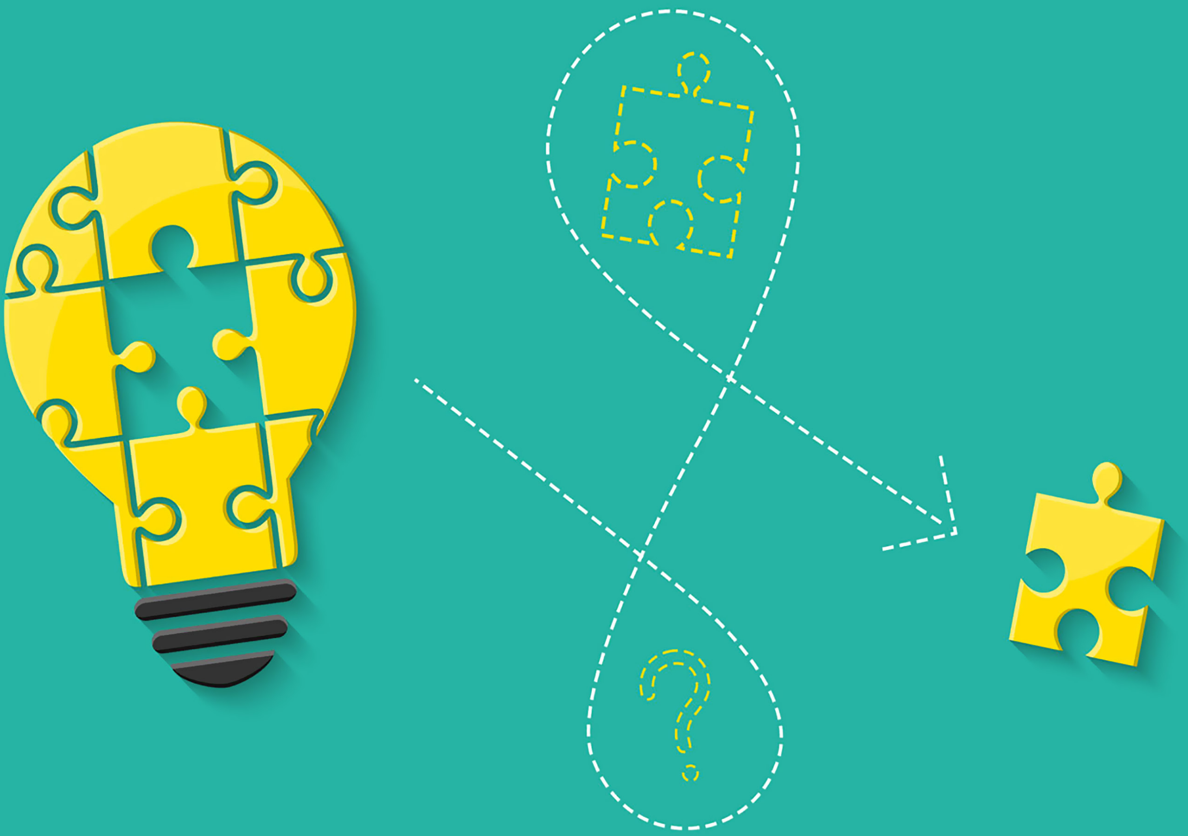
LÓGICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

Germán Enrique Gallego R.
Jhon Jairo Ramírez M.

LÓGICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ing. M.SC.
Germán Enrique Gallego R.

Ing. Filósofo
Jhon Jairo Ramírez M.

UNIVERSIDAD FRANCISCO
DE PAULA SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE ELECTRICIDAD
Y ELECTRÓNICA
SAN JOSÉ DE CÚCUTA

Catalogación en la publicación - Biblioteca Nacional de Colombia

Gallego Rodríguez, German Enrique
Lógica y resolución de problemas / Germán Enrique Gallego R, Jhon Jairo Ramírez M. -- 1a. ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones : Universidad Francisco de Paula Santander, 2019.
222 p. -- (Ingeniería y salud en el trabajo. Ingeniería)

Incluye datos biográficos de los autores en la pasta. -- Contiene bibliografía.

ISBN 978-958-8489-86-5

1. Lógica matemática - Enseñanza superior 2. Razonamiento - Enseñanza superior 3. Solución de problemas - Enseñanza superior
I. Ramírez Mateus, Jhon Jairo II. Título III. Serie

CDD: 511.3 ed. 23 CO-BoBN– a1047153

Colección: *Ingeniería y salud en el trabajo*
Área: *Ingeniería*

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

▸ Germán Enrique Gallego R.
▸ Jhon Jairo Ramírez M.

© Ecoe Ediciones Limitada
info@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 248 14 49
Bogotá, Colombia

Primera edición: Bogotá, octubre de 2019

ISBN: 978-958-8489-86-5

Coordinación editorial: Angélica García Reyes
Corrección de estilo: Catina del Mar
Diagramación: Olga Lucía Pedraza R.
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: Carvajal Soluciones de comunicación S.A.S
Carrera 69 #15 -24

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

ICFES	Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior
Ing.	Ingeniero
M.C.	Maestría en Ciencias
O.C.D.E	Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos
PISA	El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés),
Q.E.D.	Quod erat demonstrandum. Lo que se quería demostrar
R.R.H.H	Recursos humanos
$\rightarrow$	Símbolo del condicional entre dos proposiciones.
px	Símbolo de una función proposicional en la variable
P	Símbolo del conjunto de verdad de px
$\forall x$	Símbolo del cuantificador universal.
$\exists x$	Símbolo del cuantificador existencial
$\leftrightarrow$	Símbolo de la equivalencia entre dos proposiciones
$\wedge$, &	Símbolos de la conjunción.
V	Símbolo de la disyunción.
$\neg$	Símbolo de la negación
$\emptyset$	Símbolo del conjunto vacío.

{ }	Símbolo de un conjunto.
∩	Símbolo para intersección de conjuntos.
∪	Símbolo para unión de conjuntos
⊆	Símbolo del subconjunto propio.
∈	Símbolo de pertenencia
U.C.V.	Universidad Central de Venezuela
UFPS.	Universidad Francisco de Paula Santander
U.S.A.	Estados Unidos de América

PREFACIO

Según Navarro R.[15] "Existen investigadores (Arons, 1979; Whimbey y Lochhead 1986; Montealegre, 1992; Raths y Colbs, 1997; Reyes, 2004), que permiten sustentar que un alto porcentaje de los estudiantes que ingresan a la universidad, tiene deficiencias para razonar a nivel de operaciones formales, y para pensar en forma crítica y creativa. Dichas deficiencias han causado en diferentes ámbitos, un descenso progresivo del desempeño académico de los estudiantes. El análisis de desempeño de los alumnos ha llevado a suponer que muchas de las deficiencias de éstos en cuanto a sus habilidades para pensar, se deben a la falta de estructuras cognitivas debidamente consolidadas, para realizar procesos mentales de operaciones formales (Gardner, 1985; Pozo y Gómez-Crespo, 1998; Ianfranceso, 2003)".

En la Universidad Francisco de Paula Santander de San José de Cúcuta, existen evidencias[22] para afirmar que los estudiantes que inician las carreras de Ingeniería Electrónica y Electromecánica, presentan serias deficiencias en las competencias de razonamiento lógico, matemático, de resolución de problemas, de pensamiento crítico, y los que terminan la carrera no alcanzan los niveles de competencia deseables.

Una posible explicación a esta situación radica en los siguientes factores:

1. La poca importancia dada a la formación de estas competencias en el ciclo de educación secundaria, evidenciada en los pobres resultados de los estudiantes colombianos, en las pruebas PISA.
2. La política de la UFPS de aceptar estudiantes sin un examen de admisión, que permita seleccionar un grupo homogéneo en sus competencias matemáticas, de expresión verbal, escrita y de pensamiento crítico.
3. La ausencia de una política en la UFPS para establecer correctivos a esta situación, que afecta de una manera importante el desempeño académico de los estudiantes en su ciclo universitario.
4. La experiencia de Germán Gallego como profesor de las asignaturas de electrónica de potencia de los planes de estudio de Ingeniería Electrónica y Electromecánica, en la UFPS en Cúcuta, le ha permitido notar, que después de siete semestres de estudios universitarios, los estudiantes presentan deficiencias en sus habilidades de pensamiento matemático y de resolución de problemas, porque el entrenamiento que han recibido en los cursos anteriores se ha centrado en la resolución de ejercicios, que requieren del estudiante la ejercitación de la memoria, y no en la solución de situaciones nuevas, que exijan del estudiante un proceso reflexivo y un paso creativo, para tener éxito en la solución.

Se sabe que el desarrollo de estructuras cognitivas y de razonamiento no se obtiene de un proceso de aprendizaje espontáneo, y debe ser estimulado a través de un entrenamiento formal, mediante cursos debidamente incorporados en el currículum escolar.

De Sánchez M.[21], en su libro sobre desarrollo de habilidades de pensamiento, propone la necesidad perentoria de incluir materias en el currículum escolar, dirigidas a desarrollar en forma directa las habilidades de pensamiento de los estudiantes.

Por lo anterior, se propuso en el 2013 al comité curricular de Ingeniería Electromecánica, incluir dentro del pensum de la carrera una asignatura obligatoria en el primer semestre con el nombre de "Lógica y Razonamiento en Ingeniería", que tenga los siguientes objetivos:

1. Propiciar el desarrollo de la habilidad de pensamiento matemático, que permita ir más allá de la aplicación de procedimientos, para resolver situaciones relacionadas con las matemáticas.
2. Desarrollar en el estudiante, la capacidad de elaborar argumentos válidos, y reconocer las falacias.

3. Desarrollar en el estudiante, un patrón de comportamiento, que le permita enfrentar con éxito la solución de problemas.
4. Propiciar en el estudiante la formación de un pensamiento crítico, y estimular la aprehensión de las herramientas de pensamiento, desarrolladas por el Dr E. de Bono[4], para resolver asuntos de la vida cuotidiana.

La importancia de esta temática en el currículo universitario, se fundamenta en las siguientes opiniones:

1. Martins A.[17] al referirse a las pruebas PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes, por sus siglas en inglés) emite el siguiente juicio:

   > Una mirada a los resultados del nuevo test, denominado "Resolución creativa de problemas y habilidades de los alumnos para enfrentar problemas de la vida real", invita a la reflexión. De los 44 países, Colombia ocupa el último puesto, Uruguay el 42, Brasil el 38 y Chile el 36. Estados Unidos se sitúa en el lugar 11 y España en el 29. Como en las pruebas PISA anteriores, los primeros cinco puestos son ocupados por Asia: Singapur, Corea del Sur, Japón, China-Macao y China-Hong Kong en orden descendente.

2. Según Avvisati F, experto de la OCDE, "en el mundo de hoy, los trabajos dependen más y más de la habilidad de los trabajadores de actuar en situaciones inesperadas, porque las tareas familiares son realizadas muchas veces por computadoras u otras máquinas". El desarrollo de un patrón de comportamiento ante estas situaciones, capacitará al estudiante en estas habilidades, tan importantes para desenvolverse exitosamente en el mundo del siglo XXI.
3. En opinión de Lazzlo Bock Vicepresidente de Recursos Humanos de Google, "necesitas a gente a la que le guste **averiguar cosas** para las que no hay una respuesta obvia, algo que no se entrena en la Universidad". Para Bock, la Universidad sigue siendo un entorno artificial, una burbuja que premia a unos y a otros, en función de unos criterios, que nada tienen que ver con lo que se pide en el entorno laboral. "La gente que tiene éxito en la universidad", explica el responsable de R.R.H.H. de Google, "es un tipo de gente específicamente entrenada para tener éxito en ese ambiente. Una de mis frustraciones cuando estaba en la Universidad, es que sabía que el profesor estaba buscando una respuesta específica. Puedes limitarte a averiguarla, pero es mucho más interesante resolver problemas, para los que no hay una respuesta obvia. Necesitas a gente a la que le guste averiguar cosas, para las que no hay una respuesta obvia". Y ese tipo de gente, asegura Bock, no es la que suele tener éxito en la universidad, donde la mejor estrategia para sacar buenas notas, es saber qué suele preguntar el profesor en cuestión, y qué tipo de respuestas está esperando encontrar en

un examen". El desarrollo de competencias en el pensamiento matemático, capacita a los profesionales, que las empresas requieren hoy en día.

4. Según Fernando Uribe, profesor de Filosofía en Colombia "el miedo hacia las Matemáticas y las Ciencias proviene del colegio, pero no es por la dificultad de estas áreas del conocimiento, ni por la pereza de los milenios. En su opinión, los profesores de humanidades y de letras se han esforzado por entusiasmar a los estudiantes, por enamorarlos de sus clases, y en muchos casos lo han logrado con nuevas estrategias pedagógicas. Los profesores de matemáticas y ciencias, en cambio, han sido renuentes a modificar sus estrategias de aprendizaje. La memorización, las tardes de talleres que nunca terminan, los exámenes que pierde la mitad de la clase, las preguntas que hacen sudar frío, continúan siendo los métodos que usan para enseñar. Y se enorgullecen, afirma Uribe, cuando al final de cada periodo han perdido un alto número de estudiantes. Es un sinónimo de rigor, de seriedad, que comparan el desdén con la flexibilidad de las Humanidades. Pero el problema es, según Uribe, que no han creado un vínculo entre los estudiantes y las matemáticas". Por esta razón, en Colombia cada día se reduce el número de aspirantes a estudiar ingeniería, lo que traerá consecuencias negativas para el desarrollo industrial del país.

La práctica pedagógica tradicionalista en matemáticas, en los estudios de bachillerato, condiciona en los estudiantes la creencia, producto de la observación, de que hacer matemáticas implica seguir las reglas dadas por el profesor,conocer matemáticas significa recordar y aplicar correctamente las reglas cuando el profesor lo requiera, y la verdad matemática queda determinada por la respuesta del profesor. De este modo, por ejemplo, aunque el profesor nunca le haya dicho al estudiante que conocer matemáticas es memorizar y aplicar las reglas para resolver problemas, como eso fué lo que en la práctica siempre se hizo, eso es lo que le queda al estudiante en su recuerdo.

En muchos casos, la práctica pedagógica de enseñanza de la matemática en el bachillerato, utiliza un enfoque fundamental en ejercitarse en procedimientos, que permiten resolver diferentes situaciones estereotipadas, de una manera análoga a ciertos procedimientos o recetas de cocina, donde se alcanza un resultado sin comprender muy bien la naturaleza de los procesos involucrados. Esta práctica también se ha extendido a los cursos universitarios, y el estudiante desarrolla **habilidades para resolver ejercicios**, más no **problemas**, que es el campo de acción del ingeniero: resolver problemas tecnológicos para satisfacer las necesidades humanas.

La habilidad para resolver problemas pasa por desarrollar habilidades de pensamiento matemático, además de entrenar al estudiante en las técnicas de resolución de problemas, y en generar patrones de comportamiento, para aprender a pensar de una manera crítica y sistémica.

En el mundo actual es una necesidad indispensable, para progresar y crecer dentro de la sociedad de conocimiento, y de cambio permanente en el que se vive, el poseer buenas habilidades de pensamiento analítico, ya que sólo en ocasiones especiales se requieren personas con habilidades especiales. Más bien, lo que el campo laboral demanda son personas con buenas habilidades de pensamiento analítico, que tengan la capacidad de adquirir habilidades nuevas cuando se requieran en una situación particular.

Las habilidades que surgen de la práctica del pensamiento matemático, permiten resolver situaciones novedosas para las cuales no se conoce un procedimiento normalizado de solución -actividad que se conoce como resolución de problemas-, y permiten laborar con éxito en muchas profesiones y en la vida cotidiana.

Para la consecución de los propósitos planteados en el curso de Lógica y Razonamiento, los autores de este libro desarrollaron el material que a continuación se presenta en cuatro unidades, y un apéndice, el cual se enmarca dentro de una propuesta pedagógica presentada por Germán E. Gallego,al Comité Curricular de Ingeniería Electromecánica,para mejorar las competencias de razonamiento lógico, matemático, de resolución de problemas y de pensamiento crítico, de los estudiantes que inician la carrera de Ingeniería Electromecánica en la UFPS.

La unidad uno tiene como objetivo el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático, mediante el estudio de la Lógica. Se estudian la Lógica del sentido común, la Lógica proposicional, la teoría de conjuntos y los métodos de demostración matemáticos.

Con el estudio de la Lógica del sentido común, se pretende desarrollar en el estudiante la competencia para elaborar argumentos válidos en el lenguaje natural, y analizar los argumentos para reconocer las falacias. La Lógica proposicional permite al estudiante desarrollar la competencia para elaborar argumentos formales, y demostraciones de proposiciones matemáticas, mejorando de esta manera la competencia de pensamiento matemático. La teoría de conjuntos complementa a Lógica proposicional, y prepara el camino para el Álgebra de Boole.

Esta unidad utiliza las siguientes referencias bibliográficas: Kevlin[4], Allendoerfer[7], de Solis y Torres[8], Jaramillo de la Universidad de Antioquia[9], Monsalve M, de la Universidad Central de Venezuela[10],Nickerson[14], y Eccles[19]. Para el tema de demostraciones matemáticas, la referencia obligada es Solow [20].

En la unidad dos se estudia el álgebra de Boole, y sus aplicaciones al diseño de circuitos, y problemas de razonamiento lógico.

El objetivo de la unidad tres es propiciar en el estudiante, el desarrollo de un patrón de comportamiento, que le permita tener éxito, al momento de enfrentar la resolución de un problema.

Es muy conveniente generar en el estudiante el hábito de enfocar la solución de problemas con una actitud estratégica, de intentar entender la naturaleza del problema propuesto en un nivel cualitativo, antes de iniciar la búsqueda de soluciones cuantitativas.

En el mundo real, muy diferente a la burbuja del mundo de la educación superior, donde generalmente se asume que siempre los problemas propuestos tienen solución, y la verdad es la respuesta del profesor, existen muchos problemas para los cuales no hay solución o hay más de una solución, y siempre que se asuma la solución de un problema, se debe tener en cuenta esta realidad.

Las referencias bibliográficas obligadas en este tema son: el trabajo de Polya, cuyo libro más representativo es *Cómo plantear y resolver problemas*[1], el trabajo de Shoenfeld[2],[11], el libro *Mathematical Thinking* de Mason[12], y el de Nickerson *Mathematical reasoning, patterns, problems, conjectures and proofs*[16]. Algunos problemas presentados y propuestos, se tomaron del libro *Física recreativa* de Y. Perelman[13], y de Mason[12].

El propósito de la unidad cuatro es propiciar el desarrollo de habilidades, para pensar de una manera crítica y organizada, en temas relacionados con el acontecer diario de la vida.

Se utilizan como referencia los trabajos publicados por Edward de Bono sobre los métodos para aprender a pensar[4]-[5], el trabajo de Nickerson sobre "¿Por qué enseñar a pensar?"[14], y el de Paul R., sobre los estándares de competencia para el pensamiento crítico[18].

Se presenta al final del libro, un apéndice sobre el cuerpo de números, y los conceptos de proporcionalidad directa, inversa, y compuesta, para facilitarle al estudiante la resolución de problemas.

Al final de cada unidad, se proponen unas actividades de teoría, y problemas, que el estudiante debe desarrollar, y conforman la base de la evaluación del curso. La teoría se relaciona con el qué, por qué y para qué, de los temas y conceptos estudiados, y los problemas pretenden medir el nivel de interpretación, comprensión y generación de la idea creativa, que permite resolver la situación problemática propuesta.

Para orientar al estudiante en el proceso de la solución de los problemas propuestos, se presenta una respuesta en la mayoría de los casos.

Es oportuno manifestar nuestros agradecimientos, al especialista en docencia universitaria, Ing. Genisberto López, por su valioso aporte al revisar críticamente la primera versión de este libro y sugerir el desarrollo de ciertos temas que no estaban incluidos. Al Ing. Norbey Chinchilla, quien ha estado a cargo de uno de los cursos de la asignatura de Lógica y Razonamiento, por sus observaciones y recomendaciones, producto de su experiencia en la conducción del curso durante tres años, y finalmente, al estudiante Álvaro Ferney Algarra, quien se ha desempeñado como monitor por tres semestres consecutivos.

Este libro se dedica a las familias de los autores, por la inspiración para su elaboración, y la paciencia para soportar la ausencia de la dinámica familiar.

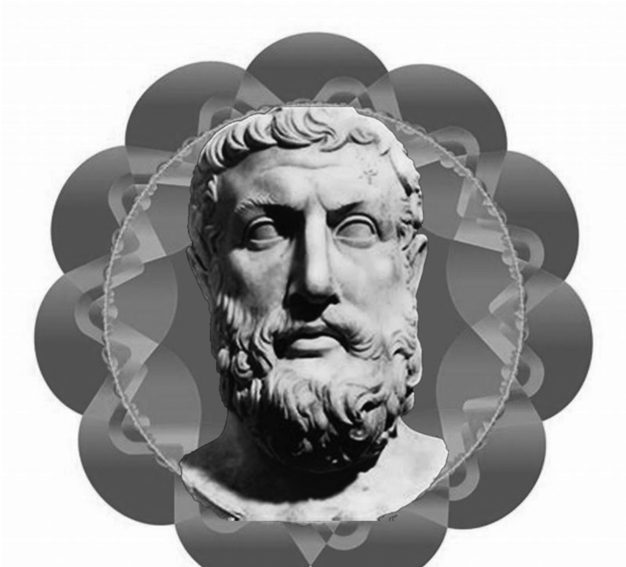
Ing. M.Sc. Germán E. Gallego R.
Ing. Jhon Jairo Ramírez Mateus
San José de Cúcuta
Abril de 2019.

UNIDAD I

LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Pitágoras comenzó a leer las demostraciones en sentido inverso, hasta que llegado a los axiomas, quedó convencido.

Bertrand Russell



UNIDAD 1

LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1 Naturaleza de la matemática

La frase de Galileo: "el libro grande de la naturaleza puede ser leído únicamente por aquellos que conocen el lenguaje en el cual fue escrito, y este lenguaje es la Matemática", explica magistralmente la naturaleza y el propósito de la matemática

El origen de la matemática se explica en la necesidad humana de resolver ciertos problemas, inicialmente de carácter utilitario, en la administración, contabilidad, agrimensura…, y posteriormente explicar el movimiento de los cuerpos, el movimiento de los fluidos, la expansión de los gases, las fuerzas electromagnéticas, el crecimiento de las plantas y animales, el esparcimiento de las epidemias, la caracterización de los grupos humanos,etc. Así nacen la Aritmética, el Álgebra, la Geometría, la Trigonometría, el Cálculo diferencial e integral, las Ecuaciones Diferenciales, la Estadística, la Probabilidad y otras ramas de la Matemática. La Geometría estudia propiedades medibles de las figuras (distancias, áreas, ángulos, etc.), mientras que la Topología estudia propiedades que permanecen inalteradas al deformar una figura de manera continua, sin romper ni pegar sus partes.

En relación a la naturaleza de la Matemática, un punto de vista la considera como un cuerpo de conocimientos relacionado con hechos y procedimientos, que tratan con cantidades y magnitudes y la forma y relaciones entre ellas. Este punto de vista hace trivial a la Matemática, ya que la reduce a procesos rutinarios, y no contribuye al desarrollo del pensamiento matemático.

En opinión de G.Polya[1], ”para los estudiantes la Matemática es un conjunto de reglas rígidas, algunas de las cuales debe de aprender de memoria antes de los exámenes, y todo lo cual después debe olvidar”. Este punto de vista está muy arraigado en los estudiantes, debido a la práctica pedagógica tradicional de las matemáticas en el bachillerato, y también en muchos cursos de la educación superior.

El punto de vista moderno considera a la Matemática, como la ciencia que identifica y analiza patrones o estructuras (conjunto de reglas que determinan el comportamiento de un objeto) abstractos ,estrechamente relacionados con las ciencias (patrones de movimiento, patrones de forma, patrones numéricos, patrones de comportamiento, etc), con el propósito de generar modelos, que expliquen y predigan los fenómenos naturales, y los eventos sociales.

Para de Bono[5], ”cuando el movimiento desde un estado presente al siguiente, ocurre con una probabilidad superior a la del azar, entonces se dice que está presente un patrón”.

Estos patrones pueden ser reales, imaginados, de razonamiento, visuales o mentales, estáticos o dinámicos, cualitativos o cuantitativos, de interés utilitario o de carácter recreativo. El referente de estudio de estos patrones, puede ser el mundo que nos rodea, o una reflexión pura de la mente del individuo.

Los tipos de patrones que interesan a los matemáticos para su estudio, son patrones de formas, patrones de números, patrones de tiempo y patrones de patrones. Por ejemplo: ¿cuál es la distribución más eficiente, para empacar esferas de radio constante? ¿Cuál es el patrón o la regularidad que describe la distribución de los números primos? ¿Cómo se sabe si un patrón que describe una relación entre entidades matemáticas, en ciertas instancias posibles es una descripción general de la relación? ¿Es posible encontrar un patrón único, que relacione la caída de una pluma, con la de una piedra, con la del movimiento de la luna alrededor de la tierra, y la de la tierra y los planetas alrededor del sol?

Para Nickerson R.[16], el corazón de la matemática es la búsqueda de la regularidad, y de la estructura del patrón.

De acuerdo a esta definición, la matemática identifica y analiza patrones abstractos: patrones numéricos (aritmética y teoría de números); patrones de figuras (geometría); patrones de movimiento (cálculo); patrones de razonamiento (lógica); patrones de posibilidades (teoría de la probabilidad); patrones de cercanía y posición (topología).

Schoenfeld[2], afirma que un aspecto importante en la caracterización de la naturaleza de las matemáticas es pensarla como la ciencia de los patrones o las regularidades. Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea. "El proceso de "hacer" matemáticas es más que cálculos y deducciones, ya que involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas y la estimación de resultados"[2].

Para Schoenfeld [2], "las creencias de los estudiantes, condicionan muchos aspectos relacionados con el aprendizaje de la Matemática. Por ejemplo, determinan en el estudiante cuándo considera que debe enfocarse en conocimientos formales, y cuándo no. También determina la forma, en que tratan de aprender matemática, memorizando o no. Es decir: los estudiantes pueden creer que la Matemática es solamente una serie de reglas, que simplemente van a memorizar, o pueden creer que la Matemática es elaboración de conceptos, establecimiento de relaciones, y patrones; en este caso, entonces, probablemente van a tratar de comprenderla pues creen que tal comprensión les va a ser útil".

Devlin[3] selecciona seis temas generales para caracterizar a las Matemáticas:

1. Patrones numéricos, que implican el reconocimiento de propiedades de colecciones de números.
2. Patrones de razonamiento y comunicación, que incluyen procesos de argumentación y prueba.
3. Patrones de movimiento y cambio, donde las matemáticas proveen los objetos (números, puntos, líneas, ecuaciones, gráficas, etc.), para estudiar fenómenos, que cambian con el tiempo y la posición.
4. Patrones entre figuras o formas geométricas, que permiten identificar y examinar propiedades de colecciones de esas figuras.
5. Patrones de simetría y regularidad, que permiten capturar relaciones profundas o abstractas de las figuras u objetos.
6. Patrones de posición, donde interesa analizar y describir patrones de acuerdo a su posición, y no tanto bajo la consideración de sus propiedades geométricas.

Así, un aspecto esencial durante la interacción con los problemas o contenidos matemáticos, es que los estudiantes busquen, representen y describan cambios o formas de variación, (incluyendo invariantes) entre los objetos o atributos asociados con la actividad o problema, que los lleven a la identificación de patrones, conjeturas (suposiciones) o relaciones.

Las herramientas que utiliza la matemática son: la abstracción, la representación simbólica, la manipulación simbólica, el pensamiento lógico, y la prueba matemática.

La abstracción (del latín *abstrahere*, "alejar, sustraer, separar") es una operación mental, destinada a aislar conceptualmente una propiedad concreta de un objeto, y reflexionar mentalmente sobre esta, ignorando otras propiedades del objeto en cuestión.

Por ejemplo, la idea (o concepto) de mesa procede del proceso de comparar diversos objetos muebles, que comparten entre sí una característica común, que se puede "abstraer" para identificar el concepto. La idea de mesa no proviene de su forma geométrica (cuadrada, redonda, rectangular) de la naturaleza de material con que se construye(madera, mármol, metal), del color con que se pinta (verde, amarilla o roja), del número de patas(tres, cuatro, etc.) sino que se abstrae de estos objetos, su color, su forma, el material, el número de patas, del cual están hechas, y se identifica la mesa por la **función que realiza.** Este concepto procede del proceso mental de abstracción.

Un símbolo es la representación sensorial (visual) de una idea, que guarda un vínculo convencional y arbitrario con su objeto.

La simbología utiliza un conjunto de símbolos que identifican a los diferentes elementos de una disciplina del conocimiento. La matemática, la electricidad, la química y otras ciencias, tienen su propia simbología.

Quien conoce la simbología de una especialidad, puede **expresarse** mediante los símbolos, e interpretar diagramas o esquemas, que apelen a los símbolos, **en lugar de las palabras.**

Algunos de los símbolos que utiliza la matemática son: $\pm$, $\times$, $\neq$, $>$, $\cong$, $\cap$, $\in$, $\div$

El entrenamiento en el uso de las herramientas que utiliza la Matemática, no genera necesariamente la habilidad de saber pensar matemáticamente, al igual que la destreza en el uso de las herramientas de la carpintería, no hace a la persona un buen carpintero.

El pensamiento matemático consiste en la **sistematización y contextualización del conocimiento matemático.**

Según Schoenfeld[2] la habilidad de pensar matemáticamente permite:

a. Valorar en una situación problemática la posibilidad de matematización (utilizar modelos matemáticos), para resolver la situación.

b. Desarrollar competencias en el uso de las herramientas básicas del oficio del matemático, para utilizarlas, con el propósito de entender la naturaleza de la estructura de la situación que se analiza, o sea darle un sentido matemático.

c. Desarrollar estrategias de solución, para los problemas presentes.

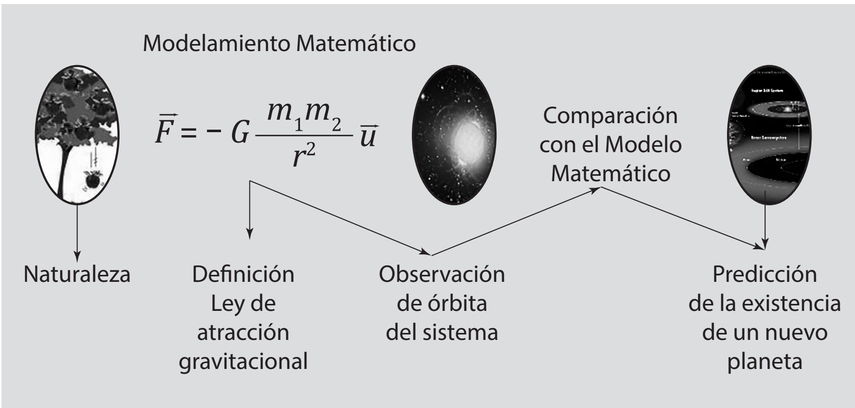
En el mundo moderno, de acelerados cambios tecnológicos, poseer habilidades de pensamiento matemático, permite a los ingenieros adaptarse exitosamente a los problemas que se presentan en el ejercicio de su profesión.

Además, la descripción cuantitativa de la naturaleza supone la elaboración de un modelo matemático, y de ahí la importancia de la matemática para la Ingeniería.

El ingeniero debe resolver problemas mediante la utilización de modelos matemáticos.

La figura 1 muestra el esquema operativo de la Matemática, para describir y modelar la naturaleza.

Figura 1. Proceso de modelación matemática, y fenómenos naturales



Fuente: elaboración propia.

1.2 Naturaleza de la lógica

1.2.1 Definición

Se puede definir a la lógica como la ciencia que estudia las argumentaciones. Un argumento es una lista de proposiciones o enunciados, en los cuales de unas proposiciones definidas como premisas, se deduce otra proposición definida como conclusión.

1.2.2 Clases de Lógica

Se conocen dos clases de Lógica: la Lógica del sentido común o informal, y la Lógica científica.

La lógica del sentido común, o lógica informal, estudia los argumentos naturales, y se dedica principalmente a **diferenciar entre las formas correctas e incorrectas, en que se desarrolla el lenguaje y el pensamiento cotidiano**, en los procesos que se utilizan para obtener conclusiones a partir de información dada.

La lógica del sentido común es un producto de la experiencia del ser humano y tiene como propósito convencer a un interlocutor.

La lógica científica o formal, se dedica al estudio de la inferencia, mediante la construcción de lenguajes formales, sistemas deductivos y semánticas formales.

La lógica Matemática forma parte de la lógica formal. El objeto de la Lógica Matemática es demostrar, proposiciones de naturaleza matemática (prueba matemática).

1.3 Lógica del sentido común

1.3.1 Argumentos

Un argumento es un grupo de proposiciones o enunciados, de los cuales la proposición –denominada conclusión–, pretende derivarse o seguirse de las otras denominadas premisas.

Un ejemplo de un argumento en la lógica del sentido común, puede ser:

- Llueve torrencialmente.
- Si usted no se protege con un paraguas, se mojará totalmente.
- Por lo tanto, agarre el paraguas.

En este argumento la primera proposición es la hipótesis, la segunda es un razonamiento de naturaleza condicional y la tercera es la conclusión.

En la presentación de un argumento, su conclusión puede ir antes o después de las premisas, o en medio de ellas.

La presencia de términos especiales, que funcionan como indicadores de premisas o de conclusión, ayudan a identificar y a distinguir, las premisas y la conclusión de un argumento.

En un argumento, la conclusión se puede identificar por algunas palabras o expresiones que aparecen en la oración u oraciones que expresan el argumento.

Se presenta una lista parcial de estas expresiones:

> Por lo tanto; por estas razones; de ahí que; se sigue que; así; se puede inferir que; correspondientemente; concluyo que; en consecuencia; lo cual muestra que; consecuentemente; lo cual significa que; lo cual prueba que; lo cual implica que; como resultado; lo cual permite inferir que; por esta razón; lo cual apunta, hacia la conclusión de que.

Otras palabras o frases sirven para identificar, en la lectura de un argumento, las premisas del mismo.

Una lista parcial de estas expresiones es:

> Puesto que; como es indicado por; dado que; la razón es que; a causa de; por las siguientes razones; porque; se puede inferir de; pues; se puede derivar de; se sigue de; se puede deducir de; como muestra; en vista de que.

1.3.2 Análisis de los argumentos

Al analizar un argumento, con frecuencia es útil distinguir por separado las premisas, que se pueden agrupar en una oración simple, y la conclusión, que se expresa en una oración declarativa y se puede entender sin importar el contexto.

Analizar el siguiente argumento:

> Pero el precio de los combustibles fósiles y nucleares es sólo una pequeña fracción de su costo total. La sociedad paga el otro costo del deterioro a la salud y a la propiedad, de los contaminantes esparcidos en los océanos, en los ríos y playas, de la lluvia ácida, de los peces muertos o envenenados, y de la miseria humana.

Premisa: La sociedad paga el otro costo del deterioro a la salud y a la propiedad, de los contaminantes esparcidos en los océanos y en los ríos y playas, de la lluvia ácida, de los peces muertos o envenenados y de la miseria humana.

Conclusión: Pero el precio de los combustibles fósiles y nucleares es sólo una pequeña fracción de su costo total.

Según el escritor colombiano Héctor Abad Facciolince: “Un argumento incorrecto de la lógica del sentido común, muy utilizada por el colombiano muy dado a anidar sentimientos de odio, se puso en evidencia en las redes sociales, con ocasión del asesinato de la niña Yuliana Samboní, en el año de 2016 por Rafael Noguera, y es el siguiente: Rafael Uribe Noguera (el sindicado del crimen de la niña Yuliana) tiene un hermano, Francisco, que trabajaba en Brigard & Urrutia; uno de los Urrutia de esta firma fue embajador de Colombia en Estados Unidos durante el gobierno Santos. Con estas premisas, la conclusión "natural" es que el gobierno está implicado en la violación y el asesinato de Yuliana".

En muchas ocasiones el uso de las reglas de inferencia y de los operadores lógicos, que son válidos para la vida cotidiana, no lo son para el razonamiento científico, y por tanto para el aprendizaje de la matemática**.**

El análisis de las formas relacionales, que se utilizan en la vida cotidiana, y se expresan a través del lenguaje natural, es el objeto de la lógica cotidiana o lógica del sentido común. Todos los lenguajes naturales usan operadores lógicos, es decir, formas de expresar conjunción, disyunción, condicional y negación, que se corresponden con las palabras "y", "o", "si… entonces" y "no".

Por ejemplo, cuando la mamá le dice al niño "si no comes, no juegas en internet", el niño inmediatamente entiende que si come podrá jugar en internet; sin embargo, en la lógica formal, este tipo de expresiones no tiene consistencia, en términos de las leyes de inferencia válidas para el razonamiento matemático. En términos generales, la gente no razona de acuerdo a las reglas de la lógica formal.

1.3.3 Clases de argumentos

Los argumentos pueden ser deductivos o inductivos.

En el argumento **deductivo** sus premisas proveen razones o fundamentos concluyentes, para la conclusión.

Si el argumento deductivo es válido y las premisas son verdaderas, la conclusión debe ser verdadera de una manera **concluyente.**

El argumento será inválido cuando, con premisas verdaderas, la conclusión es falsa.

En el argumento **inductivo** las premisas proporcionan cierto apoyo, a la conclusión.

La conclusión pretende generalizar una situación basándose en varios hechos. Por ejemplo: En Diciembre de 2015, llovió en Cúcuta; En Diciembre de 2016, también llovió en Cúcuta; En Diciembre de 2017, volvió a llover en Cúcuta; Por lo tanto, todos los diciembres llueve en Cúcuta.

Los argumentos inductivos se evalúan como buenos, regulares o malos, de acuerdo con el nivel de soporte, que sus premisas proporcionan a la verdad de la conclusión.

La naturaleza de la relación entre las premisas y la conclusión del argumento, es lo que diferencia a los argumentos inductivos de los deductivos.

En un argumento deductivo se afirma que la verdad de la conclusión se sigue de las premisas, de una manera ineludible, e independientemente de cualquier otro hecho, que pueda suceder en el mundo.

El silogismo es un **argumento deductivo** que contiene dos premisas y una conclusión. Si una de las premisas es una proposición disyuntiva, el silogismo se denomina disyuntivo.

Ejemplo

María puede estar con su madre o con su doctor.
María no está con el doctor.
Entonces, María está con su madre.

En un argumento inductivo se deduce la probabilidad de la verdad, de la conclusión, que se deriva de sus premisas. Esta probabilidad es cuestión de grados, y depende de otras cosas, que pueden o no suceder.

En el argumento inductivo, la conexión entre las premisas y la conclusión es la probabilidad.

Se presentan a continuación, ejemplos de argumentos inductivos y deductivos:

Argumento deductivo

Todos los humanos sienten hambre.
Sócrates es humano.
Entonces, Sócrates siente hambre...

Este es un argumento deductivo. Independientemente de cualquier otro hecho o verdad, la conclusión (Sócrates siente hambre) siempre se cumple, y el argumento es válido.

Por otro lado, en un **argumento inductivo** se determina el grado de probabilidad de certeza de la conclusión, dependiendo de la intensidad de las premisas.

Los argumentos inductivos pueden ser de naturaleza analógica, o estadística.

De acuerdo a experiencias pasadas, el argumento analógico hace una predicción, utilizando una analogía.

Ejemplo

Todos los días durante la última semana, Leonardo Martínez gasta 30 minutos en viajar desde su casa hasta la Universidad; Leonardo Martínez tomó el bus a las 7:30 am; entonces Leonardo llegará a la Universidad a las 8am.

La conclusión probablemente será cierta, pero su fuerza será mayor si se hace en base a la experiencia, no de una semana sino de un mes, y será aún más fuerte si se establecen otras condiciones, que afectan la movilidad en la ciudad.

Las generalizaciones estadísticas son inferencias inductivas, y afirman que si un **cierto porcentaje de una parte de un grupo** presenta una característica, o propiedad específica, **entonces se puede concluir que el mismo porcentaje de todo el grupo** tiene la misma propiedad.

Ejemplo

El 65% de los ciudadanos adultos de USA encuestados aprueba el trabajo que Donald Trump está haciendo como su presidente, entonces el 65% de todos los ciudadanos adultos de USA, aprueban el trabajo que Donald Trump está haciendo como su presidente.

Otro argumento de naturaleza inductiva es el siguiente:

La mayoría de los colombianos son fanáticos del fútbol. Francisco López es colombiano. Por lo tanto, es probable que Francisco López sea fanático del fútbol.

Si son verdaderas la primera y la segunda premisa, entonces es probable que la conclusión sea verdadera.

Si se añade una nueva premisa, por ejemplo, Francisco López es asiduo oyente del programa radial "Hablemos de fútbol", entonces la conclusión gana más fuerza en su credibilidad.

1.3.4 Verdad y validez

Las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas.

El concepto de validez o invalidez se aplica a argumentos deductivos.

El argumento es válido si la conclusión se obtiene mediante la aplicación de las reglas de inferencia, y las leyes de equivalencia de la Lógica. Si las premisas son verdaderas, y el argumento es válido, inexorablemente la conclusión será verdadera.

La verdad o falsedad de las premisas y la conclusión están relacionadas, de una manera compleja, con la validez o la invalidez del argumento.

Algunos argumentos válidos tienen proposiciones verdaderas. Otros argumentos, con todas las proposiciones verdaderas, son inválidos.

Existen argumentos válidos o inválidos, con todas las proposiciones falsas.

Un argumento que conduce a contradicciones se denomina paradoja.

Un argumento que parece ser correcto, pero no lo es, se denomina falacia.

A continuación se presentan ejemplos, de argumentos válidos e inválidos:

Ejemplo 1

Argumento válido con proposiciones verdaderas:
Premisas
Todas las aves tienen alas.
Las criaturas que tienen alas vuelan.

Conclusión: Entonces, todas las aves vuelan.

Argumento válido con proposiciones falsas:
Premisas
Todos los perros tienen alas.
Todas las criaturas que tienen alas, son herbívoros.

Conclusión: Entonces, todos los perros son herbívoros.

Argumento válido con proposición falsa y conclusión falsa[7]:
Premisas
Este sombrero es grande.
Los propietarios de sombreros grandes tienen la cabeza grande.
Los que tienen la cabeza grande tienen un gran cerebro.
Los que tienen un gran cerebro son muy intelectuales.

Conclusión: el propietario de este sombrero es muy intelectual.

Argumento inválido con conclusión verdadera:
Premisas
Todos los herbívoros tienen alas.
Todas las vacas tienen alas.

Conclusión: Por lo tanto, todas las vacas son herbívoros.

Argumento inválido con premisas y conclusión falsas:
Premisas
Todos los perros tienen alas
Todas las vacas tienen alas.

Conclusión: Por lo tanto, todos los perros son vacas.

1.3.5 Falacias

Un argumento que parece correcto, pero que en realidad no lo es, se denomina falacia. La falacia es un argumento inválido.

La ambigüedad del lenguaje que utilizan, ciertos argumentos dan origen a las falacias por esta causa, por ejemplo:

"La muerte es el fin (término o consumación) de la vida, por lo tanto, toda vida debe tener como fin (objetivo o finalidad) la muerte".

Otras falacias suponen lo que se quiere justificar. La trampa en esta falacia es ocultar en una de las premisas la conclusión que se pretende derivar. Un ejemplo de esta falacia es: "El libro del mormón es infalible, pues fue escrito por Joseph Smith, profeta de Dios". A esta falacia, en donde se supone lo que se quiere justificar, se le conoce como falacia de petición de principio. Se supone que Joseph Smith fue el profeta de Dios, para justificar la infalibilidad del libro del mormón.

Algunas falacias se originan en causa falsa, *(Non causa pro causa*) y consisten en establecer como causa de un hecho, aquello que lo precede inmediatamente en el tiempo. Un ejemplo es: el lunes me despidieron del trabajo, el martes tuve un accidente de tránsito y mi acompañante quedó herido, el miércoles murió mi amigo. Entonces mi amigo murió porque me despidieron del trabajo.

Se comete falacia por afirmación del consecuente, cuando se razona de la siguiente manera:

Si A, entonces B.
B es cierto.
Por lo tanto, A.

Un ejemplo de esta falacia es el siguiente:

La gente que trabaja tiene dinero.
Yo tengo dinero.
Por lo tanto, soy trabajador.

La primera premisa solo da información de lo que pasará si se trabaja, pero no dice nada sobre qué sucederá si se tiene dinero. Uno puede no trabajar, pero puede tener dinero obtenido por otro medio que no sea el trabajo. Otra manera de evidenciar la falacia es utilizando la tabla de verdad del condicional.

Cuando la afirmación se sustenta en muy pocas pruebas, se conoce como falacia por generalización apresurada. Por ejemplo: Todos los islámicos son terroristas, porque el grupo Al Qaeda, que es un grupo islámico, es terrorista.

Se conoce como falacia del francotirador, a una falacia lógica, donde la información se manipula o maquilla, para justificar una conclusión que interesa al argumentador. El nombre viene de un tirador, que disparó al azar varios tiros a la pared de un granero, y después pintó una diana haciendo coincidir cada tiro, con el centro de la diana, para ufanarse de ser un gran francotirador...

La falacia de argumento *ad hominem* consiste en contestar un argumento, atacando o descalificando a la persona que realiza el argumento, más que a la esencia del argumento. Por ejemplo: Dices que este hombre es inocente, pero no es cierto, porque también eres un criminal.

Se comete falacia de argumento *ad ignorantiam*, cuando se sostiene que la verdad o no de una proposición, depende que exista evidencia o prueba de lo contrario, o bien alegando la incapacidad o la negativa de un oponente a presentar pruebas convincentes de lo contrario. Quienes argumentan de esta manera no basan su argumento en el conocimiento, sino en la ignorancia acerca del tema que se discute. Por ejemplo: Existe vida extraterrestre inteligente, porque nadie ha probado que no existe.

La falacia *ad populum* es un argumento inválido, en el cual se concluye que una proposición es verdadera, porque muchas personas lo convalidan. Si la mayoría de personas creen que algo es verdadero, entonces será así: Álvaro Uribe Vélez es inocente de las muertes de campesinos colombianos, en los denominados falsos positivos, porque la mitad de los colombianos lo creen así.

La falacia del hombre de paja consiste en ridiculizar el argumento de una persona, tergiversando, exagerando o alterando el significado de las palabras del argumento, para hacer creer, que este no es válido. Su nombre se refiere, a que el argumentador no controvierte los argumentos contrarios, sino una imitación falsa y vulnerable de los mismos, con el fin de hacer creer que se pueden vencer con facilidad. Por ejemplo, cuando alguien afirma, que es malo que los adolescentes vayan solos de vacaciones, el argumentador falaz replica diciendo: Obligar a nuestros hijos a quedarse encerrados en casa, es perjudicial para su desarrollo emocional. La falacia radica, en que en el argumento inicial no se propone que los hijos se queden en casa, sino que no salgan solos.

La falacia *ad verecundiam,* llamada también "argumento de autoridad", determina la validez o falsedad de una proposición, a partir de la opinión de un experto o alguna autoridad (real o pretendida) al respecto. Ejemplo: Cuando un ídolo deportivo recomienda en televisión un aparato electrodoméstico, se comete esta falacia. Igual situación ocurre cuando se utiliza como argumento para validar o descalificar una afirmación, que lo dice alguien que ganó un premio Nobel, en otro campo del conocimiento.

La falacia *ad baculum* (bastón en latín), es una falacia que establece la verdad de una premisa a partir de la amenaza de violencia, coacción o amenaza a quien se habla. Por ejemplo: Debes estudiar, porque si no, te quitan la beca.

1.4 Lógica científica

1.4.1 Naturaleza

La Lógica científica o formal se dedica a elaborar proposiciones verdaderas, utilizando el sistema deductivo, las reglas de inferencia y un lenguaje simbólico. La lógica científica estudia las argumentaciones válidas, que se aplican en el estudio de las ciencias.

La argumentación es un proceso mental para obtener una conclusión de unas proposiciones iniciales (premisas), mediante las reglas de inferencia.

Se construye un argumento cuando se justifica una proposición en base a otra, de la cual se deriva, mediante una regla de inferencia llamada *modus ponens*.

Si la conclusión se deriva lógicamente de las premisas, o sea que se obtiene mediante la aplicación de las reglas de inferencia y las leyes de equivalencia lógica a las premisas, se dice que el argumento es válido, y si sus premisas son verdaderas, entonces inexorablemente, la conclusión será verdadera.

A la Lógica le interesa la forma (estructura) de las proposiciones que hacen parte del argumento, y no la verdad o falsedad de las proposiciones. La forma se deriva de las reglas de inferencia.

Por ejemplo, se consideran los siguientes dos argumentos:

a. Todos los hombres sienten hambre.
Sócrates es un hombre.
Por lo tanto, Sócrates siente hambre.

b. A todos los perros les gusta la carne.
Lucas es un perro.
por lo tanto, a Lucas le gusta la carne.

Ambos argumentos tiene la misma forma o estructura:

- Todos los A tienen una cualidad (propiedad) B.
- S es un A.
- Por lo tanto, S tiene la cualidad (propiedad) B.

A la Lógica no le interesa la verdad o falsedad de las premisas, y sus conclusiones, lo que le interesa es si de las premisas se puede derivar lógicamente la conclusión.

En un nivel elemental la Lógica provee reglas y técnicas para establecer, si un argumento dado es o no válido, dentro de un sistema formal dado. Un argumento será correcto, dependiendo de la **forma o estructura** de las proposiciones, que lo componen.

El argumento puede ser correcto (válido), y la conclusión puede ser verdadera o falsa, dependiendo de la verdad o falsedad de las premisas.

Uno de los propósitos de la Lógica es formalizar y catalogar los métodos de razonamiento. Si el razonamiento es de naturaleza matemática, y por supuesto utiliza técnicas matemáticas, se habla entonces de la Lógica matemática.

El propósito fundamental de la Lógica matemática es la comprensión adecuada y precisa, de la noción de prueba matemática

La forma lógica de una proposición es la representación de su **contenido y sintaxis**, usando las herramientas de la Lógica, en particular el lenguaje y métodos del cálculo proposicional, y el cálculo de predicados.

1.4.2 Clases de lógica científica

La Lógica formal o científica es una ciencia deductiva y se divide en: Lógica de proposiciones y Lógica de predicados.

En la Lógica de proposiciones, las proposiciones, enunciados, u oraciones (p,q,r...) forman la única categoría semántica básica. Una proposición es una frase, en lenguaje descriptivo, de la cual se puede afirmar de una manera inequívoca que es verdadera (V) o falsa (F). A la Lógica no le interesa, el lenguaje emotivo, interrogativo o imperativo.

Las proposiciones pueden ser simples, p, q, r..., y no se analizan, y otras pueden ser compuestas y se forman por proposiciones simples y los siguientes conectores: y (conjunción), o (disyunción), no (negación), si p entonces q (condicional), p es equivalente a q (bicondicional).

A la Lógica proposicional le interesa conocer la validez de los argumentos. Sin embargo, no todo argumento se puede estudiar, desde el punto de vista de la lógica proposicional.

En el lenguaje natural existen afirmaciones, que no se pueden analizar usando la lógica proposicional. Por ejemplo, la frase: "El número $x+1$, es un entero impar". Esta frase no es una proposición, pues no posee un valor de verdad, sin embargo, cuando x toma un valor particular, se obtiene una proposición. Para estos casos, el argumento se analiza utilizando la Lógica de predicados.

En la Lógica de predicados las proposiciones simples se descomponen en elementos más simples, y así se forma una segunda categoría semántica: la categoría de los nombres. Los nombres aparecen en las proposiciones unidos a los predicados, que expresan propiedades y relaciones y funcionan como verbos.

1.4.3 Método de la lógica científica

La Lógica es una teoría deductiva que se fundamenta en dos principios: definiciones y demostraciones.

Las condiciones que debe cumplir una teoría deductiva para su desarrollo son las siguientes:

a. Enunciar explícitamente los términos primeros o primitivos, (no definidos) a partir de los que se definen los demás términos de la teoría.
b. Enunciar explícitamente las relaciones primitivas (no definidas), que conforman la base de la teoría.

   En la Geometría euclidiana se tienen como relaciones no definidas: punto en recta, recta en plano. En la teoría de conjuntos, los términos no definidos son: elemento, conjunto y la relación primitiva es la de pertenencia de un elemento a un conjunto.

c. Enunciar explícitamente las proposiciones primeras o primitivas, que se utilizan para demostrar otras proposiciones de la teoría. Estas proposiciones primeras se denominan axiomas, y relacionan entre sí los términos primitivos y las relaciones primitivas.

   Para la Geometría euclidiana son axiomas:

   1. Dos puntos distintos determinan una recta única.
   2. Si un punto está entre otros dos, los tres puntos pertenecen a la misma recta.

   Para la teoría de conjuntos es un axioma, la siguiente proposición: Si el conjunto A es igual al conjunto B, entonces todo elemento que pertenece a A, es equivalente al elemento que pertenece a B.

c. Que las relaciones enunciadas entre los términos sean específicamente relaciones lógicas, permaneciendo independientes del sentido concreto o interpretación, que pueda darse a los términos.

d. Que en las demostraciones solo intervengan dichas relaciones. La lógica analiza proposiciones en ciertos lenguajes, por ejemplo el español. En el caso de la Lógica matemática, se utiliza un lenguaje simbólico, para comunicar un significado único de los conceptos y temas de la forma más inequívoca posible.

1.4.4 Axiomas

Axioma es una proposición primitiva que se considera verdadera. En la construcción de una teoría axiomática (deductiva), se parte de un conjunto de axiomas, seleccionados de tal manera, que dicho conjunto ha de ser: compatible, suficiente e independiente.

La compatibilidad requiere que de dos axiomas no se puedan derivar resultados contradictorios.

La suficiencia requiere que toda proposición verdadera, se pueda deducir dentro del sistema.

La independencia implica que ningún axioma se puede deducir de otros.

Estableciendo el sistema de axiomas, que necesariamente no tienen que ser evidentes, o relacionados con la naturaleza, se comienza a construir la teoría, enunciando y demostrando los teoremas.

Un ejemplo de un axioma de la Lógica proposicional es: existe una clase C de proposiciones, tal que a cada proposición de C, se le puede asignar uno, y solo uno de los términos verdadero o falso.

La selección de los axiomas es una acción creativa, más que un proceso lógico. Se pueden elegir los axiomas de tal manera que reflejen las propiedades de la naturaleza, o de un mundo imaginario.

En el primer caso de la experiencia de las personas al trazar rectas sobre un papel, se puede proponer el siguiente axioma: "Hay una recta y solo una, que pasa por 2 puntos distintos". Otro axioma que se puede proponer es "La suma de los valores de los ángulos interiores de un triángulo, es de 180°". También se pueden proponer axiomas, que no provengan de la naturaleza, e investigar una nueva teoría matemática, un ejemplo sería postular el siguiente axioma: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo, es inferior a 180°".

En Aritmética, los axiomas de Peano no se ocupan del significado de "número natural", sino que lo suponen, y pretenden encontrar un sistema simple de axiomas, que caractericen los números naturales, y permitan deducir a partir de estos, todas las propiedades de los números naturales, utilizando las reglas de la lógica.

Los cinco axiomas de Peano son:

a. El 1 es un número natural.

b. Si n es un número natural, entonces el sucesor de n también es un número natural.

c. El 1 no es el sucesor de ningún número natural.

d. Si hay dos números naturales n y m con el mismo sucesor, entonces n y m son el mismo número natural.

e. Si el 1 pertenece a un conjunto, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto. Este es el axioma de inducción y captura la idea de inducción matemática.

1.5 Lógica proposicional

1.5.1 Definiciones

Una definición de una idea, concepto, u objeto, es una proposición (o conjunto de proposiciones) que explica(n), de manera inequívoca y precisa, la naturaleza o significado de una idea, concepto, objeto, término o dicción.

La definición puede expresar las propiedades o cualidades (naturaleza) del término, idea, concepto, u objeto que se define, o puede expresar una equivalencia entre un término y su significado.

En Matemática la definición debe indicar, el límite que separa el objeto matemático definido, de los demás.

Se considera definición real a la que representa la naturaleza (esencia) de aquello que se define, y definición nominal a la que expresa el significado o la equivalencia de un término.

La definición debe cumplir con las siguientes reglas:

1. No se debe utilizar en la definición, términos poco difundidos o rebuscados, para que esta sea clara.
2. Lo definido no debe entrar en la definición.
3. La definición debe concretarse a lo definido.
4. La definición no debe ser negativa.
5. La definición debe ser breve, concisa, y lo más exacta posible. Para impedir el círculo vicioso de definir un término, en función de otras palabras, cuyo significado se expresa en términos de otros nuevos, en Matemáticas y en Lógica, se toma un pequeño número de palabras sin definir (términos primitivos), y se definen otras palabras, en función de estos términos primitivos.

Al establecer una definición en base a palabras no definidas, se requiere que esta tenga sentido y que no sea contradictoria.

En geometría se suponen como palabras sin definir: punto, recta, plano, sin importar si se tiene o no, una imagen intuitiva de un punto, de una recta o un plano. Con estas palabras se puede definir:

Segmento rectilíneo: porción de recta, contenida entre dos puntos de una recta.

Cuadrado: un polígono de cuatro lados es un cuadrado, si y solo si, sus lados son iguales, y sus ángulos son rectos. El término “si” significa que se incluyen todos los casos, a que se refiere la condición que sigue, y el “solo si”, refleja que se excluyen todos los demás.

A continuación se presentan algunos ejemplos de definiciones:

Definiciones reales

Árbol: vegetal que posee tronco, ramas, hojas que se caen o son perennes, y su tronco puede tener distintos diámetros.

- *Lápiz*: instrumento de escritura, formado por una barra de grafito, envuelta en madera.
- *Libro*: conjunto de más de 25 hojas de papel, pergamino, vitela, etc., manuscritas o impresas, ordenadas en el orden que se debe leer, unidas por uno de sus lados y normalmente encuadernadas, formando un solo volumen.
- *Ingeniería*: conjunto de conocimientos, que permiten resolver problemas relacionados con la transformación de la naturaleza, utilizando el ingenio, los modelos matemáticos, el método científico y la experiencia, para mejorar la cálidad de vida del ser humano.
- *Ciencia*: rama del saber humano constituida por el conjunto de conocimientos objetivos y verificables, sobre una materia determinada, que se obtienen mediante la observación y la experimentación, la explicación de sus principios y causas, y la formulación y verificación de hipótesis, y se caracteriza además, por la utilización de una metodología adecuada para el objeto de estudio, y la sistematización de los conocimientos.

Definiciones nominales

- *Furgoneta*: camión pequeño con los lados bajos.
- *Cloruro*: compuesto químico de cloro y otra sustancia.
- *Motocicleta*: vehículo de dos ruedas, impulsado por un motor, que acciona la rueda trasera.

Definiciones matemáticas

- *Número primo*: número natural mayor que uno, y que tiene exactamente dos divisores el 1, y él mismo.
- *Triángulo*: figura geométrica de tres lados, y tres ángulos.

1.5.2 Proposiciones

Una vez se tiene un vocabulario de palabras técnicas definidas y no definidas, se pueden formar frases. A estas frases se les puede aplicar un juicio, opinión, dictamen o parecer. Interesan aquellas frases, a las que se les puede aplicar de una manera inequívoca un juicio, cuyo resultado sea uno y sólo uno de los términos: verdadero o falso.

- Juicios inequívocos: Los 4 lados de un cuadrado son iguales. El ángulo recto mide 90°.
- Juicios no inequívocos: Hace calor.

Una proposición es una frase que expresa un juicio, al que se le puede aplicar con toda exactitud uno y solo uno de los términos verdadero o falso.

Se conocen dos clases de proposiciones: simples y compuestas.

Una proposición se denomina simple, cuando en ella no interviene ningún conector lógico o término de enlace (y, o, no, si... entonces..., si y solo sí).

Si se combina una o varias proposiciones simples mediante un conector de enlace, se forma una nueva proposición, denominada compuesta. Los conectores lógicos, "y", "o", "si... entonces…", "si y solo sí"; se utilizan para encadenar dos proposiciones, y formar una nueva proposición, en cambio el conector "no" se adiciona a una sola proposición, para generar la negación.

Las proposiciones en matemáticas se refieren a objetos matemáticos.

Se entiende por objetos matemáticos, entidades tales como: los números enteros, los números reales, los conjuntos, las funciones, las figuras geométricas, las funciones, etc.

La verdad de las proposiciones matemáticas se obtiene mediante una prueba matemática, a diferencia de las otras proposiciones en ciencias naturales, en las cuales la verdad o falsedad se obtiene mediante la observación, la experimentación o la medición.

Ejemplo 2

- Proposiciones simples: Hoy voy al teatro; mañana salgo de paseo; la matemática es una ciencia exacta; la lógica enseña a razonar.
- Proposiciones compuestas: Están conformadas por proposiciones simples, entrelazadas por conectores lógicos.

La tabla 1 muestra el símbolo, la denominación y el significado de cada uno de los conectores, que se usan en la lógica proposicional.

Tabla 1. Símbolos y significado de los conectores lógicos

Símbolo	Denominación	Significado
¬	Negación	No es el caso que; No es cierto que…
∧ , &	Conjunción	Ambas…, y
∨	Disyunción	Cualquiera…, o
→	Condicional	Si…, entonces…,
↔	Equivalencia	Si, y solamente si...

Proposiciones matemáticas: son expresiones que se refieren a entidades matemáticas, y pueden ser verdaderas o falsas.

Por ejemplo: cuatro es un número impar. Los números primos son infinitos.

1.5.3 Conjuntos

No existe una definición formal para el concepto de conjunto. La idea intuitiva de conjunto se relaciona con una colección de objetos definidos inequívocamente, y que se diferencian. Cuando se dice objetos definidos inequívocamente, significa que no puede existir ambigüedad. Por ejemplo, si tenemos que *E* es el conjunto de estudiantes de Ingeniería, no hay duda que los estudiantes de Administración de Empresas no están en el conjunto, mientras que los estudiantes de Ingeniería Electromecánica sí lo están.

Los seres individuales que componen al conjunto se denominan elementos.

Un conjunto se puede representar:

1. Por extensión: se escriben al interior de una llave, los nombres de los elementos del conjunto, por ejemplo: {a, e, i, o, u}.
2. Por comprensión: escribiendo al interior de una llave, una característica común de los elementos del conjunto. Por ejemplo: {las vocales del alfabeto}.

Dependiendo del número de elementos, un conjunto puede ser:

- Finito: el conjunto de los carros marca Chevrolet.
- Infinito: el conjunto formado por los números enteros positivos. Estos conjuntos no se pueden representar por extensión.

- Vacío: el conjunto que no tiene elementos, se denomina vacío o nulo, y se simboliza por la letra griega Φ.
- Universal: es aquel que alberga todos los elementos, de una cierta clase.

En la teoría formal de conjuntos, los términos conjunto y elemento son términos primitivos, y por lo tanto no se definen.

Ejemplo 3

$\{x \mid x-3= 0\}$ Es un conjunto de un solo elemento {3}. Esta entidad matemática es diferente del número 3.

{2, 4, 6, 8, 10, 12...}, es el conjunto infinito, de todos los enteros positivos pares.

{x (hombres) lx fue presidente de Colombia}. Esta expresión se lee como: "El conjunto de todos los hombres x ,que fueron presidentes de Colombia".

{x(triángulos) Ix es isósceles}. Es el conjunto de todos los triángulos isósceles.

En matemáticas, usualmente se omite especificar la naturaleza de los elementos del conjunto, ya que por el contexto se suele conocer la clase de objeto.

Esto supone la existencia de un conjunto universal, al que pertenece el elemento x, que abarca a todos los elementos de la misma naturaleza que x.

1.5.3.1 Representación de los conjuntos

Los conjuntos se pueden representar mediante:

1. Diagrama lineal:

   Se ubica un punto sobre una recta, por cada elemento del conjunto.

Figura 2. Diagrama lineal de un conjunto

2. Diagrama de Venn:

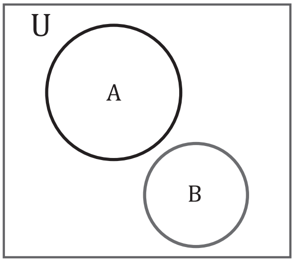
   Se sitúan en el área delimitada por una línea cerrada, un punto por cada uno de los elementos del conjunto. En un diagrama de Venn, un rectángulo representa el conjunto universal (U) que interesa, y dentro del rectángulo se dibujan los conjuntos que se estudian.

1.5.4.2 Subconjunto

Un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, si y solo sí, todo elemento de A es un elemento de B. También se dice que A está incluido en B.

Se utiliza la siguiente notación: A ∈ B

Figura 3. Diagrama de Venn, de dos conjuntos A y B



Un conjunto A es un subconjunto propio de B, si y solo si, A es un subconjunto de B, y al menos un elemento de B no es elemento de A.

También se dice, que "*A* está incluido propiamente en *B*". Se escribe $A \subseteq B$.

Por convenio, el conjunto nulo es subconjunto de todo conjunto, incluso de sí mismo, y es subconjunto propio de todo conjunto, excepto de sí mismo.

Ejemplo 4

En Matemáticas los números reales están conformados por los números racionales más números irracionales. (Revisar el apéndice, sobre cuerpo de números, al final del libro).

Asumiendo como conjunto universal el de los números reales, se pide determinar un conjunto equivalente expresado por extensión, para los siguientes conjuntos.

a. $\{x|x-3=0\}$
b. $\{x|x^2-5x+6=0\}$
c. $\{x|x^2+1=0\}$

Solución:

a. El conjunto {3}
b. El conjunto {2,3}
c. El conjunto nulo, ya que los números reales no incluyen los números complejos.

1.4.3.3 Correspondencia biunívoca

Dos conjuntos $A = \{a_1, a_2,...\}$ y $B= \{b_1, b_2,...\}$ están en correspondencia 1 a 1, o biunívoca, cuando existe un emparejamiento de las a y de las B, tal que a cada 'a' corresponde **una y sola una** 'b', y a cada 'b' corresponde **una y sola una** 'a'.

Ejemplo 5

Establecer una correspondencia 1 a 1, entre el conjunto de números {1, 2, 3,4,.................27} y las letras del alfabeto.

Solución:

Se pueden establecer muchas correspondencias, una de ellas podría ser:

1,2,3,4,5,6,7,8,..27

$a, b, c, d, e,$...z

Sugiera otra correspondencia.

1.5.4 Funciones proposicionales

1.5.4.1 Definiciones

1.5.4.1.1 Variable

Una variable es un símbolo, que se puede sustituir por cualquier elemento del conjunto universal.

Generalmente se representan las variables, por las últimas letras en minúscula del alfabeto, por ejemplo: x, y, z, etc.

1.5.4.1.2 Función proposicional

Una función proposicional es una expresión que contiene una variable y que al sustituir la variable por un elemento del conjunto universal se convierte en una proposición.

Sí la variable interviene más de una vez en la función proposicional, se debe sustituir por el mismo elemento del conjunto universal, tantas cuantas veces intervenga.

Se representa a la función proposicional con los símbolos p_x, q_x etc, en donde x es la variable implicada.

Existen funciones proposicionales de varias variables, cuyas variables se pueden referir a distintos conjuntos universales. Se simbolizan como p_{xy}, q_{xz}, cuando las variables son x,y, y x,z:

Ejemplo 6

Escribir una función proposicional de una variable, asumiendo como conjunto universal los números reales.

Solución:

Una solución puede ser la siguiente:

$$p_x\text{: } 4x^2 + 7x - 9 = 0$$

Ejemplo 7

Escribir una función proposicional de dos variables, asumiendo como conjunto universal los números reales.

Solución:

Una solución puede ser la siguiente:

$$p_{xy}\text{: } y^2x + x^2y + 10x - 6 = 0$$

1.5.5 Cuantificadores

1.5.5.1 Definición

Si una función proposicional tiene una propiedad, que la satisfacen todos los elementos del conjunto universal, se dice que para todos los x (elementos del conjunto universal), p_x es verdadera. Esta situación se representa en el lenguaje simbólico como: $\forall x p_x$ es verdadera.

Al cuantificador $\forall$ (la letra A invertida de la palabra *all*) se le conoce como cuantificador universal, y cuando se aplica a una variable se interpreta que para todos (*all*) los elementos del conjunto universal, se cumple la función proposicional que le sigue.

Existen situaciones en que al menos un elemento del conjunto universal cumple con una cierta propiedad de la función proposicional. Esta situación se simboliza como $\exists x p_x$.

Al cuantificador $\exists$ (la letra E, al revés, de la palabra *exist*), se le denomina cuantificador existencial, y cuando se aplica a una variable, se interpreta que existe (*Exist*), al menos un elemento del conjunto universal, para el cual se cumple la función proposicional que le sigue.

Ejemplo 8

Representar al conjunto de los números pares.

Solución:

Sólo puede ser definido por comprensión:

$p = \{x \in Z \mid x = 2k \text{ para algún } k \in Z\}$, Z= Conjunto de números enteros

$p = \{x \in Z | \exists k \in Z : x = 2k\}$.

1.5.5.2 Conjunto de verdad

Un elemento $x \in$ U, es un elemento del conjunto de verdad de una función proposicional p_x, si y solo si, al sustituir el elemento por x en p_x, la función se transforma en una proposición verdadera.

Se representan por P, Q, etc. a los conjuntos de verdad de p_x, q_x etc.

En ocasiones se utiliza para representar al conjunto de verdad de la función proposicional p_x: x^2=1 , la siguiente notación: $\{x|x^2\text{=1es verdadero}\}$.

1.5.5.2.1 Conjunto de verdad del cuantificador universal $\forall xp_x$

Se puede concluir de las definiciones anteriores que:

1. $\forall xp_x$ es verdadera, **si y solo s**í P (conjunto de verdad de p_x) **es el conjunto universal U**.
2. $\forall xp_x$ es falsa, **si y solo si, P no es el conjunto U**, o sea existe al menos un elemento de U que no pertenece a P.

1.5.5.2.2 Conjunto de verdad del cuantificador existencial

$\exists xp_x$, se lee como: existe un x, o para algún x, p_x es verdadera.

De la definición del cuantificador existencial se puede inferir que:

1. $\exists xp_x$ es verdadero si y solo si P **no es el conjunto vacío** ($\emptyset$)**.**
2. $\exists xp_x$ es falsa, si y solo si P **es el conjunto vacío** ($\emptyset$)**.**

1.5.5.3 Identidad y ecuación condicional

Una función proposicional, que tenga un cuantificador $\forall x$, se denomina identidad, si su dominio de definición es el conjunto de los números reales. En este caso la proposición resultante de la función proposicional es válida en todo el dominio definido.

Una función proposicional con dominio en el conjunto de los números reales, que tenga un cuantificador $\exists x$, se denomina ecuación condicional.

Ejemplo 9

Escribir una identidad.

Solución:

Una posible solución es: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

1.5.6 Conjunción e intersección

1.5.6.1 Definición de conjunción

La conjunción de dos proposiciones es una nueva proposición, resultante de encadenar dos proposiciones simples con el conector "y".

Ejemplo: Luis estudia en la UFPS y Marina es periodista.

En Lógica, el conectivo lógico **y**, que encadena dos proposiciones simples, se simboliza por $\wedge$ o &, y se denomina conjunción.

1.5.6.2 Verdad de la conjunción

Para que la conjunción de dos proposiciones sea verdadera, es **suficiente** que las dos proposiciones sean verdaderas (Tabla 2).

Existe una analogía entre la conjunción y la operación de dos interruptores conectados en serie de un circuito eléctrico. Solamente si los dos interruptores están cerrados, es posible que fluya la corriente de la fuente a la carga.

En matemáticas la verdad de la conjunción de dos proposiciones es independiente del orden de las proposiciones. En cambio, en el lenguaje coloquial, el orden de las proposiciones puede cambiar el significado de la proposición compuesta.

Tabla 2. De verdad de la conjunción

p	q	$p \wedge q$ (p & q)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.5.6.3 Conjunción de funciones proposicionales

Por analogía, también se puede definir la conjunción de dos funciones proposicionales.

Ejemplo 10

Sean: p_x: $x + 3 = 0$ y q_x: $2x - 6 = 0$, Se pide determinar el conjunto de verdad, de la conjunción de las dos funciones proposicionales dadas.

Solución:
La conjunción de estas dos funciones proposicionales es:

$p_x \wedge q_x = (x+3=0) \wedge (2x-6=0)$.

El conjunto de verdad de $p_x \wedge q_x$, que se escribe $\{x | p_x \wedge q_x\}$ está formado por los elementos $x \in$U, que pertenecen simultáneamente a P (conjunto de verdad de p_x) y a Q (conjunto de verdad de q_x).

A esta operación se le denomina intersección de los dos conjuntos.

P es {-3} y Q es {3], por lo tanto el conjunto de verdad de la conjunción de las dos funciones proposicionales es el conjunto nulo, porque los dos conjuntos no tienen elementos comunes.

1.5.6.4 Notación simplificada de la conjunción

Los matemáticos utilizan una notación especial, para representar una conjunción de dos proposiciones.

Por ejemplo,la conjunción $(a<x) \wedge (x \leq b)$, se representa de una manera simplificada como: $a<x\leq b$.

Ejemplo 11

Dada la proposición matemática compuesta " π es mayor que 3, y menor que 3,2", se pide expresar esta conjunción de una manera simplificada.

Solución:
La proposición compuesta se puede representar mediante la siguiente expresión simbólica: $(\pi>3) \wedge (\pi<3{,}2)$.

De una manera simplificada se expresa como: $3<\pi<3{,}2$.

Ejemplo 12

Simplificar $(\pi>0) \wedge (\pi<10)$ expresándola en lenguaje simbólico:

Solución:
$0<\pi<10$

1.5.6.5 Definición de intersección de conjuntos

La intersección de 2 conjuntos A y B, se escribe A y se representa por el conjunto de elementos que pertenecen simultáneamente a A y B (Figura 1.4).

La intersección puede ser el conjunto vacío (fig.1.4 a), una parte de los conjuntos (fig.1.4 b), o uno de los conjuntos (fig.1.4 c).

Del ejemplo 10, donde se determina el conjunto de verdad de dos funciones proposicionales, y de la definición de la intersección de dos conjuntos se puede intuir el siguiente teorema:

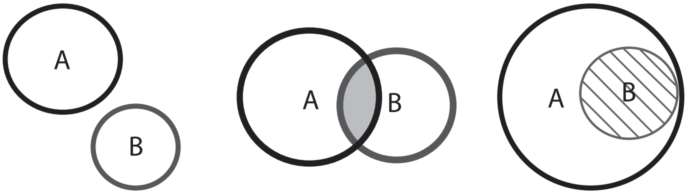
Teorema 1

El conjunto de verdad de la conjunción de dos funciones proposicionales, es el conjunto formado por la intersección de los conjuntos de verdad de cada una de las funciones proposicionales.

$$\{x \mid p_x \wedge q_x\} = P \cap Q. \qquad (1)$$

La demostración de este teorema se hace más adelante.

Figura 4. Intersección de conjuntos (A∩B)



a. No hay zona común (conjunto vacío)

b. Zona común de A y B (gris)

c. B

1.5.7 Disyunción y unión

1.5.7.1 Disyunción de proposiciones

La disyunción proposicional es la combinación de 2 proposiciones, mediante la disyunción **o**, la cual se representa en Lógica por el símbolo $\vee$, y se describe simbólicamente como $p \vee q$.

En el español el significado de la disyunción *o* es ambiguo. Cuando se dice que p o q es verdadera, se puede expresar una de dos posibilidades:

1. p es verdadera o q es verdadera, pero no ambas.
2. Las dos proposiciones son verdaderas, o una de ellas es verdadera.

El primer caso recibe el nombre de **o exclusiva**, y el segundo de **o inclusiva**.

En el lenguaje jurídico la o inclusiva se expresa por y/o.

En este texto cuando se utilice **o** como disyunción se asume en su sentido inclusivo.

La tabla 3 muestra la tabla de verdad de la disyunción.

La disyunción es falsa únicamente cuando ambas proposiciones son falsas.

Existe una analogía entre la disyunción y la operación de dos interruptores conectados en paralelo en un circuito eléctrico.

Si los dos interruptores están abiertos no hay posibilidad de flujo de corriente de la fuente a la carga.

Tabla 3. Tabla de verdad de la disyunción

P	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La analogía de la disyunción con las funciones proposicionales, permite concluir que los elementos del conjunto de verdad de $\vee$ son aquellos que pertenecen a cada uno de los conjuntos de verdad P o Q, o a los dos a la vez.

Un conjunto que se obtiene de la suma de dos o más conjuntos, se denomina unión de los conjuntos.

1.5.7.2 Definición de unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y B (figura 5) y se escribe $A \cup B$.

También se puede decir que el conjunto resultante de la unión de dos conjuntos, está formado por la suma de los elementos de los dos conjuntos.

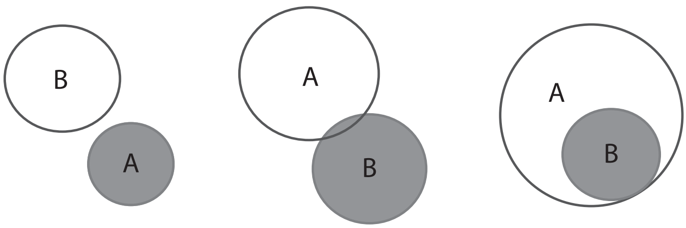
Teorema 2

El conjunto de verdad de la disyunción de dos funciones proposicionales, es el conjunto formado por la unión de los conjuntos de verdad, de cada una de las funciones proposicionales.

$$\{x|p_x \vee q_x\} = P \cup Q \tag{2}$$

Este teorema se demuestra más adelante.

Figura 5. Unión de dos conjuntos (A U B)



a) A más B   b) A más una parte de B   c) Conjunto A

1.5.8 Negación y complementación

1.5.8.1 Negación de una proposición

La negación de una proposición es una nueva proposición, cuya tabla de verdad es la opuesta a la original. Se representa por el símbolo ¬. Si p es verdadera, $\neg p$ es falsa, y si p es falsa, su negación es verdadera.

Tabla 4. De verdad de la negación

p	$\neg p$
V	F
F	V

Cuando la proposición es simple, la negación se obtiene colocando la palabra **no**, al inicio de la proposición.

También se puede escribir la negación mediante la expresión: No es cierto, o no es el caso que la proposición sea verdadera.

Cuando la proposición contiene cuantificadores, el proceso para obtener la negación requiere de un análisis cuidadoso. Posteriormente se deducirán las reglas, que se utilizan para la negación de proposiciones con cuantificadores.

Si p_x es una función proposicional, la función proposicional , tiene un conjunto de verdad opuesto, al de la función proposicional original.

Si la sustitución de un elemento de ∪ en p_x genera una proposición verdadera, la sustitución de este en $\neg p_x$ produce una proposición falsa, de manera análoga ocurre en el caso contrario.

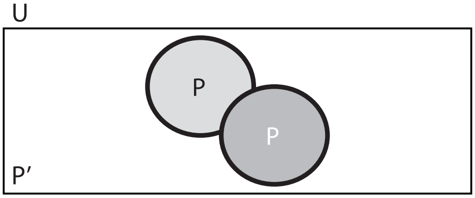
Por lo tanto, el conjunto de verdad de $\neg p_x$ consta de elementos de U, que no pertenecen al conjunto de verdad de p_x .Un conjunto formado de este modo, a partir de otro conjunto, se denomina complemento del conjunto dado.

1.5.8.2 Complemento de un conjunto

El complemento de *P*, que se escribe *P*', es el conjunto de elementos de U que no pertenecen a *P* (figura 6).

Se considera al conjunto *P* subconjunto del conjunto universal U. El complemento de un conjunto se define en relación a un conjunto universal particular. Si se cambia el conjunto universal, se debe cambiar adecuadamente el complemento.

Figura 6. Complemento de un conjunto



De la definición anterior surge el siguiente teorema, que se demostrará posteriormente.

Teorema 3

El conjunto de verdad de la negación de una función proposicional, es el conjunto formado por el complemento del conjunto de verdad, de la función proposicional (P').

$$\{x \mid \neg p_x\} = P' \tag{3}$$

P es el conjunto de verdad de p_x.

1.5.8.3 Resta de un conjunto

Sean los conjuntos A y B, se define la diferencia del conjunto A y el B, al conjunto que contiene todos los elementos de A que no están en B.

La diferencia entre A y B se simboliza como $A \backslash B$, o $A-B$, y también se denomina complemento relativo de B en A. En este caso se simboliza B, cuando el segundo es un subconjunto del primero.

Sean los conjuntos de números naturales $A = \{n \mid n$ es par$\}$ y $B = \{n|n$ es primo$\}$. La diferencia $A \backslash B$ es entonces $\{n|n$ es par y no es primo$\} = \{n|\ n$ es par y compuesto$\}$ $= \{4, 8, 6, ...\}$. Por otro lado, B \ A = $\{n|\ n$ es primo y no es par$\} = \{n|n$ es primo e impar$\} = \{3, 5, 7, 11, ...\}$.

1.5.9 Condicional y su equivalencia

1.5.9.1 Proposición condicional

Un condicional es una proposición formada por dos proposiciones (p y q), que **están o no relacionadas por la causalidad**, unidas por la expresión **"si p, entonces q"**.

Se utiliza el símbolo → para representar el operador condicional. Si p entonces q, se representa simbólicamente como: $(p \rightarrow q)$

La frase precedida por la proposición **si** se denomina antecedente, hipótesis, premisa o condición suficiente y la precedida por **entonces,** se denomina consecuente, conclusión, tesis o condición necesaria.

El **condicional** es la estructura lógica de la demostración directa.

1.5.9.2 Implicación

La implicación es un condicional, en el cual el antecedente es causa del consecuente.

La parte condicional, requiere que **la verdad del consecuente provenga de la verdad del antecedente.**

La parte causal relaciona al **antecedente como causa del consecuente.**

Sea p la proposición "llueve" y q "María trae su paraguas". La implicación $(p \rightarrow q)$ se escribe como: Si llueve, entonces María trae su paraguas. Esta implicación será verdadera si llueve y María trae su paraguas, y será falsa si llueve y María no trae su paraguas. En caso de que no llueva, no se puede decir que es falsa, porque la expresión solamente afirma lo que ocurrirá en caso de que llueva.

1.5.9.3 Verdad del condicional

La **validez** de un condicional, se define únicamente en **función de los valores de verdad del antecedente y del consecuente**, sin tener en cuenta si es o no significativa (causal), la relación entre el antecedente y el consecuente.

Si el **antecedente es cierto, y el consecuente también**, entonces el condicional es verdadero. Un consecuente verdadero se obtiene de un antecedente verdadero, mediante un razonamiento válido, (elaborado siguiendo las reglas de inferencia), ver tabla 5.

Si el antecedente es cierto, y el consecuente es falso, el condicional es falso o inválido, lo que significa que el razonamiento utilizado para deducir el consecuente no es válido, ver tabla 5.

La verdad del condicional $p \rightarrow q$ en situaciones no intuitivas, o aún absurdas (cuando no hay causalidad entre antecedente y consecuente, o si el antecedente es falso), no es fácil de determinar, y Devlin[3] propone una solución a esta situación, resolviendo la siguiente pregunta: ¿Cómo es posible determinar, la validez de la siguiente afirmación: p no condiciona a q?

La expresión simbólica para p no condiciona a q es $(p \nrightarrow q)$. Si p no condiciona a q, $(p \nrightarrow q)$, es porque aunque p sea verdadero, q es falso, entonces $(p \nrightarrow q)$ es únicamente verdadero , cuando p es verdadero y q es falso, y es falso en los otros casos.

Al definir la tabla de verdad para $(p \nrightarrow q)$, se puede determinar la tabla de la verdad del condicional realizando la negación.

El condicional es verdadero, cuando el condicional $(p \nrightarrow q)$ es falso.

$(p \nrightarrow q)$ es falso en las siguientes situaciones:

a. p es verdadero y q es verdadero.

b. p es falso y q es verdadero.

c. p y q son falsos.

Por lo tanto, para estas situaciones, el condicional es verdadero. Esto permite determinar las filas tres y cuatro de la tabla de verdad del condicional.

Tabla 5. Tabla de verdad del condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Es importante observar que la única posibilidad para que el condicional sea falso, es que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Ejemplo 13

Proponer un ejemplo que confirme la fila 3 de la tabla de verdad del condicional[6]

Solución:

Una ilustración de cómo partiendo de una hipótesis falsa, y razonando correctamente, se puede llegar a una conclusión verdadera, es la siguiente:

Proposición	**Justificación**
(a) 1=2	hipótesis falsa
(b) 2=1	propiedad de la igualdad
entonces: 3 = 3	suma de las expresiones (a) y (b)

Se obtiene una conclusión verdadera, a partir de una hipótesis falsa y con un razonamiento válido (condicional verdadero)

Ejemplo 14

Proponer un ejemplo que confirme la fila 4 de la tabla de verdad del condicional[6].

Solución:
Una ilustración de cómo partiendo de una hipótesis falsa, y razonando correctamente, se puede llegar a una conclusión falsa, es la siguiente:

Proposición	**Justificación**
(a)1=2	hipótesis falsa
(b)3=3	propiedad de la igualdad
Entonces: 4=5	suma de las expresiones (a) y (b)

Se obtiene una conclusión falsa, a partir de una hipótesis falsa y con un razonamiento válido (condicional verdadero).

1.5.9.4 Expresiones equivalentes del condicional

Las siguientes afirmaciones representan al condicional : $p \rightarrow q$

1. $P \subseteq Q$
2. p es suficiente para q.
3. q es necesario para p.
4. Si p, entonces q.
5. Solo si q, entonces p.
6. q si p.
7. p solo si q.
8. q siempre que p.
9. q cuando p.

Una condición suficiente de un evento es un requerimiento, que al cumplirse, hace que el evento relacionado con esta condición ocurra inexorablemente. Por ejemplo: tener 18 años es una condición suficiente para adquirir la cédula de ciudadanía en Colombia.

Una condición necesaria de un evento es un requerimiento que debe cumplirse para que ocurra el evento relacionado, pero que no garantiza que se cumpla tal evento. Se requiere más de una condición necesaria, para que el evento se cumpla. Por ejemplo: Tener 18 años es una condición necesaria para adquirir en Colombia una licencia de conducir.

La diferencia entre una condición necesaria y una suficiente, se puede explicar mediante los siguientes ejemplos:

Ejemplo 15

La condición necesaria para que un número natural n sea divisible por 6, es que sea divisible por 3, o sea si n es divisible por 3 puede ser divisible por 6, **pero esto no se cumple siempre**, por ejemplo 9 es divisible por 3, pero no por 6.

La condición suficiente para que n sea divisible por 6, es que sea divisible por 12. Si el número es divisible por 12, también lo será por 6. **No es posible encontrar un número divisible por 12, que no lo sea por 6**.

Ejemplo 16

Sea p: María está embarazada y q: Tuvo relaciones sexuales.

Se pide escribir en lenguaje coloquial, las expresiones de la implicación $p \rightarrow q$. [9]

Solución:

Las siguientes expresiones se refieren a la implicación a $p \rightarrow q$:

1. Si María esta´ embarazada, entonces tuvo relaciones sexuales.
2. El hecho de que María esté embarazada, implica que tuvo relaciones sexuales.
3. Para que María esté embarazada, es necesario que tenga relaciones sexuales.
4. Tener relaciones sexuales es necesario para que María esté embarazada.
5. El hecho de que María esté embarazada es suficiente para asegurar que tuvo relaciones sexuales. Se entiende que para tener un bebé es necesario tener relaciones sexuales, pero no es suficiente. Por otro lado, si María está embarazada, es suficiente para asegurar que mantuvo relaciones sexuales.

6. María no estaría embarazada, a menos que hubiera tenido relaciones sexuales.
7. María debe tener relaciones sexuales, cuando quiera estar embarazada
8. Se puede afirmar que María tuvo relaciones sexuales, siempre que esté embarazada.
9. María estará embarazada, sólo si tiene relaciones sexuales.
10. María debe tener relaciones sexuales, si quiere estar embarazada.
11. María tuvo relaciones sexuales, siempre que esté embarazada.

1.5.9.5 Conjunto de verdad del condicional

Se representan en la figura 7, los conjuntos de verdad de p_x (P = *azul*) y qx (Q=verde).

Para determinar el conjunto de verdad del condicional de dos funciones proposicionales, $p_x \to q_x$, se examina la tabla de verdad del condicional, y se observa que $p \to q$ es verdadero, cuando p es falso **o** q es verdadero.

El conjunto de verdad de la disyunción p es falso o q es verdadero es la unión de sus conjuntos de verdad, y es el conjunto de verdad del condicional.

El conjunto de verdad de $-p_x$ **es** P', y el de q_x es Q.

El análisis anterior permite sugerir el siguiente resultado:

Teorema 4

$$\{x|p_x \to q_x\} = P' \cup Q \tag{4}$$

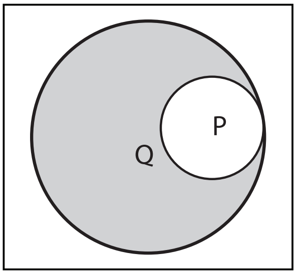
Una prueba formal de este teorema se presenta más adelante en el ejemplo 27.

1.5.9.6 Equivalencia del condicional

La equivalencia del condicional se expresa como:

$\forall x\ (p_x \to q_x) = P \subseteq Q$, (Teorema 18) y se representa en la figura 7. P y Q son los conjuntos de verdad de p_x y de q_x

Figura 7. Representación de $\forall x(p_x \rightarrow q_x) = P \subseteq Q$



Observando la figura 7, se pueden explicar los conceptos de suficiente y necesario, involucrados en el condicional.

Para que x esté en Q, es suficiente que esté en P. No hay ninguna posibilidad, de que x estando en P no esté en Q.

Para que x esté en P es necesario que esté en Q. Es posible que x esté en Q, y no esté en P. Si x está en P, está en Q. Solo si x está en Q, está en P.

Ejemplo 17

Determinar el conjunto de verdad de la siguiente implicación:

"Si $x^2=1$, entonces $x=1$"

Solución:

Si $P=\{-1,1\}$, entonces $P'=\{x \mid x \neq -1 \text{ o } 1\}$ y Q={1}. Por el teorema 4, el conjunto de verdad de la implicación es $P' \cup Q=\{x \mid x \neq -1\}$.

1.5.10 Equivalencia y relación

1.5.10.1 Definición de equivalencia

Dos proposiciones p y q son equivalentes, si cada una implica a la otra, de una manera **bicondicional.**

En símbolos la equivalencia se escribe: : $(p \leftrightarrow q)$ o $(p \equiv q)$, y se lee p si y solo si q, o q es condición suficiente y necesario para p.

El bicondicional se define formalmente, como una abreviación de la conjunción $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

1.5.10.2 Implicación bicondicional de la equivalencia

$(p \to q)$ será verdadera, si ambas p y q son verdaderas o falsas, y será falsa, si una es verdadera y la otra falsa.

Por la anterior, la definición de la equivalencia se puede expresar como:

$$(p \to q) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \tag{5}$$

Dado que la equivalencia se reduce a una implicación bicondicional, las siguientes expresiones significan lo mismo:

p es equivalente a q.
p es necesario y suficiente para q.
p sí y solo sí q.
p precisamente cuando q.

Tabla 6. De verdad del bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De la definición de equivalencia, se deducen las tres propiedades siguientes:

1. p es equivalente a p.
2. Si p es equivalente a q, q es equivalente a p.
3. Si p es equivalente a q y q equivalente a r, p es equivalente a r.

La demostración que dos expresiones son bicondicionalmente equivalentes se obtiene al construir las tablas de la verdad de las dos expresiones, y verificar que son iguales. Por ejemplo $p \to q$ es bicondicionalmente equivalente a $(p \wedge q) \vee (\neg p)$.

La noción de equivalencia se refiere solamente a dos proposiciones.

La equivalencia de otros conceptos fundamentales de matemáticas, es objeto de estudio en los cursos de matemáticas, y se emplea la noción de relación entre dos entes (objetos) matemáticos denominados: a, b, p y q, AB y CD, los cuales pueden ser: números, puntos, rectas, triángulos, etc. Se indica la relación colocando un símbolo matemático entre ellos, por ejemplo: $a = b$, $a < b$, $p > q$, $ABCD$, etc.

Cuando interesa una relación, sin especificar los significados de las partes de que se componen, se escribe $a*b$ y se lee a está relacionado con b.

Ejemplo 18

Considere las siguientes proposiciones: p: la figura es un triángulo y q: la figura tiene tres lados. Se pide escribir utilizando los conectivos: si, solo si, y si y solo si, de las siguientes proposiciones compuestas:

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow p$
3. $p \leftrightarrow q$

Solución:

1. La figura es un triángulo, solo si tiene tres lados. También se puede expresar como: la figura tiene tres lados, si es un triángulo.
2. La figura tiene tres lados, solo si es un triángulo.
3. La figura es un triángulo, si y solo si, tiene tres lados.

Ejemplo 19

Sea q la proposición: n es un número divisible por 6. Sea p la proposición: n es un número par y divisible por 3. Se pide escribir, las expresiones para $(p \leftrightarrow q)$[3].

Solución:

p es equivalente a q, se puede expresar como: decir que un número n es divisible por 6, es **equivalente** a decir que n es un número par, y divisible por 3.

p es necesario y suficiente para q. La **condición suficiente y necesaria** para que un número n sea divisible por 6, es que n sea par y divisible por 3.

p **si y solo si** q, o sea: un número n es un número par y divisible por 3**, si y solo si**, el número es divisible por 6.

1.5.10.3 Relación entre objetos matemáticos

Una relación a^*b entre dos objetos matemáticos es una relación de equivalencia, si y solo si, se verifican las siguientes propiedades:

1. a^*a.
2. Si a^*b, se verifica que b^*a.
3. Si a^*b y b^*C, entonces se verifica que a^*C.

Por ejemplo, en matemáticas el signo = se emplea para significar, que los **símbolos de los dos miembros relacionados son los mismos**, o para **indicar nombres distintos** de la misma cosa.

Por ejemplo, $5 = 2 + 3$, significa que 5 y (2+3) son símbolos diferentes del número 5.

Del mismo modo, la igualdad $\{x|x^2 = 9\} = \{-3,3\}$, significa que los dos conjuntos son idénticos.

Según esta definición, de $a = b$, se puede concluir que: $a + c = b + c$; $a - c = b - c$; $ac = bc$; $a/c = b/c$, si c (propiedades de la igualdad).

La noción de equivalencia se puede extender, a las funciones proposicionales, para analizar los conjuntos de verdad de la equivalencia $p_x \leftrightarrow q_x$.

Si en esta se sustituye un elemento de U que pertenezca a $P \cap Q$, se obtiene una proposición verdadera, porque las dos partes de la equivalencia son verdaderas. Si se sustituye un elemento de U que pertenezca a P'$\cap Q$', también se obtiene una proposición verdadera, porque las dos partes de la equivalencia son falsas. Esta es una prueba no formal, del siguiente teorema.

Teorema 5

$$\{x|px \leftrightarrow qx\} = (P \cap Q) \cup (P' \cap Q') \qquad (6)$$

Una prueba formal de este teorema se hará en el ejemplo 22.

Ejemplo 20

Sea p_x: $(x^2 = 1)$ y q_x :$(x=1)$ $\vee$ $(x=-1)$. Asuma a Z. como conjunto universal.

Se pide determinar el conjunto de verdad de $p_x \leftrightarrow q_x$.

Solución

P={−1,1}; Q={-1,1}. P'={x | x ≠1 y−1}; Q' ={x | x≠1 y −1}

P∩Q={−1,1}; P' ∩ Q' = {x | x ≠ 1 y −1) }.

Aplicando el teorema 5, se obtiene:

$[(P \cap Q) \cup (P' \cap Q')] = \cup = Z$

1.5.11 Fórmula, tautología y contradicción

Se pueden combinar las expresiones $p \vee q$, $p \wedge q$, $\neg p$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, para formar expresiones más largas.

Si p y q son proposiciones específicas, estas expresiones son también proposiciones, cuyos valores de verdad se pueden determinar a partir de las técnicas estudiadas.

1.5.11.1 Fórmula

Una fórmula es una expresión que contiene un número finito de **proposiciones**: p, q , r , etc. y un número finito de **operaciones lógicas:** ∧, ∨, → , ↔ , ¬ .

El resultado de una fórmula también es una proposición, cuando se sustituyen las proposiciones, por los valores de verdad de cada una de ellas.

El valor de verdad de una fórmula, depende de los valores de verdad de las proposiciones específicas.

1.5.11.2 Tautología, contradicción y contingencia

Una fórmula se denomina tautología, **si y solo si**, se convierte en una **proposición verdadera**, cuando se sustituyen las proposiciones simples, por las posibles combinaciones de sus valores de verdad. A las fórmulas que son tautologías se les denomina lógicamente verdaderas.

La comprobación de una tautología, se puede hacer mediante una tabla de valores de verdad, o un razonamiento deductivo.

Una proposición compuesta (fórmula) es una contradicción, **si es falsa** para todas las posibles combinaciones de valores de verdad, de las proposiciones simples que la componen.

En lógica común a las proposiciones que forman una contradicción se les denomina lógicamente falsas.

Una fórmula es una contingencia si sus valores de verdad **dependen de los valores de verdad** de las proposiciones simples que las componen.

En lógica común, a las proposiciones que forman una contingencia, se les denomina proposiciones contingentes.

Teorema 6

$$p \lor (\neg p), \text{ es una tautología} \tag{7}$$

Demostración:

Se construye la tabla de verdad de la tautología.

Tabla 7. De verdad de la ley del medio excluso

p	$\neg p$	$p \lor (\neg p)$
V	F	V
F	V	V

Teorema 7

Ley de contradicción:

$$\neg[\mathrm{p} \land (\neg p)] \text{ es una tautología} \tag{8}$$

Demostración:

Tabla 8. De verdad, de la ley de contradicción

p	$\neg p$	$p \land (\neg p)$	$\neg[p \land (\neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Si r y r son dos fórmulas, cada una de las cuales contienen las proposiciones p, q, etc., y si $r \leftrightarrow s$ es una tautología, entonces cuando algunas proposiciones específicas sustituyen a las proposiciones p, q, etc., en las fórmulas r y s, los valores de verdad de r y de s serán iguales.

1.5.11.3 Definición de fórmulas equivalentes

Dos fórmulas r y s son equivalentes, si y solo si, el valor de verdad de r es igual al de s, cualquiera que sea la proposición que sustituya a sus respectivas variables.

De esta definición se infiere, que una fórmula r se puede reemplazar en un razonamiento lógico, por una fórmula s equivalente.

Teorema 8

Dos fórmulas r y s son equivalentes, si y solo si $r \leftrightarrow s$ es una tautología.

Teorema 9

$$p \leftrightarrow q \text{ es equivalente a } [p \wedge q] \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)] \qquad (9)$$

Demostración:

Tabla 9. De verdad de la definición de equivalencia

p	q	$p \leftrightarrow q$ (*)	$p \wedge q$	p	q	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$(p \wedge q) \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)$(*)
V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V

La equivalencia se deduce de la igualdad de los valores de verdad, en las dos columnas que tienen asterisco (*), y corresponden a la equivalencia $p \leftrightarrow q$ y a la expresión $[p \wedge q] \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)]$.

Las tautologías tienen consecuencias importantes, para las funciones proposicionales que se derivan de ellas.

Si se tiene una tautología t con proposiciones p, q, r, y se sustituyen las proposiciones p, q, por las funciones proposicionales p_x, q_x etc. se obtiene una función proposicional t_x.

Debido a que t es una tautología, se infiere que t_x. será verdadera, cuando en ella, la variable se sustituya por un elemento del conjunto universal.

Teorema 10

Sea t una fórmula que es una tautología, entonces la función proposicional derivada t_x, es verdadera para todo $x \in$ U.

Se puede expresar esta conclusión en dos formas diferentes:

a. $\forall x t_x$ es verdadero.
b. $\{x | t_x\} =$ U.

Ejemplo 21

Aplicar el teorema 10 a las tautologías de los teoremas 6 y 7.

Solución:

El teorema 6 expresa:

$p \vee (\neg p)$ es una tautología, y de esta se obtiene la siguiente conclusión:

$\forall x[p_x \vee (\neg p_x)]$ es verdadero, o sea $\{x|p_x \vee (\neg p_x)\}$=U.

Aplicando el teorema 2 a esta última expresión, se obtiene:

$\{x|p_x\} \cup \{x|\ (\neg p_x)\ \} = U$.

Si a esta expresión se le aplica el teorema 3, se obtiene:

$P \cup P' = U$, donde $P = \{x|p_x\}$.

1.5.11.4 Funciones proposicionales equivalentes

Dos funciones proposicionales se llaman equivalentes, si y solo si, sus conjuntos de verdad son idénticos.

De esta definición y del estudio anterior se pueden establecer los siguientes teoremas:

Teorema 11

Dos funciones proposicionales r_x y s_x son equivalentes si se derivan de las fórmulas r y s equivalentes.

Teorema 12

Si r_x y s_x son equivalentes, se puede reemplazar a r_x por s_x, en cualquier razonamiento lógico.

Ejemplo 22:

Aplicar el teorema 9 para demostrar el teorema 5.

Solución

Del teorema 9 se infiere:

$(p \leftrightarrow q)$ es equivalente a $(p \wedge q) \vee [(p) \wedge (q)]$.

Se reemplaza a p y q, por p_x y q_x se aplica el teorema 11 y la definición de funciones proposicionales equivalentes, y entonces se obtiene:

$$\{x|p_x \leftrightarrow q_x\} = \{x|[p_x \wedge q_x)] \vee [(\neg p_x \wedge (\neg q_x)]$$

Se denominan como P y Q, a los conjuntos de verdad de p_x y q_x .

Si se aplican los teoremas 1, 2, y 3, y se simplifica el miembro derecho de la igualdad, entonces se obtiene:

$$\{x|p_x \leftrightarrow q_x)\} = \{x|[p_x \wedge q_x] \vee [(\neg p_x) \wedge (\neg q_x)]$$

$$=(P \cap Q) \cup (P' \cap Q') \qquad \blacksquare$$

1.5.12 Negaciones de proposiciones compuestas

Se analiza la negación de las proposiciones compuestas.

Teorema 13

Las negaciones de las proposiciones compuestas, se pueden expresar de las siguientes maneras:

Tabla 10. De las negaciones, de las operaciones de la lógica proposicional

Conector lógico	Fórmula	Negación
Conjunción	$p \wedge q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$ (primera ley de De Morgan)
Disyunción	$p \vee q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$(segunda ley de De Morgan
Equivalencia	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p) \leftrightarrow q$ o $p \leftrightarrow (\neg q)$
Implicación	$p \rightarrow q$	$p \wedge (\neg q)$

Ejemplo 23

Construir las negaciones, de las siguientes proposiciones:

Solución:

a. El pájaro es amarillo, y la fruta roja.
   Negación:
   El pájaro no es amarillo, o la fruta no es roja.

b. La temperatura está alta, o tengo fiebre.
   Negación:
   La temperatura no esta alta, y no tengo fiebre

c. 3×3=9, es equivalente a 4×3=12.
Negación:
3×3 es diferente de 9, es equivalente a 4×3=12

d. Si estudio, apruebo.
Negación:
Estudio, y no apruebo-

1.5.12.1 Negaciones de proposiciones con cuantificadores

Proposición:	**Negación:**
Todos los hombres son felices.	Algunos hombres no son felices.
Algunos niños son scouts.	Ningún niño es scout.

Negaciones incorrectas:

Todos los hombres no son felices.
Algunos niños no son scouts.
No todos los niños son scouts.

La imprecisión de las expresiones «todos… no…» y «no todos…» hacen complicados los problemas lógicos.

En lugar de decir: «no todos los hombres hablan inglés» se debe decir «algunos hombres hablan inglés».

En lógica es conveniente expresar la negación de «algún x es…» como «ningún x es... » en lugar de «todos los x no son…», y la negación de «todos los x son…» como «algún x no es …» y así se evita cualquier ambigüedad.

Estas reflexiones conducen al siguiente teorema:

Teorema 14

Las negaciones de funciones proposicionales con cuantificadores, se expresan por las siguientes equivalencias:

$$\neg(\forall x p_x) \leftrightarrow \exists x(\neg p_x) \tag{10}$$

$$\neg(\exists x \mathrm{p}_x) \leftrightarrow \forall x(\neg \mathrm{p}_x) \tag{11}$$

Demostración:

Se prueba solo la primera equivalencia (10)

De la definición del cuantificador se tiene:

1. $\forall x p_x$ es verdadero, si y solo si, P es el conjunto $\cup$.
   $\forall x p_x$ es falso, si y solo si, P no es el conjunto $\cup$.

Negando las proposiciones (1) e invirtiendo los valores, se obtiene:

2. $\neg(\forall x p_x)$ es verdadero, si y solo si, P no es el conjunto $\cup$.
   $\neg(\forall x p_x)$ es falso, si y solo si, P es el conjunto $\cup$.

Considerando el miembro de la derecha del teorema, se tiene por definición:

3. $(\exists x p_x)$ es verdadero, si y solo si, P no es el conjunto vacío(φ).
   $(\exists x p_x)$ es falso, si y solo si, P es el conjunto vacío (φ).

Sustituyendo en las proposiciones (3) por , se obtiene:

4. $\exists x(\neg p_x)$ es verdadero si y solo si P' no es el conjunto vacío(φ), o sea P no es el conjunto $\cup$.
   $\exists x(\neg p_x)$ es falso si y solo si P' es el conjunto φ, o sea P es el conjunto $\cup$.

Dado que las proposiciones (2) y (4) son idénticas se verifica la primera de las dos equivalencias del teorema 14.

Otra alternativa para esta demostración es la siguiente: la expresión $\neg(\forall x p_x)$ se lee como: "es falso que para todos los x se cumpla p_x;

También se puede leer como: "no es el caso que para todos los x, p_x es verdadera".

Si no es el caso que todo x satisfaga p_x, debe acontecer que al menos una de las x debe fallar, para satisfacer p_x. En otras palabras para al menos un x, $\neg p_x$, debe ser cierto. En símbolos esto se escribe como:: $\exists x(\neg p_x)$ es cierto.

Por lo anterior $\neg(\forall x p_x) \rightarrow \exists x(\neg p_x)$.

Si ahora se supone que $\exists x(\neg px)$ es verdadero, entonces habrá un x para el cual p_x no se cumple, y por lo tanto p_x no se satisface para todas las x.

En otras palabras es falso que p_x se cumple para todo x, y esto se escribe en símbolos como: $\neg(\forall x p_x)$. Por lo anterior $\exists x(\neg p_x) \rightarrow \neg(\forall x p_x)$.

De las dos implicaciones anteriores se deduce la equivalencia.

Ejemplo 24

1. Sea p_x la proposición "los carros son de color rojo". Se pide formar la negación de: "todos los carros son de color rojo".

Solución:

Sea x un elemento del conjunto carros. Se asume $\neg(\forall x\, p_x)$ es verdadero, o sea no es el caso que $\neg(\forall x\, p_x)$ es verdadero.

Dicho de otra manera, es falso que todos los carros sean de color rojo, o sea al menos un carro no es de color rojo.

Por lo tanto se puede afirmar, que al menos un carro no es de color rojo es una proposición verdadera.

En símbolos se puede expresar como : $\exists x$: $(\neg p_x)$. Por lo tanto: $\neg(\forall\, p_x)$ implica a $\exists x$: $(\neg p_x)$.

Ejemplo 25

Formar la negación de: Algún deporte es peligroso y toda clase de cine es aburrido.

Solución:

Se escribe la negación en su forma primaria, aplicando el teorema 13:

[¬ (Algún deporte es peligroso)] o [¬ (toda clase de cine es aburrido)].

Aplicando el teorema 14, resulta: Todo deporte no es peligroso o alguna clase de cine no es aburrido. Ningún deporte es peligroso o alguna clase de cine no es aburrido.

Ejemplo 26

Formar la negación de: $\forall x(x\neq 0)\rightarrow(x^2>0)$

Solución:

$\neg\{\forall x(x\neq 0)\rightarrow(x^2>0)\} = \forall x(x\neq 0)\wedge\{\neg(x^2>0)\}= \forall x(x\neq 0)\wedge(x^2\leq 0).$

1.5.13 Leyes de equivalencia lógica

1.5.13.1. Definición de equivalencia lógica

Si p y q son dos proposiciones cualesquiera, se dice que p y q son lógicamente equivalentes, cuando p y q tienen la misma tabla de verdad. La equivalencia se simboliza por, $p \Leftrightarrow q$ (o bien por $p \equiv q$).

Las leyes de equivalencia lógica son muy útiles para establecer si una proposición es lógicamente equivalente a otra.

Las leyes de equivalencia se pueden demostrar utilizando las tablas de verdad o con razonamientos deductivos.

1.5.13.2 Algunas leyes de equivalencia lógica y sus aplicaciones

Tabla 11. Leyes lógicas equivalentes

Ley	Denominación
$p \vee \neg p \equiv \mathrm{V}$	Ley de medio excluido
$p \wedge \neg p \equiv \mathrm{F}$	Ley de contradicción
$p \wedge \mathrm{V} \equiv p$ $p \vee \mathrm{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$ $p \vee \mathrm{V} \equiv \mathrm{V}$	Leyes de dominación
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leyes de idempotencia
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leyes conmutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leyes asociativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leyes distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \equiv \neg(\neg p)$	Doble negación
$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$	Ley de la contrarrecíproca
$(p \rightarrow q) \equiv \neg p \vee q$	Equivalencia para el condicional
$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Ley del bicondicional
$(p \wedge q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	Ley de $\frac{\text{Exportación}}{\text{Importación}}$

Las leyes de equivalencia lógica sirven para simplificar una proposición compuesta dada , en otra más simple equivalente desde el punto de vista lógico. En el siguiente ejemplo se muestra como simplificar una proposición compuesta en otra más sencilla y equivalente.

Ejemplo 27

Demostrar que $\neg[\neg(p \vee r) \vee r] \vee \neg(q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \wedge \neg r$.[9]

Demostración:

Se parte de $\neg[\neg(p \vee r) \vee r] \vee \neg(q \rightarrow r)$,y se aplican las equivalencias lógicas de la tabla11, para llegar a $Q \equiv (p \vee q) \wedge \neg r$.

$P \equiv \neg[\neg(p \vee r) \vee r)] \vee \neg(q \rightarrow r)$

Justificación

$P \equiv (p \vee r) \wedge \neg r) \vee \neg(q \rightarrow r)$ ley de Morgan para $\vee$ y doble negación.

$P \equiv (\neg r \wedge (p \vee r)) \vee \neg(q \rightarrow r)$ Ley conmutativa para $\wedge$

$P \equiv ((\neg r \wedge p) \vee (\neg r \wedge r)) \vee \neg(q \rightarrow r)$ Ley distributiva para $\wedge$

$P \equiv ((\neg r \wedge p) \vee F) \vee \neg(q \rightarrow r)$ Ley de contradicción

$P \equiv (\neg r \wedge p) \vee \neg(q \rightarrow r)$ Ley de identidad para $\vee$

$P \equiv (\neg r \wedge p) \vee \neg(\neg q \vee r)$ Equiv. para la implicación.

$P \equiv (\neg r \wedge p) \vee (\neg(\neg q) \wedge \neg r)$ Ley de De Morgan para $\vee$

$P \equiv (\neg r \wedge p) \vee (q \wedge \neg r)$ Doble negación.

$P \equiv (\neg r \wedge p) \vee (\neg r \wedge q)$ Ley conmutativa para $\wedge$

$P \equiv \neg r \wedge (p \vee q)$ Ley distributiva para $\wedge$

$P \equiv (p \vee q) \wedge \neg r$ Ley conmutativa para $\wedge$

$P \equiv Q \equiv (p \vee q) \wedge \neg r.$) ■

Ejemplo 28

Utilizar la ley de equivalencia para el condicional, y demostrar el Teorema 4.

Demostración:

$(p\to q) \equiv \neg p \vee q$,	Ley de equivalencia para el condicional
$\{x\|p_x \to q_x\} = \{x\|\neg p_x \vee q_x\}$	Conjunto de verdad equivalente
$\{x\|\neg p_x\} = P'$	Teorema 3
$\{x\|px \vee qx\} = P' \cup Q$	Teorema 2
$\{x\|\neg p_x \vee q_x\} = P' \cup Q$	Teorema 2, Teorema 3 ■

1.5.14 Conversión del lenguaje natural al lenguaje de la Lógica

La tarea de traducir un escrito del lenguaje natural al lenguaje de la lógica, requiere de práctica, ya que no existen reglas fijas sobre cómo realizar este trabajo[9].

El primer paso a realizar es comprender lo que se quiere traducir, y para ello se pueden seguir las siguientes recomendaciones:

1. Leer con detenimiento el texto en el lenguaje natural que se desea traducir, prestando especial atención al sentido de cada frase.
2. Identificar en la lectura del texto las proposiciones simples, y después los conectores, que puedan existir entre dichas proposiciones simples.
3. La identificación de los conectores se puede realizar, si se conoce el equivalente de cada conector en el lenguaje natural, a saber:
   a. La conjunción de dos proposiciones $p \wedge q$, se puede expresar en lenguaje natural por una de las siguientes expresiones: 1). p y q; 2). p pero q; 3). p no obstante q; 4). p sin embargo q. Por otro lado, la palabra "y" no siempre denota una conjunción, si no se aplica para unir dos proposiciones.
   b. La disyunción $\vee$ se expresa por: 1). p o q; 2). Al menos p o q.
   c. Las expresiones para el condicional se muestran en el ejemplo 16.
4. Listar las proposiciones simples que se identifiquen, asignándole una letra a cada una de ellas, cuidando que no existan letras repetidas.

En general las proposiciones simples se identifican en forma afirmativa. Por ejemplo, si se tiene una frase como "el niño no quiere jugar", se identifica como

p: "el niño quiere jugar" y la frase inicial se simboliza usando la negación, es decir: $\neg p$.

1.5.15 Argumentación lógica

1.5.15.1 Definición de argumento lógico

Un argumento lógico es una estructura proposicional de la forma $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots \wedge p^n \rightarrow q$, en donde $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ son proposiciones que se denominan premisas, y a se le conoce como la conclusión. Si $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots \wedge pn \rightarrow q$, es una tautología, el argumento es válido.

El argumento también es válido cuando la conclusión es una consecuencia lógica de las premisas, o sea, que la conclusión se obtiene de utilizar las leyes de equivalencia lógica a las premisas.

De la tabla de verdad del condicional (tabla 4) se deduce, que la única posibilidad para que el condicional sea inválido, es que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Por lo tanto, si una o más de las premisas son falsas, entonces $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots \wedge p_n$ será una proposición falsa, y por tanto la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ **será una tautología**, independientemente del valor de verdad de q, ver tabla 4. En este caso el valor de verdad de q no se puede inferir de la verdad del condicional.

Si una de las premisas es falsa, a pesar de que haya muchas verdaderas, no se puede afirmar que la demostración, que se infiere del condicional, es casi verdadera, ya que en este caso se puede derivar cualquier conclusión.

Estando en una conferencia a Bertrand Russell lo retaron a probar que él era Dios, partiendo de la premisa falsa 1=2. Russell replicó de la siguiente manera: "Considere el siguiente conjunto de dos elementos: {Russell, Dios}, si los dos elementos del conjunto son iguales a uno, entonces Dios=Russell".

Ejemplo 29

Demostrar que $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$**,** es un argumento válido.

Demostración:

Se debe demostrar que $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$ es una tautología, utilizando:

a. Tablas de la verdad.

b. Leyes de equivalencia lógica.

c. Tabla de verdad

			Premisas		Conclusión
p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	q	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

b. Leyes de equivalencia lógica

$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$	Hipótesis.
$p \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow q$	Equivalencia. para el condicional.
$\neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \vee q$	Equivalencia para el condicional.
$[\neg p \vee \neg(\neg p \vee q)] \vee q$	Ley de De Morgan para $\wedge$.
$[\neg p \vee (\neg(\neg p) \wedge \neg q)] \vee q$	Ley de De Morgan para $\vee$.
$[\neg p \vee (p \wedge \neg q)] \vee q$	Doble negación.
$[(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$	Ley distributiva para $\vee$.
$[(p \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$	Ley conmutativa para $\vee$.
$[\mathrm{V}\ (\neg p \vee \neg q)] \vee q$	Ley de medio excluid.
$[(\neg p \vee \neg q) \wedge \mathrm{V}\ ] \vee q$	Ley conmutativa para $\vee$.
$(\neg q \vee \neg q) \vee q$	Ley de identidad para $\wedge$.
$\neg p \vee (\neg q \vee q)$	Ley asociativa para $\vee$.
$\neg p \vee (q \vee \neg q)$	Ley conmutativa para $\vee$.
$\neg p \vee \mathrm{V}$	Ley de medio excluido.
$\equiv \mathrm{V}$ ■	Ley de dominación para V.

La expresión $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$, se puede leer como:

Si p es verdadera y el condicional $p \rightarrow q$ es verdadero (el razonamiento es válido), entonces q será verdadera.

1.4.15.2 Reglas de inferencia en las argumentaciones

Una regla de inferencia es una instrucción, para obtener proposiciones verdaderas adicionales, de una lista dada de proposiciones verdaderas.

Se pueden visualizar las reglas de inferencia de la lógica,como **herramientas,** para construir nuevas proposiciones verdaderas, a partir de unas dadas.

A continuación se presentan algunas reglas de inferencia, útiles para este curso.

Tabla 12. Reglas de inferencia lógica

Regla	Nombre
$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$	Método ponendo ponens.
$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p$	Método tollendo tollens.
$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (r \vee s)$	Silogismo disyuntivo.
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$	Silogismo hipotético.
$(p \wedge q) \Rightarrow p$ $--(p \wedge q) \Rightarrow q$	Ley de simplificación.
$p \Rightarrow p \vee q$	Ley de adición.
$p,q \Rightarrow p \wedge q$	Ley de conjunción.
$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \Rightarrow q$	Ley de casos.
$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q) \rightarrow p$	Ley de contradicción.

1.5.15.3 Aplicación de las reglas de inferencia

La regla inferencial modus ponens establece que **si** p **es cierto, y si** p **entonces** q **(**p **condiciona a** q**) también es cierto, entonces** q **es verdadero**.

El método (*modus*) afirma (*ponens*) el consecuente de un condicional considerado como valido, afirmando (*ponendo*) el antecedente del condicional.

El *modus ponendo ponens* se puede simbolizar de la siguiente manera:

$p \rightarrow q$	Hipótesis
p	Hipótesis
q	Conclusión por regla modus ponens

Un ejemplo de esta regla de inferencia es:

Premisa 1: Si estudia, y hace las actividades asignadas de la asignatura de Lógica, entonces aprueba $[(p \wedge r) \rightarrow q]$.

Premisa 2: Juan estudia, y hace las actividades de la asignatura de Lógica ($p \wedge r$).

Conclusión: Juan aprueba la asignatura (q).

La regla de inferencia modus tollens se puede expresar como: **si *p* entonces *q* es verdadera, y si no *q* es verdadera, entonces se puede inferir que no *p* es verdadera.** En este caso, **negando** (*tollendo*) **el consecuente**, se puede concluir con la **negación** (*tollens*) del **antecedente** del condicional.

El método *tollendo tollens* se puede simbolizar como:

$p \rightarrow q$	Hipótesis.
$\neg q$	Hipótesis.
$\neg p$	Conclusión por regla de inferencia modus tollens.

A continuación se muestra un ejemplo del uso del método tollendo tollens.

Premisa l. Si estudia y hace las actividades de la asignatura de Lógica, entonces aprueba $[(p \wedge r) \rightarrow q]$.

Premisa 2. Juan no aprobó el curso de Lógica ($\neg q$).

Conclusión. Juan no estudió, o no hizo las actividades del curso $[\neg(p \wedge r)]$.

Se simboliza este ejemplo de la siguiente manera:

Se considera la ley de silogismo hipotético (SH) mediante el siguiente ejemplo:

1. Si hace calor, entonces Luisa va a la piscina.
2. Si Luisa va a la piscina, entonces arregla la casa después de nadar.

Se pueden incluir:

3. Si hace calor, entonces Luisa arregla la casa después de nadar.

El razonamiento se puede simbolizar como: p = Hace calor; q = Luisa va a la piscina; r = Arregla la casa después de nadar.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ p \rightarrow r \end{array}$$

La conclusión es una proposición condicional. Ambas premisas son proposiciones condicionales. La conclusión no dice que hace calor, ni que Luisa arregla la casa después de nadar, sólo dice lo que ocurrirá *si* hace calor.

La ley de silogismo disyuntivo se puede expresar como: de p V q
y, p —> r
y, q —» s

se puede deducir r V s, o se puede deducir s V r

Para aplicar la regla del silogismo disyuntivo se debe realizar el siguiente procedimiento:

Primero: se verifica que se tienen los dos condicionales y la disyunción requeridas.

Segundo: se verifica cuidadosamente que los dos antecedentes de los dos condicionales son los dos miembros de la disyunción.

Tercero: se genera como conclusión una disyunción, cuyos miembros son los dos consecuentes de los dos condicionales.

La ley de contradicción $\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q) \rightarrow p$, **expresa que si en un condicional válido, la negación de p condiciona a una contradicción (F), es porque de acuerdo a las reglas del condicional, p es verdadera.**

Se puede afirmar que un **razonamiento es válido** sólo cuando cada proposición deducida se puede justificar**, mediante una definición, teorema, equivalencia lógica o regla de inferencia**.

Ejemplo 30

Se pide demostrar la validez del siguiente argumento:
Si José gana, entonces Luis es segundo.
Si Carlos es segundo, entonces Luis no es segundo.
Y en consecuencia, si Carlos es segundo, entonces José no gana.

Solución:

Sea

p = José gana
q = Luis es segundo
r = Carlos es segundo.

En lenguaje simbólico, se expresa el razonamiento como:

1. $p \rightarrow q$

2. $r \rightarrow \neg q$

Entonces: $r \rightarrow \neg p$

Para demostrar la verdad de la conclusión, y así la validez del argumento, se procede así:

3. $q \rightarrow \neg r$ ley de equivalencia de la contrarecíproca de (2).

4. $p \rightarrow \neg r$ ley de silogismo hipotético de (1) y (3).

5. $r \rightarrow \neg p$ ley de la contrarecíproca de (4).

Por lo tanto, la conclusión es verdadera y el razonamiento es válido.

1.5.15.4 Errores en la argumentación

El 29/07/2017 apareció publicado en el diario El Espectador de Colombia, el siguiente artículo elaborado por Ignacio Mantilla, el cual se trascribe a continuación por su valor didáctico, para mostrar los errores de argumentación que se comenten con frecuencia en el ámbito colombiano.

"Si hay algo que los matemáticos aprendemos desde el inicio de nuestra formación es la diferencia entre un ejemplo, un lema, un contraejemplo y un teorema; especialmente aprendemos a diferenciar entre un caso particular y una generalización. También aprendemos muy temprano algunos métodos de demostración, entre los que aparecen siempre el de "reducción al absurdo" y el de "inducción".

A veces es bueno usar ese conocimiento básico y examinar entonces, con criterio matemático, lo que se afirma en el lenguaje corriente, para detectar errores comunes que con frecuencia conducen a conclusiones falsas, desproporcionadas o absurdas, aparentemente muy bien sustentadas, pero que en realidad esconden engañosas demostraciones.

Los recientes sucesos que han empleado algunos términos para estigmatizar, como "terroristas" a los estudiantes y egresados de la Universidad Nacional y demás universidades públicas, y como "corruptos" a los de las universidades privadas de élite, son un buen ejemplo de esas falsas conclusiones. Se trata de uno de los métodos preferidos, de aparente demostración por inducción: si se presenta un caso comprobado de un estudiante de universidad pública autor de un acto terrorista en 2015, de otro estudiante con el mismo délito en 2016 y un par más en 2017, se concluye que todos los estudiantes de universidades públicas son terroristas. Si hay un egresado de una universidad privada acusado de corrupción en 2014, dos más en 2015 y tres en 2017, la conclusión es que todos los egresados de universidades privadas son corruptos. Comúnmente se cree que la prueba es más contundente aún, si se suma algún caso más antiguo conocido.

Recuerdo, como anécdota, que en la Universidad de Mainz (Alemania) el profesor de matemáticas Ernst Hölder sostenía una marcada rivalidad con algunos de sus colegas de física y no desperdiciaba oportunidad para hacer bromas sobre sus métodos y logros científicos. Era costumbre en la universidad hacer un acto especial de celebración para homenajear a los profesores cuando cumplían 60 años de edad. Tuve la oportunidad de asistir a la celebración del cumpleaños 60 del profesor Peter Paul Konder y recuerdo cómo el profesor Hölder, después del brindis, tomó la palabra y provocó risas entre los asistentes al decir: "El número 60 es muy importante en la vida de los matemáticos, pues es divisible por 1, por 2, por 3, por 4, por 5, por 6. Es decir que, como dirían mis colegas físicos, es divisible por todos los números

Pero más comunes que las falsas pruebas de tipo inductivo, son las que usan frecuentemente algunos personajes que dominan una gran oratoria, para demostrar que de una afirmación P se concluye otra Q, que es completamente falsa. Puesto que "P implica Q" es una proposición verdadera, cuando P es falsa, independientemente del valor de verdad de Q (por ejemplo, es verdadera la proposición: "Si Colombia está en África entonces los caballos ponen huevos"), es usual que se parta de una afirmación falsa P y durante media hora se pronuncie un gran discurso en el que sólo se dicen cosas verdaderas, ojalá fácilmente comprobables, para concluir con una afirmación absurda Q, que al estar precedida de tan convincente discurso no despierta mayores dudas entre los oyentes de que se trata de una brillante y certera demostración de la verdad de Q, que además evidencia la elocuencia del orador (en la literatura reciente de las calumnias hay buenos ejemplos).

Frecuentemente encontramos también la generalización, no necesariamente con el interés de estigmatizar a partir de un ejemplo o de una pequeña muestra, como lo señalaba arriba, sino como costumbre de caracterizar grupos de personas con base en el conocimiento de una o de unas pocas personas de ese grupo. Igual si se trata de un país o de una región. Me refiero a sentencias como: "Todos los colombianos son narcotraficantes", "a todos los costeños les gusta el vallenato". Y qué decir de las generalizaciones para los grupos de profesionales o las culturas: "Todos los filósofos son aburridos", "todos los mexicanos comen picante", "todos los antioqueños son negociantes y todos los santandereanos son peleadores". Combinada la generalización con una forma condicional puede afirmarse por ejemplo: "Todos los árabes huelen mal y los mejores ingenieros son árabes, entonces los mejores ingenieros huelen mal".

Existe también la marcada tendencia a calificar a todos por una experiencia, casi siempre negativa. Si tuvimos un pésimo profesor de matemáticas, afirmamos que "todos los profesores de matemáticas son pésimos". Si en Nueva York un taxista turco nos cobró más de lo indicado, entonces afirmamos que los turcos (todos) son "tumbadores". Si en una oficina no nos contestaron el teléfono, aseguramos que "allá nunca contestan". Pero peor aún es la tendencia a calificar a todos los habitantes de un país de acuerdo con sus gobernantes: "Todos los venezolanos son groseros e incultos" o "todos los gringos son ignorantes".

No escapan a estas generalizaciones las que podemos clasificar entre las paradojas. Así, por ejemplo, el político que muy enfáticamente afirma que "todos los políticos son corruptos". Esa es una buena paradoja, comparable a la antigua y famosa paradoja de Epiménides: "Todos los cretenses son mentirosos". Como Epiménides era cretense, ¿es entonces verdadera la afirmación?"

1.5.16 Aplicaciones de la tautología a la teoría de conjuntos.

Las tautologías estudiadas permiten, deducir fórmulas importantes de la teoría de conjuntos.

Teorema 15

Cada subconjunto de U (conjunto universal) es el conjunto de verdad de una función proposicional.

Demostración:

Sea A un subconjunto de U. Si A es el conjunto de verdad de la función proposicional p_x, entonces $x \in$ A.

Teorema 16

Para todo P, Q, y R que sean subconjuntos de U, se cumple:

$$P \cap (Q \cap R) = (P \cap Q) \cap R \tag{12}$$

Demostración:

Se parte de la siguiente tautología: $[p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$.

Se sustituyen las variables de esta tautología por funciones proposicionales, y se obtiene la siguiente función proposicional, que es verdadera, para todo $x \in$ U

$[p_x \wedge (q_x \wedge r_x)] \leftrightarrow [(p_x \wedge q_x) \wedge r_x]$.

Por lo tanto: $\{x | p_x \wedge (q_x \wedge r_x)\} = \{x | (p_x \wedge q_x) \wedge r_x\}$.

Se aplica el teorema 1 y se obtiene: $\{x | p_x \wedge (q_x \wedge r_x)\} = P \cap (Q \cap R)$.

Y se sabe que: : $\{x | (p_x \wedge q_x) \wedge r_x\} = (P \cap Q) \cap R$.

Por lo tanto, se obtiene:

$P \cap (Q \cap R)\} = (P \cap Q) \cap R$

Teorema 17

Si dos fórmulas con proposiciones p, q, r, etc. son equivalentes, y contienen únicamente operadores $\wedge$, $\vee$, y $\neg$, entonces se obtiene una relación verdadera en los subconjuntos arbitrarios: P, Q, R, etc. de U, remplazando a p por P, a q por Q, a r por R, etc., a $\wedge$ por $\cap$, a $\neg$por ', y a $\leftrightarrow$ por =.

Teorema 18

$$(P\subseteq Q)\leftrightarrow[\forall x(p_x \to q_x)] \tag{13}$$

Demostración:

Para demostrar este teorema, se debe demostrar que si $P\subseteq Q$ es falso, entonces $[\forall x(p_x\to q_x)]$ es falso, y que si $\forall x(p_x\to q_x)$ es falso, entonces $P\subseteq Q$ es falso.

Se supone inicialmente que $P\subseteq Q$ es falso. Si esto se cumple, entonces hay un x para el que p_x es verdadero y q_x es falso. Para tal x, $p_x \to q_x$ es falso, y por lo tanto $\forall x(p_x \to q_x)$ es falso.

Recíprocamente si se supone que $\forall x(p_x \to q_x)$ es falso, entonces existe algún x para el cual $\neg(p_x \to q_x)$ es verdadero (Teorema 14), o sea $p_x \to q_x$ es falso, la existencia de este x demuestra que $P\subseteq Q$ es falso.

1.5.17 El recíproco y el contrarecíproco del condicional

A partir del condicional $\forall x(p_x \to q_x)$ se puede definir el recíproco, y el contrarecíproco, de este condicional.

$$\text{Recíproco } \forall x(q_x \to p_x) \tag{14}$$

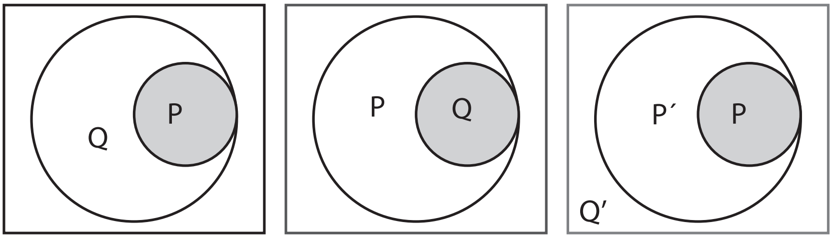
$$\text{Contra recíproco } \forall \text{x}[\neg q_x \to \neg p_x] \tag{15}$$

Si se supone que $\forall x(q_x \to p_x)$ es verdadero.

¿Qué se puede afirmar sobre la verdad de su recíproco y contra recíproco?

Como primera aproximación, se consideran los diagramas de Venn correspondientes al teorema 18 (figura 8).

Figura 8. Ilustración de los conjuntos de verdad del condicional y su reciproco



a. $\forall x[p_x \rightarrow q_x]$ b. $\forall x[q_x \rightarrow p_x]$ c. $\forall x[(\neg q_x) \rightarrow (\neg p_x)]$

De la inspección de la figura 8 a) y b) resulta evidente, que un condicional y su recíproco son afirmaciones completamente independientes, y que de la verdad de uno, no puede inferirse la verdad del otro.

De la inspección de la figura 8 a) y c), se infiere que el conjunto de verdad del condicional es idéntico al del contrarecíproco del condicional, y por lo tanto, si el contrarecíproco de un condicional es verdadero, se puede deducir que el condicional es verdadero.

Teorema 19

Un condicional de funciones proposicionales y su contra recíproco son equivalentes.

Demostración:

$(P \subseteq Q) \leftrightarrow [\forall x(p_x \rightarrow q_x)]$	Teorema 18
$P \cup P' = P + P' = \mathrm{U}$	Definición de conjunto complementario.
$P = \mathrm{Q} + \mathrm{Q}' - P\,'$	Propiedad asociativa
$\mathrm{Q} = P + P' - Q'$	Propiedad asociativa.
$P \subseteq Q \equiv Q + Q' - P' \subseteq P + P' - Q'$	Propiedad asociativa.
$(Q' \subseteq P') \leftrightarrow [\forall x(\neg q_x \rightarrow \neg p_x)]$	Propiedad asociativa.
$[\forall x(p_x \rightarrow q_x)] \leftrightarrow [\forall x(\neg q_x \rightarrow \neg p_x)]$	Teorema 18
$[\forall x(p_x \rightarrow q_x)] \leftrightarrow [\forall x(\neg q_x \rightarrow \neg p_x)]$	■

Si la demostración del contra recíproco de un teorema es más fácil que la del teorema dado, el teorema 19 valida la demostración.

1.5.18 Métodos de demostración en matemáticas

Una **prueba o demostración** de una proposición matemática es un argumento lógico que **establece, sin lugar a dudas, la verdad de la proposición.**

Cada una de las proposiciones deducidas en el argumento debe estar justificada en definiciones, axiomas, teoremas, leyes de equivalencia, o reglas de inferencia.

Existe una gran variedad de métodos para elaborar una prueba, los cuales se clasifican como métodos directo o indirecto. Dependiendo de la naturaleza de la proposición a demostrar, uno u otro método puede resultar más eficiente, o elegante.

La prueba debe elaborarse de tal manera, que convenza a cualquiera que tenga la competencia del pensamiento matemático.

1.5.19 Demostración directa (p→q)

Se le conoce como el método de la hipótesis auxiliar, o demostración condicional.

Si una proposición p es verdadera en una teoría, se puede demostrar que otra proposición q es verdadera, mediante una argumentación válida, que **utilice las definiciones, axiomas, lemas, teoremas, y leyes de equivalencia lógica disponibles en la teoría** (modus ponendo ponens).

El procedimiento que se utiliza es el siguiente:

1. Se supone verdadera la proposición p (antecedente o hipótesis auxiliar).
2. Se construye a partir de la hipótesis una argumentación lógica progresiva válida, **que utilice las definiciones, axiomas, teoremas, leyes de equivalencia y lógica disponibles en la teoría , para obtener mediante las reglas de validez y de inferencia,** la validez de q. La argumentación también puede combinar el razonamiento progresivo que parte de la hipótesis, con el regresivo que se apoya en la conclusión.
3. Al terminar la argumentación válida se establece la validez de $p \rightarrow q$, y entonces de la regla ponendo ponens se **puede inferir la validez** de q.

   En la aplicación del método directo es recomendable tener en cuenta los siguientes aspectos:

   a. El método directo se utiliza para la demostración de teoremas correspondientes a un condicional. Sin embargo no siempre se puede obtener la conclusión que se pretende, y por ello se utilizan otros métodos.

b. La validez del método se puede justificar en el hecho de que, el condicional es falso, únicamente si de un antecedente verdadero, se llega a una conclusión falsa. **Si se asume verdadero el antecedente, y si el condicional cumple con las reglas de validez y de inferencia, entonces necesariamente la conclusión es verdadera**.

c. El método no determina la validez absoluta del consecuente q, sino su validez relativa, ya que se asume como verdadero el antecedente p.

d. Si la conclusión deseada de un razonamiento es una proposición condicional, se agrega el antecedente como nueva premisa, y se trata de deducir el consecuente, del conjunto original de premisas, más la premisa agregada (hipótesis auxiliar). Si esto es posible queda validada la proposición condicional.

e. Para construir una demostración directa se debe elaborar una serie de proposiciones, justificadas en definiciones, axiomas, leyes, teoremas, etc., que conduzcan a la conclusión deseada. No hay metodologías predeterminadas para elaborarlas, ya que son la práctica y la creatividad, las claves fundamentales para alcanzar el objetivo.

En la construcción de demostraciones matemáticas se suelen emplear las siguientes herramientas: Razonamiento regresivo-progresivo, la ley de separación y la de sustitución.

1.5.19.1 Herramientas de la demostración directa

1.5.19.1 .1 Ley de separación

Si se supone que $\forall x(p_x \rightarrow q_x)$ es verdadera, y si a pertenece al conjunto de verdad P de p_x entonces a debe pertenecer al conjunto de verdad Q de q_x. Esta ley permite inferir el consecuente, si se asume que el antecedente y el condicional son verdaderos(modus ponendo ponens).

Esta ley es otra manera de expresar el teorema 18: $(P \subseteq Q) \leftrightarrow [\forall x(p_x \rightarrow q_x)]$

1.5.19.1.2 Ley de sustitución

En cualquier paso de una demostración se puede reemplazar, una proposición o una función proposicional por una equivalente.

Esta ley tiene dos consecuencias importantes:

a. En cualquier paso de una demostración, se puede sustituir una implicación por su contra recíproca.

b. En lugar de probar que $\forall x(p_x \rightarrow q_x)$ es verdadero, se puede probar la verdad de la proposición equivalente: P⊆Q.

Generalmente en las demostraciones de teoremas es esencial el uso de esta segunda consecuencia. Por ejemplo, si se quiere probar la proposición: $\forall x$: si x es par, entonces x^2 es par, se puede sustituir la proposición por su equivalente: $\{x|x$ es par $\} \subseteq \{x|x^2$ es par$\}$..

1.5.19.1.3. Razonamiento regresivo-progresivo

El razonamiento regresivo **examina la conclusión**, para formular una(s) pregunta(s) cuya(s) respuesta(s) **se contrasta(n) con la información dada por la hipótesis**, para construir mediante un razonamiento progresivo (deductivo), que utiliza definiciones, teoremas, leyes, etc., una **nueva proposición,** que **sustituye a la conclusión, y más cercana a la hipótesis.**

Algunas demostraciones directas utilizan generalmente el razonamiento regresivo-progresivo. **El razonamiento regresivo orienta al razonamiento progresivo.** Para demostrar que de una hipótesis (H) se puede alcanzar una conclusión(C), se supone que H es verdadera, y se usa esta información para deducir la proposición elaborada con razonamiento regresivo, que sustituye a la hipótesis.

El **razonamiento regresivo** se inicia haciendo la siguiente pregunta: ¿Cómo o cuando puedo afirmar que la proposición de la conclusión es verdadera? Esta pregunta debe tener una respuesta que permite orientar la búsqueda de la demostración.

La(s) respuesta(s) a esta pregunta, debe contrastarse con la información suministrada por la hipótesis, para seleccionar la respuesta que sea significativa.

La respuesta seleccionada a esta pregunta se convierte en una nueva proposición (C_1) que garantiza el cumplimiento de la conclusión inicial($C_1 \rightarrow C$). De ser necesario se deben formular otras preguntas, cuyas respuestas generan otras nuevas proposiciones C_2,que **sustituyen** a C_1 ($C_2 \rightarrow C_1$).

La selección de la pregunta correcta, corresponde más al arte (experiencia),que a la ciencia.

El razonamiento progresivo o directo, se inicia con la proposición H (hipótesis) que se supone verdadera, y se obtiene de ella una nueva proposición H_1.

Esta nueva proposición (H_1) no depende del azar, sino que se debe formular para obtener la última proposición derivada del razonamiento regresivo.

Otras demostraciones utilizan únicamente el razonamiento progresivo, o el razonamiento regresivo.

1.5.19.2 Ejemplos de demostraciones directas

Ejemplo 31

Demostrar que, si un triángulo rectángulo de catetos x, y, e hipotenusa z, tiene un área de $\frac{z^2}{4}$, entonces el triángulo es isósceles.[20]

Demostración:

El razonamiento regresivo o inverso se inicia con la formulación de la pregunta: ¿Cómo puedo demostrar que un triángulo es isósceles?

Para esta pregunta hay dos respuestas:

a. Que los dos catetos son iguales.
b. Que los ángulos opuestos a los catetos iguales son iguales.

¿Cuál de las dos respuestas seleccionar?

Se debe mediante razonamiento progresivo mirar el contenido de la hipótesis. La información que da la hipótesis no se refiere a ángulos, y por lo tanto se selecciona la respuesta a), y en consecuencia la nueva proposición a demostrar será:

C_1: Los dos catetos (x,y) del triángulo deben ser iguales $x = y$

En este momento surge otra pregunta: ¿cómo determinar que dos números reales son iguales?

La respuesta a esta pregunta es cuando $x - y = 0$.

Esta respuesta se convierte en una nueva proposición C_2, que sustituye a la conclusión:

$$C_2: x - y$$

Se utiliza ahora el razonamiento progresivo para llegar a C_2, partiendo de H.

H: un triángulo rectángulo de catetos x, y, e hipotenusa Z, tiene un área de $\frac{z^2}{4}$.

La hipótesis se puede transformar utilizando la expresión para el área de un triángulo, en una nueva proposición

$$H_1: \frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$$

Operando sobre H_1, se obtiene: H_2: $2xy = Z^2$

Utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene: H_3: $2xy = x^2 + y^2$

Esta proposición se transforma utilizando las propiedades de la igualdad en:

$$H_4: x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

De las propiedades del binomio se obtiene H_5

$$H_5: (x - y)^2 = 0$$

Extrayendo la raíz cuadrada a ambos lados, se obtiene la proposición:

$$H_6: x - y = 0, \text{ pero } C_2: x - y = 0.$$

Y por lo tanto se demuestra la conclusión original.

Todo el procedimiento anterior se puede condensar de la siguiente manera:

Proposición	**Justificación**
H: un triángulo rectángulo de catetos x, y, e hipotenusa z, tiene un área de $\frac{z^2}{4}$,	Hipótesis
C_1: $x = y$	Los catetos deben ser iguales, para que el triángulo sea isósceles RR
C_2: $x - y = 0$	Condición para que dos números sean iguales. RP
H_1: $\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$	Definición de área del triángulo de base x, con altura y. RP
H_2: $2xy = z^2$	Propiedad de la igualdad. RP
H_3: $2xy = x^2 + y^2$	Teorema de Pitágoras,para la hipotenusa z. RP
H_4: $x^2 + y^2 - 2xy = 0$	Propiedad de la igualdad. RP
H_5: $(x - y)^2 = 0$	Teorema del binomio. RP

H_6: $x - y = 0 = C_2$ Extrayendo la raíz cuadrada. RP

C_1: $x = y$ Propiedad de la igualdad. RP

C: el triángulo de catetos x, y e hipotenusa z es isósceles.

Ejemplo 32

Dados

1. $\forall x(p_x \rightarrow q_x)$
2. $\forall x[(\neg r_x) \rightarrow (\neg q_x)]$
3. $\forall x(r_x \rightarrow s_x)$

Entonces se trata de demostrar:

4. $\forall x(p_x \rightarrow s_x)$ o $P \subseteq S$

Demostración:

Se utiliza el razonamiento progresivo. Se supone que $x \in P$, o p_x es verdadero.

$\forall x(p_x \rightarrow q_x)$ Hipótesis.

q_x es verdadero para $x \in P$ Separación.

$\forall x[(\neg r_x) \rightarrow (\neg q_x)]$ Hipótesis.

$\forall x(q_x \rightarrow r_x)$ Sustitución, contra recíproco del dado.

r_x es verdadero para $x \in P$ Separación

$\forall x(r_x \rightarrow s_x)$ Hipótesis.

s_x es verdadero para $x \in P$ Separación.

$P \subseteq S$ Definición.

Ejemplo 33

Si a, b son números pares, entonces $a + b$ es un número par".

Demostración:

Proposición **Justificación**

¿Cómo expresar que la suma es un número par? RR

C_1: $(a+b) = 2s$, s $\in Z$ Definición de número par.
De la hipótesis, ¿cómo expresar la suma? RP

a y b son números pares hipótesis

H_1:$a = 2n$, $n \in Z$; $b = 2k$, $k \in Z$ Definición de número par RP

H_2: $a+b = 2n+2k$ Ley uniforme de la suma RP

H_3: $a + b= 2(n+k)$; $(n+k)\in Z$ Ley distributiva del producto. RP

Comparando la expresión derivada de la conclusión, con la derivada de la hipótesis, se obtiene:

H_4 $(n+k) =s$ Existe un número s $s\in Z$ RP.

$H_5 = (a+b)=2s$

$H_5 = C_1$

Por lo tanto, la suma de dos números pares es un número par.

Se demuestra que, si a, y b son números pares, entonces $a + b$ es un número par.

Ejemplo 34

Utilizar el método directo para demostrar el siguiente teorema: La suma de tres números enteros consecutivos es un múltiplo de tres.

Demostración:

Proposición	**Justificación**
¿Cómo expresar que la suma de tres enteros consecutivos, es un múltiplo de tres? RR.	
C_1 : $a+b+c = 3$s, $s \in Z$	a, b, y c, son números enteros consecutivos por hipótesis. RR
H_1: $a = n$, $n\in Z$; $b = n+1$; $c =n+2$	definición de números enteros consecutivos. RP
H_2: $a+b+c = n+(n+1)+(n+2)$	Ley uniforme de la suma. RP
H_3 : $a+b+c=3n+3$	Ley asociativa y conmutativa. RP
H_4 : $a+b+c=3(n+1)$	Ley distributiva del producto. RP
H_5: $n+1=s$; $s \in$ Z	Ley de clausura de los números enteros.RP
H_5= C_1	$a+b+c$ es múltiplo de tres. RP-RR

1.5.20 Demostración indirecta

En muchas ocasiones no se puede utilizar el método directo de la demostración, porque es imposible o muy difícil construir un razonamiento, que partiendo de la hipótesis, permita llegar a lo que se quiere demostrar. En estos casos suele ser útil el método de demostración indirecta.

La demostración indirecta se puede construir, utilizando los siguientes principios:

a. La contradicción (reducción al absurdo). En este caso se asume como verdadera la negación de lo que se **quiere demostrar** (conclusión), y mediante **un razonamiento progresivo** se trata de encontrar una contradicción. De encontrarse la contradicción, se infiere la verdad de la conclusión. Este procedimiento se sustenta en la regla de inferencia denominada **ley de contradicción**: $\neg q \rightarrow (r \wedge \neg r)] \rightarrow q$.

b. La equivalencia entre un condicional, y su contra recíproco. Se asume como verdadera de la negación de la conclusión, y se aplica el razonamiento progresivo y regresivo, para obtener la negación de la conclusión. La equivalencia del condicional y su contrarecíproco, valida la verdad de la conclusión. Este procedimiento se fundamenta en la ley de equivalencia lógica, denominada **ley de la contra recíproca:** $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$.

1.5.20.1 Demostración por reducción al absurdo o contradicción

La contradicción es la incompatibilidad entre dos proposiciones, esto es, **cuando pretenden parecer válidas una proposición y su negación**, por ejemplo, no se puede decir que el tiempo es lluvioso, y seco en un mismo momento.

Una teoría es contradictoria o inconsistente, cuando se puede demostrar la existencia de una contradicción en ella, y esto invalida la teoría.

El método de demostración por reducción al absurdo, se basa en la tautología de la contradicción.

Se pueden dar dos casos: a) Demostrar la verdad de una proposición. b) Demostrar la verdad de un condicional.

a. Si lo que se quiere demostrar es la verdad de la proposición , entonces la estrategia a seguir consiste en suponer como válida la negación de la proposición a demostrar, **y razonar utilizando la demostración directa, para tratar de generar una contradicción**, lo que permite afirmar que, si en un condicional válido, con antecedente verdadero, se concluye en algo falso (la contradicción), es porque la hipótesis, o sea la negación de la proposición que se pretende demostrar, es falsa y entonces la proposición inicial es verdadera.

En lenguaje simbólico se expresa por: Si $\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)$ es verdadera, entonces es verdadera.

Se demuestra esta regla de inferencia denominada de la contradicción, utilizando el método directo:

Proposición	**Justificación**
$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)$	Hipótesis.
$\neg (q \wedge \neg q) \rightarrow p$	Equivalencia del contra recíproco. RP
$(\neg q \vee q) \rightarrow p$	Ley de Morgan. RP
$(\neg q \vee q) \equiv \mathrm{V}$	Ley del medio excluso. RP
p	Ley del condicional. RP

b. Si lo que se quiere demostrar es un condicional $p \rightarrow q$, el método de la contradicción asume como verdadera la hipótesis p y la negación de la conclusión $\neg q$. Se razona progresivamente con estas dos proposiciones, y se busca una contradicción. Si se encuentra la contradicción, se demuestra que q (conclusión) es verdadera, por las reglas del condicional.

La validez de este método se fundamenta en la siguiente regla de inferencia:

Si $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg r)$ es verdadera, entonces q es verdadera.

Se demuestra esta regla de inferencia con la siguiente argumentación:

Proposición	**Justificación**
$(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg r)$	Hipótesis
$\neg (r \wedge \neg r) \rightarrow \neg (p \wedge \neg q)$	Equivalencia del contra recíproco. RP
$(\neg r \vee r) \rightarrow \neg p \vee q)$	Ley de Morgan. RP
$(\neg r \vee r) \equiv \mathrm{V}$	Ley del medio excluso. RP
q	Ley del condicional ■

Para funciones proposicionales, cuando se quiere probar que $\forall x(p_x \rightarrow q_x)$ es verdadera, se supone $\neg \forall x(p_x \rightarrow q_x)$ es verdadera. Al aplicar las reglas para formar negaciones, se tiene: $\exists x\{p_x \wedge (\neg q_x)\}$ es verdadera. Por definición de la conjunción, y por interpretación del cuantificador, se puede afirmar que existe un x para el cual p_x y $\neg q_x$ son verdaderas. Esto genera una contradicción con la tabla de verdad del condicional: si la hipótesis es verdadera y la conclusión falsa, el condicional es falso. Por lo tanto: $\exists x\{p_x \wedge (\neg q_x)\}$ es falsa y en consecuencia $\forall x(p_x \rightarrow q_x)$ es verdadera.

La pregunta que surge en este momento es: ¿cuál es la contradicción que se debe buscar? La respuesta a esta pregunta es, que no existen líneas de acción específicas para encontrar la contradicción y en esto radica la dificultad del método. Cada problema proporciona su propia contradicción, y usualmente se requiere de creatividad, perspectiva, persistencia e intuición para generar la contradicción.

Ejemplo 35

Demostrar, utilizando el método de reducción al absurdo, el siguiente condicional: Si a^2 es un número par, entonces a es un número par.

Demostración:

Proposición	**Justificación**
H_1: a^2 es un número par (p)	Hipótesis inicial
H_2: a es impar $(\neg q)$	Hipótesis de reducción al absurdo.
C_1: $a = 2n + 1; n \in Z$	Definición de número impar. RR

Dado que la hipótesis inicial se refiere al cuadrado del número, se pregunta: ¿Cómo se expresa el cuadrado de un número impar? RP

C_2: $a^2 = (2n+1)^2$	Ley uniforme del producto. RP
C_3: $a^2 = 4n^2+4n+1$;	leyes distributiva, conmutativa y asociativa. RP
C_4: $a^2 = 2(2n^2+2n)+1$	ley distributiva del producto RP
C_5: $(2n^2+2n) = s \in Z$	Ley de clausura del producto. RP
C_6: $a^2 = 2s+1$	Definición de número impar RP
C_7: $(p \wedge \neg q) = (H_1 \wedge C_6) = F$	H_1 y C_6 son contradictorias.

a^2 es un número par por hipótesis inicial, pero es un número impar por conclusión (contradicción).

Por lo anterior, q es verdadera, y se demuestra que, si a^2 es un número par, entonces a es un número par ■.

Ejemplo 36

Demostrar utilizando el método de reducción al absurdo, la verdad de la siguiente proposición: el número $\sqrt{2}$ es irracional (p).

Demostración:

Proposición	**Justificación**
1. H: $\sqrt{2}$ es un número racional ($\neg p$)	Hipótesis de la contradicción.
2. H_1: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p y $q \in N, q \neq 0$.	Definición de número racional. RP . p y q no tienen un divisor común.
3. H_2: $2 = \frac{p^2}{q^2}$.	Propiedad de la igualdad. RP
4. H_3: $p^2 = q^2$.	Propiedad de la igualdad. RP
5. H_4: p^2 es par y también p	Demostración anterior. RP
6. H_5: $p=2r$ $r \in N$	Definición de número par. RP
7. H_6: $(2r)^2 = 2q^2$	Sustitución de (6) en (3). RP
8. H_7: $4r^2 = 2q^2$	Elevando al cuadrado. RP
9. H_8: $2r^2 = q^2$	Dividiendo por 2. RP
10. H_9: es par y también q	Por demostración anterior. RP.
11. H_{10} contradicción	p y q tienen a 2 como divisor común y se contradice con la definición de número racional.

Por lo anterior: $\neg p$ es falsa, y p es verdadera,entonces: $\sqrt{2}$ es un número irracional.

1.5.20.2 Demostración por el contra recíproco

Cuando no se puede demostrar una proposición originada en un condicional o implicación, se puede intentar demostrar el contra recíproco del condicional, y si ello se puede, queda demostrado el condicional, por la ley de equivalencia lógica del contra recíproco.

Ejemplo 37

Se pide demostrar el siguiente teorema: si el cuadrado de un número es impar, entonces el número es impar.

Demostración:

p = el cuadrado de un número es impar

q = el número es impar.

Se pretende demostrar la implicación $p \rightarrow q$

Se aplica inicialmente el método directo:

a^2 es un número impar	Hipótesis
$a^2 = 2n+1$	Por definición de número impar.
$a = \sqrt{(2n+1)}$	Extracción de la raíz cuadrada.

De esta expresión no se puede afirmar nada, y en consecuencia se adopta como estrategia para demostrar el teorema, utilizar el contra recíproco del condicional.

Demostración:

Proposición	**Justificación**
a es un número par ($\neg q$)	Hipótesis del contra recíproco.
$a = 2n$; $n \in Z$	Definición de número par. RP
$a^2 = (2n)^2$; $4n^2 = 2(2n^2)$	Propiedad de la igualdad. RP
$a^2 = 2s$, $s = 2n^2$, $s \in Z$	Definición de número par. RP
a^2 es par ($\neg p$)	Negación del antecedente por conclusión RP
$[\neg q \rightarrow \neg p]$	Contra recíproca del condicional por conclusión RP
$p \rightarrow q$	Por equivalencia del contrarecíproco RP
q = el número es impar. ■	Regla del condicional RP

1.5.21 Demostración por el principio de inducción matemática

En ocasiones se presentan situaciones en la teoría de los números naturales, en las que se pide demostrar proposiciones matemáticas como la siguiente:

$$\forall n \in Z, n; 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En estos casos como no se puede demostrar la verdad de la proposición comprobándola en un número finito de casos, se debe construir una demostración general por otros medios.

Para garantizar que después de haber comprobado la verdad de la proposición para varios casos, y tener la certidumbre que no se va a presentar un caso donde no se cumpla, se debe formular un axioma que de sustento a esta situación.

Una analogía que ayuda en este caso, es la de pensar que los enteros positivos son como los peldaños de una escalera infinitamente alta, con su base en tierra, y su fin en un sitio no conocido. El primer peldaño es el 1, el siguiente es el 2, y así sucesivamente. Para subir por esta escalera hasta un peldaño determinado se deben realizar dos pasos esenciales:

1. Se deben colocar los pies en el peldaño inmediato más bajo.
2. Ser capaz de subir al peldaño siguiente.

El proceso anterior se formaliza mediante el siguiente axioma denominado: Axioma de la inducción matemática.

Sea a un entero (positivo, negativo o cero) y A el conjunto de los enteros mayores o iguales que a, o sea $A=\{n \mid n\geq a\}$. Si S es un subconjunto de A, con las dos propiedades siguientes:

1. S contiene a a.
2. Para todos los enteros k de A, si k pertenece a S, entonces $k+1$, también pertenece a S, y por lo anterior se verifica que el conjunto S es igual al conjunto A.

Este axioma se puede formular como un procedimiento operativo, que se denomina Principio de inducción matemática.

1.5.21.1 Principio de inducción matemática

Sea un conjunto de números enteros definido como $A=\{n \mid n\geq a\}$ y una proposición de la forma: Para todo n de A, p_n.

Se puede demostrar la verdad de esta proposición, mediante el siguiente procedimiento:

1. Se demuestra p_n para $n = a$ o sea p_a es verdadera.
2. Se demuestra que para todo k de A, el condicional $pk\rightarrow p_{k+1}$, es verdadero.

El principio de inducción se puede simbolizar de la siguiente manera:

$$[P(0) \wedge (\forall k > 0 : P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n \geq 0 : P(n).$$

Ejemplo 38

Demostrar que para $\forall n, n \in z$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración:

Sea $A=\{n \mid n \geq 1\}$ y p_n: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Se demuestra que p_1 es verdadera. $p_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
2. Para demostrar que se cumple $p_k \rightarrow p_{k+1}$, se elabora una prueba directa, que partiendo de p_k permita llegar a p_{k+1}

Proposición	**Justificación**
1. p_k:$1+2+3+\cdots\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$	Hipótesis
2. $1+2+3+\cdots\ldots+k+(k+1)= \frac{k(k+1)}{2}+k+1$	Propiedad de la igualdad de(1)
3. $\frac{k(k+1)}{2}+k+1= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$	(Propiedad asociativa y distributiva
4. $(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)$	Propiedad asociativa y distributiva
5. $\frac{(k+1)(k+2)}{2} = p_{k+1}$ ■	

Por lo tanto, la proposición es verdadera para $\forall n \geq 1$, $n \in Z$

1.5.22 Demostración de existencia

Un paso lógico a realizar antes de intentar resolver un problema es determinar si el problema tiene solución.

Un ejemplo de un problema matemático que no tiene solución es: hallar todos los enteros que satisfacen la siguiente ecuación: $7x+5=2x+9$.

Para tener seguridad que se trabaja con problemas que tienen solución, los matemáticos han desarrollado una serie de teoremas de existencia, que son de la forma $\exists x p_x$ o sea hay un número x, que satisface una propiedad (p) dada.

Un ejemplo importante de estos teoremas es el siguiente: $\exists x$(x es un número real) tal que, si a y b son números reales y $a \neq 0$, entonces $ax+b = 0$.

Para probar este teorema se debe mostrar un número x, que tenga la propiedad requerida.

El número $x=-(b/a)$, satisface esta propiedad (la ecuación dada).

1.5.23 Métodos de refutación

Los métodos de demostración tienen como propósito evidenciar la verdad de una proposición matemática.

Si el propósito es verificar que una proposición no es verdadera, se utilizan los métodos de refutación.

La refutación sirve para demostrar que la afirmación es falsa, más no que es válida para todos los casos.

Se estudian los métodos de refutación por contradicción, y el de presentar un ejemplo contrario.

a. Refutación por contradicción

   Se supone que la afirmación propuesta es verdadera, y se realiza un proceso deductivo que conduce a una afirmación, que contradice un teorema conocido, entonces se puede inferir que la proposición dada es falsa.

Ejemplo 39

Refutar la afirmación: El cuadrado de un número impar es par.

Solución:

Todo número impar se puede expresar en la forma $2a+1$, con a = número entero. Todo número par se puede expresar como $2b$, con b = número entero.

La afirmación dada implica que: = $(2a+1)^2 = 2b$, para algún a y b. Del álgebra se puede afirmar $4a^2 + 4a + 1 = 2b$. Los dos miembros de la ecuación representan al mismo entero, pero el de la izquierda no es divisible por 2 y el de la derecha si, lo que es una contradicción, para la definición de igualdad.

b. Refutación mediante un ejemplo del contrario.

Este método es adecuado cuando se trata de refutar afirmaciones de la forma $\forall x p_x$

Ejemplo 40

Refutar la siguiente afirmación: $\forall x[x^2+16=(x+4)(x-4)]$.

Solución:

La refutación de la anterior afirmación se logra, al mostrar un valor de x, que no cumpla la afirmación. Por ejemplo $x = 1$.

1.5.24 Estrategias para realizar una demostración

No hay soluciones mágicas para realizar las demostraciones, y nada puede sustituir a la experiencia, que se obtiene de la práctica permanente en esta actividad.

A continuación se presentan algunas reglas generales y estrategias, que en ocasiones resultan exitosas, para construir la demostración[20].

a. Se debe inicialmente intentar una demostración directa, utilizando el razonamiento regresivo-progresivo.

b. Si la relación entre la hipótesis y la conclusión parece compleja, se debe trabajar hacia atrás. Este procedimiento se conoce como **razonamiento regresivo o inverso**.

   El razonamiento regresivo o inverso consiste en mirar la conclusión**, para hacerle una pregunta, y responder de acuerdo a la hipótesis, para obtener una nueva proposición,** que simplifique la conclusión, y de esta manera obtener una meta más sencilla, para elaborar una demostración menos compleja. Entonces se puede tratar esta nueva proposición como si fuera el objetivo. Se debe preguntar que se podría hacer para obtener este nuevo objetivo. Por ejemplo: si la conclusión es un condicional $A \to B$, se puede intentar usar la regla del condicional, y entonces utilizar una subprueba (demostración auxiliar) en la que se asume A como verdadera y se deriva B.

c. Si la conclusión presenta una relación estrecha con la hipótesis, se puede trabajar hacia adelante (razonamiento progresivo o directo) desde lo que se tiene, y mirando a donde se quiere llegar, observando las premisas y sin olvidar las proposiciones que se han derivado. Se deben utilizar las definiciones y sus proposiciones equivalentes, axiomas, teoremas, lemas (proposiciones preliminares que se utilizan para demostrar un teorema), corolarios (proposiciones que surgen después de demostrar el teorema), para responder a las preguntas de razonamiento progresivo que se propongan, y se deben tener en cuenta las reglas de inferencia que se conocen.

   Para una prueba corta es posible que se pueda eliminar las premisas, e introducir la conclusión. Una prueba larga es formalmente un número de pruebas cortas, vinculadas para las que se puede cerrar la brecha entre hipótesis y conclusión, trabajando alternativamente desde la conclusión.

d. Se deben tener en cuenta las leyes de equivalencia lógica. Por ejemplo, si se quiere demostrar una disyunción es más fácil sustituirla por un condicional, utilizando la ley de equivalencia para el condicional. Demostrar para un cuantificador universal la negación de una proposición, es más fácil que demostrar la negación del cuantificador existencial, de la proposición o función proposicional.

e. Se debe preferir el método indirecto de la contradicción, que el directo progresivo-regresivo, ya que en el primero se tiene dos proposiciones para razonar progresivamente, y en el segundo sólo una, sin embargo no hay cómo determinar de antemano, en dónde va a surgir la contradicción.

   Como regla general, se debe usar la contradicción cuando la negación de la conclusión provee información significativa para el problema**. Si en la conclusión aparece la palabra "no", es muy conveniente utilizar el método por contradicción**. Las demostraciones elaboradas por contradicción son mucho más cortas, y más fáciles que las directas.

f. Se debe repetir el proceso cuantas veces sea necesario. Una vez se haya decidido cómo alcanzar la conclusión, se deben revisar las premisas, teniendo en mente como manipularlas para alcanzar el objetivo.

g. Hay que ser persistente y no desfallecer, si en la primera oportunidad no se resuelve el problema. Se debe proponer otro punto de vista, y hacer un nuevo intento.

Ejemplo 41

Elaborar una prueba (demostración), para la siguiente proposición matemática: Para dos números reales positivos, a y b, si $a<b$, entonces $a^2<b^2$[20].

Demostración:

En este caso, que la relación entre la hipótesis y la conclusión no es muy compleja, es aconsejable trabajar con razonamiento progresivo.

Se empieza por reconocer que se tienen dos números reales positivos, a y b.

Se identifica lo que se quiere alcanzar: $a<b \rightarrow a^2<b^2$.

Para utilizar el método directo se debe reconocer:

Hipótesis: a, b, números reales positivos y $a<b$

Conclusión: $a^2<b^2$.

En este momento se reflexiona, sobre cómo a partir de la hipótesis se puede obtener una proposición parecida a la conclusión.

Se observa que en la conclusión aparecen los cuadrados de los números que aparecen en la hipótesis, y por lo tanto en la desigualdad de la hipótesis, se puede primero multiplicar por ambos lados de la desigualdad.

De acuerdo a la ley multiplicativa de las desigualdades, se obtiene:

$$a^2 < ab$$

Si se multiplica por b ambos lados de la desigualdad de la hipótesis, y se obtiene:

$$ab < b^2$$

Dado que ambas desigualdades involucran al término ab, y ambas desigualdades se deben cumplir, se puede escribir:

$$a^2 < ab < b^2$$

De la ley transitiva de las desigualdades se puede escribir:

$$a^2 < b^2$$

De esta manera, se obtiene la conclusión.

Ejemplo 42

Elaborar una prueba (demostración), para la siguiente proposición matemática: Para dos números reales positivos, a y b, si $a<b$, entonces $4ab< (a+b)^2$.[20].

Demostración:

Hipótesis: a y b *números reales* y $a < b$

Conclusión: $4ab< (a+b)^2$**.**

En este caso, la dificultad radica en que la conclusión es compleja en relación a la hipótesis, y no es muy claro el camino que conduce a la conclusión partiendo de la hipótesis.

En este caso es conveniente trabajar hacia atrás (método inverso). Se parte de la conclusión y se simplifica, para obtener una meta más sencilla, y así elaborar una subprueba más sencilla.

Proposición	**Justificación**
C: $4ab<(a+b)^2$	Se parte de la conclusión RR.
C_1: $4ab<a^2+2ab+b^2$	Teorema del binomio RP
C_2: $0<a^2-2ab+b^2$	Propiedad de la desigualdad RP
C_3: $0 < (a- b)^2$	Teorema del binomio RP
C_4: $(a- b)^2>0$	Propiedad de la desigualdad $(a- b)^2$ RP
C_5: $(a- b>0) \vee (a- b>0)$	El cuadrado de un número es positivo(RP)
C_6: $a< b$	Propiedad de la desigualdad RP
C_6:=H	

Otra posibilidad sería utilizar a C_3, como conclusión sustituta:

Hipótesis: a y b *números reales* y $a<b$

Conclusión: $0<(a- b)^2$

En este caso se trabaja hacia adelante (método directo)

$$a < b$$

Utilizando la ley de la suma de las desigualdades, adicionamos $(-a)$ a cada lado de la desigualdad y obtenemos:

$$0 < (a - b)$$

Utilizando la ley multiplicativa de la desigualdad se obtiene:

$$0 < (a - b)^2$$

Pero $(b - a)^2 = (a - b)^2$

Entonces $a < b) \rightarrow (0 < (a - b)^2) \rightarrow 4ab<(a+b)^2$ ■.

Actividades

Teoría

Responder las siguientes preguntas:

1. Hacer un análisis comparativo en cuanto al aprendizaje, a la aplicación y a la utilidad de la Matemática, de las dos definiciones que se han utilizado para la Matemática:
   » Definición 1: La Matemática es un cuerpo de conocimientos, relacionado con hechos y procedimientos, que tratan con cantidades y magnitudes, y la forma y relaciones entre ellas.
   » Definición 2: La Matemática es la ciencia de los patrones o modelos, estrechamente relacionada con las ciencias, en su afán de buscar patrones en las evidencias empíricas
2. Enumerar algunas razones por las cuales es importante la Matemática en la sociedad humana.
3. Enumerar tres ejemplos de los patrones que estudia la matemática.
4. Explicar lo que se quiere decir con la siguiente afirmación: Un aspecto esencial durante la interacción con los problemas o contenidos matemáticos, es que los estudiantes busquen, representen y describan cambios o formas de variación (incluyendo invariantes) entre los objetos o atributos asociados con la actividad o problema que los lleven a la identificación de patrones, conjeturas o relaciones .
5. Enumerar y describir las herramientas que utiliza la Matemática.
6. ¿En qué consiste el pensamiento matemático? ¿Para qué sirve la habilidad de pensamiento matemático?
7. Definir:
   a. Lógica del sentido común.
   b. Lógica científica o formal.
   c. Lógica matemática.
   d. Argumentación.
8. Explicar la siguiente expresión: A la lógica le interesa, la forma de las proposiciones que hacen parte del argumento, y no la verdad o falsedad de estas.
9. ¿Cuándo un argumento es válido? ¿Por qué, si el argumento es válido (correcto), la conclusión puede ser falsa?¿Qué es una falacia?¿Por qué la lógica es una ciencia deductiva?

10. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son posibles? En caso de que sean posibles se debe dar un ejemplo, si no es posible se debe indicar por qué.
    a. Un argumento válido es el que tiene una premisa falsa y una verdadera.
    b. Un argumento válido es el que tiene una conclusión falsa.
    c. En un argumento válido la conclusión es una contradicción.
    d. En un argumento inválido la conclusión es una tautología.
    e. Una tautología puede ser una contingencia.
    f. Dos fórmulas equivalentes son ambas tautologías.
    g. Dos fórmulas son lógicamente equivalentes, si una es contingente y la otra una tautología.
    h. Dos fórmulas lógicamente equivalentes son un conjunto inconsistente.
    i. Un conjunto consistente de fórmulas contiene una contradicción.
    j. Un conjunto inconsistente de fórmulas es aquel que contiene una tautología.
11. Para los siguientes argumentos, indicar si el argumento es válido o una falacia. En caso de ser una falacia, describir el tipo de falacia.
    a. Voy a votar por el NO, en el plebiscito para aprobar los acuerdos de la Habana con las FARC, porque la popularidad de Santos es muy baja, y no quiero que aumente la popularidad del gobierno.
    b. Joseph Smith fue un profeta de Dios; Joseph Smith escribió el libro del mormón; Por lo tanto el libro del mormón siempre dice la verdad.
    c. La gente honrada está en libertad.Yo estoy en libertad. Por lo tanto, soy honrado.
    d. Einstein se opuso al principio de incertidumbre de Heisenberg; Einstein fue premio Nobel de Física; por lo tanto el principio de incertidumbre es falso.
    e.) Pablo Escobar fue el mayor narcotraficante del siglo XX. Pablo Escobar era colombiano. Por lo tanto, todos los colombianos son narcotraficantes.
    f. No existe evidencia de la existencia de vida extraterrestre. Por lo tanto, la vida solamente existe en el planeta Tierra.
    g. La carrera de Ingeniería Electromecánica de la UFPS. tiene un nuevo pensum de estudios. Entonces, esta carrera es la mejor de la UFPS.

h. El gallo siempre canta antes de salir el sol, entonces el canto del gallo provoca la salida del sol.

i. Debes conducir respetando las normas de circulación, porque de lo contrario te multarán.

j. No estoy de acuerdo con el régimen político de Cuba. Réplica: Lo que pasa es que defiendes las políticas de Estados Unidos.

k. La homeopatía es una terapia eficaz, ya que hay médicos que la recomiendan.

l. ¿Por qué voy a dejar de fumar doctor, si usted fuma dos paquetes diarios?

m. El 90% de la población vive bajo el sistema capitalista. Las ¾ partes de la población aguantan hambre, o viven en la miseria. Por lo tanto, el comunismo es un sistema fracasado.

12. El siguiente silogismo,es un ejemplo clásico de argumento válido: Los hombres son mortales.

    Sócrates es hombre.

    Por lo tanto, Sócrates es mortal.

    Explicar qué ocurre con el siguiente silogismo:

    Los chinos son numerosos.

    Confucio es chino.

    Por lo tanto, Confucio es numeroso.

13. Enumerar dos diferencias entre la lógica proposicional y la de predicados

14. Definir los siguientes conceptos:

    a. Proposición simple.

    b. Proposición compuesta.

    c. Proposición matemática.

    d. Axioma.

    e. Conjunto.

    f. Subconjunto.

    g. Subconjunto propio.

    h. Correspondencia biunívoca.

15. Definir los siguientes conceptos: variable, función proposicional, conjunto de verdad de una función proposicional,cuantificador universal,cuantificador existencial,conjunción de proposiciones, disyunción de proposiciones.
16. ¿Cuál es la relación que existe entre la conjunción de dos funciones proposicionales y la intersección de sus conjuntos de verdad?
17. ¿Cuál es la relación que existe, entre la disyunción de dos funciones proposicionales, y la unión de sus conjuntos de verdad?
18. ¿Cómo se define el complemento de un conjunto?
19. ¿Cuál es la relación entre la negación de una función proposiciónal, y el complemento del conjunto de verdad de la proposición?
20. Definir para dos proposiciones:
    a. El condicional.
    b. La implicación.
    c. La equivalencia.
21. ¿Cuál es la diferencia entre el condicional de dos proposiciones y la implicación?
22. Explicar con palabras propias la diferencia entre condición suficiente y condición necesaria.
23. Definir los conceptos de fórmula, tautología y equivalencia.
24. Justificar mediante un razonamiento, las siguientes afirmaciones:
    a. $\forall x p_x$ es verdadero, si y solo si, P es el conjunto U.
    b. $\forall x p_x$ es falso, si y solo si, P no es el conjunto U.
    c. $\neg(\forall x p_x)$ es verdadero, si y solo si P no es el conjunto U.
    d. $\neg(\forall x p_x)$ es falso, si y solo si, P es el conjunto U.
25. ¿Qué es una ley de equivalencia lógica? ¿Para qué sirve?
26. Enumerar e interpretar, las leyes de equivalencia lógica.
27. Definir operacionalmente, el concepto de argumento lógico.
28. Construir un argumento válido, cuya conclusión sea falsa. ¿Cuando un argumento es inválido?
29. ¿Qué es una regla de inferencia lógica? Construir un ejemplo, donde aplique la regla de inferencia modus ponens, y otro con la regla modus tollens.

30. Enumerar e interpretar, las reglas de inferencia lógica(Tabla 11).
31. Los antiguos griegos formularon una regla básica de razonamiento para demostrar proposiciones matemáticas denominada *modus ponendo ponens.* Se pide utilizar la tabla 11, para expresar en palabras la regla de inferencia *modus ponens.*
32. Demostrar que un condicional y su contra recíproco, son funciones proposicionales equivalentes.
33. Enumerar los métodos de demostración en Matemáticas.
34. Describir en que consiste, el método de demostración directo en Matemática.
35. ¿Cuál es la diferencia entre el razonamiento progresivo y el regresivo?¿Cómo se utiliza en las demostraciones directas?¿Existe alguna relación entre ellos?¿Establezca una relación entre el juego del laberinto y el razonamiento progresivo-regresivo.
36. Para cada una de las siguientes hipótesis indique al menos tres proposiciones que surjan como resultado de la aplicación de un paso de razonamiento regresivo:
    a. El número real x satisface la condición $x^2 - x + 2 < 0$
    b. El círculo C consiste de todos los valores x y y que satisfacen $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$.
37. Para cada uno de los siguientes problemas, elabore al menos dos preguntas de razonamiento regresivo:
    a) Si n es un entero par entonces n^2 es un entero par.
    b) Si n es un entero para el cual $-3n^2+2n+8=0$, entonces $2n^2-3n=-2$.
38. Para cada una de las siguientes preguntas de razonamiento regresivo, elabore al menos tres respuestas:
    a. ¿Cómo se puede demostrar que dos números reales son iguales?
    b. ¿Cómo se puede demostrar que dos triángulos son congruentes?
    c. ¿Cómo se puede demostrar que dos rectas son paralelas?
    d. ¿Cómo se puede demostrar que un cuadrilátero es un rectángulo?
39. Describir en qué consiste el método de demostración indirecto en matemática
40. Describir en qué consiste,¿ el método de demostración por el contra recíproco.

41. Describir en que consiste, el método de demostración por reducción al absurdo, cuando se pretende demostrar:
    a. Una proposición.
    b. Un condicional.
42. ¿Qué es el método de refutación.? ¿Para qué sirve?

Problemas

1. Indicar cuáles de las siguientes definiciones no son satisfactorias, justificando la respuesta:
    a. Cuadrado es el rectángulo de cuatro lados.
    b. Pentágono regular es un polígono de cinco lados.
    c. El Número complejo es el que tiene una componente real, y otra componente imaginaria
    d. Cubo es un paralelipipedo rectángulo.
    e. Dos rectas coplanarias son paralelas si y solo si no se cortan.
    f. Un número primo es un número real divisible por la unidad.
    g. Un número par es aquel, cuyo residuo al ser dividido por dos es cero.

[Respuesta: a) No satisfactoria; b) No satisfactoria; c) Si; d) No; e) Si]

2. Indicar cuáles de los siguientes juicios son proposiciones:
    a. Carlos es blanco.
    b. Algunos estudiantes son pobres.
    c. $x^2 + 3x + 2 = 0$.
    d. Este triángulo es isósceles.

[Respuestas: a)Si; b)Si; c)No; d)Si]

3. Escribir los conjuntos dados en su forma de comprensión, por su forma en extensión. El conjunto universal es el conjunto de los números reales.
    a. $\{x|4x^2 = 16\}$.
    b. $\{x|4x^2<0\}$.
    c. $\{x|x^2+2x+1=0\}$.
    d. $\{x|x=-x\}$.
    e. $\{x|x$ es primo y es par$\}$.
    f. $\{x|x$ es negativo y $x^2=4\}$

[Respuestas:a){2,-2}; b) ∅ ; c) {-1}; d) {0}; e) {2},f) {-2}]

4. Establecer siempre que sea posible,una correspondencia 1 a 1 entre los conjuntos dados:

   a. El conjunto de los enteros positivos, y el de los enteros negativos.

   b. {2,4,6,8,10,....};{3,6,9,12,15,....}

   c. El conjunto de los profesores de la UFPS, y el conjunto de todos los estudiantes de la UFPS.

   d. El conjunto de todos los enteros y el conjunto de los enteros positivos

   e. El conjunto de los hombres casados y el conjunto de las mujeres casadas.

[Respuestas: a) $n \leftrightarrow -n$; b) $2n \leftrightarrow 3n$; c) No es posible; d) $0 \leftrightarrow 1$; $1 \leftrightarrow 2$;$-1 \leftrightarrow 3$; $2 \leftrightarrow 4$; $-2 \leftrightarrow 5$; $3 \leftrightarrow 6$; $-3 \leftrightarrow 7$………… e) No es posible por la bigamia]

5. Construir todos los subconjuntos del conjunto dado, e indicar cuáles son los subconjuntos propios.

   a. {1,3,4}

   b. {Juan,Luis y Horacio}

   c. {a,b,c,d}.

[Respuesta: a) {1},{3},{4},{1,3},{1,4},{2,4},{1,3,4},todos son subconjuntos propios excepto {1,3,4}]

6. Para las siguientes situaciones planteadas,indicar cuáles son los cuantificadores que hacen verdadera la situación descrita.

   a. $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12)$

   b. $x^2-7x+12=0$

   c. Los ángulos opuestos por el vértice, son iguales.

   d. Si x es un entero par, x^2 es un entero par.

   e. 5 es una raíz cuadrada de 25.

   f. El número entero 11 es un numero primo.

[Respuestas: a) $\forall x$;b) $\exists x$; c) $\forall x$; d) $\forall x$; e)Ninguna; f)Ninguna]

7. Escribir la conjunción y la disyunción de las siguientes proposiciones:

   a. Juan es un estudiante. Ana es hermosa.

   b. Todas las lineas son rectas. Todos los círculos son redondos.

8. Simplificar las siguientes conjunciones:

   a. $(p\geq 7)\wedge(p<12)$.

   b. $(x>5)\wedge(x<7)$.

   c. $(x<4)\wedge(x<6)$.

   d. $(y<4)\wedge(y^2<9)$.

   e. $(x\geq 0)\wedge(x\leq 0)$.

[Respuestas: a) $7\leq p<12)$;b) $(5<x<7)$; c)($x<4)$; d) $(-3<y<3)$; e)$x=0$]

9. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es más probable que ocurra y por qué?

   a. Marina es cantante y trabaja en un banco.

   b. Marina es tranquila y trabaja en un banco.

   c. Marina es tímida y trabaja en un banco.

   d. Marina es honesta y trabaja en un banco.

   e. Marina trabaja en un banco.

[Respuesta:la opción d)]

10. Se pide hallar los conjuntos de verdad de las conjunciones y disyunciones de las siguientes funciones proposicionales, considerando como conjunto universal el conjunto de los números reales($\Re$).

   a. $x^2=0$; $x=1$

   b. $(x+2)^2=0$; $x+2=0$

   c. $x>3$; x>5.

   d. $x-7=0$; $x>5$

   e. $x^2-16=0$; $(x+4)(x-4)=0$

[Respuestas: a) Conjunción φ ;Disyunción {0.1}; b) Conjunción: {-2}; Disyunción{-2}; c) Conjunción $\{x|x>5\}$; Disyunción $\{x|x>3\}$; d) Conjunción {7};Disyunción $\{x|x>5\}$; e) Conjunción: {4,-4}, Disyunción : {4,-4}

11. Hallar los conjuntos definidos por las operaciones dadas. Se considera como conjunto universal el conjunto de los números reales($\Re$).

   a. $\{x|x$ es entero $\}\cap\{x \mid x>0\}$.

   b. $\{x|x$ es positivo $\}\cup\{x \mid x$ es negativo$\}$.

c. $\{x|x$ es entero par $\}\cup\{x \mid x$ es entero impar$\}$.

[Respuestas: a)$\{x|x$ es entero positivo$\}$; b)$\{x|x \neq 0\}$;c. $\{x|x$ es entero $\}$12)

12. Demostrar que los dos conjuntos son iguales:

a. $\{x|x^2\text{-}7x+12=0\}=\{x \mid x\text{-}3=0\}\cup\{x \mid x\text{-}4=0\}$

b. A ∩B=B∩A. Sugerencia: Emplear la definición de intersección.

c. A ∪B=B∪A. Sugerencia: Emplear la definición de unión.

13. Determinar los complementos de los conjuntos dados, en relación a los conjuntos universales definidos:

a. {1,3,5,7,....} U = el conjunto de todos los enteros positivos

b. $\{x|(x^2 = 1)\wedge(x>0)\}$ U = el conjunto de todos los números reales positivos

c. $\{x|x\leq 4\}$ U = $\Re$ (el conjunto de todos los números reales).

[Respuestas: a){2,4,6,8,10...}=Conjunto de los enteros positivos pares; b) $\{x|x\neq 1\}$; c) $\{x|x>4\}$.

14. Determinar P'=$\{x|\neg p_x\}$ para las siguientes funciones proposicionales p_x. Asuma como conjunto universal, el de los números enteros ($\mathbb{Z}$).

a. x=1

b. x+7=15

c. x^2+1=16

d. $x^2\geq 4$

[Respuestas: a) $\{x|x\neq 1\}$; b)$\{x|x\neq 8\}$ c) $\mathbb{Z}$; d)$\{x|-2<x<2\}$]

15. En un juicio, el fiscal argumentó: "si el acusado es culpable, entonces tendría un testigo". A ello, el abogado defensor respondió inmediatamente: "Eso es totalmente falso." El acusado decidió despedir a su abogado defensor. Justifique la decisión del acusado.

[Respuesta: para que la implicación sea falsa, la unica posibilidad es que el antecedente "el acusado es culpable" sea verdadero y el consecuente "tendría un testigo" sea falso. El acusado despidió al abogado porque, al no tener el testigo, el abogado defensor reconoce la culpa de su defendido con esa afirmación]

16. A partir de las dos proposiciones dadas, formar un condicional o una implicación,e indicar en cada caso, si es falso o verdadero el condicional:

a. p es: . 2+5=7 " q es " 3+3=8"

b. p es: “Este círculo tiene un radio de 5 cm”; q es”Este círculo tiene una área de 25π cm^2;

c. p es: ”Este círculo tiene un radio de 5 cm” ; q es”Este círculo tiene una circunferencia de 10π cm”.

d. p es: “Un cuadrado tiene 4 cm de lado; q es ”Un cuadrado tiene un área de 16cm^2”;

e. p es: “Un cuadrado tiene 4 cm de lado”; q es “Un cuadrado tiene un perímetro de 8 cm.

[Respuestas: a) F,condicional; b) V.Implicación; c) V.Implicación; d) V.Implicación; e) F.Implicación].

17. Utilizar el teorema 4 y considerar al conjunto de los enteros como conjunto universal,para deducir el conjunto de verdad de los siguientes condicionales:

a. Si x^2=1,entonces x=1 o-1

b. Si x=3 entonces $x \neq 5$.

c. Si $x^2-6x+8=0$ entonces $x=2$.

[Respuestas: a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Z}$; c) $\{x|x\neq 4\}$]

18. Los antiguos griegos formularon una regla básica de razonamiento para demostrar proposiciones matemáticas denominada *modus ponens*, la cual establece que si se conoce una proposicion p como verdadera, y se razona correctamente (implicación verdadera), entonces se puede concluir que q es verdadera. Se pide:

a. Construir una tabla de la verdad, para la siguiente proposición: $[p \wedge (p \rightarrow q)$. (Ejemplo 28)

b. Explicar como utilizar la tabla de verdad anterior, para demostrar que *modus ponens* es una regla válida de inferencia.

19. Determinar cual de las siguientes afirmaciones son falsas, o verdaderas. Considere como conjunto universal, al conjunto de números enteros:

a. n=2 solo si $n^2-n-2=0$.

b. n=2 si n^2-n-2=0.

c. n=2 es suficiente para $n^2-n-2=0$.

d. n=2 es necesario para $n^2-n-2=0$.

e. $n^2-n-2=0. \rightarrow (n=2$ y $n=1)$

f. $n^2-n-2=0. \rightarrow (n=2$ o $n=n1)$

g. $n^2 - n - 2 = 0 \leftrightarrow (n = 2 \text{ o } n = n1)$

[Respuestas: a) V; b) F; c) V; d) F; e) F; f) V; g) V]

20. Se pide para las siguientes frases se completen los puntos suspensivos con “si”, “sólo si” ó “si y sólo si” y se formule la propiedad usando los símbolos de implicación correspondiente: :

    a. Una suma de números enteros es impar… …uno de ellos es impar (si la suma es impar uno de ellos es impar).

    b. Un producto de números enteros es par … … … uno de ellos es par..

    c. Un número entero es par … … … su cuadrado es múltiplo de 4.

    d. Un número natural que acaba en 4 es múltiplo de 4 … … … la cifra de las decenas es par.

    e. Un número natural es múltiplo de 5 … … … acaba en 5.

    f. $x^2 - 5x + 6 = 0$ … … … $x = 2$ ó $x = 3$.

    g. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$… … … $x = 2$ ó $x = 3$.

    h. Un número x es un entero par , si y solo si, existe un entero y tal que $x = 2y$

21. Cuáles de las siguientes condiciones son necesarias, y cuales son suficientes, para que un entero positivo n sea divisible por 6

    a. 3 divide a n

    b. 9 divide a n

    c. 12 divide a n

    d. $n = 12$

    e. 6 divide a n^2

    f. 2 divide a n y 3 divide a n

    g. 2 divide a n

[Respuestas: a) N; b) N; c) S; d) S; e) S; f) S; g) N].

22. Utilizar las tablas de verdad, y demostrar el teorema 13:

    a) Negación de la conjunción (primera ley de morgan).

    b) Negación de la disyunción (segunda ley de morgan).

    c) Ley de negación de la implicación;ley de negación de la equivalencia.

23. Hallar el conjunto de verdad de las siguientes equivalencias,asumiendo como conjunto universal el conjunto de los números reales

a. $(x^2 = 1) \leftrightarrow [(x = 1) \vee (x = -1)]$

b. $(x \neq 1) \leftrightarrow (x^2 \neq 1)$

c. $(2x = 8) \leftrightarrow [(x = 4)]$

d. $(x = 5) \leftrightarrow (x \neq 5)$

[Respuestas:a) $\Re$;b) $\Re$; c) $\Re$ d)]

24. Formar las negaciones de las siguientes proposiciones:

a. Todas las habitaciones del hotel están ocupadas.

b. $\exists x[x^2+25=(x-5)(x+5)]$

c. En todos los triángulos,la suma de los valores de los ángulos interiores es de 180°

d. Todos los caminos van a Roma,y algunos caminos son intransitables

e. Algunos hombres son soldados,o todos los hombres son esclavos.

f. $\forall x(x^2 \geq 0)$

g. Eduardo miente cuando dice que yo soy el culpable.

[Respuestas: a) Algunas habitaciones del hotel no están ocupadas; b) $\forall x[x^2 + 25 \neq (x-5)(x + 5)]$; c) En algunos triángulos, la suma de los ángulos interiores no es de 180°; d) Algunos caminos no van a Roma o todos los caminos son transitables; e) Todos los hombres no son soldados y algunos hombres son libres; f; $\exists x(x^2 < 0)$; g) Eduardo dice que soy culpable y dice la verdad]

25. Explicitar los cuantificadores implicados en las siguientes proposiciones y formar la negación:

a. Si dos ángulos son congruentes,sus valores son iguales.

b. Sea x un entero, Si es par, entonces x es par .

c. Si p es primo, hay un primo mayor que p.

[Respuestas: a) $\forall$,"Existen dos ángulos congruentes y sus valores no son iguales"; b) $\forall$, Existe un numero entero tal que par y x^2 es impar; c). Existe un número p primo y no hay un primo mayor que p]

26. Formar la recíproca y la contra recíproca de las siguientes implicaciones:

a. Si todos los ángulos de un triángulo son iguales, el triángulo es equilátero.

b. Si un cuadrilátero es un paralelogramo, sus diagonales se cortan en el punto medio.

c. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.

[a) Si un triángulo es equilátero, entonces todos los ángulos del triángulo son iguales.Si el triángulo no es equilátero, entonces los ángulos del triángulo no son iguales. b) Si las diagonales se cortan en el punto medio, entonces el cuadrilatero es un paralelogramo; si las diagonales no se cortan en el punto medio, entonces el cuadrilatero no es un paralelogramo. c) Si $a - c > b - c$., entonces $a > b$; Si $a - c \leq b - c$ entonces $a \leq b$].

27. Escribir la implicación dada, utilizando las expresiónes de"condición suficiente" y "condición necesaria":

a. Si los ángulos básicos de un triángulo son iguales,el triángulo es isósceles.

b. Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta,son paralelas.

c. Si $3x + 2 = x + 4$,entonces $x = 1$.

d. Si un triángulo está inscrito en una semicircunferencia, es un triángulo rectángulo.

e. Si un cuerpo se encuentra en equilibrio, el vector suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero.

f. Si dos fuerzas están en equilibrio, son iguales, opuestas y de la misma dirección.

28. Para las implicaciones dadas en el problema 24 escribir la recíproca empleando la frase "solo si".

29. Para las siguientes afirmaciones matemáticas,algunas de las cuales son verdaderas y otras falsas,se pide demostrar las verdaderas y refutar las falsas:

a. La suma de tres enteros impares es impar.

b. $\forall x \in R[3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)]$

c. $\exists x \in N[2^x = 16]$

d. $\forall x \in R[(x+2)^2 = x+4]$

e. Una condición necesaria, para que la ecuación $ax^2+bx+c= 0$, tenga una raíz real, es que $b^2 - 4ac = 0$.

f. $\forall x \in R[(3x+1)^2 > 0]$

g. $(\forall x \in Z)\ (\exists y \in Z),\ x = 2y$.

h. $(\exists y \in Z),(\ \forall x \in Z),\ x < y$

30. Demostrar las siguientes afirmaciones matemáticas:
    a. La suma de dos números pares es igual a un número par.
    b. La suma de dos números impares es igual a un número par.
    c. El producto de dos números impares es igual a un número impar.
    d. La suma de números pares es igual a un número par.
    e. El producto de tres números pares es igual a un número par.
    f. La suma de dos números impares la que a su vez se suma un número par de veces es igual a un número par.
    g. La suma de dos números impares,la que a su vez se suma un número impar de veces, es igual a un número par.
    h. Dado un entero positivo n, probar que n^3-n es múltiplo de 3.
    i. Para cada entero x, x+4 es impar,si y solo si, $x+7$ es par.
    j. $\exists x \in R$ $\{\cos(x)=x\}$[Sugerencia: Utilizar la definición del coseno, como una serie de potencias]
    k. Para cualquier entero n, n^2+n+1 es impar
31. Demostrar las siguientes afirmaciones matemáticas:
    a. Si x e y son números racionales, entonces $x + y$ es un número racional.
    b. Si el cuadrado de un número es múltiplo de tres, entonces el número es múltiplo de tres.
    c. Si el producto de dos enteros es par, al menos uno de ellos es par.
    d. Para que un paralelogramo sea un rectángulo, es condición necesaria y suficiente, que sus diagonales tengan la misma longitud.
    e. Demostrar que $\sqrt{3}$ es un número irracional.
    f. Sean x, y,dos números reales. Si $x^2 + y^2=0$, entonces $x = 0$ e $y = 0$.
    g. Dados dos enteros n y m, se cumple que $n \cdot m$ es par, si y sólo si, n es par ó m es par.
    i. Para cada entero x, si x es impar, entonces existe un entero y, tal que $x^2= 8y+1$.
    j. Lea el ejemplo 41, y responda la siguiente pregunta: ¿Cuál es la condición suficiente y necesaria, para que, $4ab <(a+b)^2$.

k. Utilizar el método del contrarecíproco, para demostrar la siguiente proposición: Si c es un entero impar, entonces la solución de la ecuación $n^2 + n - c = 0$, no es un entero impar.

l. Si x y y son números reales y diferentes, entonces $(x+1)^2 = (y+1)^2$, si y solamente si $x + y = -2$ ¿Cómo cambia la conclusión si se hace $x=y$

32. Aplicando la inducción matemática, se pide:

a. Encontrar una fórmula para $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$, $n \geq 1$, y demostrarla por inducción.[Sugerencia: ver ejemplo 38]

b. Demostrar que $n^2 + n$ es divisible por 2.

c. Demostrar que $1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

d. Demostrar que: $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$

e. Demostrar que: $4n-1$ es divisible por 3.

f. Demostrar que la suma de los primeros n números impares es igual a n^2

33. Si A, B, C,... son proposiciones simples de la lógica proposicional,se pide presentar una prueba, para las siguientes afirmaciones:

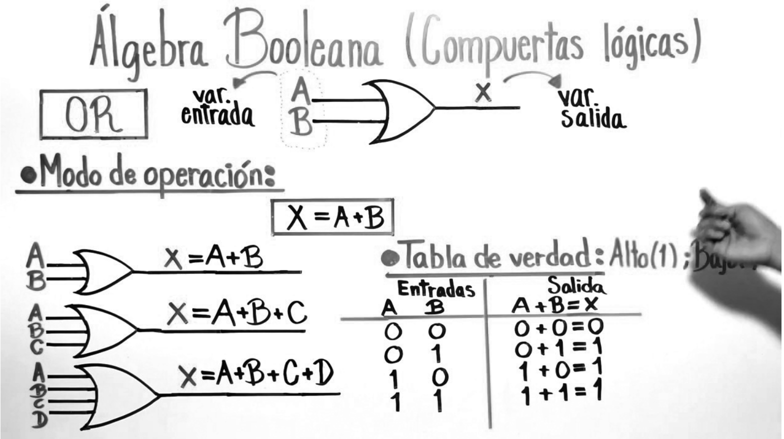
1. $K \& L, \therefore K \rightarrow L$
2. $A \rightarrow (B \rightarrow C), \therefore (A \& B) \rightarrow C$
3. $P \& (Q \vee R), P \rightarrow R, \therefore Q \vee E$
4. $(C \& D) \vee E, \therefore E \vee D$
5. $\neg F \rightarrow G, F \rightarrow H, \therefore G \vee H$
6. $(X \& Y) \vee (X \& Z), \neg (X \& D), D \vee M \therefore$

UNIDAD II

ÁLGEBRA DE BOOLE

Es sobre la base de este principio general,
que tengo la intención de establecer el Cálculo de la lógica,
y que reclamo un lugar entre las formas reconocidas
de Análisis Matemático.

George Boole



UNIDAD 2

ÁLGEBRA DE BOOLE

2.1 Introducción

En 1847 George Boole estableció los fundamentos de la Lógica digital mediante el Álgebra que lleva su nombre. Su lógica se conoce hoy como Lógica proposicional, y permite expresar y demostrar silogismos de la forma: Todos los peces respiran mediante branquias. Los atunes son peces, entonces, los atunes respiran mediante branquias. El gran aporte de Boole fue demostrar, que el razonamiento lógico se puede formalizar matemáticamente.

El objetivo del Álgebra de Boole es describir las operaciones mentales, mediante las cuales se realizan los razonamientos. Boole definió una serie de símbolos, a elementos y operaciones lógicas, e hizo que estos símbolos y operaciones tuvieran la misma estructura lógica que el álgebra convencional. En el Álgebra de Boole, los símbolos se pueden manipular según reglas fijas, para producir resultados lógicos.

El Cálculo de la Lógica desarrollado por Boole, permite expresar con elementos matemáticos, los razonamientos lógicos.

Los elementos del álgebra de Boole son proposiciones, que expresan eventos, y combinaciones de estas proposiciones mediante conectores lógicos, que se pueden etiquetar como verdaderos o falsas,.

Las proposiciones se pueden combinar mediante dos operaciones básicas: la **conjunción** (*y*) y la **disyunción**(*o*). El sentido de estas dos operaciones es la adición o suma en el caso de la conjunción, y la de exclusión en el caso de la disyunción. En el lenguaje natural estos conectores pueden tener otro significado.

El resultado de la combinación de las proposiciones genera un nueva entidad lógica, cuyos valores de verdad dependen de la tabla de verdad, definida para estas operaciones.

Para combinaciones más complejas los matemáticos han desarrollado técnicas complejas, para formalizar y calcular procesos lógicos muy complicados.

El Álgebra de Boole utiliza dos principios fundamentales:

En primer lugar, las proposiciones expresadas en el lenguaje diario se pueden transformar en expresiones matemáticas, que utilizan letras y números.

En segundo lugar, las proposiciones tienen uno de dos valores: son afirmativas, o negativas.

Las operaciones que se utilizan sobre las proposiciones, o sus combinaciones, son la conjunción o la disyunción, y el resultado de estas operaciones puede ser verdadero o falso. Esto significa que el resultado se puede expresar por medio de un **sistema binario: verdadero o falso; sí o no; 0 o 1**.

Al trabajar Claude Shannon, Ingeniero Electricista, para los laboratorios Bell, durante el verano de 1937, en la simplificación de los circuitos de centrales telefónicas de relés, se dió cuenta, que en la resolución de este problema, se podía utilizar el Álgebra de Boole, para hacer los cálculos. Esto motivó el desarrollo de su tesis doctoral en Matemáticas en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), acerca de cómo el álgebra booleana, se podía utilizar en el análisis y la síntesis de la conmutación y de los circuitos digitales. La tesis despertó un interés considerable, cuando apareció en 1938 en las publicaciones especializadas.

Shannon demostró cómo las operaciones booleanas elementales, se podrían representar mediante circuitos de interruptores eléctricos, y cómo la combinación de estos podía representar operaciones aritméticas y lógicas complejas. También demostró, que el Álgebra de Boole se podía utilizar para simplificar circuitos de conmutación telefónicos.

El sistema matemático binario que utiliza el Álgebra de Boole, es el sistema numérico más utilizado en los circuitos lógicos que conforman los computadores y muchos dispositivos electrónicos. Un interruptor eléctrico puede tener uno de dos estados: cerrado (1), o abierto (0).

Las operaciones que los microprocesadores pueden llevar a cabo con la información binaria son muy simples. Estas operaciones son las siguientes: negación, conjunción y disyunción, comparación y las cuatro operaciones aritméticas. La combinación de todas estas operaciones a alta velocidad, permite ejecutar tareas muy complejas.

En consecuencia, los procedimientos de cálculo lógico del Álgebra de Boole, se han convertido en el mecanismo para resolver muchas tareas, que se requieren para la operación de máquinas de la industria y dispositivos electrónicos de uso doméstico.

Sin proponérselo Boole, con su Álgebra, desarrolló una de las más poderosas herramientas, que más ha impactado en el desarrollo de la civilización.

2.2 Del Álgebra de conjuntos, al Álgebra de Boole

En el álgebra de conjuntos se supone un conjunto universal U y todos sus subconjuntos: A, B, C, etc., y el conjunto vacío , el cual es un subconjunto de U y también de A, B, C, etc.

Se definen en el álgebra de conjuntos las siguientes operaciones:

a. La intersección de $A \cap B$, como el subconjunto de U, cuyos elementos pertenecen simultáneamente a A y B;
b. La unión $A \cup B$ como el subconjunto de U, cuyos elementos pertenecen a A o a B o a ambos.
c. El complemento A', como el subconjunto de U, cuyos elementos no pertenecen a A.

Las operaciones definidas presentan las siguientes propiedades:

a. La intersección y la unión son conmutativas.

$$A \cap B =: B \cap A;\ A \cup B = B \cup A \tag{16}$$

b. La intersección y la unión son asociativas.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{17}$$

$$(A \cup B) \cap \mathrm{C} = \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) \tag{18}$$

c. Hay dos leyes distributivas:

$$A\cap(B \cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C) \tag{19}$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B) \cap(A\cup C) \tag{20}$$

Las identidades del álgebra de conjuntos se pueden demostrar de dos maneras:

a. Utilizando los diagramas de Venn.
b. Utilizando tablas análogas a las tablas de verdad, que se emplean para demostrar las tautologías en el álgebra proposicional.

El primer método se ilustra mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 43

Demostrar utilizando los diagramas de Venn, la ley distributiva de la intersección:

$$A\cap(B \cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C),$$

Demostración:

Se supone que los conjuntos A, B, C, tienen las posiciones relativas mostradas en la figura a) y se efectúa la operación indicada en la parte izquierda de la igualdad de la ley distributiva.

Al realizar $B \cup C$, se obtiene la figura b), y al realizar $A \cap (B \cup C)$, se obtiene la figura c).

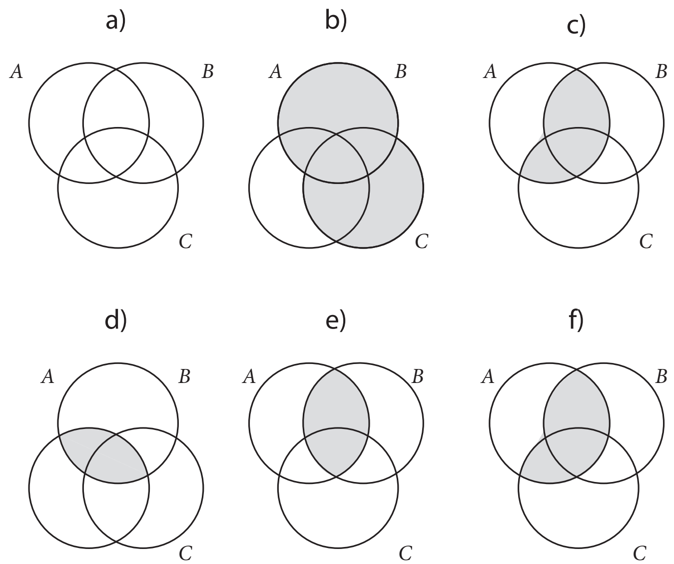
Al operar sobre la parte derecha de la igualdad $A \cap B$ se obtiene la figura d).

Al realizar la operación $A \cap C$ se obtiene la figura e)

Y al realizar $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, se obtiene la figura f), que es idéntica a la figura c).

Aunque este procedimiento es satisfactorio para la intuición pero con poca rigurosidad matemática, se demuestra la ley distributiva.

Figura 9. Diagramas de Venn



2.2.1 Tablas para definir las operaciones básicas en el álgebra de conjuntos

Se considera un subconjunto A de U y un elemento arbitrario de U.

Si x está en A, se representa esta situación por el símbolo 1.

Si x no está en A, se escribe el símbolo 0.

En el álgebra de conjuntos, los símbolos 1 y 0 corresponden a los valores de verdad (V) o falsedad(F), del álgebra proposicional.

Si se tienen dos subconjuntos A y B, las posibles posiciones de un elemento arbitrario x, se representan por la tabla 13, que se muestra a continuación.

Tabla 13. De equivalencia entre el algebra de conjuntos y el álgebra proposicional

A	B	Interpretación
1	1	x, está en ambos subconjuntos
1	0	x está en A, pero no B
0	1	x está en B, pero no en A
0	0	x no está en A, ni en B

Según esta convención, las tres operaciones básicas del álgebra de conjuntos, se definen por las siguientes tablas:

Intersección

Tabla 14.Definición de la intersección en el álgebra de conjuntos

A	B	A ∩B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Unión

Tabla 15.Definición de la unión en el álgebra de conjunto

A	B	A
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Complemento

Tabla 16.Definición del complemento en el álgebra de conjuntos

A	A’
1	0
0	1

Ejemplo 44

Demostrar la ley distributiva de la intersección: $A∩(B∪C)=(A∩B ∪(A ∩C)$, utilizando las tablas equivalentes, a las tablas de verdad del álgebra de conjuntos.

Demostración:

Tabla 16. De verdad para demostrar la ley distributiva de la intersección.

A	B	C	$B∪C$	A ∩(B∩C)*	A ∩ B	A ∩ C	(A ∩ B) ∪ (A ∩ C)*
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Comparando las columnas señaladas con *, se demuestra la identidad, objeto del problema.

2.3 El Álgebra de Boole

Se define el Álgebra de Boole como un sistema abstracto formado por:

Términos no definidos: Un conjunto S de elementos no definidos A, B, C, etc,que contiene al menos dos elementos distintos.

Operaciones no definidas: representadas por los símbolos ∩, ∪' y denominadas **intersección, unión, y complementación** respectivamente.

Axiomas

A1. Clausura.

Si A y B son elementos del conjunto S, $A∩B$, $A∪B$ y A' son elementos unívocamente definidos de S.

A2. Asociatividad.

Para toda terna A, B y C de elementos de S, se verifica:

a. $(A∩B)∩C = A∩(B∩C)$ (21)

b. $A(A∪B)∪C = A∪(B∪C)$ (22)

A3. Conmutatividad.

Para todo par A y B de elementos de S, se verifica:

a. $A \cap B = B \cap A$ (23)

b. $A \cup B = B \cup A$ (24)

A4. Existencia de los elementos neutros.

Existen dos elementos distintos de S, el O y el I, que satisfacen para todo A de S las siguientes condiciones:

a. $I \cap A = A \cap I = A$ (25)

b. $O \cup A = A \cup O = A$ (26)

I se conoce como el elemento universal o elemento neutro para la intersección.

O es el elemento nulo o neutro para la unión

A5. Existencia de los elementos complementarios.

Todo elemento de A que pertenece a S, posee un único elemento A', denominado complemento con las siguientes propiedades:

a. $A \cap A' = A' \cap A = O$ (27)

b. $A \cup A' = A' \cup A = I$ (28)

A6. Leyes distributivas.

Para toda terna de elementos A, B; C, que pertenecen a S,se verifica:

a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (29)

b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (30)

Características de los axiomas

1. En los axiomas del álgebra de Boole se observa una dualidad completa, en el sentido que si $\cap$ e I se intercambian con $\cup$ y 0 respectivamente, los axiomas no varían.Por esto cuando se prueba un teorema en esta álgebra, se puede inferir como cierto el teorema dual.
2. Estos axiomas son redundantes, puesto que algunos se pueden probar partiendo de los otros. La elección de estos axiomas se hace por conveniencia en la exposición, y debido a la analogía con los axiomas de un cuerpo.
3. Si A, B, C representan subconjuntos del conjunto universal U,entonces:

   O representa al conjunto vacío $\emptyset$.

   I representa al conjunto universal $\cup$.

   $\cap$, $\cup$, ', tienen el mismo significado que en el álgebra de conjuntos.

   Se evidencia la conexión del álgebra de Boole,con el álgebra de conjuntos.

Definición

D1. La relación $A \subseteq B$ se define como equivalente a la proposición

2.3.1 Teoremas del álgebra de Boole

Teorema 1

$$A \cap O = 0 \; ; \; A \cup I = I \tag{31}$$

Demostración:

$O = A \cap A'$	según A5a
$\mathrm{I} = A \cup A'$	según A5b
$O = A \cap (A' \cup O)$	según A4b
$A \cup (A' \cap I)$	según A4a
$O = (A \cap A') \cup (A \cap O)$	según A6a
$I = (A \cup A' \cap (A \cup I)$	según A6b

$O = O \cup (A \cap O)$ según A5a

$I = I \cap (A \cup I)$ según A5b

$O = A \cap O$ ■ según A4b

$I = A \cup I$ según A4a

Teorema 2

Leyes Idempotentes

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A \tag{32}$$

Demostración:

$A = A \cap I$ según A4b

$A = A \cap (A \cup A')$ según A5b

$A = (A \cap A) \cup (A \cap A\hat{}')$ según A6a

$A = (A \cap A) \cup O$ según A5a

$A = A \cap A$ ■

Teorema 3

Leyes de Morgan

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \qquad (A \cup B)' = (A' \cap B') \tag{33}$$

Se debe demostrar que es el complemento de $A' \cup B'$ y por lo tanto se deben cumplir las dos propiedades del axioma A5.

Para la propiedad A5a, se tiene $(A \cap B)' \cap (A' \cup B') = (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap B')$

$(A \cap B)' \cup (A' \cup B') = (O \cap B) \cup (A \cap O)$

$(A \cap B)' \cup (A' \cup B') = O \cup O \cap (A' \cup B') = O$

Para la propiedad A5b, se tiene:

$(A\cap B)'\cup(A'\cup B') = (A'\cup B')\cup(A\cap B)$

$(A\cap B)'\cup(A'\cup B') = (A'\cup B'\cup A)\cap(A'\cup B'\cup B)$

$(A\cap B)'\cup(A'\cup B') = (I\cup B')\cap(I\cup A')$ $(A\cap B)'\cup(A'\cup B') = I\cap I$

$(A\cap B)'\cup(A'\cup B')= I$

Teorema 4

Ley de involución

$$(A')'=A \tag{34}$$

La demostración de este teorema se propone como problema.

Teorema 5

Leyes de absorción

$$A\cap(A\cup B)=A \qquad A\cup(A\cap B)=A \tag{35}$$

Demostración:

$A\cap(A\cup B) = (A\cup O)\cap(A\cup B)$

$A\cap(A\cup B) = A\cup(O\cap B)$ según A6b, de derecha a izquierda

$A\cap(A\cup B) = A\cup O$ según Teorema 1

$A\cap(A\cup B)=A$ según definición de O

Teorema 6

$$I'= O \qquad O' = I \tag{36}$$

La demostración de este teorema se propone como problema.

Teorema 7

Para todo A, $O \subseteq A \subseteq I$

Demostración:

Según la definición D1, $0 \subseteq A$ es equivalente a $0 \cap A' = 0$, que se verifica con el teorema 1.

De igual $A \subseteq I$ manera es equivalente a o a $A \cap I' = O$ o a $A \cap O = O$

Teorema 8

$$\text{Si } A \subseteq B \text{ y entonces } A \subseteq C \tag{37}$$

Demostración:

$A \subseteq B$ es equivalente a $A \cap B' = O$, y $B \subseteq C$ a $B \cap C' = O$. Se debe demostrar que $A \cap C' = 0$

$A \cap C' = (A \cap C') \cap (B \cup B'U)$ según A5b y A4b

$A \cap C' = (A \cap C' \cap B) \cup (A \cap C' \cap B')$ según A2a

$A \cap C' = O \cup O$ Por definición e hipótesis

$A \cap C' = 0$ ■

Teorema 9

$$\text{Si } A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A \text{, entonces } A = B \tag{38}$$

Demostración:

Las hipótesis son equivalentes a $A \cap B' = O$ y $B \cap A' = O$.

De los teoremas 3 y 6, $B \cap A' = 0$, es equivalente a a $A \cup B' = I$

Por lo tanto de A5, B', es el complemento de A o $B' = A$

En consecuencia $B = A$

Teorema 10

Sea $Y = f(A, B)$, una función en las que Y, A, y B son elementos del álgebra de Boole, elementos que pertenecen al conjunto {0,1}.

La función esta completamente definida por la tabla siguiente:

Tabla 17. Definir una función booleana

A	B	$f(A, B)$
1	1	$f(1,1)$
1	0	$f(1,0)$
0	1	$f(0,1)$
0	0	$f(0,0)$

Los valores de la columna de la derecha, son números elegidos dentro del conjunto {0,1}.

Entonces $f(A, B)$ se expresa por cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$f(A,B) = [f(1,1) \times A \times \mathrm{B}] + [f(1,0) \times A \times \mathrm{B}'] + [f(0,1) \times A' \times \mathrm{B}'] + [f(0,0) \times A' \times \mathrm{B}'] \quad (39)$$

$$f(A,B) = [f(1,1) + A' + B'] \times [f(1,0) + A' + B] \times [f(0,1) + A + B'] \times [f(0,0) + A + B] \quad (40)$$

Demostración:

Se sustituyen de la tabla los valores de A y B, y se verifican que las expresiones 39 y 40 son correctas.

Para la ecuación 39 se tiene:

$$f(1,0) = f(1,1) \times 0] + [f(1,0) \times 1] + [f(0,1) \text{ x } 0] + [f(0,0) \text{ x } 0]$$

$$f(1,0) = 0 + f(1,0) + 0 + 0$$

$$f(1,0) = f(1,0)$$

Para la ecuación 40 se tiene:

$$f(,0,0)=[f(1,1) + 1] \times [f(1,0) + 1] \times [f(0,1) + 1] \times [\mathrm{f}(0,0) + 0]$$

$$f(,0,0)=[1 \times 1 \times 1 \times f(0,0)= f(0,0)$$

2.3.2 Operaciones en el álgebra de Boole

La mayoría de las álgebras básicas de Boole constan de elementos que pertenecen al conjunto {0,1} y de las operaciones +, ×.

Se emplean las letras *a*, *b*, *c*, etc., para designar elementos arbitrarios del conjunto {0,1}.

Se identifica el 0 con elemento nulo 0 de los axiomas, y a 1 con el elemento *I* a la operación + con la unión ∪ y a × con la intersección ∩.

A continuación se muestran las tablas de la adición, multiplicación y complementación del álgebra de Boole, y la tabla de equivalencia entre la lógica proposicional y el álgebra de Boole.

Tabla 18 . De la multiplicación

a	B	$a \times B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabla 19. De la adición

a	B	$a + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabla 20. De la complementación

A	a'
1	0
0	1

La equivalencia entre los objetos,y las operaciones en la lógica proposicional y el álgebra de Boole, se muestra en la tabla 21.

Tabla 21. Tabla de equivalencias entre la lógica proposicional y el álgebra de Boole

Lógica proposicional	Álgebra de Boole
V	1
F	0
$\wedge$	X
$\vee$	+
$\neg$	‘
$\longleftrightarrow$	=
$p, q, r,\ldots$	$a, b, c,\ldots$

La correspondencia entre la lógica proposicional y el álgebra de Boole permite establecer que cualquier afirmación válida en un sistema, se valida automáticamente en el otro sistema.

2.4 Aplicaciones del álgebra de Boole

2.4.1 Aplicaciones a los circuitos eléctricos

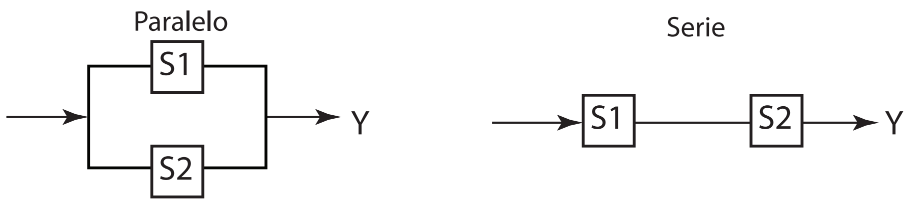
El álgebra de Boole es una herramienta fundamental en la evolución de la electrónica digital, porque las señales digitales son binarias por naturaleza, ya que asumen uno de dos valores 0 o 1, y el álgebra de Boole se desarrolló para variables binarias.

La electrónica digital permitió la construcción de circuitos miniaturizados, que realizan funciones matemáticas complejas, lo que transformó el desarrollo industrial y social del mundo desde mediados del siglo XX.

En circuitos eléctricos se dice, que dos interruptores, S1 y S2 se conectan en paralelo, cuando la corriente circula en la carga, si uno o los dos interruptores están cerrados. Este concepto se representa en la figura 10 a).

De una manera análoga, los interruptores se conectan en serie cuando la corriente circula, sólo si los dos interruptores están cerrados (figura 10 b).

Figura 10. Conexiones de interruptores



a) Paralelo b) Serie

Se asigna a la variable de posición de cada interruptor S, el valor de 1 si está cerrado, y 0 si está abierto.

Sea Y la variable de posición del conjunto de interruptores, la cual depende de las variables de posición de cada uno de los interruptores del circuito.

$$Y = f\ (\mathrm{S1}, \mathrm{S2})$$

A Y se le asigna el valor 1, si la corriente puede circular, y 0 si la corriente se interrumpe.

La variable Y de los interruptores se puede expresar, de acuerdo a las tablas de multiplicación y adición del álgebra de Boole, por las siguientes expresiones booleanas:

Circuito paralelo: Y=S1+ S2; Circuito serie: Y=S1 × S2.

Si se considera el estado 1, como el paso de corriente por un interruptor (cerrado), y el estado cero como el bloqueo de corriente del interruptor(abierto), de las tablas de adición y multiplicación, se puede establecer una analogía, entre la operación de adición, con el comportamiento de los interruptores en paralelo, y el de la operación de multiplicación, con el comportamiento de los interruptores en serie.

La interpretación de los estados de conexión y desconexión de los interruptores eléctricos conectados en paralelo y/o serie, entre la fuente del circuito y la carga eléctrica, permiten representar los axiomas del álgebra de Boole como asociaciones de interruptores serie y/o paralelo.

Ejemplo 45

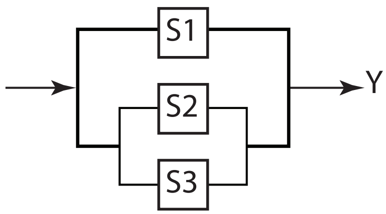
Representar mediante circuitos eléctricos la ley asociativa del álgebra de Boole para la adición:

$$S1 + (S2+S3) = (S1+S2)+S3$$

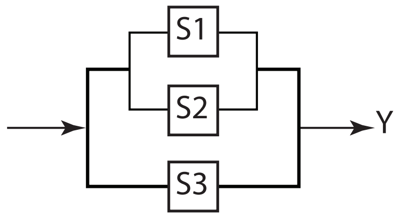
Solución:

De la definición de circuito paralelo mediante la adición de las variables booleanas, es evidente que en ambos circuitos los tres interruptores se conectan en paralelo y por lo tanto son equivalentes.

Solución del ejemplo 45



S1 + (S2 + S3)



(S1 + S2) + S3

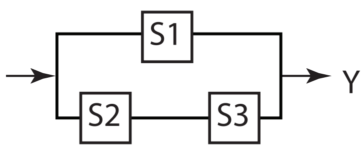
Ejemplo 46

Representar mediante circuitos eléctricos la ley distributiva:

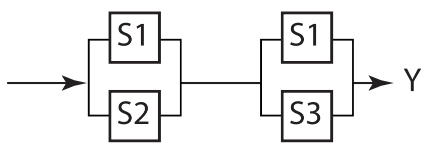
$$S1+(S2 \times S3) = (S1+S2) \times (S1+S3)$$

Solución:

Solución del ejemplo 46



S1 + (S2 × S3)



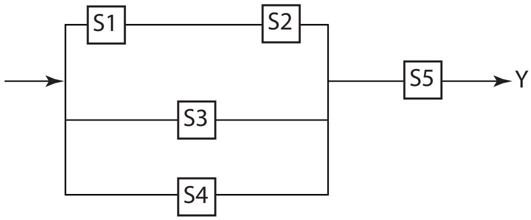
(S1 + S2) × (S1 + S3)

Desde el punto de vista circuital, S1+(S2 × S3) es el circuito más simple, ya que utiliza menos elementos.

Por lo anterior se infiere que el álgebra de Boole se puede utilizar para simplificar los circuitos.

Ejemplo 47

Escribir la ecuación en el álgebra Boole, del circuito que se dibuja a continuación.



Solución:

$$Y = [(S1 \times S2) + S3 + S4] \times S5.$$

2.4.2 Diseño de los circuitos eléctricos

Para el diseño de circuitos eléctricos que cumplan con ciertos propósitos,se utilizan teorías que se estudian en el curso profesional de circuitos digitales en Ingeniería Eléctrica. En este curso se utiliza un sistema gráfico, debido al nivel introductorio en el cual se estudia este tema, y el cual se presenta mediante un ejemplo.

Ejemplo 48

Se desea encender o apagar una lámpara eléctrica de una habitación, con dos interruptores ubicados en diferentes lugares. Desde cada interruptor la lámpara se podrá apagar o encender. Se pide diseñar un circuito eléctrico que satisfaga esta condición.

Solución:

Se asume como D la variable que representa el estado del interruptor ubicado en un lugar, U la variable de estado del interruptor ubicado en el otro lugar, y Y la variable que indica, si la lámpara está encendida o apagada.

La tabla adjunta muestra la situación que se quiere resolver:

Tabla 22. De la situación planteada en el ejemplo 48

D	U	Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	1	1

Se pretende encontrar una ecuación que satisfaga los requerimientos de la tabla 22. Aplicando la ecuación 39 (Teorema 10), se obtiene la siguiente ecuación, que satisface las condiciones de la tabla:

$$Y = (D \times U) + (D' \times U') \tag{41}$$

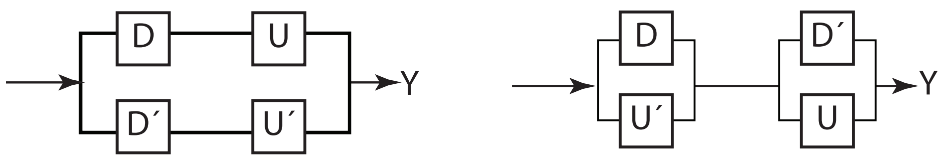
La representación circuital de esta ecuación se muestra figura 11 a), y el circuito completo para su montaje, se muestra en la figura 12 a)

Aplicando la ecuación 40 a la tabla, se obtiene la ecuación:

$$Y = (D + U') \times (D' + U) \tag{42}$$

La representación circuital de esta ecuación se muestra en la figura 11 b), y el circuito completo para su montaje, se muestra en la figura 12b).

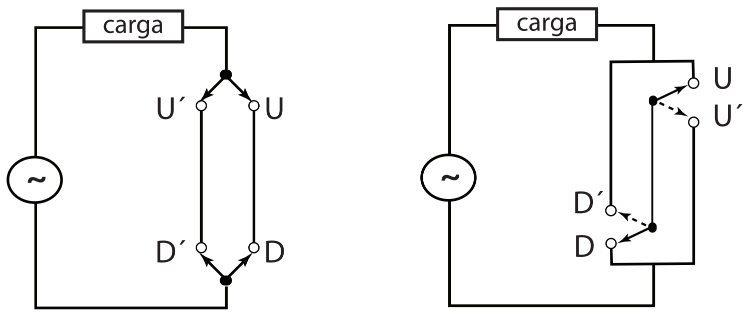
Figura 11. Representaciones circuitales del ejemplo 48



a)Representación de la ec. 41

b)Representación de la ec. 42

Figura 12. Circuito eléctrico completo del ejemplo 48



a)Representación de la ec. 41 b)Representación de la ec. 42

2.4.3 Aplicaciones a los problemas lógicos

El teorema 10 del álgebra de Boole se aplica a la resolución de problemas lógicos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 49

Se supone que A es un persona que siempre miente, o siempre dice la verdad,pero no se puede saber si dice la verdad o miente.En una habitación existen dos sillas idénticas, pero una de ellas electrizada a tal nivel, que quien se siente en ella se muere electrocutado.Se supone, que la persona A conoce cual es la silla electrizada.

Una persona B desea sentarse en una de las sillas, pero no desea ser electrocutada.

B puede hacer una pregunta de la siguiente estructura" ¿Es r verdad? En donde r es una proposición ¿Cual debe ser la frase r ,que debe formular B?

Solución:

Se definen las siguientes proposiciones:

p: A dice la verdad

q: La silla de la izquierda está electrizada

r.¿Es r verdad?

Con estas proposiciones se construye la siguiente tabla.

p	q	**La respuesta de A a la pregunta. ¿es r verdad?**	r
		V	V
		F	F
		V	F
		F	V

En la tercera columna los valores corresponden a los valores de q. Así que la respuesta que A le dé a B, le indicará en que silla se debe sentar.La columna de r se obtiene de la tercera columna, teniendo en cuenta si A dice o no la verdad.

En consecuencia, se necesita tener una combinación de p y q equivalente a r. Si se cambia la notación de la tabla, al álgebra de Boole, se obtiene la misma tabla que la del ejemplo 45, y se puede aplicar el teorema 10, que conducen a las ecuaciones 39 y 40.

Utilizando la tabla 21 de equivalencias entre la lógica proposicional y el álgebra de Boole, se obtienen las siguientes expresiones lógicas.

Para la ecuación 39, la expresión lógica equivalente es:

$$(p \wedge q) \ \vee (\neg p \wedge \neg q) \tag{43}$$

Para la ecuación 40, la expresión lógica equivalente es:

$$(p \wedge q) \ \vee (\neg p \wedge \neg q) \tag{44}$$

Por lo anterior, dos posibles preguntas a formular serían:

¿Es usted veraz, y la silla de la izquierda está electrizada? (43)
¿Es usted un mentiroso, y es la silla de la izquierda la que no está electrizada? (44).

Actividades

Teoría

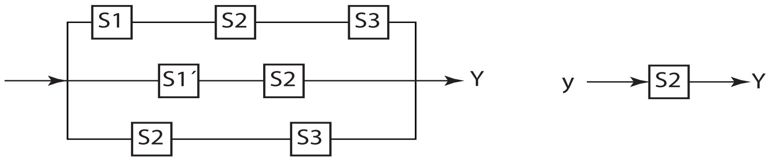
1. ¿Qué es el álgebra de conjuntos?¿Cuál es la relación del álgebra de conjuntos con el álgebra proposicional?
2. En el álgebra de Boole se define un conjunto S de elementos no definidos, A, B, C, etc., que contienen al menos dos elementos distintos. ¿Cuáles son los elementos de A, B...?
3. ¿Cuáles son las características de los elementos neutros y complementarios del álgebra de Boole? ¿Por qué se denominan neutros?
4. ¿Existe alguna relación entre el álgebra de Boole, y el álgebra proposicional? ¿Cuál es esa relación?
5. ¿Cuáles son las operaciones básicas en el álgebra de Boole?
6. ¿Cómo justificaría la expresión booleana $1 + 1 = 1$?
7. ¿Cuál fué el aporte del álgebra de Boole al desarrollo de la Ingeniería Eléctrica?
8. Enumerar algunas aplicaciones del álgebra Boole.
9. Demostrar el teorema 4 del álgebra de Boole (Ley de involución).
10. Demostrar el teorema 6.
11. Demostrar que $A \subseteq B$ si y solo si $A' \cup B = I$.
12. Demostrar que si $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$.

Problemas

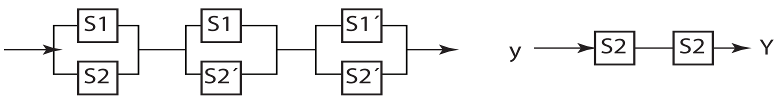
1. Representar los circuitos eléctricos, de las siguientes expresiones del álgebra de Boole:
   a. $S \text{ x } S' = 1$
   b. $S \text{ x } S = 0$
   c. $S + 1 = 1$
   d. $1 \text{ x } S = S$
   e. $S1 + (S1' \times S2) = S1 + S2)$
   f. $(S1 + S2) \times (S1 + S2') = S1$

2. Para los circuitos eléctricos que se dibujan a la izquierda, se pide escribir las ecuaciones de Boole, y demostrar que son iguales a los circuitos dibujados a la derecha, utilizando las identidades dadas en el problema 1.
3. Diseñar un circuito, de forma que cualquiera de tres interruptores ubicados en diferentes lugares, pueda encender o apagar una lámpara eléctrica.

a.



b.



4. Un cohete se puede disparar, cuando el comandante en jefe(CJ) y dos de sus tres ayudantes, cualesquiera que sean, coloquen sus interruptores en la posición de fuego. Se pide diseñar un circuito que responda a estas exigencias.
5. Una prisión está dotada de dos puertas: una conduce a la libertad y otra a la muerte. En cada puerta hay un guardián, que conoce la función de las dos puertas. Cada guardián puede responder únicamente Si o No. Uno de los dos siempre da una respuesta verdadera, el otro siempre una respuesta falsa. El prisionero ignora cuál dice la verdad, y cuál miente. Le puede hacer una, y solo una pregunta, a uno de los guardianes. ¿Qué pregunta debe hacer a uno de los guardias, para poder determinar la puerta que conduce a la libertad?
6. A un prisionero se le dan cuatro botellas de liquido cristalino R, R', L, L'. Se le dice que en el par R, R' una contiene agua y la otra veneno. Lo mismo en el caso de L y L'. Sin embargo, los venenos se neutralizan mutuamente, de forma que si se beben los dos, no ocurre nada.

   Al prisionero se le dice que escoja una botella entre R y R', y otra entre, L y L' y beba sus contenidos. Como gracia especial, se le permite hacer una pregunta, y que la respuesta sea un sí o un no.

   ¿Cuál debe ser la pregunta que debe hacer el prisionero para estar seguro que al beber las botellas no morirá.?

[Respuesta: El prisionero debe señalar a una de las dos botellas R, R' y a otra de las dos botellas L, L' y preguntar´: "¿Es posible sin morir beber estas dos botellas? Si la respuesta es afirmativa, las beberá. Si la respuesta es negativa, beberá la botella señalada de las R, y de las botellas L, la que no señaló]

* Problemas tomados de la referencia 13.

UNIDAD III

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema,
pero hay un grano de descubrimiento
en la solución de cualquier problema.

George Polya

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya

UNIDAD 3

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1 Introducción

La sociedad humana ha evolucionado en la medida que ha resuelto los problemas relacionados con la transformación de la naturaleza, para utilizar sus recursos en beneficio de la calidad de vida del ser humano, y gracias a esta actividad y a la carencia de ética, la especie humana se ha convertido en la mayor depredadora del medio ambiente y de las otras especies en este planeta.

El bienestar que disfruta actualmente la sociedad ha sido posible en buena parte gracias a la Ingeniería. La Ingeniería versa sobre el estudio y aplicación de la ciencia y la tecnología, utilizando el ingenio y la inventiva, para **resolver problemas** relacionados con la transformación de la naturaleza, para satisfacer necesidades humanas, utilizando modelos generalmente matemáticos, provenientes de la ciencia y aplicando el método científico.

El interés en la antigüedad, de algunos matemáticos, como Descartes, Leibniz, Bolzano y otros, de encontrar las reglas y los métodos del descubrimiento y de la invención, fue la motivación para la aparición de una ciencia, que en la antigüedad se conoció con el nombre de Heurística, y que cayó en el olvido.

El trabajo del matemático húngaro George Polya, en los años posteriores a la segunda guerra mundial, rescató y modernizó a la Heurística como ciencia para comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Polya utilizó para explicar su método problemas de matemáticas elementales.

Posterior a Polya, matemáticos como Schoenfeld[11] y Mason[12], han hecho aportes importantes a la Heurística, en especial a la resolución de problemas de naturaleza matemática.

En la presente unidad se estudian las herramientas diseñadas por Polya y otros, para enfocar la mente, en los procesos operativos, que conducen a la resolución de problemas de naturaleza matemática.

Una de las evidencias en el comportamiento de un persona que piensa de una manera eficaz y que posee una mente analítica, es la capacidad para resolver problemas.

3.2 Naturaleza de los problemas y su proceso de resolución

3.2.1 Naturaleza de los problemas

En psicología se considera como problema a una situación en la cual de antemano **no se sabe cómo actuar**.

Algunos autores definen como problema un obstáculo que se encuentra entre una situación dada y una meta a conseguir, que obliga al sujeto a considerar **posibles caminos para alcanzar la meta**, desde un punto de partida dado.

El proceso de búsqueda de los caminos, para alcanzar la meta, se conoce como **resolución del problema.**

El obstáculo surge de una ausencia de conocimiento del sujeto, que se debe a carencia de información adecuada, sobre la **estructura del problema,** implícita en los datos y su representación, o falta de conocimiento, sobre cómo operar con esos datos o su representación. Vencer ese obstáculo permitirá alcanzar la meta, y en consecuencia resolver el problema.

3.2.2 Resolución de problemas

Algunos autores definen la resolución de problemas, como "el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones, y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir, grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas".

Para Lesh, R., & Zawojewski, J., “los problemas a resolver presentan peculiaridades específicas, que los diferencian entre sí, sin embargo en su solución se deben tener en cuenta los siguientes aspectos comunes a todos ellos:

1. Pensamiento directivo: La actividad mental del solucionador se dirige de un estado de incertidumbre, hacia una meta. La manera como se defina la meta, puede afectar la estrategia o camino de solución.
2. Limitaciones estructurales y operacionales: El sistema cognitivo cuando actúa tiene unas limitaciones, y las más significativas al resolver problemas son:

» Recursos limitados de la atención, en el proceso de recoger información y categorizar la información.

» Límites de la memoria operativa, donde se reconocen y ejecutan las diferentes estrategias de solución. La solución de problemas requiere de conocimientos previos, ya que sólo aquel que conoce es capaz de reconocer lo que desconoce. Se requiere conocimiento tanto de la situación a resolver, como del proceso que se sigue para resolver el problema.

» La complejidad de los procesos de recuperación de la información de la memoria de largo plazo (MLP), en ocasiones entorpece el proceso de solución.

» Por lo anterior, el solucionador funciona de forma serial en el proceso de solución, desde el estado inicial hasta alcanzar la meta, pasando por una serie de estados intermedios.

» Representaciones incompletas. Son lagunas o inconsistencias en la representación mental de la situación problemática. Para que haya un problema, es necesario que existan lagunas, y que haya estados intermedios inciertos. El solucionador tiene que elaborar una estructura representacional, que incluya la secuencia de estados intermedios para llegar a la meta”.

Las estrategias que se utilizan para la resolución de problemas pueden ser de naturaleza algorítmica o heurística.

En la estrategia algorítmica se aplica un procedimiento instruccional a una situación por resolver; de una manera automática y sin pasar por una fase mental creativa, se obtiene el resultado. Por ejemplo, cuando se resuelve una ecuación algebraica de segundo grado, se sigue una secuencia determinada en base a unas reglas establecidas, que lleva siempre a la solución correcta.

En opinión de los autores de este libro, a esta situación no se le puede definir problema, porque además de no haber incertidumbre, no se recorre la fase mental creativa por parte del solucionador y por ello es más apropiado denominarlo ejercicio.

La heurística es un término que proviene del griego, que significa descubrir o inventar, y en su concepción moderna se refiere a la comprensión del método que conduce a la solución de problemas, en particular, las operaciones mentales típicamente útiles en el proceso de resolución de problemas.

Polya en su libro "Cómo plantear y resolver problemas"[1], desarrolla una serie de estrategias para la resolución de problemas, y propone una nueva metodología, en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Además propone cuatro pasos básicos, para resolver un problema: 1) Comprender el problema; 2) Concebir un plan; 3) Ejecutar el plan; 4) Examinar la solución.

En el libro *Mathematical Problem Solving*[11] Schoenfeld basado en trabajos realizados en los años 80, con estudiantes y profesores que poseían los conocimientos, y a quienes les proponía resolver problemas suficientemente difíciles (siguiendo las ideas de Polya), considera insuficientes las estrategias planteadas por Polya, para la resolución de problemas, y sostiene que este proceso es más complejo e involucra más elementos, inclusive algunos de carácter emocional, afectivo, psicológico, y sociocultural.

Schoenfeld reconoce cuatro elementos, que intervienen en el proceso de resolución de problemas de naturaleza matemática:

1. Los recursos, que son los conocimientos previos de matemáticas y otras áreas, que debe tener, quien pretende resolver el problema.
2. Las estrategias heurísticas son reglas o planteamientos generales, que se basan en la experiencia y se derivan de la lógica, para el abordaje de un problema; este aspecto fue ampliamente considerado por Polya en su libro "Matemáticas y razonamientos plausibles".
3. El control o sea la manera como los individuos utilizan el conocimiento, y las estrategias heurísticas que poseen, para resolver un problema. Este factor involucra conductas de interés, tales como: planificar, seleccionar metas y submetas, y monitoreo constante durante el proceso de resolución.
4. El sistema de creencias, que es el conjunto de ideas y percepciones de los estudiantes, acerca de la naturaleza de la Matemática y su enseñanza.

Solucionar un problema es **encontrar un camino adecuado, para encontrar la meta desde un punto de partida**. La resolución de problemas suele implicar tareas, que exigen procesos de razonamiento más o menos complejos, y procesos mentales creativos.

Para resolver un problema se requiere:

1. Activar el conocimiento de los contenidos informativos necesarios para resolver el problema, mediante estrategias de representación, planificación y ejecución adecuadas.
2. Comprender la naturaleza del problema.
3. Alta motivación para resolverlo.
4. Usar estrategias de solución adecuadas, con la debida supervisión y regulación del proceso, para corregir errores y ajustar el proceso hasta alcanzar la solución.

Por lo anterior, se considera importante establecer en el pensum de estudios de Ingeniería, una actividad académica, que forme a los estudiantes en la metodología de resolución de problemas.

Para este curso se entiende por problema, una situación a resolver, cuya solución implica **un proceso reflexivo**, y la ejecución de un **paso creativo,** que depende del estadio mental y de la experiencia de la persona que lo resuelve.

Una situación a resolver, que se soluciona mediante la aplicación de un algoritmo, se define como un ejercicio, y no se considera un problema. Un ejercicio para un estudiante, puede ser trabajar con un problema ya resuelto por el profesor, y para la solución el estudiante acude a la memoria, y no utiliza el proceso reflexivo y creativo.

3.2.3 Clases de problemas

Se identifican varias clases de problemas: problemas por demostrar, problemas por resolver, problemas de razonamiento lógico, problemas prácticos.

Los problemas por demostrar tienen como propósito verificar o negar la validez de proposiciones matemáticas, mediante las denominadas pruebas matemáticas. La prueba matemática determina de un modo concluyente, la falsedad o veracidad de una proposición claramente enunciada.

Los elementos principales en un problema por demostrar de naturaleza matemática, son: la hipótesis, el razonamiento lógico y la conclusión. Estos problemas se estudiaron en la unidad I.

El propósito de un problema por resolver es descubrir cierto objeto, por ejemplo la incógnita del problema. Estos problemas pueden ser teóricos o concretos. Ejemplos típicos van desde descubrir al asesino en una novela policíaca, determinar la incógnita de un problema algebraico, o determinar una propiedad de un cuerpo en un problema de física.

Los principales elementos de un problema por resolver son: la incógnita, los datos, las condiciones, **la idea para descubrir el camino de solución**, la ejecución de la idea, y la evaluación del resultado.

Si bien esta unidad hace énfasis en la metodología de los problemas por resolver, muchos de los aspectos que se analizan también se aplican a la resolución de problemas en general

Los problemas de razonamiento lógico son problemas por resolver, en los cuales la solución depende básicamente del proceso de razonamiento que utiliza los conceptos y métodos de la lógica del sentido común y la científica, y muy poco de los conocimientos matemáticos o físicos.

Los problemas prácticos utilizan la ciencia, la tecnología, y la experiencia para resolver una situación muchas veces compleja, y que en ocasiones requiere de una visión multidisciplinar. Estos problemas están en el centro del ejercicio de la ingeniería. Por ejemplo, el egresado de Ingeniería Electromecánica de la Universidad Francisco de Paula Santander en Cúcuta (Colombia) debe ser competente en la solución de problemas de control y conversión de energía, de los sistemas encargados de los procesos de transformación de energía electromecánica.

Los problemas prácticos de la ingeniería, por ejemplo el diseño de un sistema de control de un proceso electromecánico de conversión de energía, son esencialmente complejos, ya que involucran un gran número de incógnitas, con múltiples condiciones y una gran cantidad de datos.

La solución de un problema práctico de ingeniería, requiere resolver modelos matemáticos, simular procesos, y la utilización de la experiencia acumulada en la solución de problemas similares. Por esto se considera a la Ingeniería como una ciencia y un arte.

3.3 La motivación y las creencias en la resolución de problemas

La solución de un problema requiere que el sujeto asuma el papel de solucionador, esto es que sienta la necesidad o el placer por resolver el problema.

Además de una alta motivación, el sujeto debe poseer los conocimientos, estrategias, habilidades y destrezas requeridas, lo que Schoenfeld denomina los recursos.

Un factor altamente negativo para la motivación en los estudiantes que inician los estudios de educación superior, son los **prejuicios** que arrastran desde el bachillerato acerca de la naturaleza de la matemática y de las dificultades para su aprendizaje, lo que según Schoenfeld se conoce como el sistema de creencias

Las creencias condicionan muchos aspectos relacionados con el aprendizaje de la matemática. Por ejemplo, determinan en el estudiante cuándo se debe enfocar en conocimientos formales y cuándo no, y también la decisión de si la Matemática se aprende memorizando o no.

Los estudiantes pueden creer que la Matemática es solamente una serie de reglas que simplemente van a memorizar. O pueden creer que la Matemática **es elaboración de conceptos, establecimiento de relaciones, y patrones**. En este último caso, es probable que el estudiante trate de comprender la Matemática, pues creerá que tal comprensión le va a ser útil en otras actividades en la vida.

Schoenfeld identifica una serie de creencias de los estudiantes sobre la Matemática, y algunas de ellas son:

1. Los problemas matemáticos tienen una y solo una respuesta correcta. Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor enunció en la clase. .
2. Los estudiantes corrientes no pueden esperar entender matemáticas, porque es demasiado difícil, simplemente pueden memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente. Esta creencia se ve con bastante frecuencia.
3. La matemática es una actividad de personas que trabajan solas. No hay trabajo en equipo, en el desarrollo de la matemática.
4. Los estudiantes que han entendido las matemáticas, y que han estudiado, podrán resolver cualquier problema que se les asigne, en cinco minutos o menos.
5. Las matemáticas aprendidas en la escuela, tienen poco o nada que ver con el mundo real.

Además de estos prejuicios, Schoenfeld verificó en su trabajo, que a diferencia del **matemático que utiliza** la argumentación matemática y el razonamiento formal en la solución de problemas, **el estudiante no utiliza jamás esta herramienta** formal a la hora de resolver un problema.

3.4 Niveles de pensamiento utilizados para resolver un problema

Algunos autores sugieren separar el nivel de **comprensión** de una situación problemática, en dos categorías: **Traducción e Interpretación,** y siguiendo a Bloom, proponen una taxonomía de siete niveles para resolver problemas en matemáticas. Esta taxonomía se muestra a continuación:

1. Memoria: El estudiante recuerda o memoriza en **la memoria de corto plazo**, la información relacionada con la situación problemática propuesta.
2. Traducción: El estudiante **transforma** la información **de una forma literal o coloquial, a una forma simbólica**, de naturaleza matemática.
3. Interpretación: El estudiante descubre las **relaciones entre los hechos, las generalizaciones, definiciones, conceptos, valores y habilidades**.
4. Aplicación: El estudiante resuelve un problema similar a los cotidianos en vida, y para ello requiere la identificación del problema, la selección y el uso de las generalizaciones, y las habilidades apropiadas.
5. Análisis: El estudiante **descompone la situación problemática en partes de menor complejidad**, que la situación propuesta.
6. Síntesis: El estudiante utiliza el conocimiento de la **memoria de largo plazo**, la argumentación lógica y la motivación, para generar la idea (concepción del plan), que lo conduzca a la solución.
7. Evaluación: El estudiante verifica que la solución concuerde con la lógica del sentido común o con la solución de algún problema equivalente, emite un juicio al respecto, y **decide que debe incorporar a la memoria de largo plazo, de la solución de este problema**.

3.5 Fases para la resolución de un problema

De acuerdo a la metodología de Polya y Sanders, se reconocen cuatro fases o etapas, en el proceso de resolución de problemas:

a. La comprensión del problema, (análisis) que se produce después de la lectura reflexiva de la situación problemática propuesta. Esta fase debe incluir la comprensión del significado de los términos involucrados, y la traducción y la interpretación de la situación problemática propuesta.
b. La concepción del plan. Después del proceso de comprensión (análisis), del problema, y si se activan mecanismos lógicos y sicológicos, puede surgir

una acción creativa, que permite vislumbrar el camino que conduce a la solución. La concepción del plan es una síntesis de la situación propuesta.

c. La ejecución del plan, se lleva a cabo siguiendo un proceso lógico, sistemático y argumentativo, (pensamiento matemático), justificando cada uno de los pasos que se ejecutan, para obtener la solución, en base al razonamiento matemático, a los conocimientos previos, y a la experiencia o a la intuición.

d. El examen de la solución es un proceso de evaluación en donde se contrasta la solución obtenida con el sentido común, y otras soluciones de casos similares. En esta fase también se debe realizar un proceso reflexivo sobre los aspectos más significativos del proceso de solución, para internalizar (asimilar) el proceso, y así enriquecer el sentido común.

3.5.1 Comprensión del problema

En esta etapa inicial se interpreta la información de la situación problemática a resolver, de acuerdo con el conocimiento del mundo, del lenguaje, las percepciones y las experiencias del solucionador. Este proceso debe ser fundamentalmente reflexivo, y amerita tiempo y dedicación, si se quiere tener éxito en la solución del problema.

Para la comprensión se debe **conocer el significado preciso de cada una de las palabras**, que describen la situación problemática a resolver.

Después de comprender el significado de las palabras, se debe establecer con claridad cuál **es la situación problemática a resolver**, indicando cuál es el objetivo a alcanzar, cuál es el contexto, y cuáles las limitaciones de la situación.

En el caso de problemas matemáticos a resolver, se debe establecer sin lugar a dudas, cuál es la incógnita, cuáles son los datos, cuáles son las condiciones o restricciones del problema, y hacer una exploración sobre si los datos y las condiciones son suficientes, para determinar la incógnita, o si existe alguna condición que sea contradictoria. Se deben establecer las posibles relaciones entre la incógnita, los datos, y el contexto.

En ocasiones no se conoce algún dato, entonces hay que determinarlo dentro del proceso de resolución, o examinar si esta información (dato) que aparentemente se requiere para hallar la incógnita, se puede obviar.

Siempre que sea posible se debe realizar una representación gráfica de la situación problemática propuesta, ya que en ocasiones esto ayuda a la concepción del plan de solución.

La representación gráfica del problema, lo más precisa posible, debe incluir los datos, la incógnita y las condiciones, para **visualizar** las relaciones entre las partes del problema.

El proceso de toda representación es un proceso muy dinámico, en donde se añaden detalles, a medida que avanza el proceso de resolución, y que no los proporcionaba la situación original.

La comprensión del problema debe responder la siguiente pregunta: ¿Es posible expresar el problema de otra manera? En muchas ocasiones, la respuesta a esta pregunta muestra el camino de la solución.

3.5.2 Concepción de un plan

El plan que permite resolver un problema se obtiene cuando se sabe cuáles son los cálculos, razonamientos o pasos que se deben realizar para determinar la incógnita.

Se debe descubrir el camino que conduce a la solución. Este es el paso más difícil en la resolución de problemas.

El plan surge de una buena idea, y esta se fundamenta en procesos lógicos y sicológicos.

Es necesario recordar conocimientos adquiridos en diversos campos académicos y en la experiencia (memoria de largo plazo) acumulada en la vida. Es necesario establecer diferencias entre el uso de las memorias de corta y de larga duración.

La primera (memoria de corto plazo) genera retención por medio limitado, y tiene poca utilidad para el aprendizaje permanente, mientras que la segunda, (memoria de largo plazo), es un sistema activo que permite organizar, retener y procesar la información, y faculta a la persona para establecer relaciones, formular generalizaciones, y lograr aprendizajes perdurables y significativos. La impronta de un ingeniero de cualquier especialidad, radica en la memoria de largo plazo.

Es indispensable tener una gran motivación para la resolución del problema, para generar los mecanismos sicológicos creativos, que conducen a esa buena idea, que será la base para la concepción del plan.

Ayuda para la concepción del plan, más no lo genera, examinar las siguientes preguntas:

1. ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Conoce algún problema con un planteamiento ligeramente diferente?
2. ¿Conoce un problema con una incógnita parecida? ¿Conoce algún teorema o ley que pueda aplicar?
3. Si encuentra un problema resuelto, relacionado con el analizado, ¿se puede utilizar el método utilizado? ¿Se puede utilizar el resultado? ¿Se requiere introducir alguna modificación para adaptar la solución a la situación analizada?
4. ¿Se puede enunciar el problema de otra manera, sin alterar la esencia del problema?
5. ¿Se puede resolver algún problema relacionado con el problema propuesto? ¿Se utilizan todos los datos y las condiciones en la solución?
6. ¿Se puede hacer una representación gráfica de la situación problemática propuesta?

Las personas que inician en la actividad de resolver problemas, deben memorizar estas preguntas, para considerarlas en el momento de resolver un problema.

¿Pero cómo actuar, si no aparece la idea que permita encontrar el camino a la solución?

En el libro *Mathematical Thinking*[12], Mason reflexiona acerca de la situación de sentirse atrapado, cuando en el proceso de resolución, no se encuentra una salida para el problema.

> "En este estado surgen sentimientos de impotencia, al sentir que no se realiza ningún progreso, y hasta de pánico, que frecuentemente impulsan a abandonar la tarea de resolución del problema. En este momento es oportuno reconocer la situación, escribiendo sobre un papel en blanco la palabra "atrapado", esto permite tomar una cierta distancia, de las emociones incapacitantes que la situación genera. Puede ocurrir, que en este momento se abandone el trabajo o se haga una pausa, y se retome otra actividad, pero antes de hacerlo es recomendable escribir, que aspectos del problema bloquean el camino a la solución, ya que esto permitirá posteriormente retomar la solución del problema con mayor facilidad.

En este momento se debe recordar, que el éxito requiere pasión, persistencia, emoción, la capacidad de sobrevivir y, especialmente, entender el valor de un fracaso. Al retomar el trabajo se debe hacer una nueva y cuidadosa lectura del problema, y una revisión de lo alcanzado hasta ese momento, y conviene hacerse las siguientes preguntas:¿Qué se conoce? ¿Qué necesito? ¿Qué debo introducir para encontrar el camino? ¿Cuál es la relación que necesito y no puedo determinar? ¿Qué deseo alcanzar? Si no se logra visualizar la solución, es el momento de consultar con otras personas conocedoras del tema. Sentirse atrapado en la solución de un problema y terminar alcanzando la solución, es una de las experiencias más enriquecedoras en la formación de una actitud perseverante, y de la cual se termina aprendiendo mucho.

3.5.3 Ejecución del plan

Al ejecutar el plan se debe verificar la veracidad de cada paso, bien sea por una demostración formal, por un razonamiento, o porque la experiencia o la intuición sirven de soporte.

3.5.4 Revisión y evaluación de la solución

Una vez se obtiene la solución, ayuda a la visión retrospectiva del problema, examinar las siguientes preguntas: ¿Se puede verificar el resultado? ¿Se puede verificar el razonamiento? ¿Se puede obtener el resultado de un modo distinto? ¿El valor obtenido en el resultado es coherente con el sentido común? ¿Se puede utilizar el resultado o el método, para resolver algún otro problema? ¿Cuál es el aprendizaje obtenido de la resolución del problema que debo incorporar en mi memoria de largo plazo?

3.6 Ejemplos de resolución de problemas

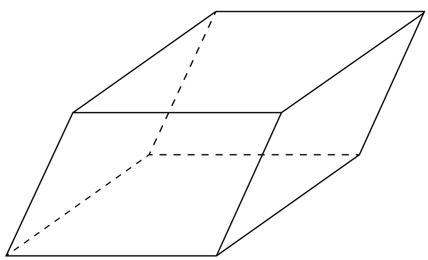
Ejemplo 50

Problema a resolver

Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular, dadas su longitud, ancho y altura. Problema tomado de la referencia.[1]

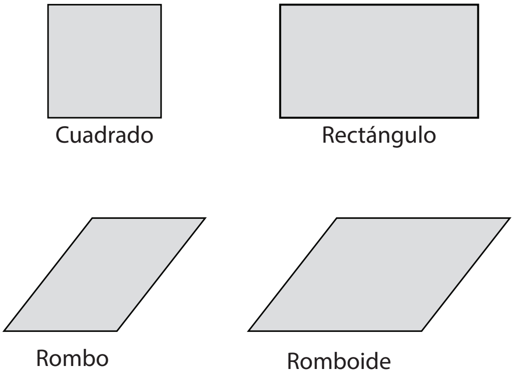
Comprensión del problema

1. interpretación del enunciado del problema.
2. ¿Entiende todas las palabras involucradas en el problema?:



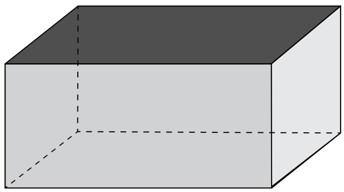
¿Qué es un paralelepípedo?

Es un sólido limitado por seis paralelogramos, cuyas caras opuestas son iguales y paralelas.



¿Qué es un paralelogramo?

Es una clase especial de cuadrilátero (polígono formado por solo cuatro lados) cuyos lados opuestos son iguales y paralelos.



¿Qué es un paralelepípedo rectangular?

Es aquel en el cual los paralelogramos se intersectan en ángulo recto.

¿Puede dar un ejemplo práctico de un paralelepípedo rectangular?

Sí, el salón de clases.

¿Qué es la diagonal de un paralelepípedo rectangular?

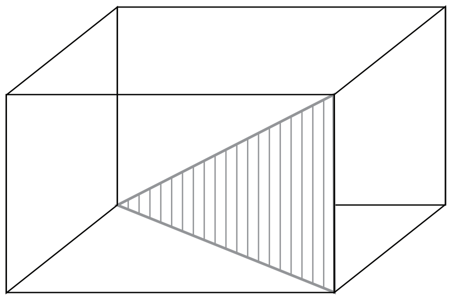
Es el segmento rectilíneo entre dos vértices que se encuentran en planos perpendiculares de paralelogramos opuestos.

¿Todas las diagonales del paralelepípedo rectangular son iguales? Sí.

¿Puede dibujar un paralelepípedo rectangular y su diagonal?

Sí. A continuación se presenta el dibujo del paralelepípedo, y una de sus diagonales.

Figura 13. Un paralelepípedo rectangular y una de sus diagonales



1. Traducción
   a. Separación de las principales partes del problema.
   b. ¿Cuál es la incógnita?: La longitud de la diagonal de un paralelepípedo.
   c. ¿Cuáles son los datos?: La longitud, el ancho y la altura del paralelepípedo.
   d. ¿Cuál es la condición?: Que el paralelepípedo sea rectangular.
   e. Introducir una notación adecuada.
   f. Se acostumbra utilizar para las incógnitas, letras minúsculas de las últimas del alfabeto: w, x, y, z.
   g. Para los datos se utilizan las primeras letras del alfabeto: a, b, c, d, e, etc., que se relacionen con la naturaleza del dato.
   h. En la situación que se estudia se asigna: la letra x para la incógnita ¨longitud de la diagonal del paralelepípedo¨.
   i. Para los datos de la geometría del paralelepípedo se utilizan:

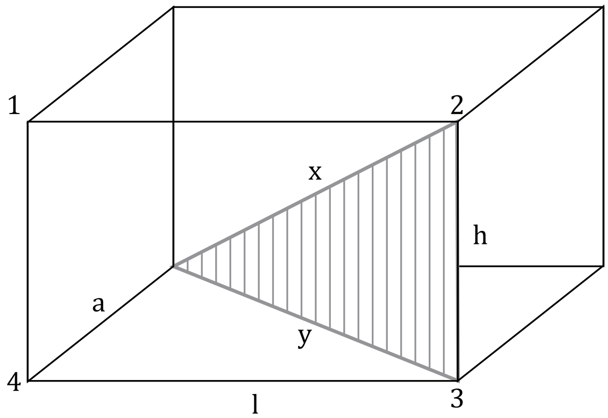
      - la letra **a** para el ancho.
      - la letra **l** para la longitud.
      - La letra **h** para la altura

2. Interpretación del problema.

   a. ¿Es posible dibujar una figura relacionada con el problema donde se muestren la incógnita y los datos? Sí.

      A continuación se muestra la figura:

Figura 14. Dimensiones de un paralelepípedo rectangular



   b. ¿Existe alguna relación entre la incógnita y los datos?

      Si al dibujar la situación aparece una nueva incógnita (y). Las dos incógnitas y los datos pertenecen a dos triángulos rectángulos, que comparten un elemento común. La hipotenusa (y) del triángulo 1-4-3, es el cateto del triángulo 1-3-4.

   c. ¿Es posible satisfacer la condición? ¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?

      En un paralelepípedo rectangular al definir a, l, h, queda determinado el sólido, y en consecuencia su diagonal.

Concepción de un plan

a. Se puede enunciar el problema de forma diferente?

   Si: "Determinar la longitud de la diagonal del salón de clases".

b. ¿Conoce algún problema relacionado?

   De la observación cuidadosa de la figura relacionada con el problema, se puede visualizar que la diagonal (x) es parte del triángulo rectángulo 1-2-3, rectángulo en el vértice 3, porque el segmento rectilíneo 1-3

(y) es perpendicular al segmento 2-3 (h), ya que pertenecen a planos perpendiculares, por la definición del paralelepípedo rectangular.

Un problema relacionado con la situación planteada es determinar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conociendo los catetos.

c. ¿Se puede utilizar algún teorema conocido? Sí: El teorema de Pitágoras.

Por lo anterior, el plan es determinar la hipotenusa del triángulo rectángulo 1-2-3, utilizando el teorema de Pitágoras.

Ejecución del plan

Aplicando el teorema de Pitágoras, al triángulo 1-2-3, se obtiene:

$$x^2 = y^2+h^2 \tag{45}$$

Para determinar la nueva incógnita y se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo 1-4-3, rectángulo en el vértice 4.

$$y^2 = a^2+l^2 \tag{46}$$

Sustituyendo la ecuación (2.02) en (2.01) y extrayendo la raíz cuadrada, se obtiene:

$$x=\sqrt{a^2 + l^2+ h^2} \tag{47}$$

Revisión de la solución obtenida

¿Se puede verificar el razonamiento?

Sí, el fundamento del razonamiento es el teorema de Pitágoras, ¿Es posible intentar determinar la longitud de la otra diagonal? Sí.

¿El valor de la longitud de la otra diagonal es igual al obtenido? Sí.

¿El valor obtenido es lógico? Sí, la diagonal debe ser mayor que cualquiera de los lados del paralelepípedo.

Ejemplo 51

Problema a resolver

En el año 200 A.C. Eratóstenes, un sabio griego, estaba en conocimiento de que en Sienne, una población ubicada actualmente en Asuán (Egipto), el 21 de Junio, cuando ocurría el día más largo del año, la sombra producida por un palo vertical se achicaba a medida que se acercaba el mediodía, hasta que no producía sombra al llegar el mediodía. Este evento no ocurría en ninguna otra población cercana, ni distante.

Este hecho hizo reflexionar a Eratóstenes e inferir que la tierra no era plana como se creía, sino esférica. Para calcular el radio de la tierra se le ocurrió medir la sombra que un obelisco de una determinada altura producía el 21 de junio, en la población de Alejandría distante 800 Km de Sienne.

Si se supone que la altura del obelisco es de 20 m. y la sombra producida es de 2,25 m. se pide determinar el valor del radio de la tierra.

Comprensión del problema

Interpretación del enunciado del problema

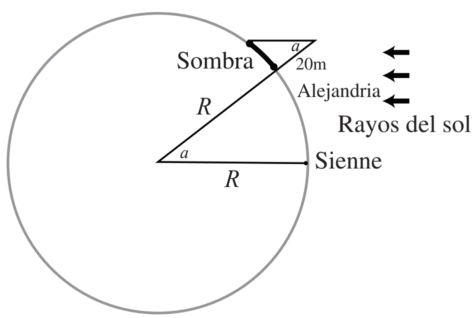
a. ¿Entiende todas las palabras involucradas en el problema?:

¿Qué es la sombra de un objeto?

La luz no puede atravesar los objetos opacos. Como consecuencia de esta propiedad se producen las sombras. Los rayos de luz iluminan lo que hay detrás del objeto, con más intensidad que en la zona donde se proyecta el objeto, esta zona aparece menos iluminada, y es lo que se conoce como la sombra del objeto

¿Cómo son los rayos de luz que alumbran un cuerpo en la tierra?

Debido a la gran distancia que existe entre el sol y la tierra, se puede asumir que los rayos de luz provenientes del sol, son paralelos



¿Sobre una superficie plana donde los rayos de sol incidan de manera paralela un objeto produce sombra? No, porque los rayos de luz inciden perpendicularmente.

¿Qué es una esfera? Es un cuerpo geométrico sólido, limitado por una superficie curva, cuyos puntos están todos a igual distancia de uno interior llamado centro.

b. ¿Se puede elaborar un dibujo de la situación planteada? Sí, a continuación se muestra una figura alusiva a la situación.

Traducción

a. Separación de las principales partes del problema.

¿Cuál es la incógnita?: El radio de la tierra.

¿Cuáles son los datos?:

1. La distancia entre las dos poblaciones: 800 Km.
2. La altura del obelisco: 20m.
3. La medida de la sombra: 2,25m.

¿Cuál es la condición?: Medir la sombra del obelisco al mediodía del 21 de junio.

Interpretación del problema

Observando la figura, se puede apreciar que el ángulo formado por los dos radios, relacionados con las dos ciudades de Sienne y Alejandría, es el mismo ángulo, que determina la magnitud de la sombra y el arco formado entre las dos ciudades.

Concepción de un plan

¿Se puede enunciar el problema de forma diferente?

Sí. ¿Có**mo determinar el ángulo a cuyo arco es de 800 Km y extrapolar para conocer la longitud de la circunferencia de la tierra, y de este valor determinar el valor del radio?**

Ejecución del plan

$$a = \tan^{-1}\left(\frac{2.25}{20}\right) = 6.4°$$

$$2\pi R = \frac{800(360°)}{6.4°}$$

$$R = 7162\ km$$

Revisión de la solución obtenida

Con la tecnologías modernas de medición se obtienen varias distancias desde los puntos de la superficie hasta el centro de la Tierra, El radio polar medido es de 6357 kilómetros, mientras que el radio ecuatorial es de 6378 kilómetros.

Si bien, la Tierra no es estrictamente esférica, en ocasiones se modela como una esfera de un radio medio de 6371 kilómetros. Se encuentra una discrepancia con el valor obtenido por Eratóstenes menor al 7%.

Es asombroso que Eratóstenes hubiese obtenido este resultado, solamente con el uso del razonamiento geométrico. En una época cuando las mediciones de distancias eran muy rudimentarias.

Ejemplo 52

Problema a resolver[13]

Un hombre camina a velocidad constante, por la línea de un tren que interconecta dos estaciones A y B, en la dirección de A hacia B.

Los trenes que van de A hacia B, se encuentran con el hombre cada 12 minutos.

Los trenes que van de B hacia A, se encuentran con el hombre cada 4 minutos

Los trenes se mueven a velocidad constante.

Se pregunta, cuál es el tiempo de diferencia, en la salida de los trenes de las estaciones.

Comprensión del problema

Interpretación del enunciado del problema

a. ¿Entiende todas las palabras involucradas en el problema:

   ¿Qué es velocidad constante?: Un móvil se desplaza a velocidad constante, cuando recorre espacios iguales en tiempos iguales.

b. ¿Puede elaborar un dibujo que describa la situación planteada?

Sí. **¿Existe un punto en donde el hombre simultáneamente vea los trenes que van en ambas direcciones?**

Si, en el punto medio entre A y B .Se asume que para t=0, el hombre se encuentra con el tren 1 que va de A hacia B y el tren 1‘, que va de B hacia A.

Se dibujan las ubicaciones del tren 2, que sale x minutos después del 1 , que va de A hacia B, y del tren 2‘, que sale en dirección de B hacia A, x minutos después del 1‘, y la posición del hombre para t=0’, para t=4’ y para t=12’ (figura 42).

Traducción

a. Separación de las principales partes del problema.

¿Cuál es la incógnita?: el tiempo. El tiempo de diferencia entre la salida o llegada, de dos trenes consecutivos.

¿Cuáles son los datos?: Los tiempos cuando el hombre se encuentra con los trenes, la velocidad de desplazamiento del hombre y la del tren. De estos datos no se conocen la velocidad del hombre y la del tren.

¿Cuál es la condición? Que las velocidades de desplazamiento del hombre y la del tren sean constantes.

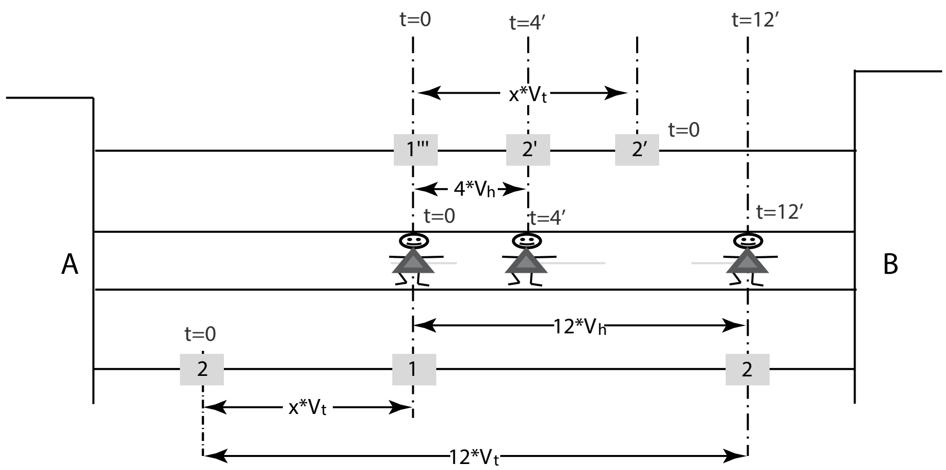
b. Introducir una notación adecuada.

x = tiempo de diferencia en la salida o llegada de dos trenes consecutivos, en minutos.

V_h = velocidad de desplazamiento del hombre en m/min.

Vt = =velocidad de desplazamiento del tren en m/min

Figura 15. Dibujo que describe la situación planteada en el problema



c. ¿Es posible dibujar una figura relacionada con el problema, donde se muestren la incógnita y los datos?

Sí, se muestra en la figura 15.

Se dibujan para t=0, la posición del hombre, la del tren con dirección de A hacia B al momento de encontrarlo, y la del tren que viene inmediatamente atrás.

Se dibujan los mismos elementos para $t = 4'$ y $t = 12'$.

d. ¿Es posible satisfacer la condición?

Sí, los trenes que salen de las estaciones en el mismo instante, se van a encontrar en la mitad de la distancia entre las dos estaciones.

e. ¿Son suficientes las condiciones dadas para determinar la incógnita? Sí.

Concepción de un plan

a. Se puede enunciar el problema de forma diferente?

Si: **determinar las distancias recorridas en 4´ y 12´, por el tren y por el hombre**

b. ¿Conoce algún problema relacionado?

Problemas de movimiento de objetos con velocidad constante

c. ¿Se puede utilizar alguna fórmula conocida?

Si: $e=V_t$ (El espacio recorrido por un móvil, es el producto de la velocidad por el tiempo.

Por lo anterior:

El plan es determinar el espacio recorrido por el tren número 2, que se desplaza en la dirección de A hacia B entre el minuto 0 y el 12, y el espacio recorrido por el tren número 2', que se desplaza en la dirección de B hacia A, entre el minuto 0 y el 4.

Ejecución del plan

Aplicando la ecuación de $e=v*t$, para el tren número 2, que viaja en la dirección de A hacia B, entre $t=0'$ y $t=12'$, y observando cuidadosamente la figura, se puede escribir:

$$12V_t = 12V_\hbar + xV_t \qquad (48)$$

Aplicando la ecuación para el tren número 2', en la dirección de B hacia A, entre t=0' y t= 4', de la figura, se tiene:

$$xV_t = 4V_t + 4V_\hbar \tag{49}$$

Resolviendo las ecuaciones 46 y 47, se obtiene: x=6'.

Los trenes salen de cada estación con intervalos de seis minutos.

Revisión de la solución obtenida

Para obtener la solución no fue necesario determinar los valores de la velocidad del tren ni la del hombre,sino conocer sus valores relativos.

De la solución se deduce, que la velocidad del hombre es la mitad de la velocidad del tren, lo que implica que la velocidad del tren es muy baja, y se puede inferir que la época en que se propuso este problema, la tecnología de los trenes era muy primitiva.

Ejemplo 53

Problema a resolver[13]

Tres prados cubiertos de hierba, de una misma espesura, y con el mismo grado de crecimiento, tienen áreas $3^1/_3$, 10 y 20 de hectáreas, respectivamente.

12 toros se comen la hierba del primer prado en 4 semanas, y 21 toros se comen la hierba del segundo en 9 semanas.

Se pide determinar cuántos toros se comerán la hierba del tercer prado, en 18 semanas.

Comprensión del problema
Interpretación del enunciado del problema

¿Entiende todas las palabras involucradas en el problema?

Se entiende por espesura, (e), la densidad de la hierba, o sea el número de tallos de la hierba por unidad de área.

El grado de crecimiento (g), es la longitud de crecimiento de la hierba (ΔY) en la unidad de tiempo (Δt) .

$$g = {}^{\Delta Y}/_{\Delta t}$$

Traducción

Separación de las principales partes del problema:

Incógnita: x, número de toros en el prado 3.

Datos: Áreas de los 3 prados, y número de toros y de semanas, en que se comen la hierba de 2 prados.

Condiciones: Los 3 prados tienen la misma espesura (e), la misma altura (Y), y el mismo grado de crecimiento (g). No se conocen ninguna de estas 3 condiciones.

Interpretación del problema

a. ¿Se puede enunciar el problema de otra manera?

Si se puede enunciar como: **Determinar el número de toros que se comen en 18 semanas, un volumen de hierba que se puede conocer,si se dan los volúmenes de hierba que se comen un determinado número de toros, y se asume que cada toro consume igual cantidad de hierba.**

b) ¿Es posible dibujar una figura relacionada con el problema?

Sí, se muestra a continuación.

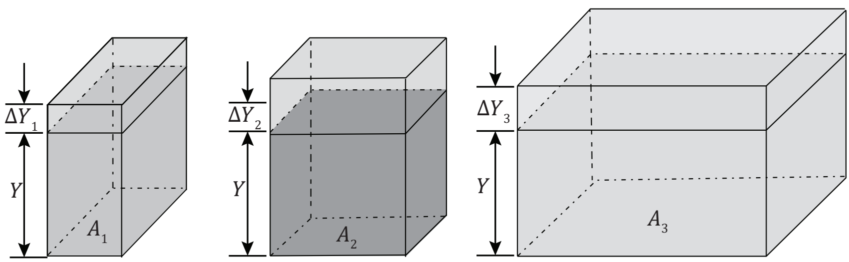
Interpretación del problema

Cada toro come la misma cantidad de hierba en un día, y dependiendo del número de toros deberá haber más volumen de hierba.

Concepción de un plan

Determinar el volumen de la hierba que se come cada toro por semana, el cual debe ser igual en los 3 prados, por hipótesis.

Figura 16. Volúmenes de hierba de los tres prados del problema



Ejecución del plan

Prado N°	Volumen de hierba por semana y por toro
1	$\left(\frac{10}{3}\right)\frac{(Y+\Delta Y_1)}{(12)(4)}$
2	$10\ \frac{(Y+\Delta Y_2)}{(21)(9)}$
3	$24\ \frac{(Y+\Delta Y_3)}{18x}$

$\Delta Y_1=4g$ $\Delta Y_2=9g$ $\Delta Y_3=18g$

El volumen de hierba consumido por semana y por toro es igual en los 3 prados

$$\left(\frac{10}{3}\right)\frac{(Y+\Delta Y_1)}{(12)(4)}=10\ \frac{(Y+\Delta Y_2)}{(21)(9)} \tag{50}$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)\frac{(Y+\Delta Y_1)}{(12)(4)}=10\ \frac{(Y+\Delta Y_3)}{18x} \tag{51}$$

De la ecuación (50):

$$1890(Y+4g)=1440(Y+9g)$$

$$\mathrm{Y}=12g$$

De la ecuación (51):

$$180(Y+4g)=103680(Y+9g)$$

$$x=36\text{ toros}$$

Se requieren 36 toros, para comerse la hierba del prado de 24Has en 18 semanas.

Revisión de la solución obtenida

La respuesta es lógica. La clave de la solución es calcular el consumo de hierba, de un toro en una semana, en cada uno de los prados, y asumir que el toro se comporta de igual manera, independientemente del prado donde se encuentre.

Ejemplo 54

Problema de razonamiento lógico

Se comete un delito y la Policía arresta a 4 sospechosos, que al ser interrogados formulan las declaraciones siguientes:

Andrés: "Eduardo es el culpable".

Eduardo: "Jesús es el culpable".

Jesús: "Eduardo miente, cuando dice que yo soy el culpable.

"Rafael: "yo no soy el culpable".

Conociendo que sólo uno de ellos dice la verdad, ¿quién es el culpable?

Solución:

Comprensión del problema
Interpretación

La incógnita del problema es: ¿Quién es el culpable?

Los datos son las declaraciones de cada uno de los cuatro sospechosos.

La condición es: uno sólo de los sospechosos dice la verdad.

El problema se puede plantear como:

¿Cuál de los sospechosos dice la verdad, y dependiendo de lo que diga, se puede saber quién es el culpable?

La afirmación de Jesús, es un condicional: "Eduardo miente (q) cuando (si) dice que yo soy el culpable (p)", también se puede expresar como: "Si Eduardo dice que soy culpable, entonces Eduardo miente", o sea: Si p entonces q. Este condicional será falso, cuando el consecuente (q) "Eduardo miente", es falso, o sea que si la afirmación (el condicional) es falsa, entonces Eduardo dice la verdad y Jesús es culpable.

A continuación se presenta en una tabla, la declaración de cada sospechoso. Se asume que uno dice la verdad, y se trata de determinar si con esta hipótesis se llega a una contradicción, en cuyo caso se desecha la hipótesis.

El procedimiento se repite, hasta no encontrar contradicción.

Nombre	Declaración	1	2	3	4	1*	2*	3*	4*
Andrés	Eduardo es culpable	V	F	F	F	I	I	I	I
Eduardo	Jesús es el culpable	F	V	F	F	C	I	I	I
Jesús	Eduardo miente cuando dice que yo soy el culpable	F	F	V	F	I-C	C	I	C-I
Rafael	Yo no soy el culpable	F	F	F	V	C	C	C	I

I=inocente; C=culpable; V=verdadero; F=falso.

Concepción del plan

Se supone que un sospechoso dice la verdad, y se razona para tratar de encontrar una contradicción. La contradicción se genera, si como consecuencia de una declaración, una persona es inocente y culpable a la vez, o dos son culpables. Se continua el procedimiento, hasta no encontrar contradicción, y entonces lo supuesto es verdadero, y se encuentra la solución.

Ejecución del plan

Se asume que Andrés dice la verdad (V) y en la columna 1, se muestran los valores de verdad de las otras personas. De esta suposición se infiere en la columna 1*, la calificación de inocencia (I) o culpabilidad (C) de las personas, y aparece una contradicción, porque Jesús es culpable e inocente a la vez.

Se asume que Eduardo dice la verdad, y de ahí se infiere en la columna 2*, que Jesús y Rafael son culpables, lo que es una contradicción y por ello se descarta esta posibilidad.

Se asume que Jesús dice la verdad, y se infiere en la columna 3*, que el único culpable es Rafael, y esta puede ser una solución posible.

Se asume que Rafael dice la verdad (V), y se infiere en la columna 4*, que Jesús es culpable e inocente a la vez, lo que es una contradicción, y por eso se descarta esta posibilidad.

En resumen, la opción de que Jesús diga la verdad, es la única que no presenta contradicción, y por lo tanto el culpable es Rafael.

Revisión de la solución

La respuesta es lógica, y la clave para obtenerla es saber construir la negación de proposiciones compuestas como: Eduardo miente, cuando dice que yo soy el culpable, la cual es equivalente a: Si Eduardo miente entonces soy inocente, cuya negación de acuerdo a la tabla 5 es: Eduardo miente y soy culpable.

Ejemplo 55

Problema a resolver

El siguiente problema lo propone Mason en el libro *Mathematical Thinking*[12]: Fred y Frank son aficionados al deporte, y corren desde el sitio A hasta el B. Fred corre la mitad del trayecto, y la otra mitad la camina. Frank corre la mitad del tiempo, y la otra mitad la camina. Si los dos corren y caminan a la misma velocidad, se pregunta quién llegará primero.

Solución:

Comprensión del problema
Interpretación del enunciado del problema

El problema se refiere a un movimiento con velocidad constante, de dos personas que se desplazan un tiempo corriendo, y otro tiempo caminando.

Traducción

El objetivo (la incógnita) es determinar quién llega primero a la meta con el contexto dado: Fred corre la mitad del trayecto y la otra mitad la camina. Frank corre la mitad del tiempo, y la otra mitad la camina. Los dos corren y caminan a la misma velocidad.

a. Se asume que corren a una velocidad V_1 (constante) y caminan a una velocidad V_2 (constante).

b. La incógnita es determinar, quién llega primero a la meta.

c. Los datos o información que se requiere para resolver el problema, son las velocidades V_1 y V_2, los tiempos t_1 y t_2, que Fred dura corriendo y caminando, y la distancia entre A y B. No se conocen la distancia entre el punto A y el B (d_{AB}), y los tiempos que Fred y Frank caminan y corren.

Las condiciones son que la velocidad de la carrera (V_1) es igual para las dos personas, y la velocidad al caminar (V_2) también es igual para las dos personas.

Interpretación del problema

a. Es posible hacer un gráfico: Sí. Se muestra, como Fred, corre a V_1 la mitad del camino durante un tiempo t_1 y camina la otra mitad a una velocidad V_2, durante un tiempo t_2,

   Por otra parte Frank, corre la mitad del tiempo ($\frac{t}{2}$), a una velocidad V_1, y la otra mitad del tiempo camina a V_2 .

b. Cuales son las leyes o principios que se pueden aplicar: Las leyes de movimiento de cuerpos, a velocidad constante.

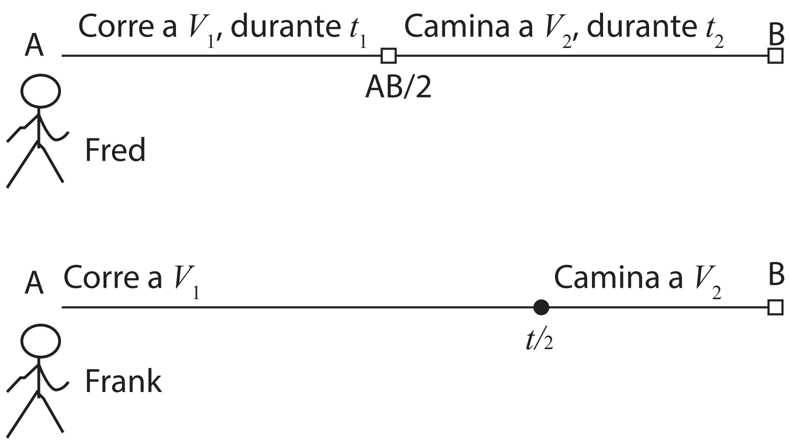
c. ¿Se puede expresar el problema de otra manera?

Sí. Calcular el tiempo empleado por Frank (t), y el tiempo empleado por Frank (t_{AB}) para recorrer la distancia hasta la meta, y determinar cuál es el menor tiempo.

Concepción del plan

Determinar el tiempo empleado para recorrer la distancia entre dos puntos dados por dos personas que se mueven a velocidad constante.

Figura 17. Condiciones del desplazamiento de Frank y de Fred



Ejecución del plan

Se calcula la distancia entre el sitio A y el B= , utilizando las leyes del movimiento a velocidad constante.

$$\text{Para Fred } = d_{AB}{=}2V_1t_1 = 2V_2t_2 \tag{52}$$

$$t_1 + t_2{=}t_{AB} \tag{53}$$

$$\text{Para Frank } d_{AB}{=}\ \frac{V_1t}{2} + \frac{V_2t}{2} \tag{54}$$

$$V_1{>}V_2 \text{ se corre más rápido de lo que se camina} \tag{55}$$

De las ecuaciones 52, 53, y 54 se infiere:

$$\frac{t_{\mathrm{AB}}}{t} = \frac{(V_1 + V_2)^2}{4\,V_1V_2} \tag{56}$$

Pero

$$4V_1\,V_2{=}\,(V_1{+}\,V_2\,)^2 - (V_1{-}V_{-2}\,)^2$$

$$(V_1{+}\,V_2\,)^2 = 4V_1\,V_2 + (V_1{-}V_{-2}\,)^2$$

$$(V_1{+}\,V_2\,)^2 > 4V_1\,V_2$$

Y por lo tanto : $t_{AB} > t$

Por lo tanto, Frank llegará primero al punto B.

Revisión de la solución

¿Es lógico que llegue primero a la meta, quien corre la mitad del tiempo, que quien corre la mitad del camino?

Para responder esta pregunta, se asume que la distancia entre los dos puntos es de 10Km(d_{AB}), y que la velocidad a la que se corre es de 5Km/hora (V_1), entonces t_1= 1hora y de 2.08 t_2 = 5 horas y V_2 = 1Km/hora. Fred requiere de 6 horas para llegar. Para Frank, de la ecuación 52 el tiempo empleado es = 20/6 = 3,33 horas, menor al tiempo de Fred, por lo tanto llega primero Frank. Se confirma la respuesta.

¿Qué se puede aprender? Que no siempre es necesario conocer el valor de los datos del problema para conocer la incógnita del problema.

Ejemplo 56

Problema de razonamiento lógico

El siguiente problema fue propuesto en Abril de 2015, a un grupo de estudiantes de secundaria en Singapur, y se volvió viral a través de las redes sociales.

Alberto y Bernardo se hicieron amigos de Cheryl, y deseaban conocer la fecha de su nacimiento. Cheryl les dio una lista con diez posibles fechas: Mayo 15, Mayo 16, Mayo 19, Junio 17, Junio 18, Julio 14, Julio 16, Agosto 14, Agosto 15 y Agosto 17.

Cheryl les informó a Alberto y Bernardo, por separado, el mes y la fecha de su nacimiento, respectivamente. Después de esto surge el siguiente diálogo:

Alberto dice: No sé la fecha de nacimiento de Cheryl, pero también sé que Bernardo no la conoce.

Bernardo dice: Al principio no sabía la fecha de nacimiento de Cheryl, pero después de hablar Alberto, la conozco. Alberto dice: Entonces yo también conozco la fecha de nacimiento.

El problema a resolver es: ¿cuál es la fecha de nacimiento de Cheryl?

Solución:

Comprensión del problema

Traducción

Incógnita: x = fecha de nacimiento de Cheryl

Datos:

Lista con diez posibles fechas de nacimiento

Tabla 23. Fechas organizadas en base a los meses (Alberto)

Meses	Mayo	Junio	Julio	Agosto
	15	17	14	14
	16	18 X	16	15
	19 X			17

Tabla 24 .Fechas organizadas en base a los días (Bernardo)

Días	14	15	16	17*	18 X	19 X
	Julio	Mayo	Mayo	Junio *	Junio	Mayo
	Agosto	Agosto**	Julio	Agosto**		

Alberto conoce el mes de nacimiento y Bernardo el día.

Condiciones: Dos proposiciones de Alberto y una de Bernardo.

Interpretación

El mes y el día del nacimiento de Cheryl se puede conocer de los datos y las condiciones, por lo tanto se procede a hacer un análisis de posibilidades, con las fechas dadas, y con la interpretación de las proposiciones emitidas por Alberto y Bernardo.

Concepción y ejecución del plan

Realizar un análisis lógico de las proposiciones de Alberto y Bernardo para ir descartando, de las posibles fechas dadas para el nacimiento de Cheryl, cuál es la verdadera.

De la primera proposición. Alberto dice: No sé la fecha de nacimiento de Cheryl, como él sabe el mes se descarta el mes de Mayo y el Junio porque de ser el mes Mayo la fecha sería 19, y de ser el mes de Junio la fecha sería 18, que son las fechas que no se repiten.

De la frase "pero también sé, que Bernardo no la conoce", quedan como posibles los días 14,15 ,16 y 17 y los meses Julio y Agosto

De la segunda proposición "Bernardo dice: Al principio no sabía la fecha de nacimiento de Cheryl, pero después de hablar Alberto, la conozco.

Después de hablar Alberto, las posibilidades son los días: 14, 15, 16,17 y los meses Julio y Agosto. Como Bernardo conoce la fecha de nacimiento, se descarta el día 14 porque este se encuentra presente en los meses de Julio y Agosto, y con tener el número no puede deducir el mes. Quedan como opciones 15 y 16 y17 y los meses de Julio y Agosto.

De la tercera proposición: Alberto dice: Entonces yo también conozco la fecha de nacimiento, Si Alberto sabe que Bernardo conoce la fecha, es porque debe ser el 16 de Julio, porque Agosto tiene dos posibilidades (15 y 17) y no generan certeza en la fecha.

x=La fecha de nacimiento de Cheryl es el 16 de Julio.

Revisión y evaluación de la respuesta

La solución se obtiene de la interpretación y del análisis de las consecuencias de cada una de las tres proposiciones emitidas por Alberto y Bernardo, dentro de la lista de las 10 posibilidades dadas para la fecha de nacimiento de Cheryl, y las condiciones establecidas en la información suministrada a Alberto y Bernardo.

Ejemplo 57

Problema de razonamiento lógico utilizando el razonamiento regresivo.

Polya en su libro de "Como plantear y resolver problemas" [1], propone y resuelve el siguiente problema, que enseña la utilidad de razonar regresivamente, en la solución de una situación problemática.

Se disponen de dos recipientes sin calibrar, con capacidades máximas de cuatro y nueve litros. ¿Qué se debe hacer para traer de un río cercano la cantidad de seis litros?

Solución:

Comprensión del problema

Interpretación del enunciado

Se disponen de dos recipientes **no calibrados,** con capacidades máximas de cuatro y nueve litros. Al no estar calibrados, solamente se puede conocer con certeza, el valor de sus capacidades máximas.

Se requiere traer seis litros del río, y esta cantidad no se percibe a primera vista como la resta de las capacidades máximas.

Traducción del enunciado

¿Cuál es la incógnita?: El procedimiento a utilizar con dos vasijas, para llevar 6 litros de agua de un río.

Datos: Se dispone de dos recipientes de capacidades máximas de 4 y 9 litros respectivamente.

Condiciones: a) Los recipientes no están calibrados. b) Se dispone de agua sin límites, o sea se puede sacar del río, cualquier cantidad de agua.

Se puede enunciar el problema de otra manera: Sí, se puede considerar el proceso inverso a realizar, después de haber alcanzado el propósito de tener los 6 litros requeridos.

Concepción del plan

Asumir que se tienen los 6 litros en la vasija de 9, y razonar regresivamente, para ver si es posible la solución.

Ejecución del plan

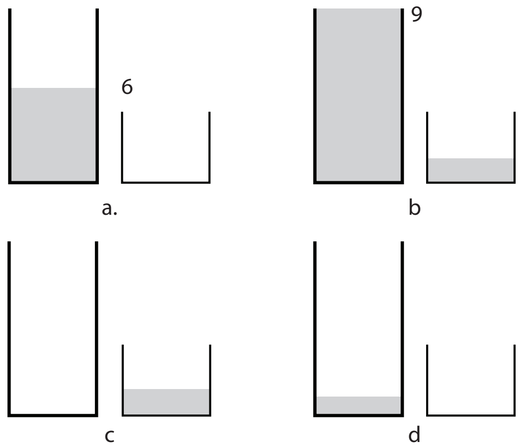
La solución se obtiene, cuando en el recipiente de 9 litros se tienen 6 litros (figura. 18 a.

Si a los 6 litros se les adiciona el contenido del recipiente pequeño, se obtienen 10 litros, tal como se ve en la figura 18 b.

Al vaciar el recipiente grande, se obtiene 1 litro, que se muestra en la figura 18 c, y si el litro restante se trasvasa al recipiente de 9 litros, se obtiene la figura 18d.

La situación de la figura 18 d se puede obtener, si del recipiente de 9 litros, se saca dos veces el contenido del recipiente de 4 litros. De esta manera, se inicia el procedimiento, y se realizan los pasos correspondientes a las figuras 18c y b, y se obtiene la solución.

Figura 18. Ejecución del plan



En resumen, el procedimiento sería el siguiente: Se llena el recipiente de 9 litros, se trasvasa de este recipiente dos veces al recipiente de 4 litros y queda un litro en el recipiente grande, el cual se trasvasa al recipiente de 4 litros. Se vuelve a llenar el recipiente de 9 litros, y se pasa agua al recipiente de 4 litros, al cual le faltan 3 litros para llenarse, y entonces quedan 6 litros en el recipiente grande.

Esta es la solución que presenta Polya en su libro[1].

Una manera alterna de resolver el problema, con un razonamiento progresivo, es obtener para la solución (tener 6 litros en un recipiente), una relación matemática, en función de las capacidades de los dos recipientes que se disponen.

$$6 = 9-3= 9-(4-1)=9-[4-(9-8)]=9-[4-(9-2*4)]$$

$6 = 9 - 3$. Los 6 litros se obtienen de sacarle al recipiente lleno de 9 litros, 3 litros.

$4-(9-2*4)$. Los 3 litros se pueden obtener si a un recipiente de 4 litros se le saca un litro.

$(9-2*4)$. Un litro se obtiene si a un recipiente lleno de 9 litros se le sacan dos recipientes llenos de 4 litros.

El procedimiento será obtener en el recipiente de 9 ltrs un litro,y trasvasar el litro al recipiente de 4 litros. Los tres litros que le faltan para llenar el recipiente de 4 litros se obtienen del recipiente lleno de 9 litros, por lo que en este quedan 6 litros, que es el objetivo del problema.

Evaluación de la solución

La solución también pudo haberse obtenido mediante un razonamiento progresivo, pero después de muchos intentos. El razonamiento regresivo, permite reducir el esfuerzo para obtener la solución.

Ejemplo 58

Problema a resolver

Un auto parte del reposo, y anda con un aceleración de $\frac{1\text{m}}{\text{seg}2}$ durante un segundo. Luego se apaga el motor, y el auto desacelera debido a la fricción de la carretera sobre los cauchos, durante 10 segundos, a razón de 5 $\frac{\text{cm}}{\text{seg}2}$.

En este instante se aplican los frenos, y el auto se detiene 5 segundos después.

Se pide calcular la distancia recorrida por el auto.

Solución:

Comprensión del problema

Interpretación del enunciado

- ¿Entiende todas las palabras involucradas en la situación problemática?

- ¿Qué significa que un cuerpo está en reposo?: que su velocidad sea cero.
- ¿Qué es aceleración?: Es el cambio en la velocidad de un cuerpo, que ocurre en la unidad de tiempo.
- ¿Qué ocasiona una aceleración?: Una fuerza, que actúa en la dirección y en el mismo sentido del movimiento del cuerpo.
- ¿Cuál es el efecto de la aceleración en el movimiento de un cuerpo?: Incrementar la velocidad del cuerpo.
- ¿Qué es desaceleración?: Es la disminución en la velocidad de un cuerpo, que ocurre en la unidad de tiempo. ¿Qué ocasiona una desaceleración?: Una fuerza, que actúa en la dirección, pero en sentido opuesto al movimiento del cuerpo, como la fricción de la superficie sobre las ruedas, la aplicación de los frenos, o manipular la caja de velocidades (engranajes), para reducir la velocidad. ¿Cuál es el efecto de la desaceleración en el movimiento de un cuerpo?: Reducir la velocidad,
- ¿Qué significa, que el cuerpo se detiene?: Que la velocidad del cuerpo se reduce a cero.

Traducción del enunciado

El problema se refiere a determinar la distancia recorrida por un cuerpo, que primero acelera y después desacelera, hasta alcanzar el reposo.

Incógnita: distancia recorrida durante los tres intervalos: uno de aceleración y dos de desaceleración.

Datos: tiempo de los intervalos, aceleración (positiva o negativa) de cada intervalo, y velocidad igual a cero al terminar el tercer intervalo.

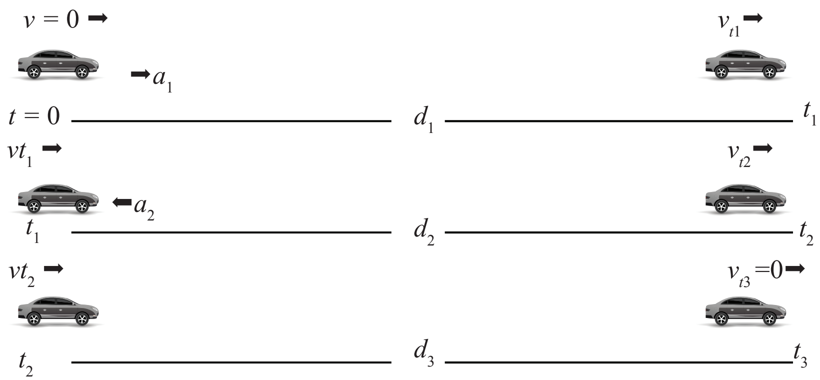
¿Se puede hacer un gráfico de la situación planteada?

Sí, a continuación se muestra el gráfico, de las tres situaciones del movimiento del auto, en donde se especifican las velocidades, las aceleraciones y las distancias.

¿Cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento?

$$v_f = v_i \pm at$$

$$d = v_i \pm \frac{at^2}{2}$$



v_f = velocidad al final del intervalo.; v_i = velocidad al inicio del intervalo.

a = aceleración en el intervalo; t = duración del intervalo.

El signo – se aplica al movimiento desacelerado, y el signo +, al movimiento acelerado.

Concepción del plan

Calcular la distancia recorrida en cada intervalo, y después sumarlas.

Ejecución del plan

$$d_1 = {a_1 t_1}^2/_2 = 0.5m\ ;\quad a_1 = {1m}/_{s^2}\ ; t_1 = 1s;\ a_2 = {0.05m}/_{s^2}$$

$$v_{t_1} = 0 + a_1 t_1 = {1m}/_{s};$$

$$d_2 = v_{t_1}(t_2 - t_1) - {a_2(t_2 - t_1)}/_2 = 7.5\ m;\ t_2 = 11\ s$$

$$v_{t_2} = 1 - 5 * 10^{-2} * 10 = 0.5\ {m}/_{s}$$

$$v_{t_3} = 0 = v_{t_2} - a_3(t_3 - t_2)\ ;\ t_3 = 16\ s$$

$$a_3 = {v_{t_2}}/_{(t_3 - t_2)} = 0.1\ {m}/_{s}$$

$$d_3 = v_{t_2}(t_3 - t_2) - {[a_3(t_3 - t_2)^2]}/_2$$

$$d_3 = 1.25m$$

$$d = d_1 + d_2 + d_3 = 0.5 + 7.5 + 1.25 = 9.25\ m$$

Evaluación de la solución

La situación corresponde a un auto que arranca con aceleración durante un segundo, después se apaga, y se detiene por la fricción de la carretera sobre las ruedas, y por acción de los frenos.

La distancia recorrida por el auto es de 9.25m, resultado que concuerda con el sentido común.

3.7 El arte de plantear ecuaciones

Según Newton en su Aritmética Universal[13]: ¨Para resolver problemas referentes a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema de la lengua inglesa o cualquier otra lengua, al idioma algebraico.

Español	Idioma algebraico
Un comerciante tenía una determinada suma de dinero	x
El primer año gastó 100 dólares	$x-100$
Aumento el resto con un tercio de este.	$(x-100) + (x-100)/3$ $= (4x-400)/3$
Al año siguiente volvió a gastar 100 dólares.	$(4x- 400)/3 \ - 100$
Y aumentó la suma restante en un tercio de ella.	$(4x-700)/3 +(4x- 700)/9$ $= (16x-2800)/9$
El tercer año gastó de nuevo 100 dólares.	$(16x-2800)/9$ -100 $=(16x-3700)/9$
Después que hubo agregado su tercera parte.	$(16x-3700)/9 + (16x\text{-}3700)/27$ $=(64x-14800)/27$
El capital llegó al doble del inicial.	$(64x-14800)/27 =2x$
¿Cuál es el capital inicial?	x=1480 dólares.

En estos problemas, generalmente la solución de la ecuación es la parte más fácil de la resolución.

Ejemplo 59

Problema a resolver[13]

Cuatro hermanos tienen 45 dólares. Si el dinero del primero se aumenta en 2 dólares, el del segundo se reduce en 2 dólares, se duplica el del tercero, y el cuarto se reduce a la mitad, todos los hermanos tienen la misma cantidad de dinero, ¿cuánto dinero tenía cada uno?

Solución:

Español	Idioma algebraico
1. Cuatro hermanos tienen 45 dólares.	$x + y + z + w = 45$
2. Si al dinero del primero se le agregan 2 dólares.	$x+2$
3. El del segundo se reduce en 2 dólares	$y-2$
4. Se triplica el del tercero	$3z$
5. El cuarto se reduce a la mitad	$w/2$
6. A todos los hermanos les queda la misma cantidad.	$x + 2 = y - 2 = 3z = w/2$

Se tienen 4 incógnitas, y para resolver el problema se deben plantear 4 ecuaciones independientes.

De la condición 1) se obtiene la ecuación:

$$\mathrm{x + y + z + w = 45} \tag{57}$$

De la condición 6) se obtienen las siguientes 3 ecuaciones:

$$x + 2 = y - 2 \tag{58}$$

$$x + 2 = 3z \tag{59}$$

$$x + 2 = w/2 \tag{60}$$

La solución simultánea de las ecuaciones 57 a la 60, permite obtener:

x = 8 dólares; y =12 dólares; z = 10/3 dólares; w = 20 dólares

Actividades

Teoría

Responder las siguientes preguntas, justificando la respuesta.

1. ¿Qué es un problema?¿Qué se entiende por resolver un problema? ¿Cuáles son las estrategias para resolver un problema?
2. Explicar en que consiste la estrategia heurística para resolver un problema.
3. Explicar la estrategia algorítmica para resolver un ejercicio.
4. ¿Cuál es la diferencia entre resolver un problema y resolver un ejercicio? ¿Un problema se puede convertir en un ejercicio?
5. ¿Cuál es la diferencia entre la estrategia heurística de Polya y la de Schoenfeld para resolver problemas?
6. Enumerar las diversas clases de problemas y explicar las diferencias entre ellos.
7. Enumerar los elementos de un problema por resolver.
8. ¿Cuál es la diferencia entre un problema por resolver y un problema por demostrar?
9. ¿Qué es un problema práctico?
10. Enumerar y explicar las fases o etapas que se deben analizar, para la resolución de un problema.
11. ¿Cuáles son los niveles de pensamiento, que se utilizan para resolver un problema?
12. ¿Qué se debe hacer para comprender un problema? ¿En que consiste la interpretación del enunciado del problema? ¿En que consiste la interpretación de la situación del problema? ¿En que consiste la traducción de la situación del problema?
13. ¿Cuáles son las preguntas, que ayudan a la concepción de un plan, para resolver un problema?
14. ¿Qué se debe hacer si después de la comprensión del problema y del proceso reflexivo sobre la situación, no aparece la idea para la concepción del plan?
15. ¿Qué precauciónes deben tenerse en cuenta al ejecutar el plan para resolver un problema?
16. ¿Por qué es importante revisar la solución de un problema?

Problemas

1. Roberto tiene 10 bolsillos y 44 monedas de plata .Quiere poner las monedas en los bolsillos, repartiéndolas de tal modo, que cada bolsillo contenga un número diferente de monedas. ¿Puede hacerlo?

(Respuesta: no puede hacerlo)

2. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 60 cm, y la altura perpendicular a la hipotenusa mide 12 cm. Se pide determinar los lados.

(Respuesta: 25cm, 20cm, 15cm).

3. ¿Se pueden encontrar dos números enteros positivos *p* y *q*, que cumplen la siguientes condiciones: el máximo común divisor de *p* y *q* es 4, y el mínimo común múltiplo de *p* y *q* es 120?

(Respuesta: 24 y 20)

4. Un padre tiene 32 años y el hijo, 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre, diez veces mayor que la del hijo?

(Respuesta: No es posible, esa posibilidad ocurrió cuando el hijo tenía 3 años.)

5. Cortar un tubo en cuatro partes iguales cuesta $ 4000. ¿Cuánto cuesta cortarlo en ocho partes?

(Respuesta $ 9.333,33)

6. En una vivienda rural hay un tanque de almacenamiento de agua potable de 2.400 litros. El tanque tiene dos tuberías que lo llenan en 10 y 12 horas respectivamente. La tubería de desagüe lo puede vaciar en 20 horas. Si las tres tuberías se abren simultáneamente y se cierran, cuando el tanque se llena, ¿Cuántos litros salieron por la tubería de desagüe?

(Respuesta: 900 litros)

7. Tres llaves de agua pueden alimentar una cisterna. Cada una de ellas puede llenar la cisterna, en dos, cuatro y seis días respectivamente. Si se abren simultáneamente las tres llaves, se pregunta en que tiempo se llenará la cisterna.

(Respuesta: En 12/11 días)

8. Se tienen dos soluciones de agua oxigenada: una al 30%, y la otra al 3%. Se deben mezclar de tal forma, que se obtenga una solución al 12%. ¿Cuáles son las proporciones de la mezcla?

(Respuesta: Por cada litro de solución al 3% se debe adicionar 2 litros de solución al 30%)

9. En el colegio de Paola su profesora de matemáticas hace exámenes que se califican por puntos. Paola tiene una media de 60 puntos en cuatro exámenes. En el quinto examen sacó 80 puntos. ¿Cuál es la media de las notas de Paola en matemáticas en los cinco exámenes?

(Respuesta: 64 puntos)

10. En el colegio de Daniel la razón del número de mujeres al número de hombres es de 10 a 9. Si la edad promedio (media aritmética) de las mujeres es 16 y la edad promedio de los hombres es 18. ¿Cuál es la edad promedio del colegio?

(Respuesta: 16,94 años)

11. En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

12. A una velada asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos; Olga, con ocho; Vera, con nueve, y así hasta llegar a Nina, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la velada?

(Respuesta: 13)

13. Anita coloca tres balotas marcadas con los números 1, 2, 3 en una bolsa. Se saca una balota y se anota el número y ella se devuelve a la bolsa. Este proceso se repite otras dos veces. Si todas las balotas tienen la misma posibilidad de ser extraídas cada vez, y si la suma de los tres números anotados es 6, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado la balota marcada con el número 2 en las tres ocasiones?

14. Dos obreros, uno viejo y otro joven, viven en un mismo apartamento y trabajan en la misma fábrica. El joven va desde la casa a la fábrica en 20 minutos; el viejo, en 30 minutos. ¿En cuántos minutos alcanzará el joven al viejo, andando ambos a su paso normal, si éste sale de casa 5 minutos antes que el joven? Resolver el problema utilizando el álgebra y la aritmética.

(Respuesta: 10 minutos)

15. ¿Cuántos cabellos hay por término medio en la cabeza de una persona? Se han contado unos 150.000. Se ha determinado también, que mensualmente a una persona se le caen cerca de 3.000 pelos. ¿Cómo calcular cuánto tiempo dura en la cabeza cada pelo?

(Respuesta: 1500 días)

16. Un esquiador calculó que si hacía 10 km por hora, llegaría al sitio designado una hora después del mediodía. Si la velocidad era de 15 km por hora, llegaría una hora antes del mediodía. Se pregunta, a qué velocidad debe correr el esquiador, para llegar exactamente al mediodía, al sitio de destino.

(Respuesta: 12km/hora)

17. Si un punto situado en el interior de un triángulo equilátero dista de los vértices 3, 4 y 5 unidades. ¿Cuánto mide el lado del triángulo?

18. Se tiene un tanque de agua en forma de cono recto invertido de 3 m de altura, y de 2 m de diámetro en la parte superior. Si el tanque está parcialmente lleno de agua, con 1.8 m desde el vértice hasta la superficie, y se abre una llave, que entrega 20 litros por minuto, se pide calcular el tiempo requerido para llenar el tanque.

(Respuesta: 123 minutos)

19. En mi calculadora una de las teclas del 1 al 9 funciona mal: al apretarla aparece en pantalla un dígito entre 1 y 9 que no es el que corresponde. Cuando traté de escribir el número 987654321, apareció en la pantalla un número divisible por 11 y que deja resto 3 al dividirlo por 9. ¿Cuál es la tecla descompuesta? ¿Cuál es el número que apareció en la pantalla?

20. Una alfombra de 1 cm de espesor es enrollada hasta formar un cilindro de un metro de diámetro. ¿Cuál es el valor mejor estimado del largo de la alfombra?

21. Dos ciclistas corren por un velódromo de una longitud de 170 metros, a velocidades constantes de 8 y 9 Km/h. Se pregunta cada cuanto tiempo se encuentran, si:

    a. Se mueven con la misma dirección.

    b. Si se mueven con direcciones opuestas.

(Respuesta: 10 s y 170 s)

22. Un piñón de 8 dientes está engranado con una rueda dentada de 24 dientes (véase la figura). Al dar vueltas la rueda grande, el piñón se mueve por la periferia. ¿Cuántas veces girará el piñón alrededor de su eje, mientras da una vuelta completa alrededor de la rueda dentada grande?

23. Un barco se desplaza 5 horas sin interrupción río abajo, desde la ciudad A a la ciudad B. De vuelta avanza contra la corriente (con su marcha ordinaria y sin detenerse) durante 7 horas. ¿Cuántas horas necesitará

una balsa, para desplazarse de la ciudad A a la B, yendo a la misma velocidad de la corriente?

(Respuesta: 35 horas)

24. Un automóvil cubrió la distancia entre dos ciudades a 60 km por hora, e hizo el viaje de regreso a 40 km por hora. ¿Cuál fue la velocidad media de su recorrido?

(Respuesta: 48 km/hora).

25. En una fábrica hay 300 personas, 110 son católicos, 120 son hombres y 50 son hombres católicos. ¿Cuántas de estas personas son mujeres católicas?
26. Dos autos A y B viajan en la misma dirección con velocidades v_A y v_B. Cuando el auto A se encuentra detrás de B a una distancia d, se aplican los frenos del auto A originando una desaceleración. Demostrar que si $v_A - v_B > \sqrt{2ad}$ los autos chocan.
27. Un auto está esperando que cambie la luz roja. Cuando cambia a luz verde acelera durante 6 segundos con una aceleración de $2mseg^{-2}$, después de lo cual se mueve con velocidad constante. En el instante que el auto arranca al encenderse la luz verde del semáforo, un camión que viaja a velocidad constante de 10 $mseg^{-1}$, sobrepasa al auto. Se pregunta en cuanto tiempo y a qué distancia alcanza el auto al camión.
28. Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio, y el sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 6,5 segundos después. Si la velocidad del sonido es de 340 m/seg, se pide calcular la altura del edificio.

(Respuesta h=175,5 m)

29. Un tren sale de la ciudad A hacia la ciudad B distante 400 Km, con una velocidad constante de 100Km/hora, al mediodía. Otro tren sale de la ciudad B hacia la A, a las 2 p.m. con una velocidad constante de 70 Km/hora. Se pide determinar la distancia de la ciudad A, al sitio donde se encuentran los trenes.

(Respuesta: Los trenes se encuentran a 317,6 Km de la ciudad A)

30. Los lados de un rectángulo vienen dados por números enteros. ¿Cuál será la longitud de dichos lados, para que el perímetro y la superficie de esta figura se expresen con los mismos números?

(Respuesta: la figura buscada será un rectángulo cuyos lados equivaldrán a 3 y 6)

31. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de mano fueron 435. *¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?* (Sugerencia: Utilizar el principio de inducción).

(Respuesta: 30 personas)

32. Diariamente al mediodía, un buque sale de El Havre con dirección a Nueva York a través del océano Atlántico. Al mismo tiempo otro buque de la misma compañía, sale de Nueva York en dirección a El Havre. El recorrido en una y otra dirección se realiza en 7 días exactamente. ¿Con cuántos buques de la misma compañía que navegan en dirección contraria se encontrará un buque durante el recorrido de El Havre a Nueva York?

(Respuesta: 15 buques)

33. Un equipo de segadores debe segar dos prados, uno con el doble de superficie que el otro. Durante medio día, trabajó todo el personal del equipo de segadores en el prado grande; después del almuerzo, una mitad de la gente quedó en el prado grande y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados todos los trabajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó a un segador todo el día siguiente. ¿Con cuántos segadores contaba el equipo?

(Respuesta: 8 segadores)

34. Veinte obreros se comprometieron a entregar una obra en 20 días, si trabajan 8 horas diarias. Al cabo del quinto día se les pidió que entregaran la obra 5 días antes de lo pactado, razón por la cual deciden trabajar 10 horas diarias y contratar más obreros. ¿Cuántos obreros adicionales se contrataron?

(Respuesta 4 obreros)

35. Hace poco compré un reloj de pulsera, pero pronto me di cuenta de que estaba averiado, y se atrasaba seis minutos en cada hora. Lo eché a andar a medianoche (con un reloj exacto), y ahora marca las 10:12 am. Además sé que se detuvo hace dos horas. ¿Qué hora es?

(Respuesta 13:20)

36. Dos caminantes van por un mismo camino y en la misma dirección. Para $t = 0$, el primero adelanta en 8km al segundo, y marcha a una velocidad de $4km/h$. El segundo marcha a 6km cada hora. Uno de los caminantes tiene un perro, el cual en el mismo instante en que se comienza a vigilarlos ($t = 0$), comenzó a correr desde su amo, en

dirección al otro caminante con una velocidad de 15*km/h*, y después de alcanzarle, regresó al lado de su amo, y nuevamente corrió en dirección al otro caminante. Así continuó el perro corriendo, hasta que se unieron ambos caminantes. Se pide determinar el trayecto recorrido por el perro.

(Respuesta 60 Km)

37. En cada esquina de un terreno cuadrado de 100m de largo, se amarra una cabra con una cuerda de 50m de largo. Esto le permite a cada una pastar en cierta parte del terreno. El dueño regala 3 de las cabras, y desea amarrar la cuarta de modo que la superficie sobre la que pueda pastar, sea igual a la que alcanzaban las cuatro cabras juntas.

    a) ¿En cuántos puntos pueden colocar la cabra?

    b) ¿Cuáles son esos puntos y cuál debe ser la longitud de la cuerda?

(Respuesta: a) En dos puntos. Respuesta 1: Ubicarla en el centro del terreno con una cuerda de 50m.

Respuesta 2: Ubicarla en una esquina con una cuerda de 100m).

38. En un número de tres dígitos, el dígito de las centenas es el triple de las decenas y el dígito de las decenas es la mitad del dígito de las unidades. Determina cual es el dígito de las unidades, si la suma de los tres dígitos es 12.

39. Un auto de carrera da la vuelta a la pista en 24 segundos y el otro la da en 35 segundos. Los dos autos arrancan simultáneamente, ¿En cuanto tiempo volverán a encontrarse, y en qué punto?

(Respuesta: 76,37 segundos)

40. Una empresa necesitaba dos impresoras láser. El comprador de la empresa consiguió dos usadas en buen estado, y las compró. El gerente cuando se enteró, decidió que había que venderlas, pues no quería impresoras usadas. La empresa logró venderlas en 600 dólares cada una. Al revisar la operación se dieron cuenta de que en una ganaron el 20%, y en la otra perdieron el 20%. ¿Cuántos dólares ganó la empresa? (La empresa perdió US$50)

41. Una hamburguesa se prepara con pan, tomate, lechuga y carne. ¿Si cada uno de los cuatro ingredientes incrementa su precio en 5%, cuanto aumenta el costo total de la hamburguesa?

(Respuesta. El costo total aumenta en 5%).

42. Un terreno tiene las siguientes medidas: 60 m de largo y 20 m de ancho. Se pregunta cuál es el número máximo de cuadrados que se pueden obtener en este terreno.

43. *Dos grupos de personas salen simultáneamente de dos pueblos, dirigiéndose al pueblo de donde salió el otro grupo, y se encuentran al mediodía para almorzar durante una hora. Después un grupo llega al pueblo de donde salió el otro grupo, a las 5pm, y el otro grupo llega al otro pueblo a las 7,15 p.m. pregunta: ¿a qué hora salieron los grupos?

(Respuesta: A las 7,04 am)

44. *Al manejar en una autopista se lee un aviso: Límite de velocidad =50 mph, de valor promedio. Al darme cuenta que por varios minutos he conducido a 60 mph, ¿Qué distancia debo andar a 30 mph para estar dentro del límite permitido?

(Respuesta: La cuarta parte de la distancia, que se recorrió a 60 mph)

45. *Caminando en mi ciudad natal hace algunos años, de repente me di cuenta de que había estado en mi trabajo durante un cuarto de mi vida. Tal vez porque estaba algo abatido en ese momento, inmediatamente me pregunté cuánto tiempo pasaría hasta que hubiera estado en mi trabajo durante un tercio de mi vida.

46. *Tres hombres tienen dos trabajos cada uno. El chofer ofendió al músico riéndose de su largo cabello. El músico y el jardinero solían pescar con Juan. El pintor compró un litro de ginebra al consultor. El chofer cortejó a la hermana del pintor. Jack le debía al jardinero £ 5. Joel venció a Jack y al pintor en las bromas. Una de ellas es una peluquera y no hay dos que tengan el mismo trabajo. ¿Quién hace qué?

47. *Estuve presente una vez cuando un padre le dijo sinceramente a su hija de siete años que era su noveno cumpleaños. La hija preguntó cuándo habrían celebrado por primera vez el mismo número de cumpleaños.

48. *Una mujer que se dirigía al mercado, cuando se le preguntó cuántos huevos tenía, respondió que, tomados en grupos de 11, 5 permanecerían y otros en 23, 3 que permanecerían. ¿Cuál es el menor número de huevos que pudo haber tenido? En otra ocasión, ella contestó que tomados en grupos de 2, 3, 4, 5, 6 y 7 permanecerían por encima de 1, 2, 3, 4, 5 y ningún huevo, respectivamente.

49. *Se mezclaron 3 litros de concentrado de naranja con 5 litros de agua para hacer una bebida. Más tarde, 2 litros de naranja se mezclaron con 3 litros de agua. ¿Qué mezcla está más concentrada? Considera la siguiente estrategia. Para comparar 3 Naranja y 5 Agua con 2 Naranja

y 3 Agua, quite el segundo de la primera y compare 1 Naranja y 2 Agua con 2 Naranja y 3 Agua. Retire el primero del segundo y compare 1 naranja y 2 de agua con 1 de naranja y 1 de agua. Ahora puedes ver que el segundo fue el más concentrado. ¿Esta estrategia siempre funcionará?

50. *Se rumorea en algunos países que la policía no lo detendrá por exceso de velocidad a menos que vaya al menos un 10% por encima del límite. Uno de esos países cambió recientemente de millas a kilómetros en todas las señales de tráfico. ¿Cuál es la nueva regla de oro?

51. *Si una población crece un 10% de su tamaño actual cada mes, ¿cuánto tiempo tomará duplicar su tamaño?

    - Si una población se reduce en un 10% de su tamaño actual cada mes, ¿cuánto tiempo tomará reducir a la mitad su tamaño?
    - Si una población crece y se contrae alternativamente en un 10% cada mes, ¿qué sucede a largo plazo?

52. * Un automóvil viejo y descompuesto tiene que recorrer una ruta de dos millas, subir y bajar una colina. Debido a que es tan viejo, el automóvil recorre la primera milla (el ascenso) a un promedio de 15 mph. ¿Qué tan rápido debe ir para alcanzar 30 mph en todo el viaje?

53. *Dos ciclistas, inicialmente separados por 30 millas, viajan uno hacia el otro. El ciclista A va a 14 mph y el ciclista B a 16 mph. Una mosca vuela de un lado a otro entre sus narices a 30 mph. ¿Qué tan lejos vuela la mosca?

54. Un sendero serpentea por una montaña y un excursionista que comienza a las 6 am en la parte inferior llega a la cima a las 6 pm. Al día siguiente, parte un tiempo después de las 6 am y llega a la parte inferior un poco antes de las 6 pm. ¿Hay necesariamente algún lugar en el camino que llegue exactamente a la misma hora del día en ambos días?

55. Un avión cruza a 100 mph en aire en calma. Un piloto despega de A y vuela directamente a B, a 100 millas de distancia, en un viento de frente de 50 mph. Su velocidad sobre el suelo es por lo tanto 50 mph. Luego regresa, ayudada por el viento de cola, dando una velocidad de avance de 150 mph. ¿Cuál es su velocidad promedio para todo el viaje?

56. *Un avión cruza a 100 mph en aire en calma. Un piloto despega de A y vuela directamente a B, a 100 millas de distancia, en un viento de frente de 50 mph. Su velocidad sobre el suelo es por lo tanto 50 mph. Luego regresa, ayudada por el viento de cola, dando una velocidad de avance de 150 mph. ¿Cuál es su velocidad promedio para todo el viaje?

57. *En el siglo XIX antes de la llegada de los vehículos motorizados, las personas a veces compartían un caballo cuando viajaban. Una persona cabalgaba mientras la otra caminaba; el jinete ataba al caballo en un punto conveniente y caminaba, mientras que el otro recogía el caballo y montaba. El caballo podría descansar mientras espera al segundo jinete. Esta acción puede repetirse varias veces. ¿Cómo deben ajustarse las opciones de recorrido y amarre para que los dos viajeros lleguen a su destino al mismo tiempo?

58. Se tiene tres ciudades M, N y P. Un empresario que viaja en avión, cuando va de M hacia N tiene que atrasar su reloj 2 horas al llegar a N y cuando va de M hacia P debe adelantarlo 3 horas al llegar a P. Si sale de P hacia N, a las 11 p.m. y el viaje dura 4 horas, ¿qué hora es en N cuando llega?

(Respuesta: las 10 pm)

59. Se va a cobrar un tiro libre en un juego de fútbol,desde un sitio que se encuentra 30 metros distante del centro de la portería.Las medidas de la portería son de 5 metros de ancho, y 2,6 metros de alto. A 10 metros del punto de cobro se ubica una barrera con jugadores de 1,8 metros de altura.¿Cuál debe ser la velocidad inicial y el ángulo con el cual se debe patear el balón, para que llegue al arco con la máxima altura que pueda entrar en la portería?.

60. El reloj analógico tiene 3 agujas (horario, minutero y segundero) y las tres agujas coinciden a las 12:00:00,se pregunta:

    1-¿Cada cuánto tiempo coinciden el horario y el minutero?

    2-¿Cada cuánto tiempo coinciden el minutero y el segundero?

    3- ¿Cada cuánto tiempo coinciden el horario y el segundero?

61. Considere el ejemplo 2.06.6, y ahora Francis se une a Fred y a Frank, y les enseña a saltar. En esta situación Fred corre un tercio del camino,salta(jog) un tercio,y el resto lo camina,mientras Frank salta un tercio del tiempo,corre otro tercio,y camina el resto. Se pregunta, quién llega primero.¿Ha ayudado Francis a llegar más temprano o más tarde, que en el caso considerado en el ejemplo?

62. Un cierto mes tiene cinco jueves, cinco viernes y cinco sábados. ¿Qué día de la semana es el 25 del siguiente mes?

(Respuesta: miércoles)

63. Una empresa distribuye sus 84 empleados y empleadas en varios grupos de 7 personas. Si en todos los grupos la cantidad de mujeres es mayor

que la de los hombres, se pide determinar el número máximo y mínimo posible de hombres de la empresa.

(Respuesta: 36 y 12)

64. Si un reloj de manecillas se adelanta 1 minuto por hora y empieza correctamente a las 12 del medio día del jueves 16 de marzo. ¿Cuándo volverá a marcar la hora correcta?

(Respuesta: 14 de Mayo)

65. Luisa y María tiene cada una 10 y 8 manzanas respectivamente, y cuando están a punto de empezar a comérselas llega Carlos, y entre los tres se comen las manzanas por igual. Si Carlos dispone de $30.000, y quiere darles este dinero a Luisa y a María por agradecimiento,¿Cómo debe repartir este dinero,de manera justa?

(Respuesta: a Luisa le debe dar $20.000 y a María $10.000)

66. Una farmacia rebajó el precio de la loción y de la crema. Al finalizar el día, la contabilidad arrojó los siguientes resultados: 66 personas compraron crema, 21 compraron loción y 12 compraron ambos productos. Se pregunta cuántas personas aprovecharon la oferta.

(Respuesta: 75 personas)

67. En un colegio del departamento Norte de Santander se hizo una encuesta a 100 estudiantes sobre las preferencias con respecto a las asignaturas de matemáticas y de biología.

    Al analizar los datos que entrega la encuesta, se encuentra que las personas que le gustan las dos asignaturas son el triple de los que les gustan solo las matemáticas, el doble de los que les gusta solo la biología, y cuatro veces el número de los que no les gustan estas dos materias. ¿A cuántos estudiantes les agradan las materias de matemáticas?

68. En la prueba SABER PRO del ICFES de 2013, se propuso el siguiente problema de razonamiento cuantitativo: Se conoce la población de un país de acuerdo a la siguiente tabla:

Año	**Num. de habitantes**
2001	8.624.268
2003	9.024.922
2005	9.427.214
2008	10.627.644

    Se conoce también para los mismos años,la población de cuatro regiones del país, de acuerdo a la siguiente tabla:

Región	2001	2003	2005	2008
M	2.078.4444	2.232.045	2.388.799	2.626.697
N	561.468	581.739	601.823	631.062
O	2.458.437	2.544.814	2.630.381	2.756.989
P	374.822	390.997	406.982	430.049

a. Si el presupuesto del país se reparte de acuerdo a la cantidad de habitantes, se pide hacer un diagrama de pastel gráfico circular del presupuesto en las diferentes regiones del país.

b. Ante una amenaza natural que se presentará en la región O,el gobierno decide evacuar al 10% de la población de la región de O, hacia las regiones M y P.Pero las regiones M y P no pueden albergar mas del 10% de la población propia. Entonces no se podría hacer alguna de las siguientes acciones:

   1. Trasladar a la región M, el 82% de las personas que deben evacuar la región O.
   2. Trasladar a la región Pel 12% de las personas que deben evacuar la región O.
   3. Trasladar a la región M el 9% de la población de la región O.
   4. Trasladar a la región P el 2% de la población de la región O.

(Respuesta: 4).

c. Se pretende graficar el crecimiento de la población que habita la región P, cada año de la primera decada del siglo XXI, pero no se puede pues se desconoce:

   1. El número de habitantes de la región P cada año.
   2. El número de nacimientos de la región P cada año.
   3. El número de personas que ingresó a la región P cada año.
   4. El número de fallecimientos de los habitantes de la región P cada año.

(Respuesta:1).

d. A partir de los datos de la población del país y de cada regiónen el 2008, es incorrecto afirmar:

   1. La población de la región O es mayor a seis veces la población de la región P.
   2. La población del país es mayor a cuatro veces la del región M.

3. La población del país es mayor a quince veces la de la región N.
4. La cuarta parte de la población de M es mayor que la población de la región N.

(Respuesta:2).

e. En el 2005, aproximadamente el 60% de la población del país son hombres. Para calcular el número de mujeres del país se propone:
   1. Restar de la población del país en 2005, tres quintos de la población del pais ese mismo año.
   2. Multiplicar la población del país en 2005 por dos quintos.
   3. Dividir entre cuatro la población del pais en 2005..
f. La(s) propuesta(s) que permite(n) cálcular el número de mujeres en 2005 es(son):
   1. 1 solamente.
   2. 3 solamente.
   3. 1y 2 solamente.
   bt. 2 y 4 solamente.

(Respuesta:C).

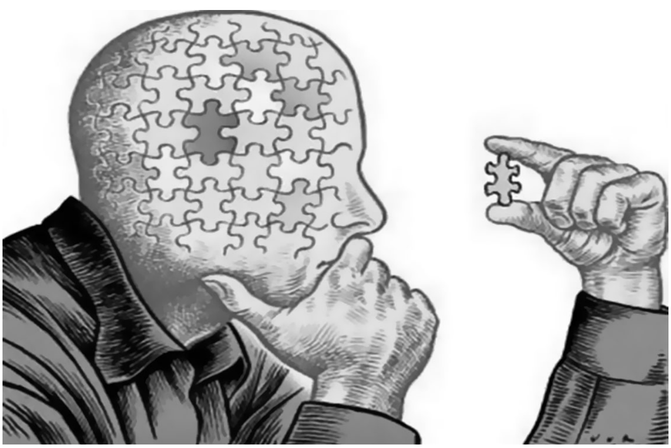
* Problema tomado del libro *Mathematical Thinking* de Mason[12]

UNIDAD IV

APRENDER A PENSAR

La educación no es aprender hechos,
sino entrenar a la mente a pensar.

Albert Einstein



Fuente: http://jeromebruner-marlen-garcia.blogspot.com/

UNIDAD 4

APRENDER A PENSAR

4.1 Introducción

Según Navarro R.[15] “Existen investigadores (Arons, 1979; Whimbey y Lochhead 1986; Montealegre, 1992; Raths y Colbs., 1997; Reyes, 2004) que permiten sustentar que un alto porcentaje de los estudiantes que ingresan a la universidad tiene deficiencias para razonar a nivel de operaciones formales, y para pensar en forma crítica y creativa. Dichas deficiencias han causado en diferentes ámbitos, un descenso progresivo del desempeño académico de los estudiantes.

El análisis del desempeño de los estudiantes ha llevado a suponer, que muchas de las deficiencias de estos, en cuanto a sus habilidades para pensar, se deben a la falta de estructuras cognitivas debidamente consolidadas, para realizar procesos mentales de operaciones formales.”

En países como Venezuela, Estados Unidos, Canadá, Israel y México, se gestó un movimiento a finales de la década de los 70 y principios de los 80, conformado por científicos, educadores, organizaciones e instituciones educativas, y agencias oficiales de educación, interesados en aumentar el rendimiento académico de los estudiantes, mejorando los procesos de pensamiento.

Una propuesta para mejorar los procesos de pensamiento fue la de incluir asignaturas en el currículum escolar, dirigidas a desarrollar en forma directa las habilidades de pensamiento de los estudiantes.

En el programa de estudios de Ingeniería Electromecánica de la UFPS, se introdujo desde 2013, la asignatura de Lógica, y razonamiento, con el propósito de mejorar las competencias de pensamiento crítico de los estudiantes, que ingresan al programa.

4.2 Naturaleza del pensamiento y clases

4.2.1 Naturaleza del pensamiento

Según de Bono[4], pensar es “algo que el hombre hace para salir de una duda, esto es, para contestar una pregunta. Una pregunta demanda una respuesta, porque el ser humano necesita saber a qué atenerse, frente a las situaciones desconocidas. Pensar es buscar una respuesta a una pregunta”.

Por lo anterior, quien no duda no piensa, y la actitud permanente de duda, es la característica básica de un buen pensador.

El pensamiento busca interpretar al mundo. Se inicia en la percepción de un fenómeno o evento, y dependiendo del filtro con el que se observa, se tienen diferentes respuestas. El filtro puede ayudar u obstruir la apreciación de lo que se conoce como realidad. Hay filtros que provienen del egoísmo, otros de la simpatía o antipatía. Los filtros más peligrosos surgen del fanatismo político, religioso y hasta deportivo.

El éxito de la ciencia es apreciar los fenómenos a través del filtro neutro de la experimentación, lo que garantiza resultados independientes de las condiciones subjetivas del observador.

El resultado de la actividad de pensar son las ideas con las que se interpreta el mundo, y se actúa para mejorar la calidad de vida del ser humano.

El pensamiento es el resultado de la percepción, o manera cómo se aprecia y visualiza el mundo, y del procesamiento de esa información por medio de la Lógica.

La percepción es un sistema de la mente que se auto organiza, para determinar la secuencia con la que se adquiere la información, que genera los patrones que procesa la mente, de acuerdo a las reglas de la Lógica.

De Bono define al pensamiento como: “La habilidad operacional con que la inteligencia actúa de acuerdo a la experiencia”. Según esta definición, se puede ser inteligente y no ser eficaz como pensador, y de una manera análoga, no gana una carrera quién posea un auto con el motor más potente, si quien maneja el auto no posee habilidades de buen conductor. También se considera al pensamiento como una actividad mental, asociada **al procesamiento, comprensión y transmisión de la información.** La actividad del pensamiento se manifiesta al crear conceptos, emitir juicios, solucionar problemas, y tomar decisiones.

Según de Bono, "no pensar es **no buscar respuestas** a nuestras inquietudes o dudas, porque nuestra cultura y nuestras creencias nos ofrecen unas certezas, que nos permiten sentirnos cómodos y no hacer ningún esfuerzo, para encontrar la solución de las preguntas que nos formulamos".

Los miembros de religiones o de partidos políticos limitan su capacidad de pensar cuando analizan asuntos relacionados con los preceptos religiosos o políticos, de su religión o de su partido.

La idea de enseñar a pensar a estudiantes recién egresados de la secundaria, en forma de materia, parece lógica, y ya se intentó en la década de los 70, sin embargo esta idea de enseñar a pensar, ha sido controvertida entre otros, por la corriente de pensamiento que argumenta: "No necesitamos aprender a pensar como materia específica, ya que toda materia implica pensar".

Todos los seres humanos comparan, clasifican, ordenan, estiman, extrapolan, interpolan, forman hipótesis, evalúan evidencias, sacan conclusiones, estructuran argumentos, juzgan por relevancia, usan analogías y se ocupan de numerosas actividades, que están típicamente clasificadas como pensar. El hacer estas actividades no significa que se hagan muy bien, y que se podrían hacer mejor, si se tiene un entrenamiento formal.

Para de Bono: "Estamos determinados genéticamente a pensar y no podemos evitarlo, como no podemos evitar respirar. Pensar es tan natural como caminar o respirar, y nadie nos enseñó hacerlo. Pero si bien el correr es natural, se sabe que un atleta puede entrenarse y maximizar su potencial de corredor, para alcanzar altos desempeños en una carrera. Al igual ocurre con el pensamiento, la capacidad natural para pensar, dista mucho de representar el máximo potencial de pensamiento". Pensar es como nadar,si bien hay una capacidad natural para mantenerse a flote en el agua,se debe aprender a nadar,para no ahogarse en aguas turbulentas.

Para de Bono, cuando se habla de "enseñar a pensar, no se pretende enseñar y aprender en un sentido absoluto, sino como pensar más efectiva, crítica, coherente, y creativamente, de lo que se hace típicamente. Toda la gente hace cálculos, pero no igualmente acertados; toda la gente usa analogías, pero no igualmente apropiadas, toda la gente saca conclusiones, pero no con el mismo rigor; toda la gente estructura argumentos, pero no con la misma fuerza".

4.2.2 Clases de pensamiento

Se reconocen dos formas generales de pensamiento: el pensamiento crítico y el creativo.

El pensamiento creativo es una herramienta, que crea, genera y desarrolla, nuevas maneras de visualizar e interpretar el mundo, a través de las ideas.

El pensamiento crítico procesa, analiza, emite juicios, y evalúa un fenómeno físico, social o político, con el propósito de generar ideas, que permitan interpretar y modelar el fenómeno. El pensamiento crítico presupone el conocimiento de las estructuras más básicas del pensamiento.

Cada disciplina científica desarrolla una forma de pensar. Así se habla del pensamiento matemático, como la actividad de pensar realizada por las personas que utilizan la matemática para describir e interpretar mundos reales o imaginarios, pero hay que entender, que el pensamiento matemático forma parte de un ambiente científico, en el que los conceptos y técnicas matemáticas, surgen y se desarrollan en la resolución de tareas.

El pensamiento matemático incluye procesos avanzados de pensamiento como la abstracción, justificación, visualización, y estimación o razonamiento bajo hipótesis.

La actividad de pensar también se relaciona con la resolución de problemas, actividad direccionada por el objetivo de encontrar la solución de la situación problemática propuesta.

En esta unidad se describen las características del pensamiento crítico, y se examina **la estructura de los razonamientos sobre el acontecer de la vida diaria,** en sus dos vertientes, la analítica y la evaluativa.

El pensamiento crítico evalúa el conocimiento, **desde su naturaleza y causalidad,** y se esfuerza por tener coherencia en los conocimientos que acepta, y entre el conocimiento y la acción. También evalúa el egoísmo (beneficio personal) y el socio centrismo (beneficio grupal) de los pensamientos, ya que son factores que distorsionan la transparencia del pensamiento.

4.3 Características del buen pensador

Para Nickerson R.[14] ”el estereotipo del buen pensador se puede caracterizar en términos de conocimiento, habilidades, actitudes y las formas habituales de comportamiento”.

Nickerson presenta la siguiente lista de las características del buen pensador:

- Hace uso de la evidencia, habilidosa e imparcialmente.
- Organiza los pensamientos y los articula concisa y coherentemente
- Distingue entre inferencias lógicamente válidas, e inválidas, o sea reconoce las falacias.
- Suspende juicios en ausencia de evidencia suficiente, que sostenga una decisión.
- Entiende la diferencia entre razonar y racionalizar. No es lo mismo razonar (formar nuestras **creencias, de acuerdo a lo que dicen exclusivamente la lógica y los hechos**) que racionalizar **(seleccionar** de forma sesgada aquellos argumentos y datos, que supuestamente **avalan nuestros prejuicios** e ideas previas).
- Procura anticiparse a las consecuencias probables de las acciones alternativas, **antes de escoger entre ellas**.
- Comprende la idea de **grados de creencia**.
- Tiene sentido del valor y costo de la información**, sabe buscar la información** y la procesa de acuerdo a las reglas de la Lógica.
- Ve similitudes y analogías, que no son evidentes.
- Puede aprender independientemente, y tiene un interés permanente en hacerlo.
- Aplica apropiadamente técnicas de solución de problemas en otros campos, además de aquellos en los cuales fueron aprendidos.
- Puede **estructurar problemas representados informalmente**, de tal manera que las técnicas formales (ej. matemáticas) puedan ser usadas para resolverlos.
- Escucha cuidadosamente las ideas de otras personas.
- Comprende la diferencia entre **ganar un argumento y que este sea correcto.**
- Reconoce que la mayor parte de los problemas del mundo real, tienen más de una solución y que esas soluciones difieren y puede ser difíciles de comparar, en términos de una figura o mérito sencillo.
- Busca enfoques no usuales en problemas complejos.
- Puede despojar a los argumentos verbales de irrelevancias, y enunciarlo en **sus términos esenciales**.
- Comprende la diferencia entre conclusiones, suposiciones e hipótesis.

- Es sensible a la diferencia entre la validez de una creencia, y la intensidad con la cual se sostiene.
- Puede representar diferentes puntos de vista sin distorsión, exageración o caricaturización.
- Reconoce las limitaciones del entendimiento de quien no tiene una actitud interrogante, y considera la posibilidad de error de las opiniones propias, producto de ponderar las evidencias de acuerdo a las preferencias personales.

4.4 Pensamiento crítico

Se considera al pensamiento crítico como una actividad cerebral, que se propone analizar, entender y evaluar la manera en la que se organizan los conocimientos, que pretenden interpretar y representar el mundo, **en particular las opiniones o afirmaciones que en la vida cotidiana suelen aceptarse como verdaderas**.

Según Paul R.[18], el pensamiento crítico es el proceso de analizar y evaluar el pensamiento con el propósito de mejorarlo. El pensamiento crítico presupone el conocimiento de las estructuras más básicas del pensamiento (los elementos del pensamiento) y los estándares intelectuales más básicos del pensamiento (estándares intelectuales universales). La clave para desencadenar el lado creativo del pensamiento crítico (la verdadera mejora del pensamiento) está en reestructurar el pensamiento como resultado de analizarlo y evaluarlo de manera efectiva".

Para Paul R.[18], los estudiantes que piensan críticamente presentan los siguientes comportamientos:

a. Reconocen que todo pensamiento tiene un propósito, objetivo, meta o función, y que el propósito es justo para todas las personas, animales y/o grupos involucrados.
b. Reconocen que todo pensamiento es un intento de resolver algo, responder a una pregunta, o resolver algún problema. Esto es, para cada pregunta que uno pueda hacer, existen condiciones que deben cumplirse antes que la pregunta pueda responderse.
c. Procuran un claro **entendimiento de la pregunta principal**, que tratan de responder, problema que tratan de solucionar, o asuntos que tratan de resolver. Formulan sus preguntas de manera clara y precisa. Reconocen cuando tratan con una pregunta compleja, y piensan con detenimiento dentro de esa complejidad, antes de intentar responder a dicha cuestión.

d. Reconocen que todo pensamiento está basado en algunos datos, información, evidencia, experiencia o investigación y **buscan verificar la información y determinar que sea relevante** a las preguntas que están intentado responder, a los problemas que están tratando de solucionar o a los asuntos que están intentando resolver.

e. Reconocen que todo pensamiento contiene inferencias, a partir de las cuales se obtienen conclusiones y dan significado a los datos y a las situaciones. Entienden que toda inferencia resulta, no solo de la información, sino también de suposiciones que se encuentran bajo la superficie del pensamiento.

f. Reconocen que todo pensamiento se basa en suposiciones y creencias que damos por ciertas (percepción del mundo).

g. Reconocen que todo pensamiento se expresa y se forma mediante conceptos e ideas.

h. Reconocen que todo pensamiento lleva a algún lugar, tiene implicaciones y cuando se actúa conforme se piensa, tiene consecuencias. Para razonar bien en un asunto en particular, se debe **pensar con detenimiento en las implicaciones**.

i. Reconocen que todo pensamiento ocurre dentro de algún punto de vista**.** Para razonar justificadamente en un asunto, se deben identificar los puntos de vista.

j. Reconocen que todo pensamiento posee **fortalezas y debilidades** intelectuales potenciales. Para razonar bien, es importante monitorear el pensamiento para asegurar que cumple con los criterios intelectuales básicos a saber: claridad, exactitud, precisión, relevancia, profundidad, amplitud, lógica, importancia y justicia.

k. Se esfuerzan en tener un **pensamiento justo**. La justicia de pensamiento requiere que todos los puntos de vista sean tratados por igual, sin tomar en cuenta nuestros propios sentimientos o intereses personales (egoísmo), o los sentimientos o intereses personales de nuestros amigos, comunidad, nación o especie (socio centrismo).

l. Están dispuestos a desafiar las creencias populares. La mente de modo natural no desarrolla **el coraje intelectual**, para examinar las creencias que aprecian y, no es naturalmente confortable defender creencias, que aunque razonables, son impopulares; en cambio, sus inclinaciones intrínsecas son proteger sus creencias y conformarse con los estándares del grupo. La mente evita y hasta teme descubrir sus creencias falsas, y es por naturaleza temerosa de ser ridiculizada, o su exclusión de un grupo social.

ll. Reconocen que el buen razonamiento es la clave para vivir una vida racional, y para crear un mundo más justo.

m. Reconocen que la mente no utiliza de manera natural los estándares intelectuales para determinar lo que hay que creer y lo que hay que rechazar. Más bien, su tendencia es aceptar o rechazar ideas basada en estándares egocéntricos o sociocéntricos, o sea estándares que arbitrariamente privilegian los puntos de vista de una persona o grupo. Es necesario **comprender las tendencias irracionales de la mente humana, y trabajar activamente para minimizarlas**.

n. Trabajan para superar su innato egocentrismo. La mente humana es por naturaleza, egocéntrica. La mente por naturaleza, no posee ni desarrolla tendencias racionales. Su modo natural de pensamiento se centra en sus tendencias egocéntricas, en sí mismo. Existen dos funciones primarias del egocentrismo: La primera es observar al mundo en términos del beneficio propio, para buscar gratificación constantemente, para procurar los deseos egoístas aún a expensas de los derechos y necesidades de los demás. La segunda es el deseo de mantener sus creencias. Esta es la base de la rigidez de pensamiento.

ñ. Piensan críticamente, son autónomos, automonitores y aprendices. No se puede ser un buen aprendiz y un mal pensador. **Los estudiantes que piensan críticamente usan las habilidades intelectuales para pensar al estudiar sus materias y disciplinas.**

o. Reconocen que cuando aprenden ideas centrales de manera profunda, mantienen esas ideas durante toda su vida y pueden emplearlas posteriormente cuando las necesiten.

p. Aprenden a identificar los asuntos éticos y razonan bien en las cuestiones éticas.

q. Los pensadores críticos reconocen que no se puede ser una persona ética, si no se razona bien en las cuestiones, asuntos y situaciones éticas.

r. El rol adecuado del razonamiento ético es destacar dos tipos de actos: aquellos que elevan el bienestar de los demás —que aseguran nuestro elogio—y aquellos que lo dañan—asegurando así, nuestra crítica.

s. Desarrollan habilidades que les permiten detectar la predisposición de los medios de comunicación y la propaganda. Debido a su influencia potencialmente poderosa en el pensamiento y comportamiento humano**, los informes dados en los medios noticiosos tanto nacionales como mundiales, deben cuestionarse rutinariamente, en cuanto a predisposiciones y propaganda**. Los consumidores críticos de las noticias, leen las noticias críticamente, con un profundo entendimiento de los medios de comunicación, y rechazan dejarse influenciar por la histeria pública creada por una tendencia dominante del reporte de las noticias. No aceptan lo que escuchan o leen en las noticias principales, hasta analizar y evaluar críticamente, el asunto en cuestión.

t. No dependen pasivamente de los demás para que les "enseñen", más bien están comprometidos a desarrollar sus propias capacidades de razonamiento, para aprender en cualquier dominio de pensamiento, en cualquier materia o disciplina, en cualquier profesión".

4.5 Consecuencias de mejorar el pensamiento crítico

Muchos gobiernos proponen dentro de sus políticas educativas, la formación de estudiantes con pensamiento crítico. Se analizan en este apartado algunas de las ventajas y desventajas, que representan para un sistema social y político, la implementación efectiva de un sistema educativo, que tenga entre sus objetivos prioritarios la formación de una mente lógica, argumentativa y crítica, en los estudiantes de educación secundaria.

Una ventaja evidente es, que los estudiantes mejorarán su rendimiento académico durante el transcurso de su carrera universitaria, al utilizar el pensamiento crítico como herramienta para el aprendizaje, con los correspondientes beneficios económicos, al disminuirse el índice de repitencia en las asignaturas y el tiempo requerido para culminar sus estudios.

Otra ventaja es, que al culminar sus estudios podrán competir exitosamente en el mundo laboral, ya que las personas con pensamiento profundo y reflexivo son las más solicitadas, por su capacidad de adaptarse a los acelerados cambios presentes en los entornos sociales e industriales del mundo moderno.

Las personas de pensamiento crítico ayudan a los ciudadanos a formar juicios inteligentes en asuntos públicos, y tienen la capacidad para poner en evidencia las falacias de los políticos. Estas personas no son fácilmente manipulables por los medios de comunicación al servicio del establecimiento político, económico y religioso. Además, estas personas contribuyen a formar una masa crítica, para la transformación de la sociedad, mediante un cambio en el sistema político, lo cual es una desventaja para el establecimiento social y político imperante.

Cuando una persona posee pensamiento crítico, no se conforma con las respuestas dadas por las creencias de diversa naturaleza, impuestas por la sociedad y la religión, a los interrogantes que surgen en la vida del ser humano, y por ello esa persona puede ser considerada como subversiva, por el establecimiento político, económico y religioso, y esto puede ser una desventaja para el sistema, y un peligro para el pensador.

A través de la historia se tienen ejemplos de pensadores críticos en las ciencias, como Galileo, y en la filosofía como Giordano Bruno, el primero encarcelado y el segundo incinerado, por la Iglesia Católica.

Por lo anterior se puede afirmar, que enseñar a pensar críticamente no siempre es beneficioso para el establecimiento que controla la sociedad, ni contribuye siempre a la paz y tranquilidad.

En otros aspectos se puede afirmar, que las gentes pensantes que son buenas para imaginar cómo alcanzar objetivos específicos, son más aptas para lograr dichos objetivos, que la gente menos habilidosa a este respecto.

4.6 Métodos para mejorar la capacidad para pensar

En la actualidad se reconocen los siguientes métodos, que mejoran la capacidad para pensar

4.6.1 El estudio de la Lógica

La lógica por su naturaleza es una materia que organiza el pensamiento, pero es de utilidad limitada para enseñar a pensar en aspectos rutinarios de la vida, ya que las principales aplicaciones de la lógica y de las estructuras silogísticas, ocurren en el campo de la matemática y en el de la argumentación jurídica, pero la habilidad silogística no sirve para tomar decisiones, planificar o definir objetivos.

En la mayoría de situaciones de la vida real, **el proceso de pensamiento tiene lugar en la etapa de la percepción**, y de ahí que la utilidad de la lógica en estas situaciones es muy limitada.

4.6.2 El estudio de materias como los clásicos, las matemáticas, las ciencias y la historia.

La opinión tradicional sostiene que la capacidad para pensar se desarrolla como un subproducto del estudio de las materias anteriores.

Si bien es cierto que en el caso de estas materias los estudiantes tienen que pensar, el nivel con que lo hagan depende del profesor, y de la estrategia didáctica que se utilice.

Un profesor bien estructurado y con pensamiento creativo, puede utilizar cualquier materia como punto de partida para enseñar a pensar. Pero en caso contrario, esto no se logra.

Cuando se aprende matemáticas, química o física, se adquieren conocimientos y habilidades que se pueden aplicar a una amplia variedad de situaciones diferentes a las académicas, pero su aplicación es muy limitada en las actividades del quehacer diario, cuando las personas se enfrentan a la toma de decisiones.

4.6.3 La utilización de foros y discusiones abiertas

La utilización de foros y discusiones abiertas, en materias que se conocen como: estudios generales, humanidades, estudios integrados y otros, ayudan al desarrollo de habilidades de pensamiento.

En estos cursos se discuten temas como: El medio ambiente, las drogas, la población, el tránsito etc. Este enfoque es muy valioso, porque despierta interés y permite al estudiante tener sus propias ideas, y desarrollar una mayor confianza al expresarlas, sin embargo debido a que el énfasis recae en el contenido, no es el más adecuado para enseñar a pensar como habilidad específica.

4.6.4 La utilización de acertijos y juegos

Se reconoce el aporte a la estructuración del pensamiento, la práctica de solución de acertijos y de juegos como el del ajedrez, y en este sentido ha habido propuestas de incorporar la enseñanza del ajedrez en el currículo de los estudios secundarios.

4.6.5 Método CEP

De Bono propone un método denominado CEP (Centro de enseñanza del pensamiento), que centra la atención en los diferentes aspectos del pensamiento, para generar herramientas y enseñen a pensar, de una manera abierta, crítica, constructiva y creativa, que faciliten la toma de decisiones en situaciones del acontecer diario.

A continuación se estudia y se aplica el método CEP, para mejorar los procesos involucrados en la actividad de pensar.

4.7 Método CEP para mejorar el pensamiento

La aplicación del método CEP, diseñado por "El Centro para el Estudio del Pensamiento" del Dr. E. De Bono, permite el desarrollo de habilidades en los estudiantes para ser pensadores de mente abierta, críticos, constructivos, creativos y comprensivos.

Este método centra la atención en los diferentes aspectos del pensamiento, para generar conceptos e instrumentos (herramientas), que se puedan utilizar en las diferentes situaciones problemáticas de la vida cuotidiana.

Este método permite desarrollar formas prácticas y factibles, mediante las cuales se puede **enseñar a pensar** de manera directa. El aspecto más destacado al enseñar a pensar, es desarrollar una **habilidad básica,** que se pueda transferir.

En este método se **cristalizan o concretan los diferentes aspectos del pensamiento, en conceptos e instrumentos** definidos, para utilizarlos en forma deliberada.

Por ejemplo, la actitud positiva **de amplitud mental** de un pensador, que implica analizar todos los aspectos de una idea, se cristaliza en la herramienta PNI (aspectos positivos, negativos e interesantes de una idea).

Es muy fácil hacer un PNI, pero no es fácil enseñar la actitud de amplitud mental, ya que no es tan natural buscar los aspectos positivos, de algo que a uno le disgusta.

Sin embargo, el adoptar como práctica consuetudinaria la realización del PNI, mejora con el tiempo la actitud de amplitud mental.

El método CEP asume, que el uso deliberado y la práctica consuetudinaria de una serie de herramientas, **que cristalizan o plasman ciertos aspectos del proceso de pensamiento crítico**, con el tiempo generan de una manera automática, un comportamiento de un pensador crítico.

4.8 Herramientas para aprender a pensar

A continuación se estudian las herramientas desarrolladas por De Bono, para aprender a pensar de una manera crítica, creativa y reflexiva. Las técnicas o herramientas están diseñadas para utilizarlas objetivamente, con **una mente abierta**, para ampliar las percepciones en lugar de defender un punto de vista en particular.

4.8.1 Herramienta PNI (positivo, negativo e indiferente)

El método CEP inicia con una herramienta básica, denominada PNI (positivo-negativo-interesante), que se puede utilizar durante todo el proceso.

La reacción natural (emocional) ante una idea o propuesta es de simpatía o antipatía, de aprobación o rechazo, y esto hace que sea difícil buscar los aspectos negativos de una idea que nos gusta, como también buscar los positivos de una que nos disgusta.

Se conoce a la herramienta PNI como el enfoque de las ideas, y sirve para **aceptar o rechazar una idea,** no porque esta sea simpática o antipática, sino como resultado de enumerar y evaluar la importancia de los aspectos positivos, y después los negativos, alrededor de la idea. Este proceso permite ampliar la visión de cualquier idea, proposición o situación.

La PNI es una operación deliberada, que permite al estudiante disponer de una herramienta, para convertir una reacción emocional natural en un proceso de pensamiento, para aceptar o rechazar una idea. La herramienta PNI propicia un comportamiento más racional, y menos emocional.

Al enumerar los diversos aspectos de una idea, algunos no se pueden clasificar como positivos o negativos, pero pueden resultar interesantes en el sentido que conducen a otra idea o propuesta.

4.8.1.1 Principios

Los principios básicos de esta herramienta son:

1. El PNI es importante, ya que sin su ayuda se puede incurrir en el error de no aceptar una idea valiosa, la cual aparentemente no lo era en el primer contacto con la idea.
2. Sin la ayuda del PNI es muy poco probable, ver las desventajas de una idea que nos gusta mucho.
3. El PNI puede demostrar que las ideas no son solamente positivas o negativas, sino que también pueden ser interesantes, si estas conducen a otras ideas.
4. Sin la ayuda de un PNI, la mayoría de los juicios que se emiten están basados en las emociones personales de ese momento, y no en el valor de la idea en sí misma.
5. Con la ayuda de un PNI, se está en capacidad de decidir si le gusta o no una idea después de haberla analizado, en lugar de hacerlo antes.

Ejemplo 60

Idea: Se deben eliminar todos los asientos de los autobuses.

Aspectos positivos:

1. Podrían caber más personas en un autobús.
2. Sería más sencillo subir y bajar del autobús.
3. Sería más económico fabricar y reparar los autobuses.

Aspectos negativos:

1. Los ancianos e inválidos no podrían utilizarlos.
2. Los pasajeros se caerían, si el autobús se detiene súbitamente.
3. Sería muy difícil llevar las bolsas con la compra, o a los niños pequeños.

Aspectos interesantes:

1. Esta idea es interesante en el sentido que genera la idea de fabricar dos clases de autobuses: Unos con asientos para las líneas urbanas e interurbanas, y otros sin asientos para utilizarlos en distancias cortas, por ejemplo para llevar los pasajeros al avión desde la terminal aérea, en donde interesa la máxima capacidad de transporte de pasajeros, ya que el trayecto a recorrer es pequeño.

4.8.1.2 Práctica

Hacer un PNI de las siguientes ideas:

1. Se debe legalizar el uso de la marihuana.
2. El ingreso a la carrera de Ingeniería Electromecánica de la UFPS, debería realizarse mediante un examen de admisión, que valore la formación académica y la orientación vocacional del estudiante.
3. El voto en las elecciones debe ser obligatorio.
4. Se debe incrementar el costo de la matricula por semestre en la UFPS.
5. Los estudiantes de Ingeniería Electromecánica deben presentar obligatoriamente para el ingreso a la carrera un examen sobre las competencias en comprensión lectora, razonamiento lógico, razonamiento matemático y pensamiento crítico.
6. Los estudiantes del primer semestre de Ingeniería Electromecánica deberían usar un distintivo, para indicar su condición de estudiantes que inician la carrera.

4.8.2 Herramienta CTF

La sigla CTF significa "Considerar todos los factores" involucrados en una situación, por lo que esta operación de pensamiento se relaciona con procesos, como la acción, decisión, planificación, juicio y determinación de conclusiones.

Generalmente al tomar una decisión, se consideran los factores involucrados en la situación, pero generalmente se tienen en cuenta los más obvios. La herramienta CTF hace énfasis en prestar atención a todos los factores involucrados, para posteriormente determinar el orden de importancia de los factores en la situación analizada.

El PNI es una reacción ante una idea, mientras que el CTF es la exploración de una situación, antes de surgir la idea. Sin embargo en ocasiones ambos procesos se superponen, ya que algunos de los aspectos que se consideran tienen un aspecto negativo y uno positivo.

Al hacer un CTF se debe hacer el mayor de los esfuerzos para enumerar todos los factores involucrados, ya que al dejar por fuera algún factor importante, la decisión o la idea que pueda surgir del proceso puede ser inadecuada o incorrecta.

El CTF es difícil de enseñar, ya que también lo es pretender considerar todos los factores. Ayuda en la construcción del CTF empezar por considerar los aspectos que afectan a la persona, después los aspectos que afectan a los que nos rodean y finalmente los que afectan a la sociedad.

4.8.2.1 Principios

1. Es útil hacer un CTF antes de escoger, decidir o planificar.
2. Es mejor considerar primero todos los factores y luego escoger solamente los más importantes.
3. Es posible que usted tenga que solicitarle a otra persona, que le indique si omitió algunos factores importantes.
4. Si omitió algún factor importante, su respuesta puede ser aparentemente correcta, pero más adelante se evidenciará el error en su respuesta.
5. Si se hace el CTF basado en el proceso de pensamiento de otra persona, es posible que pueda decirle a esa persona cuales factores se omitieron en el proceso.

4.8.2.2 Práctica

1. Un hombre compra un auto de segunda mano para su familia, y al hacerlo toma en consideración los siguientes factores: a) Que la persona que lo está vendiendo sea su dueño; b) El precio del auto; c) La marca del auto y su color; d) La potencia del motor y la velocidad que puede desarrollar; e) Si todas las partes mecánicas funcionan correctamente; f) Qué sea lo suficientemente grande para la familia. Se pregunta ¿Cuáles factores omitió?

2. Hacer un CTF acerca de los factores a considerar, para decidir estudiar la carrera de Ingeniería Electromecánica.
3. Un inventor ideó una pastilla para reemplazar el desayuno. La pastilla es muy pequeña, pero con el contenido alimenticio y vitamínico necesario. Después de tomar esta pastilla no se siente hambre durante cinco horas. ¿Se debe permitir esa pastilla? ¿Cuáles son los factores a considerar?
4. Hacer un CTF, acerca de los factores a considerar, para decidir emigrar del país.

4.8.3 Herramienta reglas

Las reglas se establecen con el propósito de ordenar el comportamiento colectivo, hacer la vida más fácil, y mejor para la mayoría de las personas.

Algunas reglas se establecen para evitar confusiones: por ejemplo, en algunos países es obligatorio manejar por el lado derecho de la carretera, en otros por el lado izquierdo. Otras reglas obedecen al disfrute de una actividad lúdica: las reglas para jugar el parqués. Otras reglas responden a la necesidad de regular el comportamiento moral de la sociedad: por ejemplo en los países occidentales cristianos, los diez mandamientos.

El comportamiento ciudadano y legal en una sociedad tiene como regla la Constitución del país.

4.8.3.1 Principios

1. Una regla debe ser ampliamente conocida y comprendida por todos, además debe ser posible de obedecer.
2. Una regla no es mala, simplemente porque no le guste a algunas personas.
3. Una regla debe establecerse en beneficio de la mayoría de las personas, que deben obedecerla.
4. Aquellos que tienen la obligación de obedecer una regla, deben estar en capacidad de comprender su propósito.
5. Las reglas deben revisarse periódicamente para examinar su vigencia.

4.7.3.2 Práctica

1. Elaborar algunas reglas, para regular el comportamiento en el aula, de los estudiantes de ingeniería electromecánica, en el curso de lógica y razonamiento en ingeniería.

2. Un grupo de personas navega a una isla para comenzar una nueva vida, con el propósito de abolir el concepto de propiedad, así como todas las reglas antiguas. Sin embargo, muy pronto se dan cuenta que nadie quiere hacer las labores pesadas, necesarias para producir los alimentos y construir las casas. Se pide hacer un CTF con respecto a esta situación, y luego generar algunas reglas.

4.8.4 Herramienta de Prioridades Básicas (PB)

En el proceso de pensamiento acerca de una situación, una vez que se han elaborado un número determinado de ideas, se debe decidir cuáles de estas son las más importantes, para poder decidir qué acción tomar en relación a estas ideas.

4.8.4.1 Principios

1. Es muy importante obtener primero tantas ideas como sea posible, y luego comenzar a escoger las prioridades.
2. Diferentes personas pueden tener diferentes prioridades en una misma situación.
3. Se debe saber exactamente la razón, por la cual se escoge algo como prioridad.
4. Es muy difícil escoger los aspectos más importantes, y luego comenzar por el otro extremo, rechazando los menos importantes, para observar que queda.
5. No se deben ignorar las ideas, que no siendo escogidas como prioridades, se deben considerar después de estas.

Ejemplo 61

Alguien desea pedirle cierta cantidad de dinero prestado. Usted selecciona las siguientes prioridades, entre una serie de factores:

¿Tiene usted dinero? ¿Puede permitirse prestarlo? ¿Confía Usted en la persona que le pide el dinero prestado? ¿Cuándo le devolverá la persona este dinero?

Se pregunta también si las prioridades establecidas son las correctas, y en caso de ser negativa la respuesta, proponga una lista de prioridades.

4.8.4.2 Práctica

1. Al hacer un CTF para escoger un trabajo, se deben considerar los siguientes factores: el salario, las oportunidades de ascenso o de promoción en el cargo,

el nivel de desempleo, las personas con las cuales tendría que trabajar, el ambiente de trabajo, la distancia que tendría que recorrer para trasladarse al sitio de trabajo, el interés o disfrute del trabajo. De estos factores cuales sería los tres prioritarios básicos.

2. ¿Cuáles son los factores más importantes en su opinión, al decidir si a usted. le agrada o no una persona? Enumerar las tres prioridades básicas.

4.8.5 Herramienta de Consecuencias y Secuelas (C y S)

Una vez se tome una decisión producto de un CTF, se deben considerar las consecuencias y secuelas (C y S) de la misma.

En realidad el C y S tiene que ver con cualquier tipo de acción, bien sea la que se pretende tomar o la que otros emprenden, y su intención es la de ampliar el enfoque más allá del efecto inmediato de dicha acción.

Cualquier acción puede parecer válida, si es positivo su efecto inmediato, aun cuando podría parecer todo lo contrario si se hiciera un esfuerzo deliberado por examinar las consecuencias a largo plazo. Por el contrario, una acción, cuyas consecuencias son positivas a largo plazo, puede no ser atractiva en un principio.

El C y S se divide en consecuencias inmediatas a corto plazo (1 a 5 años), a mediano plazo (5 a 25 años) y a largo plazo (más de 25 años).

Se puede resumir, que si el CTF es el pensar acerca de una situación en el momento preciso para tomar una decisión, el C y S es el anticiparse a los efectos que pueden acarrear la decisión que se tome.

4.8.5.1 Principios

1. Es posible que otras personas puedan ver las consecuencias de sus acciones con más facilidad que usted mismo.
2. Es importante saber si las consecuencias son o no reversibles.
3. Las consecuencias inmediatas y las consecuencias a largo plazo pueden ser opuestas. Las consecuencias inmediatas pueden ser positivas, y las consecuencias a largo plazo puede que sean positivas o negativas.
4. Se deben ver las consecuencias, no solo en la forma como afectan personalmente, sino también como afectan a otras personas.
5. Se debe hacer un C y S completo antes de decidir cuáles son las consecuencias a las que se les debe dar mayor atención.

Ejemplo 62

Una persona importa una cierta cantidad de conejos para una región con el propósito de tener animales para incentivar la actividad de caza.

Las consecuencias inmediatas fueron positivas ya que al aumentar el número de presas se incrementó la actividad de caza. Las consecuencias a largo plazo también fueron positivas, ya que la carne de conejo fue un suministro alimenticio adicional en la dieta de la gente de la región. Las consecuencias a largo plazo fueron muy negativas, debido a que el aumento acelerado de la población de conejos se convirtió en una plaga, que dañaron en gran extensión los cultivos de la región.

4.8.5.2 Práctica

1. Se inventa un robot, para reemplazar toda la mano de obra humana en las fábricas. Se pide hacer un C y S de esta invención.
2. Se propone una nueva ley, en la cual se permita a los niños en edad escolar, que abandonen la escuela y comiencen a ganar dinero tan pronto como ellos lo deseen, después de la edad de doce años. Se pide hacer un C y S acerca de esta ley, desde el punto de vista de una persona que abandona la escuela muy joven, y desde el punto de vista de la sociedad.
3. Se mudan tantos extranjeros de una misma nacionalidad a una comunidad, que se igualan al número de colombianos que allí viven. Se pide hacer un C y S inmediato, y a corto plazo de esta situación.

4.8.6 Herramienta PMO (Propósitos, Metas y Objetivos)

Muchas de las acciones de las personas obedecen a un “por qué”: se hacen por imitación, o por una reacción a una situación. Sin embargo en otras situaciones, la acción responde a un “para qué”. Ayuda mucho al proceso de pensamiento si se establece claramente el para qué de la situación, y para ello se debe responder a la pregunta: ¿Cuál es el propósito de la acción? ¿Cuáles son los objetivos que se pretenden alcanzar? ¿Cuál es la meta a alcanzar? Si bien las palabras: propósito, meta y objetivo tienen el mismo significado, en algunas situaciones es más apropiado utilizar una en particular.

4.8.6.1 Principios

1. Si se conocen los objetivos es más fácil alcanzarlos.
2. Ante una misma situación, diferentes personas pueden tener diferentes objetivos.

3. En la búsqueda de un objetivo final (general) se pueden presentar una serie de objetivos de menor importancia (objetivos específicos), que se encadenan para alcanzar el objetivo final.
4. Los objetivos deben ser lo suficientemente concretos y factibles, para que su logro no sea una tarea imposible de realizar.
5. Pueden existir muchos objetivos, y unos son más importantes que otros.

Ejemplo 63

Posibles objetivos de un equipo de fútbol:

El objetivo de un equipo de fútbol es ganar el campeonato. Sin embargo, podría tener otro objetivo como ascender a la siguiente categoría, o evitar ser relegado a la categoría inferior.

Durante un juego el objetivo es ganar, y esto supone dos objetivos específicos: Anotar goles y evitar que el equipo contrario los haga a su favor.

Podría existir otros objetivos, como el de formar un buen equipo para el futuro o divertir al público, que lo apoya con su asistencia al estadio.

4.8.6.2 Práctica

1. Un padre está muy disgustado con su hija y debido a esta razón decide duplicarle la mesada. ¿Por qué cree usted que el padre hizo eso?
2. Todos tenemos que alimentarnos para vivir. Sin embargo, todas las personas tienen diferentes objetivos con respecto al consumo o producción de los alimentos. Realizar un PMO para las siguientes personas: el ama de casa, la cocinera, el dueño de la tienda, el fabricante de alimentos, el agricultor y el gobierno.
3. Elaborar un PMO con respecto a la compra de prendas de vestir y luego hacer un PB acerca de los objetivos encontrados.

4.8.7 Herramienta de planificación

Planificar es una actividad del pensamiento, cuyo proceso implica anticipar las actividades que se deben realizar en el futuro, para resolver un problema, o **alcanzar un objetivo**.

La planificación es un método que permite ejecutar planes, que permiten alcanzar el objetivo planteado para la situación que se analiza.

4.8.7.1 Principios

1. Al planificar es necesario conocer exactamente el objetivo que se quiere alcanzar.
2. Siempre debe tenerse un plan alternativo, en caso de que algo salga mal en el primer plan.
3. El valor de una planificación depende de sus consecuencias (C y S).
4. Mantenga su plan tan sencillo y directo como sea posible.
5. Considere todos los factores (CTF) muy cuidadosamente, y obtenga toda la información que le sea posible antes de hacer su plan.

Ejemplos

- Un general planifica cómo va a ganar la batalla.
- Un joven planifica sus vacaciones.
- Un gerente de una compañía planifica un paseo al campo.
- Un joven planifica su carrera universitaria al graduarse de bachiller.

4.8.7.2 Práctica

1. El centro de una ciudad se ha convertido en un barrio pobre y el alcalde desea cambiar esta situación. ¿Cuáles son los factores a considerar y cuáles son los objetivos a tener en cuenta? Hacer un CTF y un PMO en relación a esta situación.
2. Con respecto al problema anterior, ¿qué planes se deben hacer? Organizar el plan en tres etapas.
3. Hacer un CTF a corto y mediano plazo, con respecto al plan mencionado anteriormente.
4. Su objetivo es ganar dinero y usted tiene la posibilidad de escoger tres de los siguientes objetos que se enumeran a continuación: 5 bicicletas, un caballo, 2000 libros antiguos, una tonelada de pintura roja, una imprenta y una receta para hacer salchichas. Hacer un programa demostrando como se usarían las tres alternativas.

4.8.8 Herramienta APO (Alternativas, Posibilidades y Opciones)

4.8.8.1 Principios

1. Si no se le ocurren otras alternativas, se debe pedir ayuda a otras personas.
2. Se debe continuar en la búsqueda de nuevas alternativas, hasta que encuentre una que realmente le guste.
3. Casi siempre existe una alternativa, aún en casos en los cuales parece imposible.
4. Es imposible saber si la explicación obvia es la mejor, hasta no haber examinado otras posibilidades.
5. Es sencillo buscar otras alternativas cuando no se está satisfecho, pero buscarlas cuando está conforme, requiere de un esfuerzo deliberado.

Ejemplo 64

Aparece un carro estrellado en el fondo de un barranco, y el conductor está muerto. ¿Qué pudo haber sucedido?

APO

- El conductor sufrió un infarto o un desmayo.
- El auto sufrió una falla mecánica, y un caucho se desinfló súbitamente.
- El conductor estaba ebrio.
- El conductor no calculó adecuadamente la curva de la carretera.
- El conductor sufrió una picadura de avispa y perdió el control.
- El conductor fue asesinado primero, y luego fue colocado en el auto estrellado.

4.7.8.2 Práctica

1. Un hombre entra en un bar y pide un vaso de agua. La joven que lo atiende le da un vaso de agua y grita inmediatamente después. ¿Qué explicaciones posibles existen en este caso?
2. Usted descubre que su mejor amigo es un ladrón. ¿Qué alternativas tiene?

4.8.9 Herramienta de toma de decisiones

La mayoría de las situaciones problemáticas conduce a la toma de decisiones. Algunas decisiones son fáciles de tomar y otras por el contrario son muy difíciles.

En todo momento es necesario tomar decisiones: qué tipo de ropa se debe usar, cual computador comprar, que carrera se debe seleccionar, en qué forma se deben realizar las actividades lúdicas, etc.

Algunas veces se requiere decidir si se debe hacer algo o no. Algunas veces la decisión es producto de una selección entre varias alternativas, otras veces la decisión es impuesta, por ejemplo, al llegar a una encrucijada de un camino y se debe decidir cuál de las vías se debe tomar.

En el momento de tomar decisiones es útil estar seguros en los factores a considerar (CTF), los objetivos (PMO), las prioridades (PB), las consecuencias(C y S), y por supuesto las alternativas (APO).

4.8.9.1 Principios

1. Siempre, se debe estar en capacidad de reconocer las verdaderas razones que existen detrás de cualquier decisión a tomar.
2. Es importante saber si puede cambiar de opinión, sobre una decisión que ya ha se ha tomado.
3. El hecho de no tomar una decisión, es en realidad tomar la decisión de no hacer nada.
4. Las decisiones son muy difíciles de tomar, si no se está preparado a renunciar a algo con el objeto de ganar algo más.
5. Al tomar una decisión se debe considerar todos los factores(CTF), estudiar las consecuencias(C y S), estar muy seguro de los objetivos(PMO), estimar las prioridades (PB), y encontrar todas las alternativas posibles(APO). Una vez realizado este proceso, la toma de decisiones es mucho más fácil.

4.8.9.2 Práctica

1. Un policía observa, en la noche, una luz extraña proveniente de un depósito. En este momento se encuentra sólo, y debe tomar una decisión rápida acerca de lo que debe hacer. ¿Cual es la decisión que debe tomar?
2. Un joven vive en su casa con su madre que es viuda, y no puede encontrar empleo en la ciudad donde vive. Un día le ofrecen un empleo, en otra ciudad muy distante de la suya. Su madre le dice que ella está muy vieja para mudarse, y hacer nuevos amigos. El joven tiene que tomar una

decisión, entre aceptar el empleo y dejar a su madre, o rehusar el empleo y permanecer en casa.

3. Un parlamentario tiene puntos de vista muy personales en relación a la pena de muerte, la cual no desea volver a poner en vigencia. Sin embargo, está consciente de que la mayoría de los votantes está a favor de volverla a establecer, para crímenes tales como matar a un policía. ¿Qué decisión debe tomar?

4.8.10 Herramienta OPV (Otros Puntos de Vista)

Muchas de las situaciones del proceso de pensamiento involucran a otras personas. Lo que estas personas piensan, forman parte de la situación, así como también los factores, las consecuencias, los objetivos, etc.

Estas otras personas pueden tener puntos de vista, muy diferentes a pesar de encontrarse en la misma situación, y sin embargo ven los hechos de forma muy distinta.

Para hacer un OPV, se debe tener la capacidad de poder decir cómo piensan otras personas, y tratar de ver los hechos desde el punto de vista de otros. Esta herramienta es muy importante, dentro del proceso de mejorar la capacidad de pensar.

4.8.10.1 Principios

1. Se debe tener la capacidad de entender el punto de vista de los demás, aunque no se esté de acuerdo.
2. Todo punto de vista puede ser correcto para la persona que lo sostiene, pero no al extremo de imponérselo a otras personas.
3. Cada persona tiene **diferentes posiciones, formaciones, experiencias, conocimientos, intereses, valores, aspiraciones**, etc. Por esto no debe sorprender cuando personas que se encuentran en la misma situación, tienen puntos de vista muy diferentes.
4. Trate de ver si la otra persona puede captar su punto de vista.
5. Trate de enumerar las similitudes y diferencias, entre los puntos de vista.

Ejemplo 65

Un vendedor trata de vender un carro deportivo de segunda mano. Su punto de vista es demostrar su línea aerodinámica, su potente motor, sus cauchos nuevos.

El punto de vista del cliente es: disponibilidad y costo de los repuestos, cual es el uso que ha tenido el carro (kilometraje recorrido, servicio de mantenimiento periódico, saber si el carro fue chocado etc.), consumo de gasolina, precio de reventa

4.8.10.2 Práctica

1. Un padre le prohíbe fumar a su hija de 13 años, ¿cuál es el punto de vista del padre y cuál es el de la hija?
2. Un inventor descubre un método totalmente nuevo para fabricar telas. Su invento implica que de cada 20 personas empleadas para fabricarlas, en el futuro sólo será necesaria una. Hacer un OPV para el inventor, el dueño de la fábrica, los obreros y el público en general que comprará las telas.
3. Hay una huelga de transporte, y las personas tienen muchas dificultades para llegar a sus trabajos ¿Cuántos puntos de vista diferentes se encuentran involucrados en esta situación?

Actividades

Teoría

1. ¿Qué se entiende por pensar? ¿Por qué es importante aprender a pensar?
2. ¿Cuáles son los factores que son contrapuestos, al ejercicio de una actividad intensa de pensamiento? ¿Por qué?
3. ¿Cuál es la diferencia entre el pensamiento crítico, y el pensamiento creativo?
4. ¿Qué es enseñar a pensar? ¿Cuáles son las opiniones en relación a la idea de enseñar a pensar, a estudiantes recién egresados de bachillerato?
5. Enumerar las características de un buen pensador.
6. ¿Qué entiende por pensamiento crítico? ¿Cómo se comporta un pensador crítico, al emitir una opinión?
7. ¿Cuáles son las consecuencias personales y sociales que ocurren si un sistema educativo mejora la competencia de pensamiento crítico en sus estudiantes?
8. ¿Cuáles son los métodos utilizados para mejorar la capacidad de pensar en los estudiantes?
9. Explicar en qué consiste el método CEP desarrollado por E. de Bono, para aprender a pensar.
10. Enumerar las herramientas desarrolladas por E. de Bono para mejorar la capacidad de pensamiento.
11. ¿Cuál es el propósito de la herramienta PNI? ¿Cuándo se utiliza?
12. Hacer un PNI de la siguiente idea: Los estudiantes de Ingeniería Electromecánica del primer semestre, deben presentar obligatoriamente al inicio del semestre, un examen sobre las competencias en comprensión lectora, razonamiento lógico, matemáticas y física.
13. Hacer un PNI de la siguiente idea: Se debe votar afirmativamente en el plebiscito que se va a realizar, para refrendar los acuerdos de la Habana entre el gobierno y las FARC, para concluir el conflicto con esa organización subversiva.
14. Hacer un PNI de la siguiente idea: Reducir el Congreso Colombiano a la tercera parte de sus integrantes.
15. ¿Cuál es el propósito de la herramienta CTF? ¿Cuándo se utiliza?

16. Hacer un CTF sobre la siguiente situación: Seleccionar una carrera de educación superior.
17. ¿Cuál es el propósito de la herramienta REGLAS? ¿Cuándo se utiliza?
18. Elaborar algunas reglas, para regular el comportamiento de los estudiantes de ingeniería electromecánica, en el curso de lógica y razonamiento en ingeniería.
19. ¿Cuál es el propósito de la herramienta PB? ¿Cuándo se utiliza? ¿Para qué sirve?
20. Al hacer un CTF para escoger un trabajo, se deben considerar los siguientes factores: el salario, las oportunidades de ascenso o de promoción en el cargo, las personas con las cuales tendría que trabajar, el ambiente de trabajo, la distancia que tendría que recorrer para trasladarse al sitio de trabajo, el interés o disfrute del trabajo. De estos factores cuales serían los tres prioritarios básicos.
21. ¿Cuál es el propósito de la herramienta C y S? ¿Cuándo se utiliza?
22. Se mudan tantos extranjeros de una misma nacionalidad a una comunidad, que se igualan al número de colombianos que allí viven. Se pide aplicar la herramienta C y S, para lo inmediato, y a corto plazo, de esta situación.
23. ¿Cuál es el propósito de la herramienta PMO? ¿Cuándo se utiliza?
24. Un padre está muy disgustado con su hija, y debido a esta razón decide duplicarle la mesada. ¿Por qué cree usted que el padre hizo eso?
25. ¿Cuál es el propósito de la herramienta Planificaciön? ¿Cuándo se utiliza?
26. El centro de una ciudad se ha convertido en un barrio pobre, y el alcalde desea cambiar esta situación. ¿Cuáles son los factores a considerar, y cuáles son los objetivos a tener en cuenta? Hacer un CTF y un PMO en relación a esta situación, e indicar qué planes se deben hacer. Organizar el plan en tres etapas.
27. ¿Cuál es el propósito de la herramienta APO? ¿Cuándo se utiliza?
28. Usted descubre que su mejor amigo es un ladrón. ¿Qué alternativas tiene?
29. ¿Cuál es el propósito de la herramienta Decisiones? ¿Cuándo se utiliza?

30. Un joven vive en su casa con su madre que es viuda, y no puede encontrar empleo en la ciudad donde vive. Un día le ofrecen un empleo en otra ciudad muy distante de la suya. Su madre le dice que ella está muy vieja para mudarse, y hacer nuevos amigos. El joven tiene que tomar una decisión, entre aceptar el empleo y dejar a su madre, o rehusar el empleo y permanecer en casa.
31. ¿Cuál es el propósito de la herramienta OPV ¿Cuándo se utiliza?
32. Un padre le prohíbe fumar a su hija de 13 años, ¿Cuál es el punto de vista del padre y cuál es el de la hija?

APÉNDICES

A-1 Cuerpos de números

Introducción

“Dios y la Matemática son inventos de la mente humana”. Esta frase atribuida al científico neurofisiólogo colombiano Rodolfo Llinás, es muy esclarecedora al intentar dar una definición del concepto de número, ya que al igual que con el concepto de Dios, la humanidad no se ha podido poner de acuerdo.

Desde finales del siglo XIX es habitual construir el sistema de números empezando por los números naturales, y luego se extiende la estructura para incluir los enteros, los racionales, los reales, y se termina con los complejos

Al niño inicialmente se le enseña a contar, y así se familiariza con los números naturales 1, 2, 3... El conjunto de los números naturales se representan por comprensión como, $\mathbb{N}$ = {números naturales} o por extensión como $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Los números enteros aparecen, al incluir a los naturales el número 0 y los negativos,introducidos por matemáticos hindúes. El conjunto de los números enteros se representan con el símbolo con $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$.

Se define en el dominio de los números enteros, un número par como aquel que se obtiene de multiplicar por dos, cualquier número entero.

El número impar se obtiene de adicionar al número par, una unidad.

Después el niño aprende a sumar, restar, multiplicar y dividir números naturales. Al hacer estas operaciones, aparecen las fracciones, o sea las divisiones entre dos números naturales, y se le enseñan las operaciones de suma, resta, multiplicación y división con fracciones.

El conjunto de los números enteros y las fracciones positivas y negativas, conforman los números racionales, que se representan con el símbolo Q. Se puede decir que Q representa al conjunto: $\{p/q : p, q \in Z, q \neq 0\}$. No se define la división por cero, porque genera contradicción en la teoría.

Un número racional es aquel que se puede expresar como el cociente de dos números enteros.

Los números que no se pueden representar por una fracción, sino como decimales de infinitas cifras que no se repiten, se denominan irracionales. Ejemplos de estos números son: $\sqrt{2}$ y π.

También algunos números racionales originan expresiones decimales, con cifras infinitas, por ejemplo 1/7=0,142857142857..., pero que se repiten a partir de cierta cifra, lo que no ocurre con los irracionales.

El conjunto de todos los números racionales e irracionales forman el sistema de los números reales. El conjunto de los números reales se representa por el símbolo $\mathbb{R}$.

Para resolver ciertos problemas que no tenían solución con los números reales, se desarrolló el cuerpo de los números complejos.

Un problema típico se presentó con la ecuación: $x^2 = -1$. Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales, y para poder manejar esta situación, se introduce un nuevo símbolo, i , que presenta la siguiente propiedad $i^2=-1$.

Se define al número complejo como un par ordenado (a,ib), en donde a y b son números reales.

El número complejo se escribe $a + bi$ como. A a se le denomina parte real y a bi, la parte imaginaria.

El conjunto de los números complejos se identifica por el símbolo C. C representa al conjunto: $\{a + bi : a, b \in R\}$.

El conjunto de los números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos.

Operaciones con los números reales

Las operaciones con números reales son; Adición, multiplicación, sustracción, división e igualdad. Estas operaciones se reducen a: adición, multiplicación e igualdad.

Adición

La adición se define para parejas de números reales, por ejemplo: 4+3=7; -3+2, 5= -0, 5, etc. La suma de cada pareja da como resultado otro número real.

Las siguientes leyes rigen la operación de la adición.

Ley de clausura

La suma de $a+b$ de dos números reales cualesquiera, es un único número real c.

Aunque pareciera evidente la ley de clausura, esta no se cumple con el conjunto de los números impares, porque la suma de dos números impares no es impar.

Ley conmutativa de la adición

$$a+b = b + a$$

Esta ley establece que el resultado de la adición es independiente del orden en que se realice.

Ley asociativa de la adición

$$(a+b) + c = a + (b + c)$$

La adición se define para una pareja de números reales, y **cuando se requiera sumar tres números, estos se pueden asociar en parejas de dos maneras.**

Cualquiera que sea la manera como se asocien las parejas, el resultado será el mismo.

Definición

Se define al número real cero (0) como elemento neutro de la adición de los números reales. Por lo tanto:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Se puede considerar al conjunto de los números reales como la unión de tres subconjuntos a saber:

- » El conjunto de los números reales positivos
- » El conjunto de los números reales negativos.
- » El conjunto con un único elemento, cero, el cual no es positivo ni negativo.

Teorema 1

$$a+b+c=c+b+a$$

Para la demostración de este teorema se utiliza la definición de adición, y las leyes conmutativa y asociativa. Se deja al estudiante su demostración.

Definición

El inverso aditivo de un número real a es otro número real $*a$, que presenta la siguiente propiedad:

$$a+{*a}={*a}+a=0$$

El significado del término inverso se puede explicar de la siguiente manera: Partiendo de 0 se suma a, y se obtiene a, pero es posible retroceder y volver a 0, y esto se hace sumando a a su inverso $*a$

La operación de sumar $*a$, deshace la operación de la suma y de ahí su nombre de inverso. El símbolo * que representa al inverso aditivo, se considera igual al símbolo -.

Definición

Sean a y b números reales, se define la sustracción como:

$$a-b=a+{*b}$$

En otras palabras para restar b de a, se suma a a el inverso aditivo, $(*b)$.

El signo $-$ se puede emplear para:

1. Representar un número negativo.
2. Para indicar la operación de sustracción.
3. Para representar al inverso aditivo.

Definición

El valor absoluto de un número real a es otro número real $|a|$, que presenta las siguientes propiedades:

1. Si a es positivo o cero ,entonces $|a|= a$.
2. Si a es negativo, entonces $|a|= a$.

El valor absoluto siempre es un número positivo.

Multiplicación de números reales

La multiplicación es una suma repetida un cierto número de veces, y esta operación se representa por el símbolo x. La expresión $a\ x\ b$, significa sumar veces el número b, o b veces el número a . La multiplicación se define para parejas de números reales.

La operación de la multiplicación cumple con las leyes de la clausura, la conmutativa y la asociativa.

La multiplicación de cualquier número real por 0, da 0:

$$a \times 0 = 0$$

Ley de clausura de la multiplicación

El producto de dos números reales cualesquiera, es un único número real c.

Ley conmutativa de la multiplicación

$$a \times b = b \times a$$

Ley asociativa de la multiplicación

$$(a \times b) \times c = a\times (b \times c)$$

Definición

Se denomina elemento neutro de la multiplicación de números reales, al número 1. Esto es equivalente a afirmar:

Para cualquier número real a, $a \times 1=1 \times a = a$.

Definición

El inverso multiplicativo de un número real $a \neq 0$, es el número real a', que presenta la siguiente propiedad. $a \neq 0$, para no generar una contradicción.

$$a \times a' = a' \times a = 1$$

El inverso multiplicativo deshace la operación de multiplicación.

Definición

Sean a y b números reales, y sea $b \neq 0$, entonces, el cociente de a entre b, que se escribe como ${}^{a}/_{b}$ o $\frac{a}{b}$, se define como:

$${}^{a}/_{b} = a \times b'$$

No se define la división por 0, porque genera una contradicción.

El símbolo / se emplea de dos maneras que son compatibles.

1. Para representar el inverso multiplicativo de ${}^{1}/a$.
2. Para representar el cociente ${}^{a}/_{b}$

El símbolo 0/0 es indeterminado. Para verificar esto, se asume que ${}^{0}/_{0} = c$, o sea $0 = c \times 0$. Puesto que cualquier número real satisface esta ecuación, el valor de c es indeterminado

Teorema 2

Si a es cualquier número real, entonces $a \times 0 = 0$

Demostración:

1.	$0=0+0$	Definición de elemento neutro de la adición
2.	$a \times 0 = a \times (0+0)$	Principio de igualdad y definición de multiplicación
3.	$a \times 0 = (a \times 0)+(a \times 0)$	Ley distributiva
4.	$a \times 0 = a \times 0$	Principio de identidad
5.	$0 = a \times 0$ ■	Restando de (4) la expresión (3).

Teorema 3

Si a b son dos números reales, tales que $a \times b = ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$

Demostración:

Si $a \neq 0$, entonces existe un inverso multiplicativo $^1/_a$, y por tanto se puede escribir

$(^1/_a)(ab) = (^1/_a)(0)$ Principio de igualdad

$(^1/_a)(a)(b) = b = (^1/_a)(0) = 0$ Ley asociativa y teorema 2

$b = 0$ ■

Ley distributiva de la multiplicación:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Teorema 4

Para cualquier número real a,$(-1)\times a = -a$

Demostración:

1. $1 + (-1) = 0$ Definición de inverso aditivo
2. $1\ x\ a + (-1)\times a = 0\ x\ a$ ambos lados de (1) por_ y se aplica ley distributiva
3. $0\ x\ a = 0$ Teorema 5
4. $1\ x\ a = a$ Definición de elemento neutro de la multiplicación.
5. $a + (-1)\ x\ a = 0$ De (2), (3), y (4)
6. $a + (-a) = 0$ Definición de inverso aditivo.
7. $a + (-1)\ x\ a = a + (-a)$ De (5) y (6)
8. $(-1) x\ a = -a$ ■

Corolario

$$(-1) x (-1) = 1$$

Se pone en el teorema 4, $a = -1$ y se aplica la condición $-a = a$

Números racionales

Definición

Un número racional es un número real que se puede expresar de la forma ${}^{a}/_{b}$, en donde a y b son números enteros, primos entre sí, y $b \neq 0$. Las expresiones ${}^{a}/_{b}$ y ${}^{c}/_{d}$ en donde a, b, c, d son enteros, y $b{\neq}0$ y $d{\neq}0$ representan el mismo número racional si y solo si, $ad{=}bc$.

Teorema 4

Dados un par de números enteros a y b, con $b{\neq}0$, existe un número racional x tal que $bx{=}a$. Además dos números racionales x_1 y x_2, que cumplan esta propiedad son iguales.

Teorema 5

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Demostración:

Si $-x = {}^{a}/_{b}$ entonces $bx = a$

Si $y = {}^{c}/_{d}$ entonces $dy = c$

De estas dos ecuaciones se deduce:

$$bdx = ad$$

$$bdy = bc$$

Se suman ambos miembros, se utiliza la ley distributiva y se obtiene:

$$bd(x + y) = ad{+}bc$$

De donde

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd} \quad \blacksquare$$

Teorema 6

$$\left({}^{a}/_{b}\right)\left({}^{c}/_{d}\right)= {}^{ac}/_{bd}$$

La demostración de este teorema es similar a la del teorema 5.

Números complejos

Tal como se reseña en la introducción, estos números se inventaron para resolver problemas que no tenían solución con los números reales

Definiciones

Número complejo

Un número complejo es un par ordenado de números reales (a, b). El número complejo se expresa como $a + ib$, en donde el símbolo i tiene la propiedad $i^2 = -1$

Parte real de un número complejo

Al número complejo $(a, 0)$ expresado como $a + 0i$, se le denomina parte real del número complejo (ab).

Parte imaginaria de un número complejo

Al número complejo $(0, b)$, expresado como $0+bi$ se le denomina parte imaginaria del número complejo (a, b).

Aritmética de números complejos

La aritmética de los números complejos se rige por las siguientes definiciones:

- **Igualdad**

  Dos números complejos (a, b) y (c, d) se dice que son iguales si y solo si a=c y b=d

- **Adición**

$$(a, b) + (a, b) = (a + c + b + d)$$

$$(a+ib) + (c+id) = (a + c) + i(b + d)$$

- **Multiplicación**

$$(a, b) \times (c,d) = (ac - bd), (bc + ad)$$

$$(a+ib) \times (c+id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

A-2 Proporcionalidades

Proporcionalidad directa

Definición. Se dice que dos magnitudes son **directamente proporcionales,** si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

La razón o cociente entre la segunda y la primera magnitud, se llama constante de proporcionalidad **directa**.

La ecuación que representa dos cantidades directamente proporcionales es $y = Kx$, y se representa en el plano cartesiano, con una línea recta de pendiente K.

A K también se le define como constante de proporcionalidad directa.

Ejemplo:

En el movimiento de un cuerpo con velocidad constante, el desplazamiento es directamente proporcional al tiempo.

La siguiente tabla muestra, varios valores de desplazamiento (x), en función del tiempo (t).

x(mtrs)	$12(x_1)$	24	60	96	x_5
t(seg)	$1(t_1)$	2	5	t_{-4}	9

Se pide:

a. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes? ¿Cuál es la naturaleza de esta constante?

b. Determinar los valores de t_4 y x_5.

c. ¿Cuál es el modelo matemático de este movimiento?

Solución:

a. $K = \dfrac{x_1}{t_1} = 12\ m/seg$ = velocidad del movimiento.

b. $t_4 = \dfrac{96}{12} = 8$

$x_5 = 9 * 12 = 108.$

c. El modelo matemático es: $x{=}12t$

Proporcionalidad inversa

Definición. Se dice que dos magnitudes son **inversamente proporcionales,** si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número. Al producto de las dos magnitudes, se le llama constante de proporcionalidad inversa.

La ecuación que representa dos cantidades inversamente proporcionales es $y=\frac{K}{x}$, en donde K es la constante de proporcionalidad.

Si K es positiva, esta ecuación representa hipérbolas, cuyas asíntotas son perpendiculares, y se llaman hipérbolas equiláteras.

Ejemplo

Se dispone de una cierta cantidad de heno para alimentar caballos durante un determinado número de días.

La siguiente tabla muestra el número de caballos (x), y el número de días (y), que alcanza el monto disponible de heno, para alimentarlos.

días(y)	$200(y_1)$	40	20	10	y_5
caballos(x)	$1(x_1)$	5	x_3	20	40

Las variables x, y, son discretas, y pertenecen al conjunto de números enteros. El valor mínimo de y es 1 (por qué).

Se pide:

a. ¿Cuál es el tipo de relación entre las dos magnitudes ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes? ¿Cuál es la naturaleza de la constante?
b. Determinar los valores de la tabla para x_3 y y_5
c. ¿Cuál es el modelo matemático para esta situación?

Solución:

a. La relación entre las dos magnitudes es inversamente proporcional.

   $K= x_1*y_1= x_2*y_2$. La naturaleza de esta constante es un monto o cantidad de heno, que puede estar dada en *Kg*.
b. $x_3=10$; $y_5 = 5$
c. El modelo matemático es: $y = K/x$

Proporcionalidad compuesta

Definición

Se dice que una magnitud principal (z), depende de otras magnitudes secundarias, (x, y, u, etc.) mediante una proporcionalidad compuesta, si las magnitudes secundarias afectan de una manera directa o inversa a la magnitud principal.

Si la magnitud x, tiene con z una proporcionalidad directa, y la magnitud y, afecta con una proporcionalidad inversa,entonces, la ecuación que representa a la proporcionalidad compuesta es:

$$z = \frac{K_1}{y}$$

K se define constante de proporcionalidad compuesta.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Polya, G. (2008). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. Recuperado de: http://www.libgen.io/

[2] Research on *Mathematics Teaching and Learning*. Learning to think matematically: problems solving, metacognition and sense making in mathematics. New York: Editorial Mac Millan.

[3] Devlin, K., *Introduction to mathematical thinking*. Recuperado de: www.mat.ufrgs.br/~portosil/curso-Devlin.pdf.

[4] Bono, E. (1980). *Método para aprender a pensar*. Folleto elaborado para la el Ministerio de Educación de la República de Venezuela.

[5] (S.A). (1978). *Teaching thinking*. Penguin Books published in Pelican Books.

[6] Allendoerfer, C. y Oakley, C. (1971). *Introducción moderna a la matemática superior*. Editorial Mc. Graw-Hill.

[7] Solis, D. y Torres, Y. (2014). *Lógica matemática*. Universidad Autónoma Metropolitana-México. Recuperado de: http://www.uamenlinea.uam.mx/materiales/ matematicas/ logica/

[8] Jaramillo, A. (2016). *Fundamentos de lógica y teoría de conjuntos*. Recuperado de: docencia.udea.edu.co/cen/logica/

[9] Monsalve, M. (2015). *Guía de matemáticas discretas I*. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias Escuela de Computación Lecturas en Ciencias de la Computación ISSN 1316-6239. Recuperado de: www.ciens.ucv.ve/mmonsalve/files/ND-2007-02-Actualizada. pdf

[10] Allendoerfer, C. y Oakley, C. (1963). *Principles of mathematics*. Second edition.Mc Graw-Hill.

[11] Schoenfeld, A. (1985). *Matematical problem solving*, Editorial Academic Press.

[12] Mason, J. y Stacey, B. (2010). *Mathematical thinking*. Second Edition, Editorial Pearson.

[13] Perelman, Y. (1962). *Física recreativa*. Editorial MIR. Recuperado de: www.librosmaravillosos.com/fisicarecreativa1/

[14] Nickerson, R. (2016)¿*Por qué enseñar a pensa*r? BBN Laboratories Inc. Recuperado de: https://cursos.aiu.edu/.../pdf/tema%201.pdf.

[15] Navarro, R. (2016). *La educación y el desarrollo de habilidades cognitivas*. Recuperado de: www.eumed.net› Revistas.

[16] Nickerson, R. (2010). *Mathematical reasoning, patterns, problems, conjectures, and proofs* Psychology. Press Taylor & Francis Croup New York London. Recuperado de: www.ocean-vista-seychelles.com/mathematical-reasoning-patterns.

[17] Martins, A. (2016). *Los estudiantes de América latina no resuelven problemas de la vida real*. Recuperado de: https://www.bbc.com/ mundo/noticias/2014/04/140401/

[18] Paul, R. (2016). *Estándares de competencia para el pensamiento crítico*. Recuperado de: www.ocean-vista-seychelles.com/mathematical-reasoning-patterns.

[19] Eccles, P. (2009). *An introduction to mathematical reasoning*.Editorial Cambridge University Press. Recuperado de: internet en: http://www.libgen.io/.

[20] Solow, D. (1993). *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. Editorial Limusa. Recuperado de:http://www.libgen.io/search.

[21] Amestoy Sanchez, M. (1992). *Desarrollo de habilidades del pensamiento:discernimiento, automatización e inteligencia práctica*. Editorial Trillas.

[22] Gallego, R. (2016). Las competencias de razonamiento lógico,matemático,de resolución de problemas,y de pensamiento crítico en estudiantes universitarios.Caso: Propuesta pedagógica,para estudiantes de la carrera de Ingeniería Electromecánica de la UFPS. Trabajo presentado a la Facultad de Ingenierías de la UFPS.

Este libro fue compuesto en caracteres Minion
a 11 puntos, impreso sobre papel Bond de 75
gramos y encuadernado con el método hot melt,
en octubre de 2019, en Bogotá, Colombia.

LÓGICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Incluye

- Desarrollo y aplicación de la lógica con el álgebra de Boole.
- Resolución de problemas de naturaleza físico-matemática.
- Tips y consejos para desarrollar y afianzar el pensamiento lógico.

El pensamiento crítico y la resolución de problemas son conocimientos indispensables para ser exitosos en la sociedad del siglo XXI; así lo identifica el Foro Económico Mundial para el aprendizaje e innovación de los estudiantes, en tal sentido este libro se propone desarrollar estas habilidades a través de los saberes de lógica y conjuntos, álgebra de Boole, resolución de problemas y aprender a pensar.

El libro se estructura en cuatro unidades, la primera: Lógica y conjuntos, estudia la lógica informal del sentido común, los conceptos básicos de la teoría de conjuntos y la lógica proposicional; la segunda: Álgebra de Boole, estudia sus aplicaciones a la teoría de circuitos y problemas de razonamiento; la tercera: Resolución de problemas, describe la naturaleza, clases y proceso de resolución de problemas; la cuarta: Aprender a pensar, describe las características de pensadores críticos que deben orientar el proceso de pensamiento y la aplicación del método CEP de E. de Bono a la solución de problemas cotidianos. Cada unidad contiene ejemplos, actividades teóricas y prácticas para que el estudiante interiorice los conceptos.

Dirigido a los estudiantes que inician una carrera de Ingeniería y a los profesores de educación secundaria en las áreas de Matemáticas y Física, interesados en mejorar las competencias de argumentación matemática, y de resolución de problemas de naturaleza físico-matemática de los alumnos.

Germán Enrique Gallego R.
Ingeniero Electricista de la U. Industrial de Santander, Magíster en Ingeniería Eléctrica del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (México). Interesado en el estudio de las competencias del pensamiento crítico y matemático requeridas en el área de ingeniería, máquinas eléctricas y electrónica de potencia. Autor de dos libros, actualmente profesor de la U. Francisco de Paula Santander, donde realizó una propuesta que fue implementada en el curso de Lógica y razonamiento de la carrera de Ingeniería electromecánica en 2013, este libro es el resultado de esa experiencia.

Jhon Jairo Ramírez M.
Filósofo e Ingeniero Electrónico de la U. Pontifica Bolivariana, sus áreas de interés se enfocan en los circuitos lógicos digitales. Actualmente profesor de planta de la U. Francisco de Paula Santander en Cúcuta.

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

ISBN 978-958-8489-86-5
9 789588 489865