. Assim como o ponto 1. Dessa forma, já sabemos o comportamento de todos os pontos do domínio sob iterações da função f . Podemos dizer que a dinâmica desse sistema está compreendida. \square

O exemplo acima é um dos mais simples possíveis. Na maioria das vezes não teremos todos os pontos do domínio convergindo no futuro, ou ainda não poderemos compreender a dinâmica de todos os pontos.

Nos casos em que a convergência não ocorre, é muito útil o estudo dos conjuntos ω -limite e α -limite, que são definidos a seguir.

Definição (ω -limite e α -limite). Seja $f : X \rightarrow X$. O ω -limite de um ponto $x \in X$ é o conjunto

$$\omega(x) = \{y \in X; y \text{ é limite de uma subsequência da sequência } (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Ou seja, o ω -limite de um ponto x é o conjunto dos valores de aderência de $O^+(x)$, Se f for invertível, definimos o α -limite de x como o conjunto

$$\alpha(x) = \{y \in X; y \text{ é limite de uma subsequência da sequência } (f^{-n}(x))_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Em alguns casos o ω -limite de um ponto pode ser um conjunto bastante simples. Por exemplo, se x converge no futuro para um ponto p , então $\omega(x) = \{p\}$, pois toda subsequência de uma sequência convergente converge para o mesmo limite da sequência original. Em particular, se x é ponto fixo, então $\omega(x) = \{x\}$. Já no caso em que x é um ponto periódico de período n , temos $\omega(x) = O^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$. De fato, os únicos limites de subsequências são os termos $f^i(x)$, com $i \in \mathbb{N}$, que são os limites das subsequências constantes $(f^{i+n}(x))$.

Conjuntos ω -limites podem ser contudo bem mais elaborados. No próximo capítulo veremos um exemplo com ω -limites coincidindo com o espaço X . Esse fenômeno esta relacionado à transitividade topológica.

Definição (Transitividade topológica e minimalidade). Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é topologicamente transitiva se existe $x \in X$ com órbita futura densa em X . Dizemos que f é minimal se todo $x \in X$ tem órbita futura densa.

Quando X não tem pontos isolados, é possível provar que $\omega(x) = X$ equivale a f ser topologicamente transitiva [1].

2.2 O círculo

Nosso objetivo é introduzir o estudo de sistemas dinâmicos discretos definidos em variedades diferenciáveis unidimensionais. Com isso em mente, consideraremos neste trabalho sistemas dinâmicos $f : X \rightarrow X$ em que, na maioria das vezes, o espaço X representará o círculo, isto é, o conjunto $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

Entre as variedades de dimensão 1, demos preferência ao círculo, pois nele os temas a serem tratados ganham maior abrangência. Por exemplo, homeomorfismos¹ da reta (ou de intervalos da reta) só podem ter pontos periódicos de período dois no máximo. Essa “patologia” não ocorre no círculo, que pode ter pontos de qualquer período. Isso não significa, contudo, que excluirmos a reta de nossos estudos. Inclusive porque muito do nosso estudo de dinâmica no círculo pode ser feito em analogia com a reta.

Proposição 2.2. *Seja I um intervalo da reta não degenerado (podendo inclusive ser $I = \mathbb{R}$). Seja $f : I \rightarrow I$ um homeomorfismo. Então não existe $x \in Per(f)$ com período maior que dois.*

Demonstração. Note que f é, necessariamente, monótona. De fato, suponha que não o seja, então existem $x < y < z$ em I tais que:

$$f(x) < f(y), \text{ mas } f(y) > f(z); \quad \text{ou} \quad f(x) > f(y), \text{ mas } f(y) < f(z).$$

¹Um homeomorfismo é uma função contínua, invertível e com inversa contínua.

Sem perda de generalidade, considere o primeiro caso. Tome $a \in (f(x), f(y)) \cap (f(z), f(y))$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $s \in (x, y)$ tal que $f(s) = a$, e existe $t \in (y, z)$ tal que $f(t) = a$. Como supomos $x < y < z$, então os intervalos (x, y) e (y, z) são disjuntos, logo $s \neq t$. Mas $k = f(s) = f(t)$, o que contradiz a injetividade de f , que por hipótese é um homeomorfismo.

Assim, temos duas possibilidades para f : ou é estritamente crescente, ou é estritamente decrescente. Na primeira hipótese, f não pode ter pontos periódicos com período maior que um. De fato, seja $x \in I$. temos três casos:

1. $f(x) = x$. Neste caso, x tem período 1 (ponto fixo).
2. $f(x) > x$. Neste caso, podemos concluir por indução que $f^n(x) > x$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, x não pode ser ponto periódico, do contrário deveríamos ter $f^n(x) = x$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.
3. $f(x) < x$. Neste caso, podemos concluir por indução que $f^n(x) < x$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. E de forma análoga ao caso anterior x não pode ser ponto periódico.

Na hipótese de f ser estritamente decrescente, temos que f^2 será estritamente crescente. De fato, sejam $x, y \in I$ tais que $x < y$. Segue que $f(x) > f(y)$. Aplicando f novamente temos $f^2(x) < f^2(y)$. Assim, como f^2 é estritamente crescente, pelo que mostramos acima, f^2 só pode ter pontos periódicos de período 1, ou seja pontos $x \in I$ tais que $f^2(x) = x$ (pontos fixos em relação a f^2). Quando isso ocorre, x tem período 2 em relação à f . Em todos os casos não existe ponto periódico de período maior que 2. ■

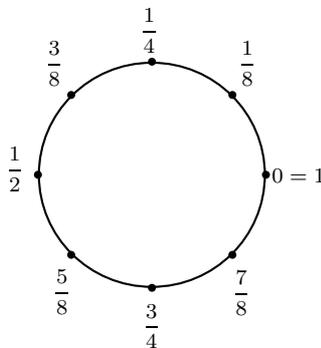


Figura 2.1: Círculo parametrizado

A princípio o círculo S^1 costuma ser definido como um conjunto de pares ordenados de números reais, como fizemos acima. Porém, existem outras formas de ver o

círculo que podem ser mais apropriadas ao nosso estudo. Podemos, por exemplo, tomar a parametrização² $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ tal que $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, ou, se fizermos a identificação $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, temos $\gamma(t) = e^{i(2\pi t)}$. Dessa forma, representamos cada ponto do círculo por seu parâmetro correspondente em $[0, 1]$. Veja a figura 2.1. Note que aqui 0 e 1 representam o mesmo ponto.

Uma das vantagens de representar o círculo pelo intervalo $[0, 1]$ é que poderemos representar graficamente funções definidas no círculo em um sistema de eixos coordenados. Porém, seus gráficos estarão contidos em um quadrado de lado 1, onde o valor 0 será identificado com o valor 1 em cada coordenada. Uma função $f : S^1 \rightarrow S^1$ está representada na figura 2.2.

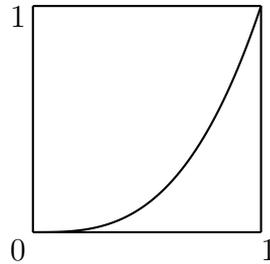


Figura 2.2: Representação gráfica de uma função de S^1 em S^1

Para estudar funções do círculo é útil que possamos expressar suas leis por meio de operações algébricas. Podemos, por exemplo, somar pontos do círculo e também multiplicar pontos do círculo por um escalar inteiro. Isso é feito da seguinte forma.

Definição. Sejam $x, y \in [0, 1]$. Definimos a soma $x \oplus y$ por $(x + y) \bmod 1$, em que “+” é a soma usual de números reais e a expressão $\bmod 1$ indica que estamos tomando o número real $x + y$ menos a sua parte inteira³, isto é, $x \oplus y = x + y - \lfloor x + y \rfloor$.

Seja $m \in \mathbb{Z}$. Definimos o produto por escalar mx por $(m \cdot x) \bmod 1$, em que “.” é o produto usual de números reais.

A interpretação geométrica de “tomarmos o módulo 1” ao final das operações é a seguinte. Considere uma circunferência de comprimento 1, isto é, com raio $r = \frac{1}{2\pi}$. Sejam $x, y \in [0, 1]$. Podemos pensar a soma $x + y$ como o processo de, a partir do ponto inicial $\gamma(0)$, percorrer uma distância x e em seguida uma distância y ao longo da circunferência. Quando ocorre $x + y > 1$, significa que ao final do processo demos mais que

²O termo está sendo usado num sentido abrangente: uma função contínua cuja imagem é S^1 .

³Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então a parte inteira de α , denotada $\lfloor \alpha \rfloor$, é $\max\{k \in \mathbb{Z}; k \leq \alpha\}$.

uma volta completa na circunferência, então tomamos o resultado módulo 1 (subtraímos a parte inteira) para que obtenhamos o parâmetro do ponto em que paramos o percurso de acordo com a parametrização γ .

Observações:

- *É possível verificar que $([0, 1], \oplus)$ é um grupo comutativo e que a operação de produto por escalar tem as propriedades associativa, distributiva (em relação à “ \oplus ”) e existência de elemento identidade “1”.*
- *A partir daqui vamos simplificar a notação substituindo o símbolo “ \oplus ”, pelo símbolo “+”, e às vezes omitiremos ou explicitaremos a expressão “mod 1”, dependendo da ênfase necessária ao contexto.*

Como iremos trabalhar com o círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ por meio de sua representação como o intervalo $[0, 1]$, então é importante dar ao intervalo certa estrutura, que também está presente no círculo, a de espaço métrico. Para isso precisamos de uma noção de distância entre os pontos de $[0, 1]$. A noção usual, induzida da reta, não é adequada neste contexto. Nela, por exemplo, os pontos 0 e 1 são distintos e têm distância $|0 - 1| = 1$. Mas no círculo esses números representam o mesmo ponto, logo a distância entre eles deve ser zero. Definimos a seguinte noção de distância no intervalo $[0, 1]$.

Definição. Sejam, $x, y \in [0, 1]$. Definimos a distância $d : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

Geometricamente, considerando uma circunferência de comprimento 1 (ou seja, de raio $r = \frac{1}{2\pi}$), a distância $d(x, y)$ representa o comprimento do menor arco que liga os pontos $\gamma(x)$ e $\gamma(y)$.

Proposição 2.3. *A distância no intervalo $[0, 1]$ dada por $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ é de fato uma métrica.*

Demonstração. Primeiro, temos que para todo $x, y \in [0, 1]$ vale $d(x, y) \geq 0$, pois estamos tomando o mínimo entre dois valores não negativos. Além disso, $d(x, y) = 0$ se e somente se $|x - y| = 0$ ou $|x - y| = 1$. O que ocorre se e somente se $x = y$ (lembrando que neste contexto $0 = 1$).

Também temos que $d(x, y) = d(y, x)$, uma vez que $|x - y| = |y - x|$.

Vamos mostrar a desigualdade triangular. Sejam $x, y, z \in [0, 1]$. Sem perda de generalidade, suponha $x \leq y$. Vamos considerar a seguinte divisão de casos e subcasos:

- Caso 1: $x \leq \frac{1}{2} \leq y$ e, sem perda de generalidade, suponha $z \leq \frac{1}{2}$.

Subcaso 1.1 $d(x, y) = y - x$

Subsubcaso 1.1.1: $x \leq z$

Subsubcaso 1.1.2: $x \geq z \begin{cases} \text{(a)} d(y, z) = y - z \\ \text{(b)} d(y, z) = 1 - (y - z) \end{cases}$

Subcaso 1.2: $d(x, y) = 1 - (y - x)$

Subsubcaso 1.2.1: $x \leq z \begin{cases} \text{(a)} d(y, z) = y - z \\ \text{(b)} d(y, z) = 1 - (y - z) \end{cases}$

Subsubcaso 1.2.2: $x \geq z$

- Caso 2: $x, y \leq \frac{1}{2}$ (o caso $x, y \geq \frac{1}{2}$ é análogo a este).

Subcaso 2.1: $z \in [0, \frac{1}{2}]$

Subcaso 2.2: $z \in [\frac{1}{2}, 1]$

Subsubcaso 2.2.1: $d(x, z) = z - x$

Subsubcaso 2.2.2: $d(x, z) = 1 - (z - x) \begin{cases} \text{(a)} d(y, z) = z - y \\ \text{(b)} d(y, z) = 1 - (z - y) \end{cases}$

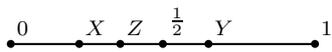


Figura 2.3: Subsubcaso 1.1.1

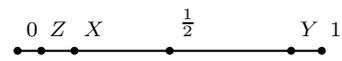


Figura 2.4: Subsubcaso 1.2.2

Para auxiliar vários dos casos da prova vamos enunciar o seguinte Fato: dados $a, b \in [0, 1]$, vale $|a - b| \leq 1/2$ se e somente se $d(a, b) = |a - b|$.

Análise dos casos:

- **Caso 1** Hipótese: $x \leq \frac{1}{2} \leq y$ e $z \leq \frac{1}{2}$. Neste caso, vale $d(x, z) \leq \frac{1}{2}$. Pelo Fato, segue que $d(x, z) = |x - z|$.

Subcaso 1.1 Hipótese: $d(x, y) = y - x$.

Subsubcaso 1.1.1 Hipótese: $x \leq z$. Como em todo o caso 1 vale $d(x, z) = |x - z|$, então segue que $d(x, z) = z - x$. Além disso, como $x \leq z \leq y$, então $y - z \leq y - x$. Mas $y - x = d(x, y) \leq \frac{1}{2}$. Logo, $y - z \leq \frac{1}{2}$. Pelo Fato segue que $d(y, z) = y - z$. Assim, temos: $d(x, y) = y - x = (z - z) + (y - x) = (z - x) + (y - z) = d(x, z) + d(z, y)$. Portanto, $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Subsubcaso 1.1.2 Hipótese: $x \geq z$. Segue que $d(x, z) = x - z$.

Suponha que vale **(a)**: $d(y, z) = y - z$. Temos que a desigualdade triangular $d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x)$ será válida se e somente se $(y - x) \leq (y - z) + (x - z)$. Temos as equivalências: $(y - x) \leq (y - z) + (x - z) \Leftrightarrow y - x \leq y + x - 2z \Leftrightarrow -x \leq x - 2z \Leftrightarrow -2x \leq -2z \Leftrightarrow z \leq x$. Esta última é verdadeira pela hipótese deste subsubcaso.

Suponha que vale **(b)**: $d(y, z) = 1 - (y - z)$. Temos que a desigualdade triangular será válida se e somente se o for alguma das afirmações na sequência: $(y - x) \leq 1 - (y - z) + (x - z) \Leftrightarrow y - x \leq 1 - y + z + x - z = 1 - y + x \Leftrightarrow 2(x - y) \leq 1 \Leftrightarrow x - y \leq \frac{1}{2}$. Esta última é verdadeira pela hipótese do subcaso correspondente e pelo Fato.

Subcaso 1.2 Hipótese: $d(x, y) = 1 - (y - x)$.

Subsubcaso 1.2.1: Hipótese: $x \leq z$. Segue que $d(x, z) = z - x$.

Suponha que vale **(a)**: $d(y, z) = y - z$. Temos $d(x, z) + d(y, z) = (z - x) + (y - z) = y - x$. Dá hipótese do subcaso correspondente temos que $\min\{y - x, 1 - (y - x)\} = 1 - (y - x)$. Logo $1 - (y - x) \leq (y - x)$. Ou seja, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Suponha que vale **(b)**: $d(y, z) = 1 - (y - z)$. Temos $d(x, z) + d(y, z) = (z - x) + (1 - y + z) = 1 - x - y + 2z$. Assim, a desigualdade triangular será válida se e somente se o for alguma das afirmações na sequência: $d(x, y) \leq 1 - x - y + 2z \Leftrightarrow 1 - (y - x) \leq 1 - x - y + 2z \Leftrightarrow x \leq -x + 2z \Leftrightarrow x \leq z$. Esta última é verdadeira pela hipótese do subsubcaso.

Subsubcaso 1.2.2 Hipótese: $x \geq z$. Dá hipótese do subcaso e do Fato segue que $y - x \geq \frac{1}{2}$. Como $z \leq x \leq y$, vale $y - z \geq y - x \geq \frac{1}{2}$. Logo, novamente pelo Fato, $d(y, z) = 1 - (y - z)$. Assim, a desigualdade triangular $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ equivale a $1 - (y - x) \leq (x - z) + (1 - (y - z)) \Leftrightarrow x \leq x$, o que é uma tautologia.

- **Caso 2** Hipótese: $x, y \leq \frac{1}{2}$. Neste caso, $y - x \leq \frac{1}{2}$. Pelo Fato, segue que $d(x, y) = |y - x|$

Subcaso 2.1 Hipótese: $z \in [0, \frac{1}{2}]$. Neste caso, segue do Fato que $d(x, z) = |x - z|$

e $d(z, y) = |z - y|$. A desigualdade triangular do módulo $|\cdot|$ de números reais nos diz que dados $a, b \in \mathbb{R}$ vale $|a + b| \leq |a| + |b|$. Fazendo $a = x - z$ e $b = z - y$ temos que $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$, ou seja, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Subcaso 2.2 Hipótese: $z \in [\frac{1}{2}, 1]$. Neste subcaso temos que $x \leq y \leq z$.

Subsubcaso 2.2.1 Hipótese $d(x, z) = z - x$. De $x \leq y \leq z$, segue que $z - y \leq z - x$. Além disso, da hipótese deste subsubcaso e do fato, segue que $z - x \leq \frac{1}{2}$. Logo $z - y \leq \frac{1}{2}$, e novamente pelo fato $d(z, y) = z - y$. Dessa forma, temos as equivalências $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \Leftrightarrow y - x \leq (z - x) + (z - y) \Leftrightarrow 2y \leq 2z \Leftrightarrow y \leq z$. Esta última é verdadeira pela hipótese do subcaso correspondente.

Subsubcaso 2.2.2 Hipótese: $d(x, z) = 1 - (z - x)$.

Suponha que vale **(a)**: $d(y, z) = z - y$. Temos as equivalências $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \Leftrightarrow y - x \leq 1 - (z - x) + (z - y) \Leftrightarrow y - x \leq \frac{1}{2}$, o que é verdadeiro pela hipótese do caso correspondente.

Suponha que vale **(b)**: $d(y, z) = 1 - (z - y)$. Temos as equivalências $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \Leftrightarrow y - x \leq 1 - (z - x) + 1 - (z - y) \Leftrightarrow -2x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -1$, o que é uma tautologia.

Em todos os casos vale a desigualdade triangular.

■

Uma vez que provamos que d é uma métrica, podemos falar de conjuntos abertos e fechados de $[0, 1]$ em relação a d . Assim como de sequências convergentes, continuidade e todas as noções usuais de topologia.

Mais do que isso, quando munido da métrica d o intervalo $[0, 1]$ possui as mesmas propriedades topológicas que o círculo S^1 , como compacidade e conexidade. De fato, existe um homeomorfismo entre os dois espaços, como pode ser verificado em Smania [2]. Assim, do ponto de vista da topologia, o círculo e o intervalo $[0, 1]$ com os extremos identificados podem ser vistos como o mesmo espaço. Esse é mais um motivo para usar o intervalo $[0, 1]$ como representante do círculo. Em vista disso, usaremos neste texto um abuso de notação e escreveremos, por exemplo, $x \in S^1$ para significar $x \in [0, 1]$. Quando quisermos mencionar especificamente o círculo como subconjunto de pontos do plano, reforçaremos essa ideia com a notação $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

A visão do círculo como $[0, 1]$ nos motiva a pensar em intervalos (ou subintervalos) do círculo.

Definição (Intervalos do círculo). Um conjunto $I \subset S^1$ é chamado de intervalo do círculo se I é um conjunto conexo de S^1 .

Sejam $a, b \in S^1$, com $a \leq b$. Os intervalos de S^1 , são os conjuntos da forma $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ e (a, b) ; além dos conjuntos da forma $[b, 1] \cup [0, a]$, $[b, 1) \cup [0, a]$, $(b, 1] \cup [0, a]$ e $(b, 1) \cup [0, a]$, que contem o zero em seu interior. Isso devido à correspondência entre os conexos de $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e de $[0, 1]$.

Para simplificar a notação, se $a < b$, podemos representar esses quatro últimos casos respectivamente por $[b, a]$, $[b, a)$, $(b, a]$ e (b, a) .

Agora que introduzimos os principais objetos do nosso estudo, podemos tratar das aplicações do círculo nele mesmo. Faremos isso no capítulo seguinte.

3 Homeomorfismos do círculo

Neste capítulo, falaremos de sistemas dinâmicos do círculo, isto é, funções do círculo no círculo, em especial homeomorfismos. Daremos alguns exemplos (rotações) e introduziremos alguns conceitos que nos ajudarão a estudar os homeomorfismos do círculo, como os de levantamento, diferenciabilidade e número de rotação.

3.1 Rotações

Muitos dos sistemas dinâmicos que estudaremos são homeomorfismos. Um *homeomorfismo* do círculo é uma função $f : S^1 \rightarrow S^1$ contínua, invertível (bijeção) e com inversa contínua. Rotações do círculo são exemplos de homeomorfismos.

Definição (Rotações). Dado $\alpha \in S^1$, uma rotação R_α do círculo é uma aplicação $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ da forma $R_\alpha(x) = (x + \alpha) \pmod{1}$.

Pela correspondência γ que fizemos entre $[0, 1]$ e $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, podemos rescrever a lei de uma rotação da seguinte forma: $e^{i(2\pi x)} \mapsto e^{i2\pi(x+\alpha)} = e^{i(2\pi x)} \cdot e^{i(2\pi\alpha)}$. Da interpretação geométrica do produto de números complexos, vemos que isso corresponde a girar o círculo no sentido anti-horário em um ângulo $2\pi\alpha$.

Uma vez que $R_\alpha(0) = \alpha$ e $R_\alpha(1 - \alpha) = 1 = 0$, o gráfico de uma rotação intersecta os eixos verticais $x = 0$ e $x = 1$ na ordenada $y = \alpha$ e intersecta os eixos horizontais $y = 0$ e $y = 1$ na abscissa $x = 1 - \alpha$. Veja a figura 3.1.

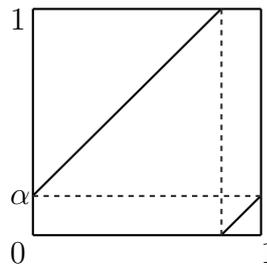


Figura 3.1: Gráfico de uma rotação de ângulo $2\pi\alpha$

Quando representamos funções do círculo em um quadrado unitário, às vezes

elas parecem ser descontínuas mesmo quando não o são (em comparação com as representações gráficas a que estamos acostumados de funções contínuas da reta). O gráfico da rotação R_α na figura 3.1, por exemplo, é formado por dois segmentos descontínuos. No entanto, note que eles intersectam os eixos $y = 0$ e $y = 1$ na mesma coordenada horizontal, como se pode ver com o auxílio das linhas tracejadas. Como no círculo $0=1$, então isso não significa uma descontinuidade da função no ponto $x = 1 - \alpha$, que de fato é contínua em todos os pontos, pois é uma isometria¹.

Note que, a rotação inversa de R_α , é a rotação $R_{-\alpha}$, e o n -ésimo iterado de R_α é também uma rotação, e vale $R_\alpha^n(x) = (x + n\alpha) \bmod 1 = R_{n\alpha}(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A dinâmica de uma rotação assume características bem diferentes quando α é racional ou irracional. Temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1. *Seja $\alpha \in [0, 1]$. Seja a rotação $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$. Dado $x \in S^1$, vale que:*

1. *Se α é racional, então x é ponto periódico.*
2. *Se α é irracional, então $O^+(x)$ é denso em S^1 .*

Demonstração. Suponha que α é racional. Isto é, $\alpha = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Temos $R_\alpha^q(x) = (x + q\alpha) \bmod 1 = (x + q\frac{p}{q}) \bmod 1 = x$. Logo, x é ponto periódico. Se tomarmos uma fração $\frac{p}{q}$ irredutível, então todo ponto de $x \in S^1$ é periódico de período q .

Suponha agora que α é irracional. Vamos provar que $O^+(x)$ é denso mostrando que todo aberto de S^1 contém algum ponto de $O^+(x)$.

Primeiro, note que $O^+(x) = (x, R_\alpha(x), R_\alpha^2(x), \dots)$ tem todos os termos distintos. De fato, sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $R_\alpha^n(x) = R_\alpha^m(x)$. Então $(x + n\alpha) \bmod 1 = (x + m\alpha) \bmod 1$, que ocorre se e somente se $(n - m)\alpha \in \mathbb{Z}$. Como α é irracional e $n - m$ é inteiro, isso ocorre se e somente se $n - m = 0$, ou seja $n = m$.

Além disso, conforme observado no capítulo 2, temos que (S^1, d) é um espaço métrico compacto, logo toda sequência de pontos em S^1 possui uma subsequência convergente. Seja $(R_\alpha^{n_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$ uma subsequência convergente da órbita futura de x . Como é convergente, então é de Cauchy. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $d(R_\alpha^{n_i}(x), R_\alpha^{n_j}(x)) < \varepsilon$. Denote $n = n_i$ e $m = n_j$, e suponha $n > m$. Seja $k = n - m$. Então $d(R_\alpha^k(x), x) < \varepsilon$.

¹Uma aplicação que preserva distâncias, i.e., $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
d(R_\alpha^k(x), x) &= \\
&= \min\{|R_\alpha^k(x) - x|, 1 - |R_\alpha^k(x) - x|\} \\
&= \min\{|x + k\alpha - x|, 1 - |x + k\alpha - x|\} \\
&= \min\{|x + (n - m)\alpha - x|, 1 - |x + (n - m)\alpha - x|\} \\
&= \min\{|(x + n\alpha) - (x + m\alpha)|, 1 - |(x + n\alpha) - (x + m\alpha)|\} \\
&= \min\{|R_\alpha^n(x) - R_\alpha^m(x)|, 1 - |R_\alpha^n(x) - R_\alpha^m(x)|\} \\
&= d(R_\alpha^n(x), R_\alpha^m(x)) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sabemos que rotações são isometrias, assim $d(R_\alpha^k(x), x) = d(R_\alpha^{2k}(x), (R_\alpha^k(x))) = d(R_\alpha^{3k}(x), (R_\alpha^{2k}(x))) = \dots < \varepsilon$. Concluimos que todo intervalo do círculo de diâmetro² maior que ε possui ao menos um termo da subsequência de termos distintos $(R_\alpha^{sk}(x))_{s \in \mathbb{N}}$.

Tome $A \subset S^1$ um conjunto aberto. Todo aberto do círculo pode ser escrito como união de intervalos abertos. Tome $I \subset S^1$ um intervalo aberto de diâmetro r . Se tomarmos ε tal que $\varepsilon < r$, então, pelo que acabamos de mostrar, existe um termo da órbita futura de x que pertence a $I \subset A$. Portanto $O^+(x)$ é um conjunto denso em S^1 . ■

Da proposição 3.1, vemos que rotações irracionais são exemplos de aplicações topologicamente transitivas e também minimais. Além disso, como $O^+(x)$ é denso em S^1 , e S^1 não tem pontos isolados, segundo França [1], é possível mostrar que todo ponto $p \in S^1$ possui uma subsequência de $O^+(x)$ convergindo para p , ou seja, todo $p \in S^1$ pertence ao ω -limite de x . Portanto $\omega(x) = S^1$. Esse é um exemplo de dinâmica com um conjunto ω -limite coincidindo com o espaço todo.

3.2 Diferenciabilidade no círculo

Para facilitar o estudo das aplicações do círculo (não necessariamente homeomorfismos), muitas vezes é útil substituí-las por aplicações correspondentes definidas na reta, chamadas *levantamentos*. O estudo das características dos levantamentos nos revelará importantes propriedades das aplicações do círculo. Temos a seguinte definição:

Definição (Levantamentos). Dada uma aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$, um levantamento de f é uma função contínua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\pi \circ F = f \circ \pi$, em que $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é a projeção de \mathbb{R} em S^1 dada por $\pi(x) = x \pmod{1}$.

²Dado o espaço (X, d) , o diâmetro de um conjunto $B \subset X$ é dado por $\sup\{d(x, y); x, y \in B\}$

Em outras palavras, um levantamento de f é uma função contínua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) \bmod 1 = f(x \bmod 1)$. O gráfico de um levantamento é formado pela justaposição de várias cópias do gráfico de f , cada uma iniciando e finalizando em coordenadas inteiras. Veja as figuras 3.2 e 3.3.

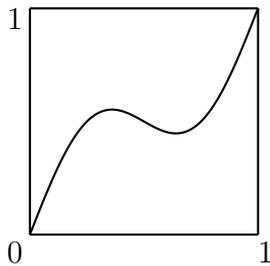


Figura 3.2: $f : S^1 \rightarrow S^1$

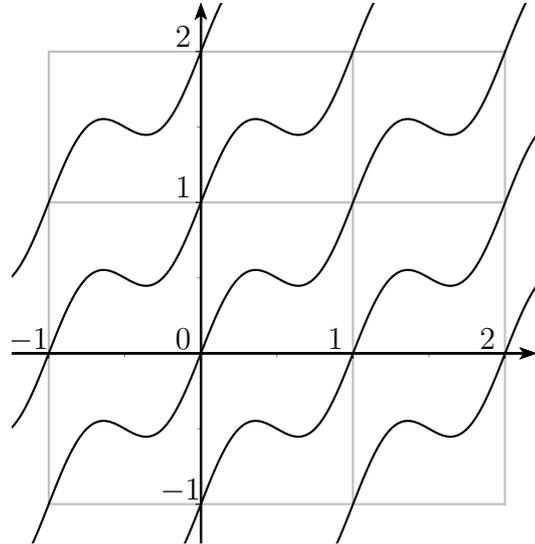


Figura 3.3: Alguns levantamentos de f

Proposição 3.2 (Propriedades dos levantamentos). *Sejam $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ contínuas, e sejam $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ levantamentos de f e g respectivamente. Valem:*

1. Se F_1 é um levantamento da aplicação f , existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F_1(x) = F(x) + k$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $F(x+1) = F(x) + d$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O número d é chamado grau de f e não depende do particular levantamento escolhido. Notação: $\deg f$.
3. $F \circ G$ é um levantamento de $f \circ g$. Consequentemente, F^n é um levantamento de f^n , para todo $n \in \mathbb{N}$.
4. $\deg(f \circ g) = (\deg f) \cdot (\deg g)$. Consequentemente, $\deg f^n = (\deg f)^n$, para todo n .
5. Se f é invertível, então $\deg f^{-1} = \deg f = \pm 1$.

Demonstração. 1. Como F e F_1 são levantamentos, vale $\pi \circ F = f \circ \pi = \pi \circ F_1$. Segue que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que $\pi(F(x)) = \pi(F_1(x))$, ou seja, $F(x) \bmod 1 = F_1(x) \bmod 1$. Isso ocorre se e somente se $F_1(x) - F(x) \in \mathbb{Z}$. Isto é, se e somente se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F_1(x) - F(x) = k$. Afirmamos que k não depende de x . De fato, temos

que $F_1 - F$ é uma função contínua, pois é a diferença de duas funções contínuas. Além disso, imagens de conexos por funções contínuas são conexos. Então, a imagem da função $F_1 - F$, cujo domínio é o conexo \mathbb{R} , é conexa. Além disso, está contida em \mathbb{Z} . Como todo subconjunto de inteiros com mais de um elemento é desconexo em \mathbb{R} , só podemos ter $\text{Im}(F_1 - F) = k$. Logo, $F_1(x) - F(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $F_1(x) = F(x) + k, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Seja a função $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) = F(x + 1)$. Temos que F_1 é também um levantamento de f . De fato, $(\pi \circ F_1)(x) = \pi(F_1(x)) = \pi(F(x + 1)) = (\pi \circ F)(x + 1)$. Como, por hipótese, F é um levantamento, então $\pi \circ F = f \circ \pi$. Segue que $(\pi \circ F)(x + 1) = (f \circ \pi)(x + 1) = f(\pi(x + 1)) = f(\pi(x)) = (f \circ \pi)(x)$. Portanto $\pi \circ F_1 = f \circ \pi$. Do fato de F_1 ser um levantamento e do item (1) desta proposição, temos que existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $F_1(x) = F(x) + d$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, $F(x + 1) = F(x) + d$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Afirmamos que o número d não depende do levantamento F escolhido. De fato, seja F_2 outro levantamento de f . Novamente pelo item (1), existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F_2(x) = F(x) + k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue que $F_2(x + 1) = F(x + 1) + k = F(x) + d + k = (F_2(x) - k) + d + k = F_2(x) + d$, e temos o desejado.
3. Temos $(F \circ G) \circ \pi = F \circ (G \circ \pi) = F \circ (\pi \circ g) = (F \circ \pi) \circ g = (\pi \circ f) \circ g = \pi \circ (f \circ g)$. Portanto $(F \circ G) \circ \pi = \pi \circ (f \circ g)$. Em particular, se $f = g$, temos $(F^2) \circ \pi = \pi \circ (f^2)$. O caso geral segue por indução.
4. Sejam $d = \deg f$ e $c = \deg g$. Primeiro note que, dado $n \in \mathbb{N}$, vale $F(x + n) = F(x) + nd$. De fato, a validade para $n = 1$ segue da definição de grau, e o caso geral é obtido por indução. De posse desse resultado temos $(F \circ G)(x + 1) = F(G(x + 1)) = F(G(x) + c) = F(G(x)) + cd = (F \circ G)(x) + cd$. Como, pelo item anterior, $(F \circ G)$ é um levantamento de $(f \circ g)$, segue da definição de grau que $\deg(f \circ g) = cd = \deg g \cdot \deg f$, como desejado. Em particular, se $f = g$, então $\deg(f^2) = (\deg f)^2$. O caso geral segue por indução.
5. Temos que $f \circ f^{-1} = Id_{S^1}$. Note que $Id_{\mathbb{R}}$ é um levantamento de Id_{S^1} . Como $Id_{\mathbb{R}}(x + 1) = x + 1$, temos que $\deg(Id_{S^1}) = 1$. Segue pelo item anterior que $1 = \deg(f \circ f^{-1}) = \deg f \cdot \deg f^{-1}$. Assim, como o grau é um número inteiro, só podemos ter $\deg f = \deg f^{-1} = \pm 1$.

■

Note que, pelo item (5) da proposição anterior, todo homeomorfismo do círculo tem grau ± 1 . Geometricamente, o grau de uma função contínua é o número de voltas que a imagem de um ponto dá sobre o círculo enquanto o ponto dá uma volta.

Vamos utilizar levantamentos para definir quando uma aplicação preserva ou inverte a orientação do círculo.

Definição (Preservar/inverter orientação). Dizemos que um homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ preserva orientação se os levantamentos de f são funções não decrescentes. No caso de serem não crescentes, dizemos que o homeomorfismo inverte orientação.

Geometricamente, um homeomorfismo preserva orientação se a imagem dos pontos percorrem o círculo no mesmo sentido (horário ou anti-horário) em que percorremos o círculo. Neste texto trabalharemos apenas com homeomorfismos que preservam orientação.

O conceito de levantamento também pode ser muito útil para definir a noção de diferenciabilidade de funções definidas no círculo.

Definição (Diferenciabilidade). Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um levantamento de f . Dizemos que f é derivável em $a \in S^1$ se F é derivável (na noção usual da reta) em algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(b) = a$. Neste caso definimos a derivada de f em a por $f'(a) = F'(b)$. Se f possui derivada em todos os pontos do círculo, dizemos que f é uma aplicação diferenciável. Se F é uma função de classe C^r da reta, então dizemos que f é uma aplicação de classe C^r do círculo.

Note que a derivada está bem definida. De fato, se $b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $\pi(b) = \pi(c) = a$, então $b - c = k \in \mathbb{Z}$. Suponha que $F'(b)$ existe e seja $d = \deg f$. Temos $F(c+h) - F(c) = F(b+k+h) - F(b+k) = F(b+h) + dk - F(b) - dk = F(b+h) - F(b)$, para todo $h \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

Passando o limite quando $h \rightarrow 0$, temos que $F'(c)$ existe e $F'(c) = F'(b)$.

Além disso, a derivada não depende da escolha particular do levantamento F , pois, pela proposição 3.2, todo levantamento de uma mesma aplicação do círculo difere apenas pela soma de uma constante.

Definição (Difeomorfismos). Uma aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ é chamada difeomorfismo do círculo se é diferenciável, invertível e com inversa também diferenciável. Denotamos o conjunto de difeomorfismos de classe C^r de S^1 por $\text{Diff}^r(S^1)$. Usamos $\text{Diff}_+^r(S^1)$ para denotar o subconjunto de $\text{Diff}^r(S^1)$ que preserva orientação e $\text{Diff}_-^r(S^1)$ para o que inverte orientação.

A partir daqui, sempre que falarmos em difeomorfismos do círculo, assumiremos que o difeomorfismo é de classe C^1 .

3.3 Número de rotação

O conceito de número de rotação é muito importante no estudo de sistemas dinâmicos dados por homeomorfismos do círculo e diz muito a respeito da dinâmica da aplicação estudada. A teoria que pode ser desenvolvida em torno desse conceito é também muito ampla, assim apenas enunciaremos os resultados que mais nos interessam a respeito do número de rotação, sem demonstrá-los. As demonstrações desses resultados e de muitos outros podem ser encontradas em [3].

Definição (Número de rotação). Seja f um homeomorfismo do círculo que preserva orientação e F um levantamento de f . Dado um ponto $x \in S^1$, chamamos o número $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$, caso exista, de número de rotação do ponto x com relação a F e denotamos por $\bar{\rho}(F, x)$.

A idéia intuitiva do número de rotação é ter um valor para a “rotação média” que um ponto do círculo sofre ao percorrer sua órbita por f . A proposição a seguir nos permite redefinir o conceito de número de rotação de forma a torná-lo independente da escolha do levantamento F e do ponto x .

Proposição 3.3. *Dado um homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ que preserva orientação, vale:*

1. *O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ existe para todo $x \in S^1$.*
2. *Esse limite independe do valor x , e portanto podemos denotar apenas $\bar{\rho}(F)$.*
3. *Se F_1 e F_2 são dois levantamentos de f , então $\bar{\rho}(F_1) - \bar{\rho}(F_2) = k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.
Sendo assim, definimos $\rho(f) = \bar{\rho}(F) \pmod{1}$, chamado número de rotação de f .*

Note que o número de rotação de uma rotação R_α é exatamente o valor α .

A proposição a seguir serve de exemplo para mostrar como o número de rotação pode se relacionar com o comportamento das órbitas de um sistema. A informação que ela nos dá será usada várias vezes ao longo deste texto.

Teorema 3.1. *Dado um homeomorfismo f , temos que $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ se, e somente se, f possui algum ponto periódico. Se $\rho(f) = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $\frac{p}{q}$ irredutível, então todo ponto periódico de f possui o mesmo período, e este vale q .*

Note que o que provamos para rotações na proposição 3.1 é coerente com o que diz o teorema 3.1.

4 Hiperbolicidade e difeomorfismos

Morse-Smale

Neste capítulo, definiremos pontos hiperbólicos de um difeomorfismo do círculo e descreveremos o comportamento do sistema nas proximidades deles. Também estudaremos os chamados *difeomorfismos Morse-Smale*, nos quais o conceito de hiperbolicidade se faz fortemente presente.

De agora em diante assumiremos que todos os homeomorfismos e difeomorfismos do círculo mencionados preservam orientação, e que os difeomorfismos são de classe C^1 .

4.1 Hiperbolicidade

Observe a figura 4.1. Ela é a representação gráfica de um difeomorfismo do círculo com os primeiros iterados de dois pontos x_0 e x_1 . Note que as órbitas tanto de x_0 quanto de x_1 parecem convergir para x_P . De fato, existe uma vizinhança de x_P tal que todo ponto dessa vizinhança converge no futuro para x_P . Nessas circunstâncias, pela proposição 2.1, temos que x_P só pode ser um ponto fixo. Também pode ocorrer de existir um outro ponto x_Q que, em vez de atrair, repele os pontos de suas vizinhanças. Os chamados pontos hiperbólicos são exemplos de pontos com essas características.

Definição (Pontos fixos hiperbólicos). Seja f um difeomorfismo e x um ponto fixo de f . Dizemos que x é um ponto fixo hiperbólico se $|f'(x)| \neq 1$. Se $|f'(x)| < 1$, dizemos que este ponto fixo é atrator e, se $|f'(x)| > 1$, dizemos que é um ponto fixo repulsor.

Proposição 4.1. *Seja x um ponto fixo hiperbólico atrator de um difeomorfismo f do círculo, com $f'(x) = \lambda < 1$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U_ε de x tal que $d(f(y), x) < (\lambda + \varepsilon) \cdot d(x, y)$, para todo $y \in U_\varepsilon$.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(a) = x$, em que π é a projeção da reta no círculo. E seja F um levantamento de f . Como f é um difeomorfismo (de classe C^1), então F' é contínua. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in \mathbb{R}$ é tal que $|z - a| < \delta$, então

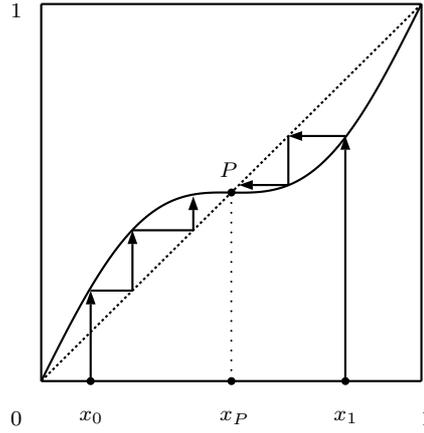


Figura 4.1: Ponto fixo atrator

$|F'(z) - F'(a)| < \varepsilon$. Logo, $F'(z) - F'(a) < \varepsilon$, que equivale a $F'(z) < F'(a) + \varepsilon = \lambda + \varepsilon$. Além disso, se ε for tomado pequeno o suficiente, isto é, $\varepsilon < 1 - \lambda$, então teremos $\lambda + \varepsilon < 1$. Assim, $F'(z) < \lambda + \varepsilon < 1$, para todo $z \in I = (a - \delta, a + \delta)$.

Também temos, pelo teorema do valor médio, que dado $b \in I$, existe c entre a e b tal que $|F(b) - F(a)| = F'(c)|b - a|$. Como c está entre a e b , então $c \in I$. Logo, pelo que mostramos anteriormente, $F'(c) < \lambda + \varepsilon < 1$. Assim, $|F(b) - F(a)| = F'(c)|b - a| < (\lambda + \varepsilon)|b - a|$. Portanto, $|F(b) - F(a)| < (\lambda + \varepsilon)|b - a|$, para todo $b \in I$.

Temos que a projeção π é contínua. A restrição de π ao intervalo fechado $\bar{I} = [a - \delta, a + \delta]$ é contínua em um compacto, logo é lipschitziana. Ou seja, existe $k > 0$ tal que $d(\pi(r), \pi(s)) < k|r - s|$, para todos $r, s \in \bar{I}$. Assim, dado $b \in I$, vale $d(f \circ \pi(b), f \circ \pi(a)) = d(\pi \circ F(b), \pi \circ F(a)) < k|F(b) - F(a)| < k(\lambda + \varepsilon)|b - a|$, em que a última desigualdade segue do que mostramos no parágrafo anterior. Portanto $d(f(y), f(x)) < k(\lambda + \varepsilon)|b - a|$, para todo $y \in \pi(I)$.

Sabemos que a projeção π não é invertível, pois não é injetora. Mas fazendo uma restrição ao intervalo $I = (a - \delta, a + \delta)$, em que $\delta < 1/2$, teremos π invertível com $\pi^{-1}(x) = a$. Dessa forma, seja $U_\varepsilon = \pi(I)$. Temos $d(f(y), f(x)) < k(\lambda + \varepsilon)|\pi^{-1}(y) - \pi^{-1}(x)|$, para todo $y \in U_\varepsilon$. Se π tem constante de Lipschitz k , então π^{-1} tem constante de Lipschitz $1/k$. Assim, $|\pi^{-1}(y) - \pi^{-1}(x)| < \frac{1}{k}d(y, x)$, para todo $y \in U_\varepsilon$. Logo, $d(f(y), f(x)) < k(\lambda + \varepsilon)\frac{1}{k}d(y, x) = (\lambda + \varepsilon)d(y, x)$. Portanto, existe uma vizinhança U_ε de x tal que se $y \in U_\varepsilon$, então $d(f(y), f(x)) < (\lambda + \varepsilon)d(y, x)$. Como x é ponto fixo, vale $d(f(y), f(x)) = d(f(y), x)$. Obtemos então a desigualdade $d(f(y), x) < (\lambda + \varepsilon)d(y, x)$, como desejado. ■

Note que, com as hipóteses da proposição anterior, vale $f(y) \in U_\varepsilon$, pois sua distância até x é menor que a distância de y a x . Assim, podemos aplicar a desigualdade a este ponto, obtendo $d(f^2(y), x) < (\lambda + \varepsilon)^2 d(y, x)$. Procedendo indutivamente obtemos que

$$d(f^n(y), x) < (\lambda + \varepsilon)^n \cdot d(y, x),$$

para todo $y \in U_\varepsilon$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Isso implica que todo ponto $y \in U_\varepsilon$ converge exponencialmente para o ponto fixo x a uma taxa arbitrariamente próxima de $f'(x)$, bastando tomar ε pequeno. Em particular $\omega(y) = x$.

A versão da proposição 4.1 para pontos fixos hiperbólicos repulsores é a seguinte.

Proposição 4.2. *Seja x um ponto fixo hiperbólico repulsor de um difeomorfismo f do círculo, com $f'(x) = \lambda > 1$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U_ε de x tal que $d(f(y), x) > (\lambda - \varepsilon) \cdot d(y, x)$, para todo $y \in U_\varepsilon$.*

A demonstração dessa proposição é análoga à da proposição 4.2.

Note que, para x ponto fixo repulsor, todo ponto $y \in U_\varepsilon$ se afasta exponencialmente de x a uma taxa arbitrariamente próxima de $f'(x)$ até “ser expulso” da vizinhança U_ε . Note também que se x é hiperbólico repulsor de f , então será atrator em relação à aplicação inversa f^{-1} . Em particular temos que $\alpha(y) = x$, para todo $y \in U_\varepsilon$.

Exemplo 2. Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(x) = \frac{\sin(4\pi x)}{40\pi} + x \pmod{1}$.

Temos que f é um difeomorfismo. Isso segue pelo resultado de Análise conhecido como Teorema da Perturbação da Identidade. Tal teorema afirma que uma soma da identidade com uma contração (perturbação da identidade) é um difeomorfismo. Assim, precisamos apenas mostrar que o levantamento F satisfaz às hipóteses do teorema, isto é, que $F(x) - x = \frac{\sin(4\pi x)}{40\pi}$ é uma contração. E isso segue do fato de que $F(x) - x$ é lipschitziana, com constante de Lipschitz menor que 1. Veja:

$$|(F(x) - x)'| = \left| \frac{\cos(4\pi x)}{10} \right| < \frac{1}{10} < 1.$$

Vamos calcular os pontos fixos de f . Temos que $f(x) = x$ se e somente se:

$$\frac{\sin(4\pi x)}{40\pi} + x \pmod{1} = x \iff \left(\frac{\sin(4\pi x)}{40\pi} + x \right) - x \in \mathbb{Z} \iff \sin(4\pi x) = m \cdot 40\pi,$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$. Como $-1 \leq \sin(4\pi x) \leq 1$, então $\sin(4\pi x) = m \cdot 40\pi$ se e somente se $\sin(4\pi x) = 0$. Por sua vez, isso ocorre se e somente se $x \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Portanto, f possui

exatamente quatro pontos fixos. Segue então, pelo teorema 3.1, que f não possui nenhum outro ponto periódico. Veja o gráfico de f na figura 4.2.

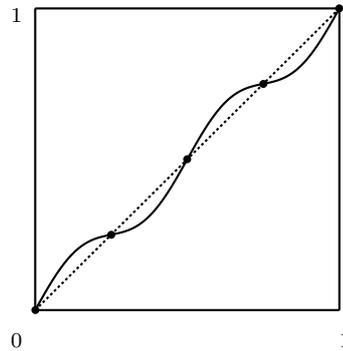


Figura 4.2: Gráfico de f indicando pontos fixos

Calculando as derivadas de f em cada um dos seus pontos fixos, obtemos:

$$f'(0) = f'(\frac{1}{2}) = \frac{11}{10} \quad \text{e} \quad f'(\frac{1}{4}) = f'(\frac{3}{4}) = \frac{9}{10}.$$

Como todas são diferentes de 1, então todos os pontos fixos são hiperbólicos, sendo 0 e $\frac{1}{2}$ pontos repulsores; e $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ pontos atratores.

Pelas proposições 4.1 e 4.2, vemos que existem vizinhanças dos pontos fixos cujos elementos são todos atraídos para os pontos hiperbólicos ou repelidos deles, conforme forem respectivamente atratores ou repulsores.

O estudo da dinâmica deste exemplo está quase concluído. Ainda não sabemos o que ocorre com as órbitas dos demais pontos do círculo, que a princípio podem não pertencer à nenhuma das vizinhanças dos pontos hiperbólicos. Eliminaremos esta lacuna na seção seguinte. \square

Trataremos agora dos casos em que os difeomorfismos possuem pontos periódicos de período qualquer.

Definição (Pontos periódicos hiperbólicos). Seja f um difeomorfismo do círculo e x um ponto periódico de f , de período n . Dizemos que x é um ponto periódico hiperbólico se é ponto fixo hiperbólico de f^n , isto é, se $|(f^n)'(x)| \neq 1$. O ponto x será um atrator ou repulsor periódico conforme $|(f^n)'(x)|$ for menor ou maior que 1, respectivamente.

Proposição 4.3. *Seja x um ponto periódico hiperbólico com período k de um difeomorfismo do círculo f tal que $(f^k)'(x) = \lambda < 1$ (atrator). Então, dado $\varepsilon > 0$ pequeno, existe*

uma vizinhança U de x tal que, fixado $r \in \{0, \dots, k-1\}$, vale

$$d(f^{r+mk}(y), f^r(x)) \leq (\lambda + \varepsilon)^m \cdot d(f^r(y), f^r(x)),$$

para todo $y \in U$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $r \in \{0, \dots, k-1\}$. Se $y \in S^1$, temos

$$d(f^{r+mk}(y), f^r(x)) = d(f^{mk}(f^r(y)), f^{mk}(f^r(x))).$$

Fazendo $g = f^k$, temos

$$d(f^{r+mk}(y), f^r(x)) = d(g^m(f^r(y)), g^m(f^r(x))). \quad (4.1)$$

Afirmamos que $g'(f^r(x)) = (g)'(x) = \lambda$. De fato, derivando a expressão $g \circ f^r = f^r \circ g$ no ponto x , obtemos:

$$g'(f^r(x)) \cdot (f^r)'(x) = (f^r)'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como x tem período k , então $g(x) = f^k(x) = x$, logo

$$g'(f^r(x)) \cdot (f^r)'(x) = (f^r)'(x) \cdot g'(x).$$

Como f é um difeomorfismo, então $(f^r)'(x) \neq 0$. Logo, a igualdade anterior implica $g'(f^r(x)) = g'(x)$, como desejado.

Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, pela proposição 4.1, temos que existe uma vizinhança V_ε de $f^r(x)$ tal que $d(g^m(f^r(y)), g^m(f^r(x))) < (\lambda + \varepsilon)^m \cdot d(f^r(y), f^r(x))$, para todo $y \in U = f^{-r}(V_\varepsilon)$ e todo $m \in \mathbb{N}^*$. Segue pela igualdade 4.1 que $d(f^{r+mk}(y), f^r(x)) \leq (\lambda + \varepsilon)^m \cdot d(f^r(y), f^r(x))$, em que a igualdade ocorre quando $n = 0k + r$, isto é, $m = 0$. ■

Note que o resultado da proposição anterior implica que a órbita futura de y converge exponencialmente para a órbita periódica de x , para todo $y \in U$. De fato, fixando o resto r , temos que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale $d(f^{r+km}(y), f^r(x)) \leq (\lambda + \varepsilon)^m \cdot d(f^r(y), f^r(x))$. Como o segundo membro tende a zero quando $m \rightarrow \infty$, então temos $f^{r+km}(y) \rightarrow f^r(x)$, para todo y na vizinhança U de x .

Assim, como no caso de pontos fixos, para pontos periódicos existe uma proposição análoga à proposição 4.3, que pode ser deduzida pelo leitor.

Corolário 4.1. *Todo ponto hiperbólico x de um homeomorfismo f de S^1 é isolado em relação ao conjunto dos pontos periódicos de f . Ou seja, existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap \text{Per}(f) = \{x\}$.*

Demonstração. Suponha que x é um ponto fixo. Se x for atrator, então pelo proposição 4.1 existe uma vizinhança V de x que é toda atraída para x , logo não pode haver outro ponto fixo nessa vizinhança. Se x for repulsor, então ele é atrator de f^{-1} e, portanto, também não pode haver outro ponto fixo em uma vizinhança pequena de x . Neste caso, pelo teorema 3.1, $\text{Per}(f) = \text{Fix}(f)$. Segue que todo ponto periódico hiperbólico é isolado.

Para os homeomorfismos que possuem pontos periódicos de período $n \neq 1$, temos $\text{Per}(f) = \text{Fix}(f^n)$ e podemos aplicar o mesmo argumento anterior à aplicação f^n . Portanto, todo ponto periódico de f é isolado. ■

Exemplo 3. Considere a aplicação f do exemplo 2.

$$\text{Seja } g : S^1 \rightarrow S^1 \text{ dada por } g(x) = f(x) + \frac{1}{2} \pmod{1} = \frac{\sin(4\pi x)}{40\pi} + x + \frac{1}{2} \pmod{1}.$$

Temos que g é um difeomorfismo, pois é uma translação de f . Note também que $g^2 = f$. Assim, pontos fixos de f são pontos fixos de g^2 , ou seja, pontos periódicos de g com período 2.

Segue então, pelo teorema 3.1, que g não possui ponto periódico de nenhum outro período. Veja o gráfico de g na figura 4.3.

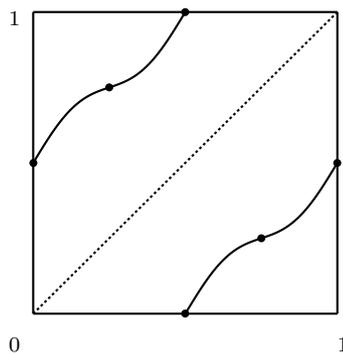


Figura 4.3: Gráfico de g indicando pontos periódicos

Calculando as derivadas de f em cada um dos seus pontos periódicos, obtemos:

$$(g^2)'(0) = (g^2)'(\frac{1}{2}) = \frac{81}{100} \quad \text{e} \quad (g^2)'(\frac{1}{4}) = (g^2)'(\frac{3}{4}) = \frac{121}{100}.$$

Como todas são diferentes de 1, então todos os pontos periódicos são hiperbólicos, sendo 0 e $\frac{1}{2}$ pontos repulsores; e $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ pontos atratores.

Pela proposição 4.3, vemos que existem vizinhanças dos pontos periódicos cujos elementos são todos atraídos pelas órbitas periódicas ou repelidos delas, conforme forem respectivamente atratores ou repulsores.

Assim como no exemplo 2, o estudo da dinâmica deste exemplo estará completo na seção seguinte. \square

4.2 Intervalos Monótonos

Para estudar o comportamento dos difeomorfismos Morse-Smale, é necessário fazer algumas considerações sobre intervalos monótonos.

Proposição 4.4. *Seja $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo de um intervalo compacto da reta nele mesmo tal que os únicos pontos fixos de F são a e b . Então ocorre uma entre as duas possibilidades:*

1. $F(y) > y, \quad \forall y \in (a, b)$ ou
2. $F(y) < y, \quad \forall y \in (a, b)$

Demonstração. Tome $x \in (a, b)$. Como os únicos pontos fixos são a e b , temos que ou $F(x) > x$, ou $F(x) < x$. Suponha que ocorre $F(x) > x$. Vamos mostrar que ocorre (1). Seja $y \in (a, b)$ tal que $y \neq x$. Suponha que $F(y) < y$. Temos que $F(y) - y < 0$. Também temos $F(x) - x > 0$. Considere a função $\varphi(z) = F(z) - z$. Pelo que acabamos de ver, $\varphi(y) < 0$ e $\varphi(x) > 0$. Pelo teorema do Valor Intermediário, existe w entre x e y tal que $\varphi(w) = 0$. Ou seja $F(w) = w$. Mas os únicos pontos fixos de F são a e b , uma contradição. Portanto, $F(y) > y$. Como y foi tomado arbitrariamente, temos o desejado.

Se tomarmos como hipótese que $F(x) < x$, é possível mostrar de maneira análoga que ocorre (2). \blacksquare

Proposição 4.5. *Seja $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo crescente de um intervalo compacto da reta nele mesmo tal que os únicos pontos fixos de F são a e b . Se existe $x \in (a, b)$ tal que $F(x) > x$, então vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = b$ e $\lim_{n \rightarrow -\infty} F^n(x) = a$.*

Demonstração. Seja $x \in (a, b)$ tal que $F(x) > x$. Como F é crescente, então $F^2(x) > F(x)$, também $F^3(x) > F^2(x)$ e, procedendo indutivamente, temos $F^{n+1}(x) > F^n(x)$, para

todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência $(F^n(x))$, dos iterados de F em x , é estritamente crescente. Como $Im(f) = [a, b]$, então a sequência é limitada superiormente por b . Segue pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass que ela converge para algum $p \in [a, b]$. Pela proposição 2.1, temos que p é um ponto fixo de F . Por hipótese, os únicos pontos fixos são a e b . Não podemos ter $p = a$, pois como a sequência dos iterados é estritamente crescente, $a \leq x < p$. Logo só podemos ter $p = b$. Portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = b$.

Além disso, considerando a sequência dos iterados de F^{-1} , concluímos de forma análoga que $\lim_{n \rightarrow -\infty} F^n(x) = a$. ■

Também podemos mostrar de forma análoga que se existe um ponto $x \in (a, b)$ tal que $F(x) < x$, então os limites da proposição anterior ficam “trocados”, isto é, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = a$ e $\lim_{n \rightarrow -\infty} F^n(x) = b$.

Observação:

Se $f : [t, s] \rightarrow [t, s]$ é um homeomorfismo restrito a um intervalo compacto de S^1 , podemos aplicar os resultados 4.5 e 4.4 a algum levantamento F restrito a um intervalo $[a, b]$ da reta correspondente ao intervalo $[t, s]$. Assim as conclusões sobre convergência da proposição 4.5 podem ser aplicadas também à aplicação f do círculo. Para mostrar isso, consideramos a projeção $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ e procedemos de forma similar à segunda metade da demonstração da proposição 4.1. Por se tratarem de detalhes técnicos, os passos serão omitidos.

Definição (Intervalos Monótonos). Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um homeomorfismo e $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dizemos que o intervalo $[a, b]$ é monótono em relação a F se o sinal de $(F - Id)(x)$ é o mesmo para todo $x \in (a, b)$. Se $(F - Id)(x) > 0$, dizemos que o intervalo é monótono crescente; caso contrário, dizemos que é monótono decrescente.

Seja f um homeomorfismo do círculo com levantamento F . Seja $[t, s] \subset S^1$, e $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $\pi([a, b]) = [t, s]$. Dizemos que o intervalo $[t, s]$ é monótono em relação a f se $[a, b]$ o é em relação a F .

4.3 Difeomorfismos Morse-Smale

Estamos prontos para descrever a dinâmica de um *difeomorfismo Morse-Smale*.

Definição (Difeomorfismos Morse-Smale). Dizemos que um difeomorfismo f do círculo é Morse-Smale se:

1. f possui ao menos um ponto periódico; e
2. todo ponto periódico de f é hiperbólico.

A definição exige a existência de ao menos um ponto periódico em difeomorfismos Morse-Smale. Contudo, como consequência da definição, há mais algumas restrições para a quantidade de pontos periódicos. Veremos em breve que esse número não poderá ser ímpar. Além disso, a quantidade de pontos periódicos também não poderá ser infinita.

Proposição 4.6. *Se f é um difeomorfismo Morse-Smale, então o conjunto dos pontos periódicos de f é finito.*

Demonstração. Como f é difeomorfismo, pelo teorema 3.1, todos os pontos periódicos de f tem o mesmo período k . Assim, $Per(f) = Fix(f^k)$. Suponha que o conjunto $Per(f)$ é infinito. Considere uma sequência com termos em $Per(f)$ todos distintos. Como S^1 é compacto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, essa sequência possui uma subsequência convergente (x_n) . Seja $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Pela continuidade de f^k , temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f^k(x_n) = f^k(y)$. Mas $f^k(x_n) = x_n$, pois $x_n \in Per(f) = Fix(f^k)$, para todo n . Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f^k(y)$, ou seja $y = f^k(y)$. Logo, $y \in Per(f)$ e, pela definição de y , ele é um ponto de acumulação do conjunto $Per(f)$. Mas pelo corolário 4.1, todo ponto periódico de f é isolado. Uma contradição. Portanto, só podemos ter que $Per(f)$ é finito. ■

A seguir, passaremos a descrever dinâmica de um difeomorfismo Morse-Smale, começando com o caso em que o período dos pontos periódicos do difeomorfismo é 1, isto é, os pontos periódicos são pontos fixos. Note que os exemplos 2 e 3 são de difeomorfismos Morse-Smale. Com a descrição a seguir, o estudo da dinâmica deles estará completo, isto é, saberemos o comportamento da órbita de cada ponto.

Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ um difeomorfismo Morse-Smale, cujos pontos periódicos tem período 1. Pela proposição 4.6, f tem um número finito de pontos fixos. Sejam¹ $t_1 < t_2 < \dots < t_r$ os pontos fixos de f . Seja $x \in S^1$. Se x é um dos pontos fixos, já sabemos o que ocorre com sua órbita, ficará “parada”. Se x não é um dos pontos fixos, então x pertence a um intervalo (t_i, t_{i+1}) , cujos extremos são pontos fixos consecutivos².

¹Estamos considerando a relação de ordem canônica da reta restrita a $[0, 1) = S^1$.

²Nesta notação, estamos considerando que $t_{r+1} = t_1$

Suponha que x não é um dos pontos fixos. Então, ou ocorre $f(x) > x$, ou $f(x) < x$. Além disso, pela continuidade de f , temos que $f(t_i, t_{i+1}) = (t_i, t_{i+1})$. Assim, pela proposição 4.4, temos que $[t_i, t_{i+1}]$ é um intervalo monótono de S^1 em relação a f .

Segue da proposição 4.5 que um dos extremos é hiperbólico atrator e o outro é hiperbólico repulsor (em particular, isso implica que o número r de pontos fixos é par; e que se um intervalo é monótono crescente, seus vizinhos serão decrescentes e vice-versa). Logo, a órbita de x converge no futuro para o extremo que for atrator e, no passado, para o extremo repulsor. Mais especificamente, os iterados futuros de x se aproximam do extremo atrator até que algum iterado $f^n(x)$ “entre” na vizinhança do extremo atrator em que a convergência passa a ser exponencial.

No exemplo 2, temos quatro pontos fixos e quatro intervalos monótonos: $I_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $I_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $I_4 = [\frac{3}{4}, 1]$. Os intervalos I_1 e I_3 são monótonos crescentes, enquanto I_2 e I_4 são monótonos decrescentes. A figura 4.4 ilustra a dinâmica do difeomorfismo f do exemplo 2. Os pontos destacados são os pontos fixos, e as setas indicam o sentido em que os pontos de cada intervalo se “movimentam” com as iterações.

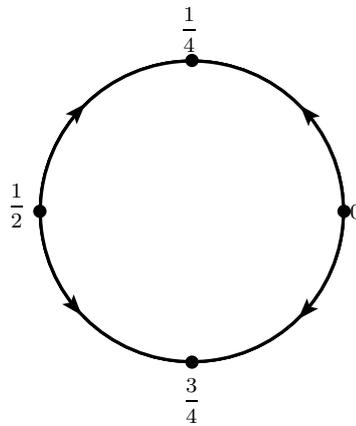


Figura 4.4: Dinâmica do exemplo 2: Morse-Smale com pontos fixos

Analisamos o caso em que o período k dos pontos periódicos do difeomorfismo é 1. No caso em que $k > 1$, podemos adaptar essa análise com poucas considerações adicionais.

Seja $g : S^1 \rightarrow S^1$ um difeomorfismo Morse-Smale, cujos pontos periódicos têm período $k > 1$. Sejam $t_1 < t_2 < \dots < t_r$ os pontos periódicos de g . Seja $x \in S^1$. Se x é um dos pontos periódicos, já sabemos o que ocorre com sua órbita, se repetirá a cada k iterações. Se x não é um dos pontos periódicos, então x pertence a um intervalo (t_i, t_{i+1}) , cujos extremos são pontos periódicos consecutivos.

Suponha que x não é um dos pontos periódicos. Como, t_i é ponto fixo de g^k , para todo i , então o comportamento dos iterados de x por g^k é o mesmo que já foi analisado para o caso anterior. Assim, ou ocorre $g^k(x) > x$, ou $g^k(x) < x$. Além disso, $g^k([t_i, t_{i+1}]) = [t_i, t_{i+1}]$. Dessa forma, temos que $[t_i, t_{i+1}]$ é um intervalo monótono de S^1 em relação a g^k . Já em relação a g , o intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ não será invariante, mas será um “intervalo periódico”.

Portanto, a órbita de x converge no futuro para o a órbita do extremo atrator de $[t_i, t_{i+1}]$, e no passado para a órbita do extremo repulsor, conforme indica a proposição 4.3.

No exemplo 3, temos quatro pontos periódicos e quatro intervalos periódicos: $I_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $I_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $I_4 = [\frac{3}{4}, 1]$. Os intervalos I_1 e I_3 são periódicos crescentes, enquanto I_2 e I_4 são periódicos decrescentes.

5 Estabilidade

No capítulo 3 apresentamos as rotações do círculo e vimos na proposição 3.1 que há uma grande diferença entre a dinâmica de uma rotação racional e de uma rotação irracional. Se α é racional, todos os pontos da rotação R_α serão periódicos. Mas com uma modificação arbitrariamente pequena do ângulo α é possível obter um ângulo $\tilde{\alpha}$ irracional, cuja rotação associada não tem pontos periódicos, em vez disso, todos os pontos tem órbita densa (aplicação minimal). Isso significa que a dinâmica de uma rotação R_α é muito “instável” sob pequenas modificações do ângulo α . Ou seja, sob pequenas “perturbações” da rotação R_α .

Neste capítulo, introduziremos o conceito de estabilidade. Para isso, definiremos o significado de fazer uma “perturbação” em um sistema. Por último, mostraremos que Difeomorfismo Morse-Smale são estruturalmente estáveis.

5.1 Estabilidade Estrutural

Para definir o conceito de perturbar um difeomorfismo é necessário que tenhamos uma noção de distância entre dois difeomorfismos.

Definição (Métrica C^1). Sejam $f, g : X \rightarrow X$ difeomorfismos, em que $X = S^1$ ou $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Definimos a distância C^1 entre f e g por

$$d_1(f, g) = \sup_{x \in X} \{ \max\{d(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|\} \}.$$

Geometricamente, dois difeomorfismos f e g estão próximos, de acordo com a distância C^1 , se os gráficos estão próximos ponto a ponto e se, para cada $x \in X$, as inclinações das tangentes aos gráficos de f e g em x também estão próximas.

Proposição 5.1. *A distância C^1 entre dois difeomorfismos f e g é de fato uma métrica.*

Demonstração. Primeiro, temos que para todos os difeomorfismos $f, g : X \rightarrow X$ vale $d_1(f, g) \geq 0$, pois estamos tomando o supremo em um conjunto de valores não negativos. Além disso, $d_1(f, g) = 0$ se e somente se $f = g$. De fato, se $f = g$, então $d(f(x), g(x)) =$

$|f'(x) - g'(x)| = 0$, para todo $x \in X$. O que implica $d_1(f, g) = 0$. Reciprocamente, se $d_1(f, g) = 0$, então

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in X} \{\max\{d(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|\}\} = 0 \\ \implies & \max\{d(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|\} \leq 0, \quad \forall x \in X \\ \implies & d(f(x), g(x)) \leq 0, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Como d é métrica, $d(f(x), g(x)) \geq 0$, para todo x . Logo $d(f(x), g(x)) = 0$, para todo x , e portanto $f = g$.

Também temos que $d_1(f, g) = d_1(g, f)$, uma vez que $d(f(x), g(x)) = d(g(x), f(x))$ e $|f'(x) - g'(x)| = |g'(x) - f'(x)|$, para todo x .

Vamos mostrar a desigualdade triangular. Sejam $f, g, h : X \rightarrow X$ difeomorfismos. Sabemos que d e $|a - b|$ são métricas, logo satisfazem a desigualdade triangular. Então, para todo $x \in X$, vale:

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) & \leq d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)) \\ |f'(x) - g'(x)| & \leq |f'(x) - h'(x)| + |h'(x) - g'(x)| \end{aligned}$$

Isso implica

$$\begin{aligned} & \max\{d(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|\} \\ & \leq \max\{d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)), |f'(x) - h'(x)| + |h'(x) - g'(x)|\} \\ & \leq \max\{d(f(x), h(x)), |f'(x) - h'(x)|\} + \max\{d(h(x), g(x)), |h'(x) - g'(x)|\} \end{aligned}$$

Usando que, para conjuntos A e B de números reais, vale $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ e $\forall \alpha \in A, \exists \beta \in B (\alpha \leq \beta) \implies \sup(A) \leq \sup(B)$, temos:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in X} \max\{d(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|\} \\ & \leq \sup_{x \in X} \max\{d(f(x), h(x)), |f'(x) - h'(x)|\} + \sup_{x \in X} \max\{d(h(x), g(x)), |h'(x) - g'(x)|\}. \end{aligned}$$

Ou seja, $d_1(f, g) \leq d_1(f, h) + d_1(h, g)$, como desejado. ■

Quando f e g são dois difeomorfismos tais que $d_1(f, g) < \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, pequeno, dizemos que f é C^1 - ε -próxima de g e também que g é uma perturbação de f .

Estudar a estabilidade de um difeomorfismo é procurar saber se as principais propriedades dinâmico-topológicas do difeomorfismo não se alteram quando ele sofre pequenas perturbações. Dentre as propriedades de interesse encontram-se: transitividade, minimalidade, número de rotação, quantidade de pontos fixos e periódicos (e seus

períodos), a estrutura topológica do conjunto $Per(f)$, dentre outras. Uma forma prática de descobrir se dois difeomorfismos tem as mesmas propriedades dinâmico-topológicas é saber se eles são *topologicamente conjugados*.

Definição (Conjugação topológica). Sejam X, Y espaços métricos. Duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são ditas topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Ou seja, tal que o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

As proposições seguintes mostram como a conjugação topológica preserva determinadas propriedades dinâmico-topológicas dos sistemas.

Proposição 5.2. *Sejam X, Y espaços métricos e sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ contínuas. Se f é topologicamente conjugado a g , então f^n é topologicamente conjugada a g^n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Se f e g são homeomorfismos, então o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Por hipótese, o resultado é válido para $n = 1$. Suponha que é válido para $n \in \mathbb{N}$, isto é, existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, tal que $h \circ f^n = g^n \circ h$. Vamos provar que é válido para $n + 1$. Temos: $h \circ f^{n+1} = h \circ (f^n \circ f) = (h \circ f^n) \circ f = (g^n \circ h) \circ f = g^n \circ (h \circ f) = g^n \circ (g \circ h) = g^{n+1} \circ h$. Portanto, $h \circ f^{n+1} = g^{n+1} \circ h$ e, pelo princípio da indução, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$

Se f e g são homeomorfismos, então vale que $(h \circ f^n)^{-1} = (g^n \circ h)^{-1}$. Logo, $f^{-n} \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^{-n}$, ou seja f^{-n} é topologicamente conjugada a g^{-n} . Portanto, o resultado vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Corolário 5.1. *Sejam f uma aplicação topologicamente conjugada a g por um homeomorfismo h . Então h leva o conjunto dos pontos periódicos de f no conjunto dos pontos periódicos de g . Isto é, $h(Per(f)) = Per(g)$.*

Demonstração. Seja $x \in Per(f)$ de período $k \in \mathbb{N}$. Temos $h(x) = h(f^k(x)) = (h \circ f^k)(x) = (g^k \circ h)(x) = g^k(h(x))$. Assim, $h(x) = g^k(h(x))$. Então, $h(x) \in Per(g)$. Logo,

$h(\text{Per}(f)) \subset \text{Per}(g)$. Além disso, como f é conjugada a g por h , então g é conjugada a f por h^{-1} . Dessa forma, aplicando o mesmo argumento para $x \in \text{Per}(g)$ e h^{-1} , obtemos $h^{-1}(\text{Per}(g)) \subset \text{Per}(f)$. Como h é bijeção, isso equivale a $\text{Per}(g) \subset h(\text{Per}(f))$. Portanto, $h(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$. ■

Proposição 5.3. *Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ aplicações topologicamente conjugadas. Se f é topologicamente transitiva ou minimal, então g também o é.*

Demonstração. Suponha que f é topologicamente transitiva. Então existe $x \in X$ tal que $O^+(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X . Para provar que g é transitiva, vamos mostrar que $O^+(h(x)) = \{g^n(h(x)); n \in \mathbb{N}\}$ é denso em Y . Primeiro, note que $h(O^+(x)) = O^+(h(x))$, pois, como f é topologicamente conjugada a g , temos $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$, para todo n . Assim, se provarmos que imagens de conjuntos densos de X por h são conjuntos densos de Y , teremos que $O^+(h(x))$ é denso em Y .

Seja $D \subset X$ um conjunto denso. Tome $b \in Y$. Seja $a \in X$ tal que $h(a) = b$. Como D é denso em X , existe uma sequência (a_n) de elementos de D convergindo para a . Pela continuidade de h , segue que a sequência $(h(a_n))$, com termos em $h(D)$, converge para $h(a) = b$. Assim, existe uma sequência de elementos de $h(D) \subset Y$ convergindo para b . Portanto, $h(D)$ é denso em Y e temos o desejado.

Se f é minimal, para todo $x \in X$, temos que a órbita $\{f^n(x)\}$ é densa em X . Pelo que mostramos acima, para todo $x \in X$, vale que a órbita $\{g^n(h(x))\}$ é densa em Y . Como h é bijeção, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$. Logo, todo ponto de Y tem órbita densa e, portanto, g é minimal. ■

Uma vez que podemos medir a distância entre dois difeomorfismos e temos uma definição formal de quando dois difeomorfismos possuem o mesmo comportamento dinâmico (conjugação topológica), podemos definir uma noção de estabilidade.

Definição. Seja $f : X \rightarrow X$ um difeomorfismo, em que $X = S^1$ ou $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é C^1 -estruturalmente estável se existe $\varepsilon > 0$ tal que todo difeomorfismo $g : X \rightarrow X$ que está C^1 - ε -próximo de f é topologicamente conjugado a f .

Equivalentemente, f é estruturalmente estável se existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta $B_{d_1}(f, \varepsilon)$ é composta apenas por aplicações topologicamente conjugadas a f .

5.2 Estabilidade dos difeomorfismos Morse-Smale

Nesta seção apresentaremos alguns resultados com o objetivo de demonstrar que difeomorfismos Morse-Smale são estruturalmente estáveis. O primeiro deles diz que a existência de pontos fixos hiperbólicos é preservada por pequenas perturbações, ainda que o difeomorfismo considerado não seja estruturalmente estável.

Proposição 5.4. *Seja $f : X \rightarrow X$ um difeomorfismo com um ponto fixo hiperbólico p . Então existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança U de p tais que se g é um difeomorfismo C^1 - ε -próximo de f , então g possui um único ponto fixo q em U . Além disso, q será hiperbólico atrator ou repulsor conforme p o for.*

Demonstração. Suponha que $f'(p) > 1$ (a demonstração é análoga no caso $f'(p) < 1$). Como estamos supondo f' contínua, então existe um intervalo $[a, b]$ contendo p tal que $f'(x) > 1$, para todo $x \in [a, b]$. Podemos supor ainda que o intervalo $[a, b]$ tem comprimento pequeno o suficiente para que a e b sejam repelidos por p , que é um ponto hiperbólico repulsor. Assim, temos¹ $f(a) - a < 0$ e $f(b) - b > 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para que todo difeomorfismo g que esteja C^1 - ε -próximo de f satisfaça $g'(x) > 1$, para todo $x \in [a, b]$. Suponha ainda que $\varepsilon < \min\{|f(a) - a|, |f(b) - b|\}$. Segue que:

$$\begin{aligned} |g(a) - f(a)| &< \varepsilon < \min\{|f(a) - a|, |f(b) - b|\} < |f(a) - a| = a - f(a) \\ \implies g(a) - f(a) &< a - f(a) \\ \implies g(a) - a &< 0. \end{aligned}$$

Analogamente, temos $g(b) - b > 0$.

Considere a aplicação $w(x) = g(x) - x$. Pelo que acabamos de ver, $w(a) < 0$ e $w(b) > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $q \in (a, b)$ tal que $w(q) = 0$, ou seja, $g(q) = q$. Portanto, existe um ponto fixo q na vizinhança $U = (a, b)$ de p , tal que $g'(q) > 1$. Ou seja, q é hiperbólico repulsor.

Além disso, q é o único ponto fixo de g em U . De fato, se existisse $d \in U$ distinto de q e tal que $g(d) = d$, então, pelo Teorema do Valor Médio, teríamos $g'(k) = 1$, para algum k entre q e d , uma contradição. ■

¹Por um abuso de notação.

A proposição seguinte pode ser pensada como uma versão global da anterior. Em vez de relacionar apenas um ponto hiperbólico do difeomorfismo com um da perturbação, ela relaciona o conjunto de todos os pontos hiperbólicos da perturbação e do difeomorfismo original.

Proposição 5.5. *Seja f um difeomorfismo Morse-Smale do círculo com r pontos fixos. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que todo difeomorfismo g que está C^1 - ε -próximo de f é um difeomorfismo Morse-Smale com exatamente r pontos fixos.*

Demonstração. Sejam p_1, p_2, \dots, p_r os pontos fixos de f . Aplicando a proposição 5.4 a cada um dos pontos fixos, temos que para cada p_i existe uma vizinhança U_i de p_i (que podem ser tomadas disjuntas) e uma constante $\varepsilon_i > 0$ tais que para todo difeomorfismo g que esteja C^1 - ε_i -próximo de f existe um único ponto fixo q_i de g em U_i . Em que q_i é hiperbólico atrator/repulsor conforme p_i o for. Assim, defina $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$.

Além disso, para todo $x \in S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^r U_i$, temos $f(x) - x \neq 0$. Então podemos escolher $\varepsilon'' >$ pequeno o suficiente de modo que se g é um difeomorfismo C^1 - ε'' -próximo de f , então $g(x) - x \neq 0$, para todo $x \in S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^r U_i$.

Dessa forma, seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$. Pelo que foi estabelecido, se g é uma perturbação ε -próxima de f , então os únicos pontos fixos de g são os q_i , descritos anteriormente. Logo, g é um difeomorfismo com exatamente r pontos fixos e todos hiperbólicos, portanto, Morse-Smale. ■

Observação:

Os resultados das duas proposições anteriores também são válidos quando o difeomorfismo possui pontos periódicos de período maior que 1. A demonstração disso é em essência a mesma do caso de período 1, com apenas alguns ajustes e, por isso, será omitida.

Estamos quase prontos para provar a estabilidade dos difeomorfismos Morse-Smale, isto é, mostrar que, dado um Morse-Smale f , existe uma vizinhança de f na métrica C^1 , com todos os difeomorfismos dela topologicamente conjugados a f . Por simplicidade, vamos nos restringir ao caso em que f tem pontos fixos.

Acabamos de ver que existe uma vizinhança de f em que todos os difeomorfismos dela são também Morse-Smale, com o mesmo número de pontos fixos. Como os pontos

fixos de um difeomorfismo Morse-Smale particionam o círculo em intervalos monótonos invariantes, então, para construir uma conjugação entre f e um difeomorfismo Morse-Smale na sua vizinhança, será suficiente construir conjugações para os difeomorfismos restritos a estes intervalos, conforme os resultados a seguir.

Proposição 5.6. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ e $g : [c, d] \rightarrow [c, d]$ difeomorfismos. Se $[a, b]$ e $[c, d]$ são intervalos monótonos do mesmo tipo (crescente ou decrescente), então f e g são topologicamente conjugadas.*

Demonstração. Suponha que os intervalos são monótonos crescentes (a demonstração do caso decrescente é análoga). Sejam $\alpha \in (a, b)$ e $\beta \in (c, d)$. Como os intervalos são crescentes, então $f(x) > x$ e $g(y) > y$, para todo $x \in (a, b)$ e todo $y \in (c, d)$. Logo, os iterados de f e g formam sequências crescentes com índices em \mathbb{Z} . Assim, podemos escrever:

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)] \quad \text{e} \quad (c, d) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [g^n(\beta), g^{n+1}(\beta)].$$

Como a imagem de cada intervalo da união é um intervalo adjacente à direita, então, para todo $x \in (a, b)$, a órbita de x passa uma única vez em cada intervalo dessa união disjunta. O mesmo vale para $y \in (c, d)$.

Sabemos da Análise Real que quaisquer dois intervalos do mesmo tipo são homeomorfos. Então seja H um homeomorfismo entre $[\alpha, f(\alpha)]$ e $[\beta, g(\beta)]$ tal que $H(\alpha) = \beta$ e $H(f(\alpha)) = g(\beta)$. A partir de H vamos criar uma nova aplicação $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ da seguinte forma: seja $x \in (a, b)$, como acabamos de ver, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha)]$. Se fecharmos o intervalo a direita, existirão no máximo dois naturais tais que isso ocorre (no caso em que $x = f^k(\alpha)$, para algum k , os naturais são k e $k + 1$). Assim, escolhido o menor desses n 's, defina $h(x) = (g^{-n} \circ H \circ f^n)(x)$ (observe que se $x_1 \neq x$, o n escolhido pode não ser o mesmo). Defina também $h(a) = c$ e $h(b) = d$. Afirmamos que h é um homeomorfismo que conjuga f com g .

Primeiro, note que, quando restrita a algum intervalo $[f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)]$, a aplicação h é um homeomorfismo, pois é a composição de homeomorfismos fixos. Dessa forma, para ver que h é contínua em $[a, b]$, é suficiente mostrar que h é contínua nos pontos da fronteira de cada intervalo da forma $[f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)]$ (a continuidade em a e b já segue diretamente do fato do intervalo ser monótono). Neste caso, resta verificar que os limites laterais coincidem.

Assim, fixe $f^n(\alpha)$ e considere (x_k) e (y_k) duas seqüências que convergem para $f^n(\alpha)$ tais que x_k converge pela direita e y_k converge pela esquerda. Isto é, $x_k \in [f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)]$ e $y_k \in [f^{n-1}(\alpha), f^n(\alpha)]$, para todo k . Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} g^n \circ H \circ f^{-n}(x_k) \\ &= g^n \circ H \circ f^{-n}(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) \\ &= (g^n \circ H \circ f^{-n})(f^n(\alpha)) \\ &= (g^n \circ H)(\alpha) \\ &= g^n(\beta).\end{aligned}$$

Também:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} h(y_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} g^{n-1} \circ H \circ f^{-n+1}(y_k) \\ &= (g^{n-1} \circ H \circ f^{-n+1})(f^n(\alpha)) \\ &= (g^{n-1} \circ H)(f(\alpha)) \\ &= g^{n-1}(g(\beta)) \\ &= g^n(\beta).\end{aligned}$$

Então os limites laterais são iguais, e h é contínua em cada $f^n(\alpha)$. Portanto h é contínua em todo intervalo $[a, b]$. Como o domínio é compacto, a inversa de h é contínua e, portanto, h é homeomorfismo.

Resta mostrar que h conjuga f com g . Tome x tal que $f^k(x) \in [\alpha, f(\alpha)]$. Então temos $h \circ f(x) = g^{-k+1} \circ H \circ f^{k-1}(f(x)) = g \circ (g^{-k} \circ H \circ f^k)(x) = g \circ h(x)$, como desejado. ■

Finalmente, estamos prontos para provar a estabilidade dos difeomorfismos Morse-Smale.

Teorema 5.1. *Todo difeomorfismo Morse-Smale do círculo é estruturalmente estável.*

Demonstração. Relembramos que, por simplicidade, vamos nos restringir ao caso de difeomorfismos com pontos fixos. A demonstração do caso geral é semelhante e pode ser encontrada em [1].

Seja f um difeomorfismo do círculo com pontos fixos $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. Seja $I_s = [p_s, p_{s+1}]$, para cada $s = 1, 2, \dots, r$. Considere a restrição f_s do difeomorfismo f ao intervalo I_s . Temos que o intervalo I_s é monótono em relação a f_s .

Pela proposição 5.5, existe $\varepsilon > 0$ tal que toda perturbação g ε -próxima de f possui exatamente r pontos fixos $q_1 < q_2 < \dots < q_r$, todos hiperbólicos com q_s do mesmo

tipo que p_s (atrator ou repulsor). Logo, os pontos fixos q_s de g dividem o círculo em s intervalos monótonos $J_s = [q_s, q_{s+1}]$, em que cada J_s é monótono crescente ou decrescente conforme I_s o for.

Aplicando a proposição 5.6 a cada par de intervalos I_s e J_s , temos que para cada s existe um homeomorfismo $h_s : I_s \rightarrow J_s$ que conjuga as restrições f_s com g_s . Defina $h : S^1 \rightarrow S^1$ por $h(x) = h_s(x)$ se $x \in I_s$. A aplicação h está bem definida, pois se x estiver em mais de um intervalo, então x só pode ser um dos pontos fixos p_s e, pela forma como as conjugações h_s foram construídas, teremos $h_s(p_s) = q_s = h_{s+1}(p_s)$. Isso também mostra que os limites laterais $\lim_{x \rightarrow p_s^+} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p_s^-} h(x)$ são iguais, logo h é também contínua nas fronteiras dos intervalos. Assim, h é uma aplicação contínua no círculo, que é compacto, logo é um homeomorfismo. Resta checar que h conjuga f com g . Tome $x \in S^1$. Suponha que $x \in I_s$, para algum s . Então temos:

$$(h \circ f)(x) = (h \circ f)|_{I_s}(x) = (h_s \circ f_s)(x) = (f_s \circ h_s)(x) = (f \circ h)|_{I_s}(x) = (f \circ h)(x), \text{ como desejado.} \quad \blacksquare$$

5.3 Comentários finais

Vimos que difeomorfismos Morse-Smale são estruturalmente estáveis. Mas vale também a afirmação recíproca: todo difeomorfismo estruturalmente estável do círculo é um difeomorfismo Morse-Smale. Outro fato interessante é que os difeomorfismos Morse-Smale formam um conjunto aberto e denso no espaço dos difeomorfismos do círculo. As demonstrações dessas afirmações podem ser encontradas em [1].

Como foi visto no capítulo 4, a dinâmica de um difeomorfismo Morse-Smale é relativamente simples, dessa forma, o fato de podermos aproximar qualquer outro difeomorfismo do círculo por um que seja Morse-Smale (pois formam um conjunto denso) pode ser algo muito valioso.

A estabilidade de difeomorfismos está intimamente relacionada à hiperbolicidade, pois difeomorfismos estáveis no círculo são Morse-Smale, e estes são justamente os difeomorfismos cujos pontos periódicos são todos hiperbólicos.

Referências Bibliográficas

- [1] FRANÇA, Luiz Felipe Nobili. *Estabilidade e densidade dos difeomorfismos Morse-Smale do círculo* – Dissertação de mestrado; orientador Flavio Erthal Abdenur. - Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2008.
- [2] SMANIA, Daniel. *Topologia quociente* – Notas de aula. Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/smania/sma5706/quociente.pdf> – Acesso em 11 de fevereiro de 2017.
- [3] BRIN, Michael; STUCK, Garrett. *Introduction to dynamical systems* – Cambridge University Press, 2003.
- [4] ABDENUR, Flávio; FRANÇA, Luiz Felipe N. *Hiperbolicidade, estabilidade e caos em dimensão um* – IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [5] DEVANEY, Robert L.. *An introduction to chaotic dynamical systems* – 2ed. – Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [6] KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris. *Introduction to the modern theory of dynamical systems* – Cambridge University Press, 1999. IMPA, 2011.
- [7] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos* – 4ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [8] NERI, Cassio; CABRAL, Marco Aurélio P. *Curso de Análise Real* – 2ed. – Rio de Janeiro: UFRJ, 2011.