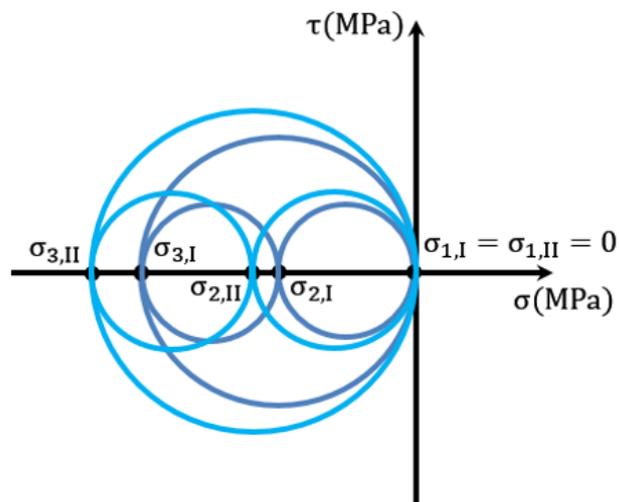
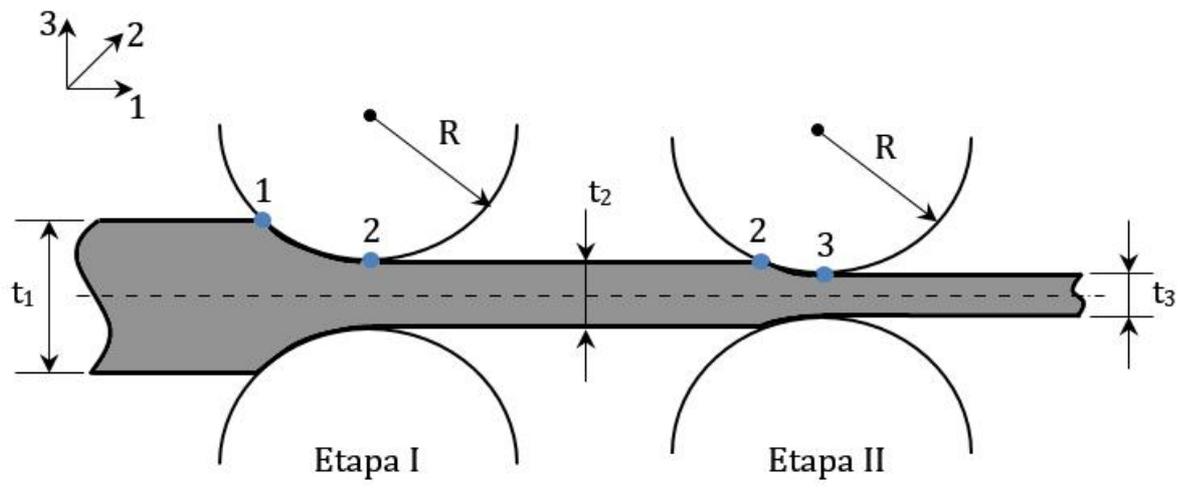




## Problemas Básicos de Procesos de Conformado por Deformación Plástica



Félix Faura Mateu

Juan Martínez Pastor

# **Problemas Básicos de Procesos de Conformado por Deformación Plástica**

**Félix Faura Mateu  
Juan Martínez Pastor**

**Universidad Politécnica de Cartagena  
Departamento de Ingeniería Mecánica,  
Materiales y Fabricación**

- 2020, Félix Faura Mateu  
Juan Martínez Pastor
- 2020, Universidad Politécnica de Cartagena.

CRAI Biblioteca  
Plaza del Hospital, 1  
30202 Cartagena  
968 325908  
ediciones@upct.es



Primera edición, 2020

ISBN:978-84-17853-13-6



Esta obra está bajo una licencia de Reconocimiento-NO comercial-SinObraDerivada (by-nc-nd): no se permite el uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas.[http://es.creativecommons.org/blog/wp-content/uploads/2013/04/by-nc-nd.eu\\_petit.png](http://es.creativecommons.org/blog/wp-content/uploads/2013/04/by-nc-nd.eu_petit.png)

## ÍNDICE

<b>Prólogo</b>	<b>3</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>5</b>
<b>SECCIÓN I. Procesos de conformación volumétrica</b>	
<b>Capítulo 1. Deformación plástica de metales</b>	
1.1 Planteamiento analítico	7
1.2 Problemas resueltos de propiedades mecánicas	17
1.3 Problemas propuestos de propiedades mecánicas	24
1.4 Problemas resueltos de criterios de fluencia	26
1.5 Problemas propuestos de criterios de fluencia	34
<b>Capítulo 2. Forja</b>	
2.1 Planteamiento analítico	37
2.2 Problemas resueltos	39
2.3 Problemas propuestos	49
<b>Capítulo 3. Laminación</b>	
3.1 Planteamiento analítico	53
3.2 Problemas resueltos	55
3.3 Problemas propuestos	64
<b>Capítulo 4. Trefilado</b>	
4.1 Planteamiento analítico	67
4.2 Problemas resueltos	69
4.3 Problemas propuestos	76

**Capítulo 5. Extrusión**

5.1	Planteamiento analítico	79
5.2	Problemas resueltos	81
5.3	Problemas propuestos	87

**SECCIÓN II. Procesos de conformación de chapa**

**Capítulo 6. Embutición**

6.1	Planteamiento analítico	89
6.2	Problemas resueltos	91
6.3	Problemas propuestos	99

**Capítulo 7. Doblado**

7.1	Planteamiento analítico	101
7.2	Problemas resueltos	104
7.3	Problemas propuestos	107

**Capítulo 8. Estirado**

8.1	Planteamiento	109
8.2	Problemas	110

<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>
---------------------	------------

<b>Anexo I. Propiedades mecánicas de algunas aleaciones metálicas comerciales</b>	<b>119</b>
---	------------

<b>Anexo II. Parámetros de las ecuaciones de comportamiento de algunas aleaciones comerciales</b>	<b>121</b>
---	------------

<b>Anexo III. Especificaciones de algunas máquinas comerciales para conformación plástica de metales</b>	<b>123</b>
--	------------

<b>Anexo IV. Fórmulas del diámetro inicial de chapa en procesos de embutición para diversas geometrías cilíndricas</b>	<b>125</b>
--	------------

## PRÓLOGO

La presente colección de *problemas básicos sobre procesos de conformado por deformación plástica* de metales tiene como objetivo principal complementar la formación académica de quienes cursen las asignaturas de *Fabricación* en los Grados de *Ingeniería Mecánica* e *Ingeniería en Tecnologías Industriales* de la ETSII de la UPCT.

Los fundamentos teóricos, así como la descripción de las características y capacidades de los procesos de conformado por deformación plástica que se imparten en las titulaciones anteriormente citadas, han sido tenidos en cuenta en la elaboración de los ejercicios que se presentan, procurando seguir el mismo orden expositivo y metodológico de las asignaturas de *Fabricación* de dichas titulaciones. No obstante, con objeto de intentar conseguir que la colección de problemas pueda ser de utilidad en sí misma y disponga, como recurso didáctico, de una cierta autonomía, se presenta de forma muy resumida en cada uno de los capítulos en los que se ha organizado el documento, una síntesis de los fundamentos teóricos imprescindibles para poder seguir fácilmente la resolución de la colección de problemas.

Los contenidos se han organizado inicialmente en dos secciones: procesos de conformado volumétrico y procesos de conformado de chapa, de acuerdo con la clasificación más habitual seguida en estos procesos y en las asignaturas indicadas anteriormente. La sección dedicada a los procesos volumétricos (o masivos) se ha organizado a su vez en cuatro capítulos dedicados a los procesos de forja, laminación, extrusión y estirado; así mismo la de conformado de chapa se ha organizado en tres: embutición, doblado y estirado. A todas ellas le precede un primer capítulo dedicado a realizar ejercicios básicos, de enfoque muy general, sobre la mecánica del proceso de deformación plástica de los metales, prestando especial atención a la determinación de los parámetros más influyentes en estos procesos, así como a los criterios de fluencia.

En todos los capítulos se resuelven detenidamente un conjunto de problemas de referencia cuyo objeto es intentar asegurar una correcta comprensión de los fundamentos de la mecánica del proceso que se trate. A esta primera relación de *problemas resueltos* le sigue una segunda colección de *problemas propuestos*, de la se aporta únicamente la solución final con objeto de que se realice el esfuerzo de resolución de los mismos por quien se los plantee al tiempo que sirva como autoevaluación de los conocimientos adquiridos.

El nivel de los problemas se corresponde con el de las asignaturas impartidas en los grados indicados anteriormente, de hecho, muchos de ellos han formado parte

de los exámenes realizados a lo largo de las diferentes convocatorias y cursos académicos. En cualquier caso, con objeto de intentar familiarizarse con las características de las máquinas y sistemas productivos convencionales, así como con el orden de magnitud de los principales parámetros de los materiales empleados industrialmente, se ha procurado que en los problemas se utilicen datos, propiedades, características, etc. pertenecientes al ámbito industrial real. Gran parte de los datos utilizados están disponibles en los diferentes Anexos que se adjuntan al final de la colección de problemas.

En nuestro deseo que este trabajo facilite el seguimiento de las asignaturas de *Fabricación* y en última instancia que contribuya a mejorar el rendimiento académico de quienes las estudian.

Félix Faura Mateu  
Juan Martínez Pastor  
Cartagena, marzo de 2020

## NOMENCLATURA

A	Área	m <sup>2</sup>	$\mu$	Coefficiente de fricción	-
A <sub>c</sub>	Área de corte (punzonado)	m <sup>2</sup>	n	Índice de endurecimiento por deformación	-
$\alpha$	Ángulo de doblado de chapa	-	$\hat{n}$	Vector unitario normal	-
b	Ancho de material a conformar	m	p	Presión	Pa
$\beta$	Coefficiente de embutición	-	P	Potencia	W
$\beta_{\max}$	Coefficiente de embutición máximo	-	r ó R	Radio	m
C	Constante de endurecimiento por deformación	Pa	S	Tensión de fluencia en deformación plana	Pa
d ó D	Diámetro	m	$\sigma$	Tensión normal	Pa
$\Delta$	Incremento de una variable	-	$\sigma_i$	Tensión en la inestabilidad	Pa
E	Módulo de Elasticidad	Pa	$\sigma_{\text{nom}}$	Tensión nominal	Pa
e	Deformación nominal	-	$\sigma_{\text{uts}}$	Resistencia última a la tracción	Pa
$\epsilon$	Deformación real o logarítmica	-	$\sigma_e$	Tensión equivalente	-
$\epsilon_i$	Deformación real en la inestabilidad	-	$\sigma_{el}$	Límite elástico	Pa
$\epsilon_e$	Deformación equivalente	-	$\sigma_{e,T}$	Tensión equivalente de Tresca	Pa
E	Módulo de Elasticidad	Pa	$\sigma_{e,VM}$	Tensión equivalente de von Mises	Pa
F	Fuerza	-	$\bar{\sigma}$	Vector tensión normal	Pa
F <sub>c</sub>	Fuerza de corte (punzonado)	N	$\bar{t}^n$	Vector tensión	Pa
I	Matriz identidad	-	$\hat{t}$	Vector unitario tangencial	-
k	Factor de corrección	-	$\tau$	Tensión cortante	Pa
k <sub>b</sub>	Coefficiente de longitud de doblado	-	$\tau_{\max}$	Tensión cortante máxima	Pa
k <sub>f</sub>	Coefficiente de fuerza de doblado	-	u	Abertura de la matriz de doblado	m
K	Tensión de fluencia en deformación a torsión	Pa	v	Velocidad	m/s
l ó L	Longitud	m	V	Volumen	m <sup>3</sup>
l <sub>0</sub>	Longitud inicial	m	$\omega$	Velocidad angular	s <sup>-1</sup>
l <sub>n</sub>	Longitud de doblado fibra neutra	m	W <sub>ext</sub>	Trabajo externo	J
l <sub>b</sub>	Longitud de doblado fibra exterior	m	W <sub>int</sub>	Trabajo interno	J
$\lambda$	Auto-valor de una matriz	-	Y	Tensión de fluencia en deformación uniaxial	Pa
M	Par mecánico	N·m	x, y, z	Coordenadas cartesianas	-



## CAPÍTULO 1. DEFORMACIÓN PLÁSTICA DE METALES

### 1.1. Principios de la deformación plástica

#### 1.1.1. Curva de tensión - deformación y propiedades mecánicas

En un ensayo mecánico de tracción (ISO 6892), donde el estado de tensiones es de tipo uniaxial (fig. 1.1), se pueden definir las magnitudes fundamentales de tensión y deformación generadas sobre una probeta normalizada de longitud  $l_0$  y sección  $A_0$ , que es deformada hasta alcanzar unas determinadas dimensiones  $l_f$  y  $A_f$ .

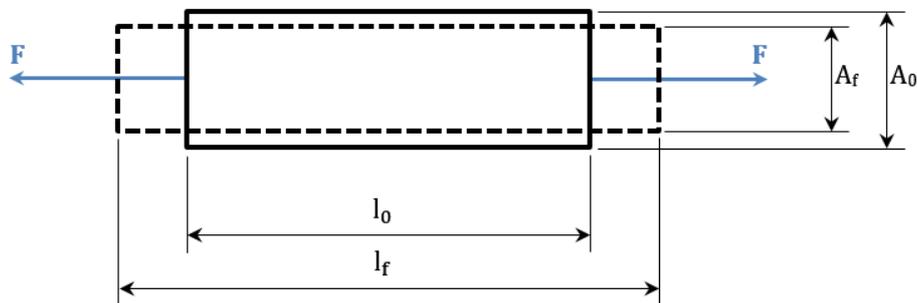


Figura 1.1. Representación esquemática de un ensayo de tracción simple uniaxial.

Puesto que en todos los PCDP se conserva el volumen, en la probeta, se debe cumplir:

$$V \equiv \text{cte} \Rightarrow A_0 \cdot l_0 = A_f \cdot l_f \Rightarrow A_f = A_0 \cdot \frac{l_0}{l_f}$$

En consecuencia las **tensiones y deformaciones** experimentadas por el material son:

Tensión nominal:	$\sigma_{\text{nom}} = F/A_0$	Deformación nominal:	$e = \Delta l/l_0$
Tensión real:	$\sigma = F/A_f$	Deformación real:	$\epsilon = \ln(l_f/l_0)$

Las relaciones entre ambas tensiones y deformaciones es:

$$\sigma = \sigma_{\text{nom}} \cdot (1 + e) ; \epsilon = \ln(1 + e) \text{ (hasta la estricción)}$$

Para un nivel de tensión dado, también se puede definir el parámetro denominado **reducción de área RA** (estricción), que indica la relación porcentual entre el área de la sección transversal inicial y final de la probeta:

$$RA(\%) = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \cdot 100$$

En este tipo de ensayos, se pueden obtener un conjunto de datos (fuerza aplicada y alargamiento producido) para diferentes instantes, los cuales transformados en datos de tensión y deformación, permiten generar las conocidas curvas de tensión – deformación.

Según si estos pares de datos de tensión – deformación son referidos a la sección transversal inicial  $A_0$  (tensiones y deformaciones nominales) o a la real  $A_f$  (tensión y deformación reales), se obtiene respectivamente la curva de tensión – deformación nominal o la curva de tensión – deformación real (fig. 1.2).

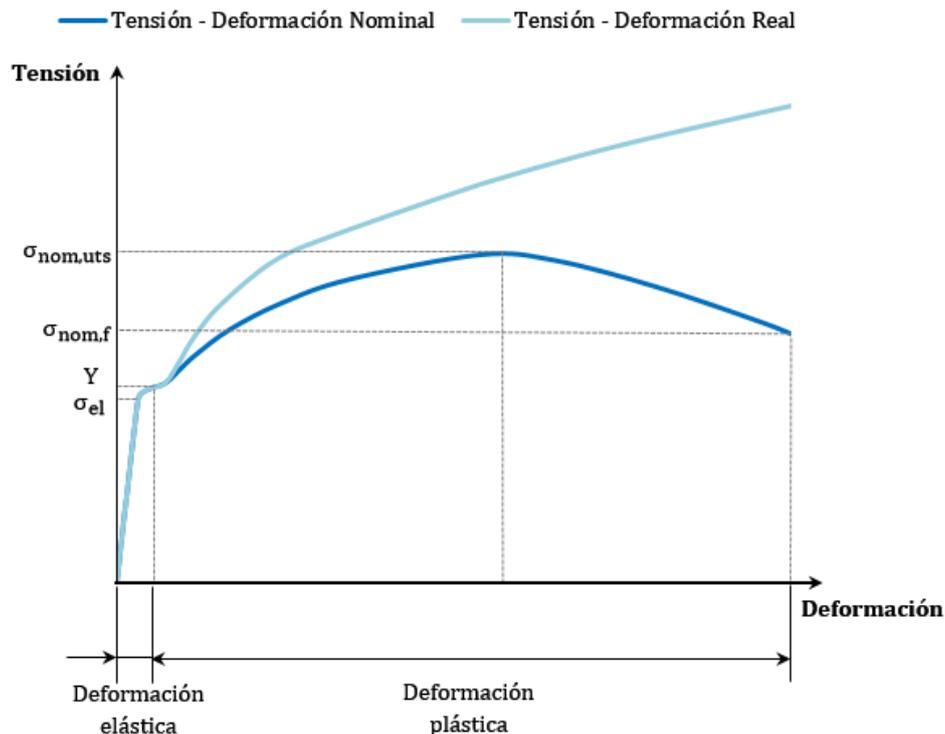


Figura 1.2. Curvas de tensión – deformación obtenidas en un ensayo de tracción uniaxial.

En estas curvas, en primer lugar, se puede apreciar la zona de comportamiento elástico, en la cual existe una relación lineal entre la tensión y la deformación. Para tensiones inferiores al **límite de elasticidad**  $\sigma_{el}$ , siendo la constante de proporcionalidad el llamado **módulo de elasticidad o módulo de Young E**. Por tanto, en esta región de comportamiento elástico puro y lineal, es aplicable la ley de Hooke:

$$\sigma = E \cdot e$$

El final de la región de elasticidad lineal se establece cuando se inicia comportamiento elasto-plástico del material, cuyo inicio viene definido por la denominada **tensión de fluencia Y**, esto es, aquel valor de tensión a partir del cual se producen deformaciones permanentes (deformación plástica).

Otro parámetro fundamental que se extrae de estas curvas es la **tensión última**  $\sigma_{nom,uts}$  **también conocida como resistencia máxima**, que corresponde a la tensión nominal máxima alcanzada durante el ensayo. Esta propiedad mecánica es importante en los procesos de conformación plástica, ya que delimita el comienzo de la estricción del material.

También, se puede destacar otro parámetro de la realización del ensayo de tracción, la **tensión de fractura**  $\sigma_{nom,f}$ , asociada al último punto de la curva de tensión – deformación nominal, donde se produce la rotura o fractura de la probeta.

Además de las propiedades mecánicas que se extraen de la curva tensión – deformación (Anexo I), se pueden definir una serie de conceptos físicos relacionados con el comportamiento o capacidad de los materiales, cuando son sometidos a un estado de carga como el analizado:

**Rigidez:** Capacidad para soportar tensión sin producir mucha deformación elástica ( $\uparrow E$ ).

**Elasticidad:** Capacidad para deformarse bajo tensión y recuperar la forma original ( $\uparrow Y$ ).

**Resistencia:** Capacidad de resistir antes de la fractura, sin considerar la deformación ( $\uparrow \sigma_f$ ).

**Ductilidad:** Capacidad para deformarse antes de la fractura, sin atender a la resistencia ( $\uparrow \epsilon$ ).

**Fragilidad:** Capacidad para fracturar sin llegar a deformarse plásticamente ( $\downarrow \epsilon$ ).

**Resiliencia:** Energía absorbida en la deformación elástica

**Tenacidad:** Energía absorbida hasta la fractura (resistencia + ductilidad).

**Acritud:** Endurecimiento producido por deformación en frío ( $\uparrow$ resistencia +  $\downarrow$ ductilidad).

**Maleabilidad:** Capacidad para deformarse plásticamente de forma laminar.

### 1.1.2. Vector tensión y tensor de tensiones

En la teoría clásica de la mecánica de los sólidos deformables, se considera que la aplicación de un sistema de fuerzas exteriores sobre un cuerpo sólido genera unas fuerzas por unidad de superficie a lo largo de su contorno que cumplen con la condición de equilibrio estático. Para ello se parte de las hipótesis siguientes: sistema isoterma, efectos inerciales despreciables, material isótropo y módulo de elasticidad constante.

Según este planteamiento, a la resultante de estas fuerzas por unidad de superficie sobre un determinado plano ' $\pi$ ' del sólido, se le denomina vector tensión, el cual se denota como  $\bar{t}^\pi$  (fig. 1.3). Por tanto  $\bar{t}^\pi = f(x, y, z, \hat{n})$ , siendo  $\hat{n}$  el vector unitario normal de dicho plano. En consecuencia, se tiene la siguiente notación del **vector tensión**:

$$\bar{t}^\pi = (t_x^\pi, t_y^\pi, t_z^\pi)$$

siendo  $t_x^\pi$ ,  $t_y^\pi$  y  $t_z^\pi$  las denominadas componentes globales del vector tensión.

La descomposición del vector tensión respecto del plano de actuación de la fuerza, en una componente normal a dicha superficie y otra contenida en la misma (fig. 1.3), da lugar a los **vectores de tensión normal**  $\bar{\sigma}$  y de **tensión tangencial o cortante**  $\bar{\tau}$ :

$$\sigma = \bar{t}^\pi \cdot \hat{n} \Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma \cdot \hat{n}$$

$$\tau = \bar{t}^\pi \cdot \hat{t} \Rightarrow \bar{\tau} = \bar{t}^\pi - \bar{\sigma}$$

donde  $\sigma$  y  $\tau$  representan respectivamente las magnitudes del vector de tensión normal y el vector de tensión cortante sobre el plano  $\pi$ .

Debido a que existen infinitos planos que pasan por el punto de aplicación de la fuerza externa, se recurre a una notación tensorial del vector tensión. Para un sistema de referencia de ejes ortogonales, este tensor viene definido por nueve variables; tres tensiones normales ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) que actúan sobre la normal a dichos planos y seis tensiones tangenciales ( $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ ) que actúan paralelamente a los dos ejes que definen cada uno de los planos del sistema de referencia (fig. 1.3).

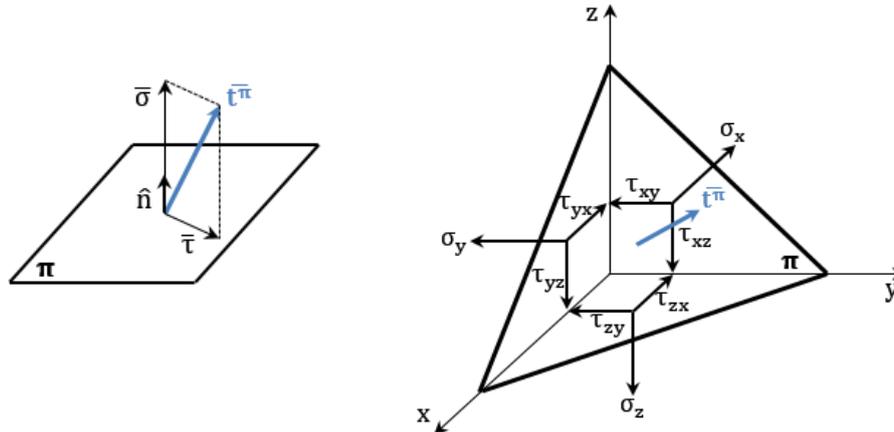


Figura 1.3. Representación de la descomposición del vector tensión sobre un plano arbitrario, para un sistema de referencia cartesiano dado.

El vector tensión puede ser obtenido sobre cualquier plano por medio del **tensor de tensiones**  $\bar{\sigma}$ :

$$\bar{t}^{\pi} = \bar{\sigma} \cdot \hat{n} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_x^{\pi} \\ t_y^{\pi} \\ t_z^{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Si se asume el equilibrio rotacional en el sólido (reciprocidad de las tensiones tangenciales), se cumple que:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , obteniéndose una matriz simétrica, conocida como **tensor de tensiones de Cauchy**:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Esta descripción del estado tensional depende obviamente del sistema de referencia escogido. Una simplificación de este sistema de tensiones se es el configurado por el sistema de referencia de los denominados **ejes principales (1, 2, 3)**. En este sistema de referencia los esfuerzos tangenciales son nulos en los planos principales asociados a dichos ejes (la dirección de  $\hat{n}$  y  $\bar{t}^{\pi}$  coinciden), además en los mismos se presentan las tensiones normales máxima y mínima de todas las posibles para el estado tensional descrito.

El tensor de tensiones puede ser definido por las tres **tensiones principales ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ )**, que corresponden a los auto-valores del tensor de tensiones de Cauchy (matriz simétrica y diagonalizable):

$$|\bar{\sigma} - \lambda \cdot I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda_i = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Se establece como convenio que en el tensor de tensiones en el sistema de ejes o direcciones principales:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

### 1.1.3. Círculos de Mohr

El estado tensional de un sólido también puede ser analizado gráficamente por medio de sus tensiones principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Para ello, tomando un sistema de ejes coordenados, donde las tensiones normales se representan en el eje de abscisas y las tensiones tangenciales y en el de ordenadas, es posible trazar tres círculos, con centro sobre el eje de abscisas y con diámetros  $\sigma_1 - \sigma_2$ ,  $\sigma_1 - \sigma_3$  y  $\sigma_2 - \sigma_3$ , los cuales se conocen como **círculos de Mohr** (fig. 1.4).

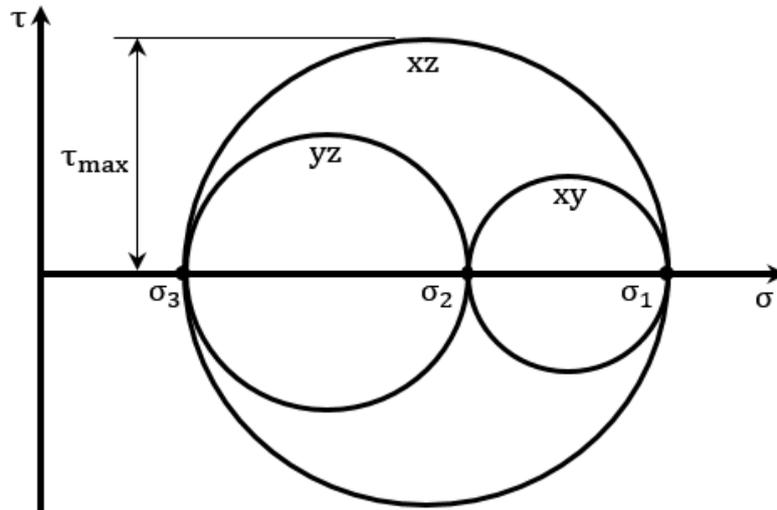


Figura 1.4. Representación gráfica estados tensionales mediante los círculos de Mohr.

Este método gráfico permite determinar los estados tensionales que puedan producirse en cualquier plano distinto de los principales. De esto modo, si se considera un sistema bidimensional de tensiones en el plano xy, para un plano que forma un ángulo  $\theta$ , medido sentido anti-horario, respecto de los ejes x e y, las tensiones normal y tangencial resultantes sobre el plano en dicho sistema se pueden deducir gráficamente a partir del respectivo círculo de Mohr (fig. 1.5).

Partiendo de este método gráfico, usando el círculo de Mohr resultante del estado tensional en el plano xy (fig. 1.5), resulta inmediato deducir geoméricamente la relación entre las tensiones de dicho plano y las generadas en el sistema que forma el ángulo  $\theta$ :

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2\theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2\theta)$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\theta)$$

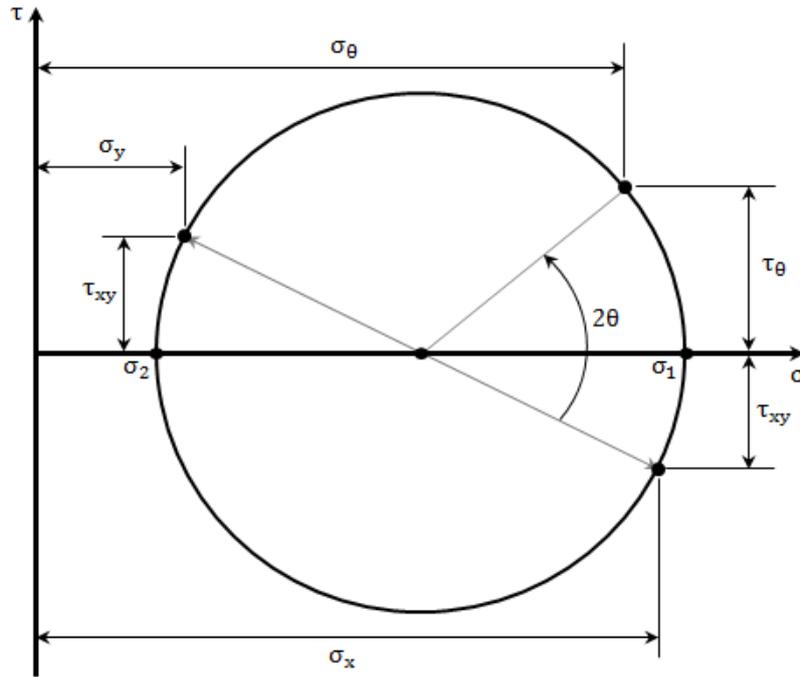


Figura 1.5. Método gráfico, con base en el círculo de Mohr, que permite hallar el estado tensional en un plano que forma un ángulo  $\theta$  con el plano  $xy$ .

Por otra parte, partiendo de este círculo de Mohr, correspondiente a este estado bidimensional de tensiones (fig. 1.5), también es posible expresar las tensiones principales ( $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ ) y la tensión cortante máxima ( $\tau_{\max}$ ) en función de las citadas tensiones en el plano  $xy$  ( $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ ):

$$\sigma_{1(2)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad ; \quad \sigma_{2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{1(2)} - \sigma_{2(3)}}{2}$$

En los estados tensionales bidimensionales, cuando las tensiones calculadas son ambas positivas, las tensiones principales son  $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$ , pero si estas son de distinto signo, las tensiones principales serán entonces  $(\sigma_1, 0, \sigma_3)$ . En el caso de que ambas tensiones sean negativas, las tensiones principales serán  $(0, \sigma_2, \sigma_3)$ .

A continuación, se representan gráficamente los círculos de Mohr asociados a los estados tensionales de tres ensayos mecánicos habitualmente utilizados en procesos de conformación por deformación plástica (fig. 1.6); tracción, torsión y compresión (el convenio de signos establece signo positivo para tensiones a tracción y negativo para tensiones a compresión).

En el caso de la deformación a torsión, se puede demostrar que  $\epsilon_2 = 0$  ( $\epsilon_1 = -\epsilon_3$ ) y además  $\sigma_2 = 0$ , siendo  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ , de lo que se deduce que  $\sigma_1 = -\sigma_3$ .

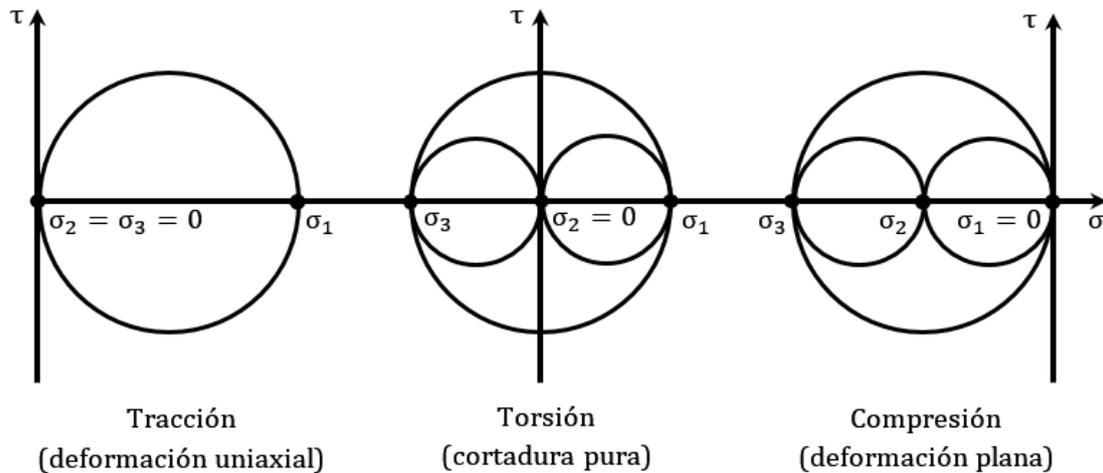


Figura 1.6. Representación de los círculos de Mohr correspondiente a los estados tensionales de tracción, torsión y compresión respectivamente.

#### 1.1.4. Tensión y deformación equivalente

En los procesos reales de conformación por deformación plástica, el estado tensional desarrollado en el seno del material suele ser tridimensional, por lo que resulta necesario establecer criterios que tengan en consideración estos estados tensionales más complejos, de modo que se pueda contrastar dicho estado respecto de las propiedades mecánicas del material (tensión de fluencia, tensión última y tensión de fractura), definidas bajo un estado tensional uniaxial normalizado (ensayo de tracción).

Para establecer esta relación entre propiedades mecánicas de los materiales y las tensiones que surgen en los estados de tensión complejos, es necesario establecer previamente las hipótesis siguientes: medio continuo, material homogéneo e isótropo, misma tensión de fluencia a tracción y a compresión, y despreciar la contribución de la presión hidrostática sobre el inicio de la fluencia.

En estas condiciones, para cualquier estado tensional complejo, es posible definir una **tensión equivalente**  $\sigma_e$ , que puede ser comparada con respecto a una de las propiedades mecánicas del material, obtenidas del ensayo de tracción, la tensión de fluencia.

Partiendo de estas premisas, se establecen como **criterios de fluencia** (comparación entre la tensión equivalente y la tensión de fluencia) más habitualmente empleados, los introducidos por **Tresca y von Mises**:

$$\text{Criterio de Tresca: } \sigma_{e,T} = \sigma_1 - \sigma_3 \geq Y$$

$$\text{Criterio de Von Mises: } \sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \geq Y$$

Resulta conveniente tener en cuenta el tipo de ensayo mecánico empleado para la determinación de la tensión de fluencia, es decir, si ésta ha sido determinada bajo un sistema de tensión uniaxial o biaxial.

La notación y las relaciones entre la **tensión de fluencia** obtenida en deformación uniaxial (tracción) y las establecidas mediante ensayos de deformación plana (compresión; Ensayo Ford) y de cortadura pura (torsión), son las siguientes:

Tensión de fluencia a tracción (**Y**):  $Y$

Tensión de fluencia a compresión (**S**):  $Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S \quad (\epsilon_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \epsilon)$

Tensión de fluencia a torsión (**K**):  $Y = \sqrt{3} \cdot K$

Al igual que sucede con la tensión, también se puede definir una **deformación equivalente o volumétrica**  $\epsilon_e$ , en función de las deformaciones en los ejes principales, mediante la siguiente ecuación:

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)}$$

Puesto que en los procesos de deformación plástica de metales existe conservación de la masa, y se consideran despreciables o nulos los efectos de la compresibilidad, esto es, se **conserva el volumen**, se puede establecer la siguiente relación entre de las deformaciones principales:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$$

Se pueden establecer diversos modelos, expresados en términos de tensión y deformación equivalente, que permiten analizar de forma sencilla la deformación plástica de los metales.

Dado que los metales que experimentan generalmente un **endurecimiento por deformación** (cuanto mayor es la deformación, mayor es el esfuerzo requerido), se puede establecer diferentes modelos de comportamiento que introduce un coeficiente de endurecimiento por deformación **n** (Anexo II). Los modelos analíticos más utilizados habitualmente son los siguientes:

**Modelo general** de endurecimiento por deformación y tensión de fluencia significativa:

$$\sigma_e = Y + C \cdot \epsilon_e^n$$

**Modelo potencial** de endurecimiento por deformación y elasticidad despreciable ( $Y=0$ ):

$$\sigma_e = C \cdot \epsilon_e^n$$

**Modelo perfectamente plástico** sin endurecimiento por deformación ( $n=0$ ):

$$\sigma_e = Y$$

Como se ha comentado anteriormente, los materiales se deforman homogéneamente hasta un cierto límite, el inicio de la estricción a partir de la cual se produce un adelgazamiento de la sección transversal y un estado de tensiones tridimensional que conduce a la fractura del material.

Dicho límite se sitúa en el máximo de la curva de tensión – deformación nominal, y puede determinarse en términos tensión – deformación real en un punto de la curva que cumpla:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \sigma$$

Si se aplica esta condición a material con un modelo de comportamiento de endurecimiento por deformación, se comprueba que la **inestabilidad** se produce cuando la deformación equivalente cumple la siguiente condición:

$$\epsilon_i = n$$

Existen dos variables que influyen en la obtención de la curva de tensión – deformación y, por consiguiente, sobre la expresión analítica de la misma; la **velocidad de deformación y la temperatura**. La primera hace referencia a la velocidad  $v$  con la que se aplica la fuerza externa  $F$  (potencia aplicada en la deformación plástica). Para ello, se definen la velocidad de deformación nominal  $\dot{\epsilon}$  y real  $\dot{\epsilon}_i$  de la siguiente manera:

$$\dot{\epsilon} = v/l_0 ; \dot{\epsilon}_i = v/l$$

La temperatura  $T$  también ejerce una influencia significativa en curva de tensión – deformación obtenida, debido a que tanto el valor del coeficiente  $C$  como el coeficiente de endurecimiento por deformación  $n$  dependen de ésta.

Por tanto, cuando los metales son sometidos a procesos de conformación en caliente, su modelo de comportamiento queda expresado en función de la velocidad de deformación y la temperatura de la forma:

$$\sigma = C(T) \cdot \dot{\epsilon}_i^{n(T)}$$

### 1.1.5. Potencia y trabajo de la deformación plástica

Como en cualquier otro proceso, deformar plásticamente un metal requiere de la aplicación de cierta cantidad de trabajo, hasta conferir al mismo la forma final deseada.

Desde el punto de vista de la máquina que realiza la conformación, este trabajo es externo al sistema (pieza o preforma), y por tanto adopta la expresión característica y común a cualquier tipo de **trabajo mecánico**  $W_{ext}$ , que a su vez permite determinar otras variables mecánicas de la máquina, como la fuerza a aplicar  $F$ , la potencia consumida  $P$  o el par requerido  $M$  durante el proceso de conformación por deformación plástica:

$$W_{ext} = F \cdot L ; P = F \cdot v = M \cdot \omega ; M = F \cdot \frac{L}{2}$$

siendo  $L$  la distancia recorrida por los elementos móviles de la máquina que aplican la fuerza de conformación,  $v$  la velocidad de conformación y  $\omega$  la velocidad de giro cuando se requiere rotación para efectuar la operación.

Sin embargo, no todo este trabajo aplicado externamente por la máquina se emplea en deformar plásticamente el material. Parte de éste trabajo se pierde en forma de **trabajo redundante  $W^*$**  (relacionado con la distorsión experimentada por el material) y **trabajo de fricción  $W_f$** .

Por tanto, de todo el trabajo externo aplicado por la máquina, solo una parte empleará para la deformación plástica requerida. A dicho trabajo se le denomina **trabajo de deformación homogénea  $W_{int}$** , y cumple con el siguiente balance energético:

$$W_{ext} = W_{int} + W_f + W^*$$

donde el trabajo ideal, interno o trabajo de deformación homogénea  $W_{int}$  puede ser calculado por medio de la siguiente expresión:

$$W_{int} = V \cdot \int_{\epsilon_{e,1}}^{\epsilon_{e,2}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e$$

## 1.2. Problemas resueltos sobre propiedades mecánicas

### PROBLEMA 1

Se realiza un ensayo de tracción sobre una probeta de aluminio, de 8 mm de diámetro y 38 mm de longitud, cuyos resultados se muestran en la tabla adjunta. Determinar:

- Deformaciones nominales reales y tensiones nominales en cada punto del ensayo.
- Límite elástico.
- Módulo de Young.
- Resistencia última.
- Resistencia a la fractura.
- Reducción de área generada en la probeta.
- Parámetros de la ley de comportamiento del material, suponiendo un modelo potencial.
- Trabajo de deformación homogénea empleado en el ensayo de tracción.

Fuerza (kN)	Tensión (MPa)	Posición (mm)
0.0403	0.8016	0.0198
0.0705	1.4028	0.0236
0.1107	2.2045	0.0293
0.2314	4.6094	0.0399
0.3923	7.8159	0.0504
0.5532	11.0224	0.0608
0.8143	16.2330	0.0754
1.1053	22.0448	0.0965
1.5463	30.8627	0.1234
2.0367	40.6826	0.1531
2.5665	51.3042	0.1818
3.1350	62.7274	0.2180
3.7431	74.9522	0.2479
4.4292	88.7802	0.2863
5.1443	103.2096	0.3221
6.7087	134.8738	0.4012
7.7546	156.1170	0.4544
8.8079	177.5605	0.5060
9.8299	198.4028	0.5523
10.8486	219.2451	0.6019
12.0019	242.8931	0.6563
13.0802	265.1384	0.7180
14.1621	287.5838	0.7874
15.2167	310.0295	0.9167
16.1802	332.2747	1.2253
16.6006	343.2970	1.5003
17.0261	355.3214	1.8622
17.3332	365.7426	2.3043
17.6188	375.9634	2.7589
17.8419	385.5829	3.2790
17.9792	393.1985	3.7730
18.0157	399.2105	4.3258
18.0241	405.2228	4.9432
17.9568	408.8301	5.4877
17.8305	410.6337	5.9890

a) La lectura que se facilita en este ensayo de tracción corresponde a la posición del extremo de la probeta, que equivale al alargamiento producido, es decir, que proporciona el dato de la magnitud  $\Delta l = l_f - l_0$ .

Por tanto, a partir del alargamiento y la longitud inicial de la probeta, es posible determinar tanto la deformación real ( $\epsilon$ ) como la nominal ( $e$ ), así como la tensión nominal ( $\sigma_{nom}$ ), según las siguientes expresiones:

$$\epsilon = \ln(l_f/l_0); e = \Delta l/l_0; \sigma_{nom} = \sigma \cdot l_0/l_f$$

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Fuerza (kN)	Tensión real (MPa)	Alargamiento (mm)	Deformación real	Deformación nominal	Tensión nominal (MPa)
0.0403	0.8016	0.0198	0.00052	0.00023	0.8012
0.0705	1.4028	0.0236	0.00062	0.00027	1.4020
0.1107	2.2045	0.0293	0.00077	0.00033	2.2028
0.2314	4.6094	0.0399	0.00105	0.00046	4.6045
0.3923	7.8159	0.0504	0.00133	0.00058	7.8055
0.5532	11.0224	0.0608	0.00160	0.00069	11.0048
0.8143	16.2330	0.0754	0.00198	0.00086	16.2008
1.1053	22.0448	0.0965	0.00254	0.00110	21.9889
1.5463	30.8627	0.1234	0.00325	0.00141	30.7627
2.0367	40.6826	0.1531	0.00403	0.00175	40.5194
2.5665	51.3042	0.1818	0.00478	0.00207	51.0599
3.1350	62.7274	0.2180	0.00574	0.00248	62.3695
3.7431	74.9522	0.2479	0.00652	0.00282	74.4663
4.4292	88.7802	0.2863	0.00754	0.00326	88.1163
5.1443	103.2096	0.3221	0.00848	0.00367	102.3421
6.7087	134.8738	0.4012	0.01056	0.00456	133.4646
7.7546	156.1170	0.4544	0.01196	0.00516	154.2723
8.8079	177.5605	0.5060	0.01332	0.00574	175.2272
9.8299	198.4028	0.5523	0.01453	0.00627	195.5604
10.8486	219.2451	0.6019	0.01584	0.00683	215.8265
12.0019	242.8931	0.6563	0.01727	0.00744	238.7696
13.0802	265.1384	0.7180	0.01889	0.00813	260.2216
14.1621	287.5838	0.7874	0.02072	0.00891	281.7457
15.2167	310.0295	0.9167	0.02412	0.01035	302.7267
16.1802	332.2747	1.2253	0.03225	0.01378	321.8950
16.6006	343.2970	1.5003	0.03948	0.01682	330.2579
17.0261	355.3214	1.8622	0.04900	0.02078	338.7226
17.3332	365.7426	2.3043	0.06064	0.02557	344.8321
17.6188	375.9634	2.7589	0.07260	0.03044	350.5151
17.8419	385.5829	3.2790	0.08629	0.03595	354.9542
17.9792	393.1985	3.7730	0.09929	0.04111	357.6842
18.0157	399.2105	4.3258	0.11384	0.04682	358.4105
18.0241	405.2228	4.9432	0.13008	0.05311	358.5775
17.9568	408.8301	5.4877	0.14441	0.05858	357.2400
17.8305	410.6337	5.9890	0.15760	0.06356	354.7272

b) El límite elástico puede ser identificado, en los resultados de un ensayo de tracción, como aquél valor de tensión que produce un determinado valor estandarizado de deformación permanente, que suele estar entre el 0.001 y el 0.03% en términos de alargamiento.

Tomando el límite superior de deformación permanente, es decir, para un alargamiento porcentual del 0.03%, el máximo alargamiento elástico sería en este caso:

$$\Delta l_{el,max} (\%) = 0.03(\%) \cdot l_0 \Rightarrow \Delta l_{el,max} = 1.14 \text{ mm}$$

De entre los valores de tensión nominal hallados, se puede tomar como límite de elasticidad aquél que proporciona el valor más cercano al máximo alargamiento elástico considerado:

$$\sigma_{nom,el} \approx \mathbf{303 \text{ MPa}} \quad (\Delta l_e = 0.9167 \text{ mm})$$

$$\sigma_{nom,el} = 302,7267 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{el} \approx \mathbf{310 \text{ MPa}}$$

c) La constante de proporcionalidad entre la tensión y la deformación, módulo de elasticidad o módulo de Young (E), se puede obtener a partir de la ley de Hooke, de modo que:

$$E = \frac{\sigma_{nom,el}}{e_{nom,el}} = \frac{303 \cdot 10^6}{0.01035} \Rightarrow \mathbf{E = 29.3 \text{ GPa}}$$

d) La resistencia última del material, definida por el valor máximo de tensión alcanzado en la curva de tensión nominal – deformación nominal, según los valores de la tabla es:

$$\sigma_{nom,max} \equiv \sigma_{nom,uts} \approx \mathbf{359 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{nom,uts} = 358.5775 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{uts} \approx \mathbf{405 \text{ MPa}}$$

e) La resistencia a la fractura definida como el valor de tensión correspondiente al último punto de la curva de tensión nominal – deformación nominal, donde se produce la rotura de la probeta, para este ensayo es:

$$\sigma_{nom,f} \approx \mathbf{355 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{nom,f} = 354.7272 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_f \approx \mathbf{411 \text{ MPa}}$$

f) La reducción de área (RA), teniendo en cuenta que ha de cumplirse la conservación del volumen:

$$V \equiv \text{cte} \Rightarrow A_0 \cdot l_0 = A_f \cdot l_f \Rightarrow A_f = A_0 \cdot \frac{l_0}{l_f}$$

$$RA(\%) = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \cdot 100 = \frac{A_0 - A_0 \cdot \frac{l_0}{l_f}}{A_0} \cdot 100 = \frac{l_f - l_0}{l_f} \cdot 100 = \left( \frac{38 + 5.989 - 38}{38 + 5.989} \right) \cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{RA = 13.6 \%}$$

g) Una ley de comportamiento potencial, expresada en un sistema logarítmico, queda representada mediante una recta, y por tanto se puede realizar una interpolación lineal para conocer la pendiente de dicha recta, que en este caso equivale al coeficiente de endurecimiento por deformación:

$$\sigma = C \cdot \epsilon^n \Rightarrow \ln \sigma = \ln C + n \cdot \ln \epsilon$$

Tomando como puntos de interpolación la tensión inmediatamente superior al valor de límite elástico (primer valor de tensión correspondiente al régimen plástico) y el valor de resistencia última:

$$n = \frac{\ln \sigma_2 - \ln \sigma_1}{\ln \epsilon_2 - \ln \epsilon_1} \equiv \frac{\ln \sigma_{\text{uts}} - \ln \sigma_{e+1}}{\ln \epsilon_{\text{uts}} - \ln \epsilon_{e+1}} = \frac{\ln(405 \cdot 10^6) - \ln(332 \cdot 10^6)}{\ln(0.13008) - \ln(0.03225)} \Rightarrow \mathbf{n = 0.143}$$

Finalmente, tomando un punto cualquiera 'P' de la zona de deformación plástica, es posible hallar el coeficiente de endurecimiento por deformación a partir de la ley potencial:

$$\sigma_p = C \cdot \epsilon_p^n \Rightarrow 375.9634 = C \cdot 0.0726^{0.143} \Rightarrow \mathbf{C = 547 \text{ MPa}}$$

h) Una vez conocidos los parámetros de la ley constitutiva de un metal, es posible determinar el trabajo de deformación homogénea desarrollado para una deformación efectiva o equivalente dada, que en el caso de un estado tensional uniaxial (ensayo de tracción) coincide con la deformación producida en la dirección de aplicación de la fuerza, es decir,  $\epsilon_e = \epsilon$ :

$$W = V \cdot \int_{\epsilon_{e,1}}^{\epsilon_{e,2}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \frac{\pi}{4} \cdot D_0^2 \cdot l_0 \cdot \int_0^{\epsilon(\sigma_f)} C \cdot \epsilon^n \cdot d\epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{\pi}{4} \cdot (8 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 38 \cdot 10^{-3} \cdot \int_0^{0.1576} 547 \cdot 10^6 \cdot \epsilon^{0.143} \cdot d\epsilon \Rightarrow \mathbf{W = 110.6 \text{ J}}$$

**PROBLEMA 2**

Se realiza un ensayo de tracción sobre una probeta de 20 mm diámetro y 60 mm de longitud, en el cual se obtiene un valor inicial de la carga al comienzo de la deformación plástica de 5.5 kN, cuando la deformación elástica de 2 mm. Finalmente, se obtuvo una carga máxima de 8.3 kN en dicho ensayo cuando la probeta alcanzó 77 mm de longitud. Determinar:

- a) Límite elástico del material.
- b) Módulo de Young del material.
- c) Resistencia última.
- d) Deformación nominal y real a carga máxima.
- e) Valor de estricción alcanzado a carga máxima.

a)

$$\sigma_{\text{nom,el}} = F_{\text{el}}/A_0 = \frac{5.5 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{4} \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \sigma_{\text{nom,el}} = \mathbf{17.51 \text{ MPa}}$$

b)

$$E = \frac{\sigma_{\text{nom,el}}}{e_{\text{el}}} = \frac{F_{\text{e}}/A_0}{\Delta l_{\text{el}}/l_0} = \frac{17.51}{2/60} \Rightarrow E = \mathbf{525.3 \text{ MPa}}$$

c)

$$\sigma_{\text{nom,uts}} = F_{\text{max}}/A_0 = \frac{8.3 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{4} \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \sigma_{\text{nom,uts}} = \mathbf{26.42 \text{ MPa}}$$

d)

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{77 - 60}{60} \Rightarrow e = \mathbf{0.44}$$

$$\epsilon = \ln\left(\frac{77}{60}\right) \Rightarrow \epsilon = \mathbf{0.25}$$

e)

$$\text{RA}(\%) = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \cdot 100 = \frac{l_f - l_0}{l_f} \cdot 100 = \frac{77 - 60}{77} \cdot 100 \Rightarrow \text{RA}(\%) = \mathbf{22.08 \%}$$

**PROBLEMA 3**

Una probeta de sección transversal rectangular, con 20 mm de ancho y 2 mm de espesor y 80 mm de largo, se somete a un ensayo de tracción en el que se observa que: la fuerza que inicia el proceso de fluencia del material es de 5 kN, la fuerza máxima es de 9 kN cuando la probeta presenta un alargamiento de 18 mm, y que la rotura se genera con un alargamiento de 27 mm. Además, también se registró un cierto punto del ensayo 'P', para una longitud de probeta de 90 mm, el cual se produjo con 7 kN de fuerza. Calcular:

- a) Tensión de fluencia y resistencia última a tracción.
- c) Tensión real con carga máxima.
- d) Deformación real máxima.
- e) Modelización del comportamiento del material según una ley potencial.

a)

$$A_0 = 20 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2; Y = \frac{F_Y}{A_0} = \frac{5 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow Y = \mathbf{125 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{\text{nom,uts}} = F_{\text{max}}/A_0 = \frac{9 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow \sigma_{\text{nom,uts}} = \mathbf{225 \text{ MPa}}$$

b)

$$V = l_0 \cdot a_0 \cdot b_0 = l \cdot a \cdot b \Rightarrow \frac{A_0}{A} = \frac{a_0 \cdot b_0}{a \cdot b} = \frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0}$$

$$\sigma_{\text{uts}} = \sigma_{\text{nom,uts}} \cdot \frac{A_0}{A_{\text{uts}}} = 225 \cdot \frac{80 + 18}{80} \Rightarrow \sigma_{\text{uts}} = \mathbf{275.625 \text{ MPa}}$$

c)

$$\epsilon_{\text{max}} \equiv \epsilon_f = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) = \ln\left(\frac{80 + 27}{80}\right) \Rightarrow \epsilon_{\text{max}} = \mathbf{0.29}$$

d) Una ley de comportamiento potencial, expresada en un sistema logarítmico, queda representada mediante una recta, y por tanto se puede realizar una interpolación lineal:

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_p} = \frac{F_p}{A_0} \cdot \frac{l_p}{l_0} = \frac{7 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{90}{80} \Rightarrow \sigma_p = 196.875 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_p = \ln\left(\frac{A_0}{A_p}\right) = \ln\left(\frac{90}{80}\right) \Rightarrow \epsilon_p = 0.118; \epsilon_{\text{uts}} = \ln\left(\frac{98}{80}\right) = 0.203$$

$$n = \frac{\ln \sigma_2 - \ln \sigma_1}{\ln \epsilon_2 - \ln \epsilon_1} \Rightarrow n = \frac{\ln \sigma_{\text{uts}} - \ln \sigma_p}{\ln \epsilon_{\text{uts}} - \ln \epsilon_p} = \frac{\ln(275.625) - \ln(196.875)}{\ln(0.203) - \ln(0.118)} \Rightarrow n = 0.62$$

$$\sigma = C \cdot \epsilon^n \Rightarrow 196.875 = C \cdot 0.203^{0.62} \Rightarrow C = 529.11 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \mathbf{529.11 \cdot \epsilon^{0.62}}$$

**PROBLEMA 24**

Se desea realizar el conformado de una pieza rectangular de sección cuadrada, de medidas 12 mm x 12 mm x 64 mm, hasta conseguir una longitud final de 75 mm. Para ello se aplica una carga uniaxial de tracción que deforma la pieza hasta una longitud de 80 mm, seguida de una compresión axial hasta obtener una longitud de 75 mm. Suponiendo que no hay fricción y que el material es un aluminio ASTM 2017, determinar:

- Trabajo necesario para obtener la longitud de 75 mm, si la deformación se produjera en una sola etapa (0).
- Trabajo realizado si se consideran las dos etapas de conformación (I y II).
- Trabajo redundante que se aplica con las etapas I y II respecto al trabajo de la etapa 0.
- Tensión última del material.
- Trabajo realizado hasta alcanzar en el punto de inestabilidad.

Las deformaciones logarítmicas de cada posible etapa serían las siguientes:

$$\epsilon_0 = \ln(l_f/l_0) = \ln(75/64) = 0.159$$

$$\epsilon_I = \ln(l_f/l_0) = \ln(80/64) = 0.223 ; \epsilon_{II} = \ln(l_f/l_0) = \ln(75/80) = -0.065$$

- Tomando del Anexo II los valores de C y n para el aluminio ASTM 2017, se tiene:

$$W_0 = V \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma \cdot d\epsilon = 12 \cdot 12 \cdot 64 \cdot 10^{-9} \cdot \int_0^{0.159} 311 \cdot 10^6 \cdot \epsilon^{0.18} \cdot d\epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_0 = 9.216 \cdot 311 \cdot \frac{0.159^{1.18}}{1.18} \Rightarrow \mathbf{W_0 = 277.4 J}$$

- 

$$W_I = 9.216 \cdot 311 \cdot \frac{0.223^{1.18}}{1.18} \Rightarrow W_I = 413.45 J ; W_{II} = 9.216 \cdot 311 \cdot \frac{0.065^{1.18}}{1.18} \Rightarrow W_{II} = 96.53 J$$

$$\mathbf{W_I + W_{II} = 510 J}$$

- 

$$\Delta W = (W_I + W_{II}) - W_0 \Rightarrow \mathbf{\Delta W = 232.6 J}$$

- La condición de inestabilidad en un proceso de deformación plástica es:

$$\sigma_i \leftrightarrow \epsilon_i = n = 0.18 ; \sigma_i = 311 \cdot 0.18^{0.18} = 228.4 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_i = \ln(l_i/l_0) = \ln(A_0/A_i) = 0.18 \Rightarrow A_i = A_0/e^{0.18}$$

$$\sigma_{\text{nom, uts}} = \frac{F_i}{A_0} = \frac{F_i}{A_0} \cdot \frac{A_i}{A_i} = \sigma_i \cdot \frac{A_i}{A_0} = \frac{228.4}{e^{0.18}} \Rightarrow \mathbf{\sigma_{\text{nom, uts}} = 190.8 \text{ MPa}}$$

- 

$$W_I = V \int_0^{\epsilon_i} \sigma \cdot d\epsilon = 12 \cdot 12 \cdot 64 \cdot 10^{-9} \cdot \int_0^{0.18} 311 \cdot 10^6 \cdot \epsilon^{0.18} \cdot d\epsilon \Rightarrow \mathbf{W_I = 321.1 J}$$

1.3. Problemas propuestos sobre propiedades mecánicas

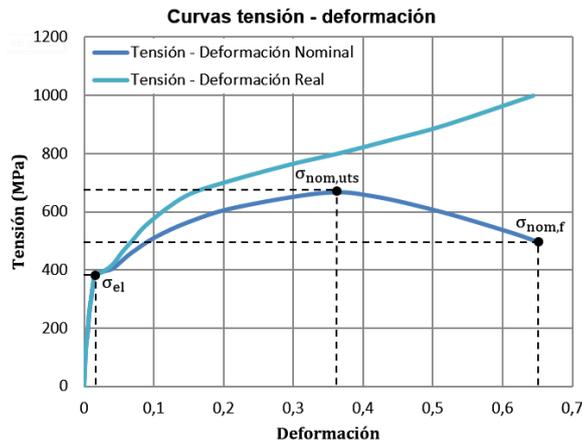
**PROBLEMA 5**

Sobre un determinado acero se realiza un ensayo de tracción, cuyos resultados se muestran en la tabla adjunta. Determinar:

- a) Límite elástico.
- b) Tensión de fluencia.
- c) Tensión última nominal y real.
- d) Tensión a la fractura nominal y real.
- e) Representar gráficamente la curva de tensión – deformación nominal y la curva de tensión – deformación real, e identificar en ellas las tensiones nominales halladas.

Carga (kN)	e	$\sigma_{nom}$ (MPa)	$\epsilon$	$\sigma$ (MPa)
8,09	0,00247	124,42	0,00247	124,42
16,18	0,00533	186,07	0,00533	186,07
24,27	0,00727	249,17	0,00727	249,17
32,36	0,01067	310,66	0,01067	310,66
40,45	0,01450	372,14	0,01450	372,14
48,54	0,01833	385,08	0,01833	385,08
51,78	0,02798	394,79	0,02798	394,79
55,01	0,04092	404,50	0,04092	417,50
58,25	0,05613	435,24	0,05435	459,19
63,10	0,06940	461,13	0,06810	496,73
69,57	0,10241	512,91	0,09302	561,45
76,05	0,15159	566,30	0,14528	652,05
80,90	0,21728	614,84	0,20434	701,45
84,14	0,34349	665,00	0,29731	762,06
88,99	0,41468	653,67	0,36938	801,56
79,28	0,51176	600,28	0,44542	848,87
74,43	0,61208	529,09	0,51985	897,70
66,34	0,65091	496,73	0,64444	997,56

- a)  $\sigma_{nom,el} = \sigma_{el} = 394.79$  MPa
- b)  $Y = 404.5$  MPa
- c)  $\sigma_{nom,uts} = 665$  MPa ;  $\sigma_{uts} = 762.06$  MPa
- d)  $\sigma_{nom,f} = 496.73$  MPa ;  $\sigma_f = 997.56$  MPa
- e)



### PROBLEMA 6

Se realiza un ensayo de tracción sobre una probeta de 25 mm diámetro y 75 mm de longitud, hasta alcanzar una longitud de 95 mm, aplicando una fuerza de 30 kN. Calcular:

- a) Tensión nominal y tensión real desarrollada.
- b) Deformación nominal y deformación logarítmica resultante.
- c) Deformación logarítmica resultante en el caso de que dicho material se utilizara para un proceso de conformación plástica con 3 reducciones de sección del 15%.

a)  $\sigma_{\text{nom}} = 70.74 \text{ MPa}$  ;  $\sigma = 77.83 \text{ MPa}$

b)  $e = 0.267$  ;  $\epsilon = 0.236$

c)  $\epsilon = 0.488$

### PROBLEMA 7

Una probeta cilíndrica de  $D_0 = 30 \text{ mm}$  y  $l_0 = 95 \text{ mm}$  es deformada plásticamente hasta una nueva longitud  $l_f = 0.8 \cdot l_0$ . Si el material de la probeta se comporta de acuerdo con la ecuación  $\sigma = 300 \cdot \epsilon^{0.44} \text{ N/mm}^2$ , determinar:

- a) Tensión real.
- b) Tensión nominal.
- c) Trabajo de deformación homogénea.
- d) Trabajo de deformación homogénea necesario para alcanzar la inestabilidad.

a)  $\sigma = 155.06 \text{ N/mm}^2$

b)  $\sigma_{\text{nom}} = 124.05 \text{ N/mm}^2$

c)  $W = 1612 \text{ J}$

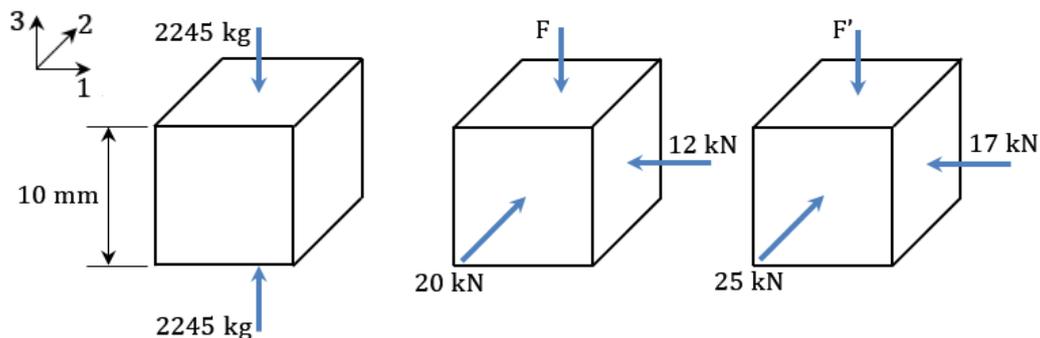
d)  $W_i = 4289.3 \text{ J}$

1.4. Problemas resueltos sobre criterios de fluencia

**PROBLEMA 8**

Sobre el cubo representado en la figura, se observa que la deformación plástica comienza cuando se aplica una carga de compresión de 2245 kg en la dirección principal 3, estando libres de cualquier carga los otros dos pares de caras. De acuerdo con el criterio de fluencia de von Mises, y sabiendo que el lado del cubo es de 10 mm, determinar:

- a) Fuerza de compresión  $F$  necesaria, según el criterio de von Mises, para producir la deformación plástica del cubo, si los otros dos pares de caras están comprimidos por fuerzas de 12 kN y 20 kN respectivamente. Los correspondientes círculos de Mohr.
- b) Tanto analítica como gráficamente, las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{xz}$  que se obtendrían en un plano de ejes  $x - z$  que forma  $45^\circ$  con el plano definido por las direcciones principales 1 y 3.
- c) Fuerza de compresión  $F'$  necesaria, según von Mises, para producir la deformación plástica en el cubo, si se aumentan en 5 kN las fuerzas de compresión las direcciones 1 y 2. Justificar el resultado teniendo en cuenta los resultados del primer apartado.
- d) Valor de tensión  $\tau$ , según los criterios de fluencia de Tresca y Von Mises, si se produjera sobre este cubo un estado tensional de torsión dado por  $\sigma_1 = \tau$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau$  MPa. Justificar el resultado obtenido.



a) En este caso, la tensión de fluencia puede determinarse a partir de la fuerza que produce el comienzo de la deformación plástica:

$$Y = \frac{F_Y}{A} = \frac{2245 \cdot 9.8}{10 \cdot 10} = 220 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{-12000}{10 \cdot 10} \Rightarrow \sigma_1 = -120 \text{ N/mm}^2; \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{-20000}{10 \cdot 10} \Rightarrow \sigma_2 = -200 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \geq Y \Rightarrow$$

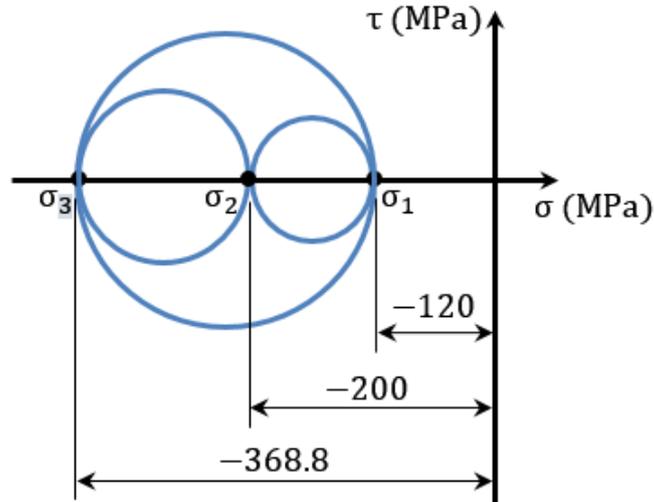
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}[(80)^2 + (-200 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 + 120)^2]} \geq 220 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{3,I} = 48.8 \text{ N/mm}^2; \sigma_{3,II} = -368.8 \text{ N/mm}^2$$

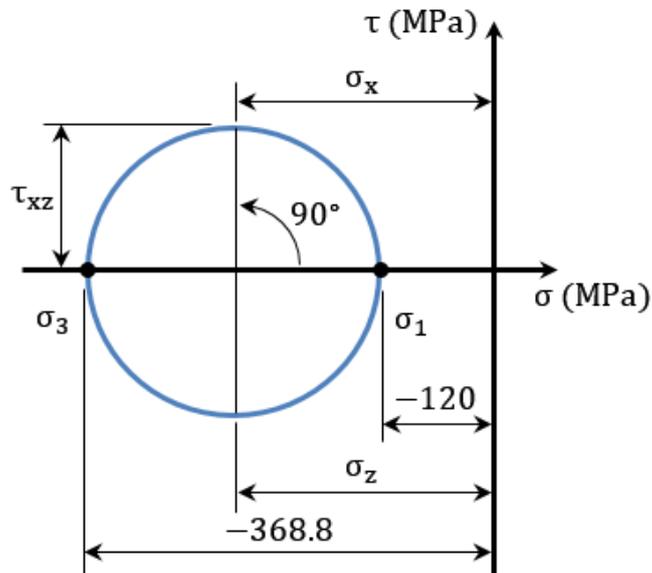
Como la fuerza F es a compresión, la solución válida para  $\sigma_3$  es:  $\sigma_3 = -368.8 \text{ N/mm}^2$ .

$$F_3 = \sigma_3 \cdot A_3 = 368.8 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \Rightarrow F_3 = \mathbf{36.88 \text{ kN}}$$

La representación de los círculos de Mohr de este sistema de tensiones sería la siguiente:



b)



El radio del círculo de Mohr que define el estado tensional en el plano 1-3 es:

$$R_{13} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{1}{2} \cdot (-368.8 + 120) \Rightarrow R_{13} = 124.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = R_{13} \cdot \sin 2\theta = 124.4 \cdot \sin 90 \Rightarrow R_{13} = \tau_{xz} = \mathbf{124.4 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) + R_{13} \cdot \cos 2\theta \Rightarrow \sigma_x = \mathbf{-244.4 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) - R_{13} \cdot \cos 2\theta \Rightarrow \sigma_z = -244.4 \text{ MPa}$$

c) Procediendo de modo análogo al primer apartado, se obtiene:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{-17000}{10 \cdot 10} \Rightarrow \sigma_1 = -170 \text{ N/mm}^2; \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{-25000}{10 \cdot 10} \Rightarrow \sigma_2 = -250 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \geq Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} [(80)^2 + (-250 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 + 170)^2]} \geq 220 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{3,I} = -1.2 \text{ N/mm}^2; \sigma_{3,II} = -418.8 \text{ N/mm}^2$$

En el primer apartado se ha verificado que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , por tanto:  $\sigma_3 = -418.8 \text{ N/mm}^2$ .

$$F' = \sigma_3 \cdot A_3 = 418.8 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \Rightarrow F' = 41.88 \text{ kN}$$

Como puede observarse,  $F'$  es 5 kN mayor que  $F$ . Por tanto, respecto al sistema de fuerzas de primer apartado, todas las fuerzas han aumentado 5 kN los ejes principales, lo que da cuenta de que el aumento de presión hidrostática no influye sobre la deformación plástica del material.

d) Un estado tensional de torsión equivale a un estado de tensión de cizalla pura, donde  $\sigma_2 = 0$  y  $\sigma_1 = -\sigma_3$ . Dado, que el criterio de fluencia de Tresca desprecia la contribución de la tensión  $\sigma_2$  a la tensión equivalente del sistema, al aplicar ambos criterios de fluencia se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_{e,T} = \sigma_1 - \sigma_3 \geq Y \Rightarrow \tau - (-\tau) \geq Y \Rightarrow \tau_T \geq Y/2$$

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\tau)^2 + (\tau)^2 + (-2\tau)^2]} = \sqrt{3\tau^2} \geq Y \Rightarrow \tau_{VM} \geq Y/\sqrt{3}$$

Estableciendo la comparación entre ambos criterios de fluencia, se tiene que:

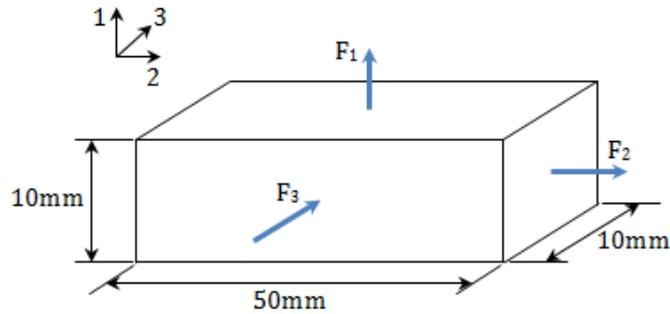
$$\frac{\tau_T}{\tau_{VM}} = \frac{Y/2}{Y/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tau_T = 1.155 \cdot \tau_{VM} \Rightarrow \tau_T < \tau_{VM}$$

El valor de ' $\tau$ ' necesario para producir la fluencia resulta un 15.5% mayor cuando se aplica el criterio de Von Mises, por lo que éste resulta más restrictivo que el criterio de Tresca.

**PROBLEMA 9**

La pieza de la figura está sometida a las siguientes fuerzas en los tres pares de caras:  $F_1$ ,  $F_2 = 10$  kN y  $F_3 = -75$  kN. El material tiene una tensión de fluencia obtenida en un ensayo de compresión con deformación plana (ensayo de Ford)  $S = 300$  MPa. Calcular:

- $F_1$  necesaria para lograr la fluencia según el criterio de fluencia de von Mises.
- $F_1$  necesaria para lograr la fluencia según el criterio de fluencia de Tresca.
- Deformación equivalente, si las dimensiones finales a obtener son 12 mm en el eje 1 y 55 mm en el eje 2.



$$\sigma_2 = F_2/A_2 = 10 \cdot 10^3 / (10 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}) = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = F_3/A_3 = -75 \cdot 10^3 / (50 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}) = -150 \text{ MPa}$$

a)

$$\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \geq Y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - 100)^2 + (100 - (-150))^2 + (-150 - \sigma_1)^2 \geq \frac{3}{2} \cdot 300^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 118.6 \text{ MPa}; \sigma_1 = -168.6 \text{ MPa}$$

Dado que  $F_1$  es una fuerza a tracción,  $\sigma_1$  según el criterio de Von Mises resulta:

$$\sigma_{1,VM} = 118.6 \text{ MPa}; F_{1,VM} = \sigma_{1,VM} \cdot A_1 = 118.6 \cdot 500 \Rightarrow F_{1,VM} = 59.31 \text{ kN}$$

b)

$$\sigma_1 - \sigma_3 \geq Y \Rightarrow \sigma_1 - (-150) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S \Rightarrow \sigma_{1,T} = 109.8 \text{ MPa}$$

$$F_{1,T} = \sigma_{1,T} \cdot A_1 = 109.8 \cdot 500 \Rightarrow F_{1,T} = 54.9 \text{ kN}$$

c)

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{12}{10}\right) + \ln\left(\frac{55}{50}\right) + \epsilon_3 = 0.182 + 0.095 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow \epsilon_3 = -0.278$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}(0.182^2 + 0.095^2 + (-0.278)^2)} \Rightarrow \epsilon_e = 0.282$$

**PROBLEMA 10**

En un proceso de conformación con deformación plana se produce el siguiente estado tensional:  $\sigma_x = 90$  MPa,  $\sigma_y = 30$  MPa,  $\tau_{xy} = 70$  MPa. Determinar:

- a) Ángulo que forma el actual sistema con los ejes principales.
- b) Tensiones principales y la tensión cortante máxima.
- c) Si la tensión de fluencia del material, determinada en un ensayo de torsión, es  $K = 85$  MPa, establecer si habrá o no fluencia según los criterios de Tresca y von Mises.

a) En los ejes principales el esfuerzo cortante ha de ser nulo, por tanto:

$$\tau_\theta = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin(2\theta) = \tau_{xy} \cdot \cos(2\theta) \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right] = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{2 \cdot 70}{90 - 30} \right] \Rightarrow \theta = 33.4^\circ$$

b)

$$\sigma_{1(2)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(90 + 30) + \sqrt{\left(\frac{90 - 30}{2}\right)^2 + 70^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 136.16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(90 + 30) - \sqrt{\left(\frac{90 - 30}{2}\right)^2 + 70^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = -16.16 \text{ MPa} ; (\sigma_2 = 0)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{90 - 30}{2}\right)^2 + 70^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 76.16 \text{ MPa}$$

c) El ensayo de torsión genera un sistema de deformación plana, por tanto, es necesario expresar la tensión de fluencia hallada (K) como una tensión uniaxial (Y):

$$Y = \sqrt{3} \cdot K = \sqrt{3} \cdot 85 = 147.22 \text{ MPa}$$

Criterio de fluencia Tresca:

$$\sigma_{e,T} = \sigma_1 - \sigma_3 \Rightarrow \sigma_{e,T} = 136.16 + 16.16 = 152.32 > 147.22 \Rightarrow \exists \text{Fluencia}$$

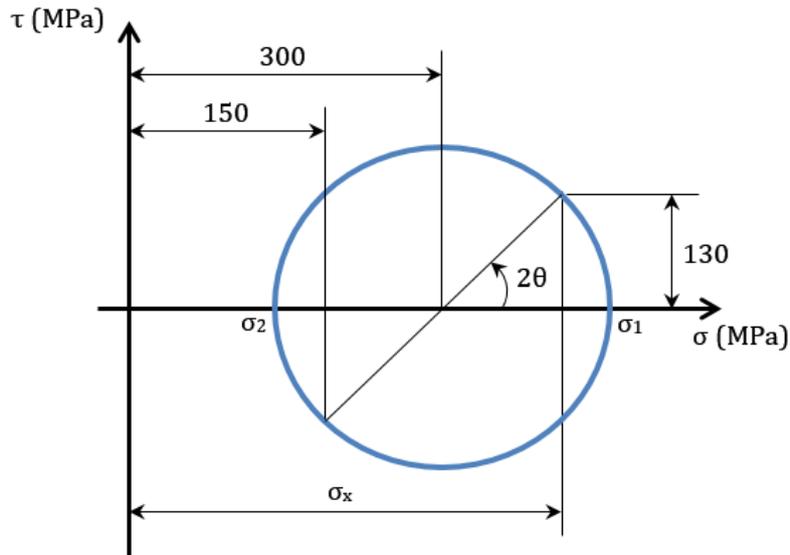
Criterio de fluencia de Von Mises:

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = 144.92 < 147.22 \Rightarrow \nexists \text{Fluencia}$$

**PROBLEMA 11**

Sea un estado tensional plano representado mediante el siguiente círculo de Mohr, determinar:

- Tensiones normales y tangenciales ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) y tensor de esfuerzos resultante.
- Tensiones principales y ángulo de este sistema de esfuerzos con los planos principales.
- Tensión cortante máxima y ángulo respecto del sistema de esfuerzos aplicado.
- Si existe fluencia según el criterio de von Mises, siendo la tensión de fluencia 470 MPa.



a)

$$\sigma_y = 150 \text{ MPa} ; \tau_{xy} = 130 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 300 \Rightarrow \sigma_x = 450 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 450 & 130 & 0 \\ 130 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{2}(450 + 150) + \sqrt{150^2 + 130^2} \Rightarrow \sigma_1 = 498.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{1}{2}(450 + 150) - \sqrt{150^2 + 130^2} \Rightarrow \sigma_2 = 101.5 \text{ MPa}$$

El ángulo con los planos principales ( $2\theta$ ) puede deducirse geoméricamente según:

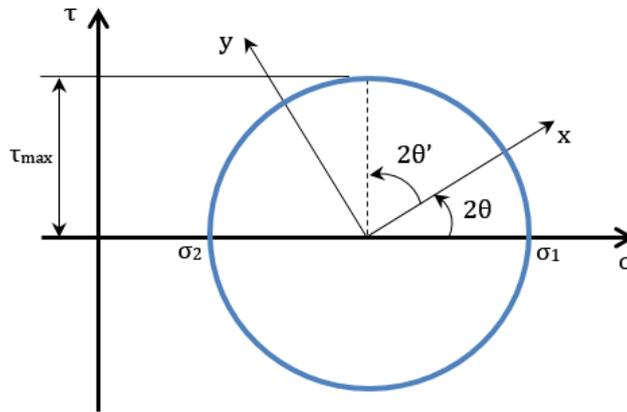
$$\tan(2\theta) = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{130}{(450 - 150)/2} \Rightarrow \theta = 20.46^\circ$$

c)

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \tau_{\max} = \sqrt{\frac{(450 - 150)^2}{4} + 130^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 198.5 \text{ MPa}$$

La dirección del esfuerzo cortante máximo se encuentra a  $\pi/2$  de la dirección principal, por tanto, el ángulo  $\theta'$  que forma el sistema x-y con dicha dirección se puede hallar como:

$$2\theta' = \frac{\pi}{2} - 2\theta = 90 - 2 \cdot 20.46 \Rightarrow \theta' = 49.08^\circ$$



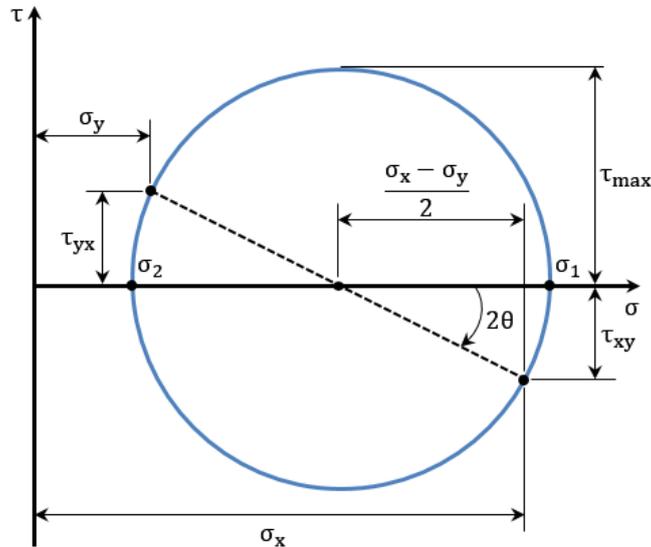
d)

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]} = 456.3 \text{ MPa} < Y = 470 \text{ MPa} \Rightarrow \nexists \text{ Fluencia}$$

**PROBLEMA 12**

En un proceso de conformación con deformación plana se produce el siguiente estado tensional:  $\sigma_x = 200$  MPa,  $\sigma_y = 40$  MPa,  $\tau_{xy} = 80$  MPa. Determinar geoméricamente, según el círculo de Mohr de la figura:

- Esfuerzo cortante máximo.
- Tensiones principales.
- Ángulo que forma el plano principal '1' con el plano XY sobre que generan  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ .



La recta que une los puntos  $(\sigma_x, -\tau_{xy})$  y  $(\sigma_y, \tau_{xy})$  puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\tau - \tau_{yx}}{\tau_{xy} - \tau_{yx}} \Rightarrow \frac{\sigma - 40}{200 - 40} = \frac{\tau - 80}{-80 - 80} \Rightarrow \sigma - 40 = -\frac{160}{160} \cdot (\tau - 80) \Rightarrow \sigma = 120 - \tau$$

El centro del círculo de Mohr se obtiene cuando:  $\tau = 0 \Rightarrow \overline{OO'} = 120$  MPa

- El radio del círculo de Mohr, equivalente a  $\tau_{max}$ , puede obtenerse como:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{200 - 40}{2}\right)^2 + 80^2} \Rightarrow R \equiv \tau_{max} = 113.14 \text{ MPa}$$

- Las tensiones principales pueden hallarse algebraicamente como:

$$\sigma_1 = \overline{OO'} + R = 120 + 113.14 \Rightarrow \sigma_1 = 233.14 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \overline{OO'} - R = 120 - 113.14 \Rightarrow \sigma_2 = 6.86 \text{ MPa}$$

- El ángulo con los planos principales ( $2\theta$ ) puede deducirse geoméricamente según:

$$\tan(2\theta) = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{80}{(200 - 40)/2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$$

1.5. Problemas propuestos sobre criterios de fluencia

**PROBLEMA 13**

Cuando un cierto material se somete al estado de tensiones:  $\sigma_x = 450 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 120 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_z = 0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{xy} = 100 \text{ N/mm}^2$ , se sabe que este es capaz de iniciar la deformación plástica. Calcular:

- Tensión de fluencia del material según los criterios de Tresca y von Mises.
- Si existirá deformación plástica para el estado tensional  $\sigma_x = 250 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_z = -250 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{xy} = 100 \text{ N/mm}^2$ .

- $Y_T = 477.94 \text{ N/mm}^2$ ;  $Y_{VM} = 439.21 \text{ N/mm}^2$
- $\sigma_{e,T} = 538.52 \text{ N/mm}^2 > Y_T \Rightarrow \exists \text{ Fluencia}$   
 $\sigma_{e,VM} = 466.37 \text{ N/mm}^2 > Y_{VM} \Rightarrow \exists \text{ Fluencia}$

**PROBLEMA 14**

Sea el siguiente estado de deformación plana;  $\sigma_x = -210 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = -70 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{xy} = 70 \text{ N/mm}^2$ , determinar:

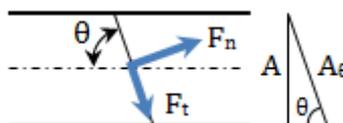
- Direcciones principales.
- Tensiones principales.
- Magnitud y dirección del esfuerzo cortante máximo.

- $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$
- $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = -41 \text{ N/mm}^2$ ;  $\sigma_3 = -239 \text{ N/mm}^2$
- $\theta = \frac{5\pi}{8}$ ;  $\tau_{\max} = 99 \text{ N/mm}^2$

**PROBLEMA 15**

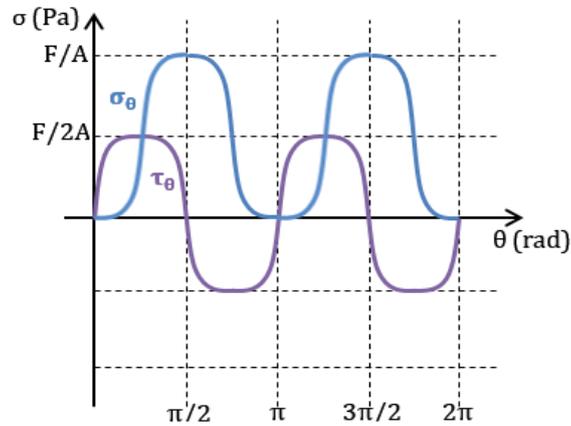
Sea una probeta cilíndrica de 20 mm de diámetro, sometida a tracción con una fuerza de 10 kN, calcular:

- Expresiones analíticas de la tensión normal y tangencial en función del ángulo  $\theta$ .
- Tensiones normal y tangencial en un plano que forma  $60^\circ$ .
- Valores máximos de  $\sigma_\theta$  y  $\tau_\theta$ .
- Representación gráfica de  $\sigma_\theta$  y  $\tau_\theta$  en función de  $\theta$ .



- a)  $\sigma_{\theta} = \frac{F}{A} \cdot \sin^2 \theta$  ;  $\tau_{\theta} = \frac{F}{2A} \cdot \sin 2\theta$
- b)  $\sigma_{60} = 23.87 \text{ MPa}$  ;  $\tau_{60} = 13.78 \text{ MPa}$
- c)  $\sigma_{\theta, \max} = 31.83 \text{ MPa}$  ;  $\tau_{\theta, \max} = 15.92 \text{ MPa}$

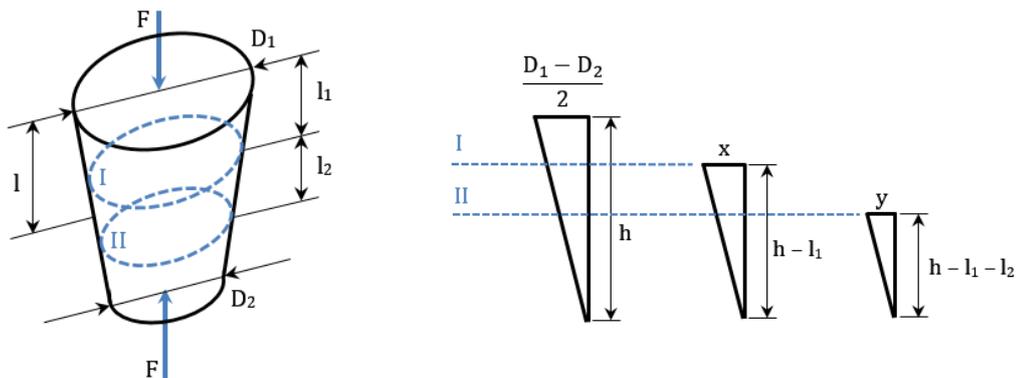
d)



### PROBLEMA 16

Sobre un tronco de cono de altura  $h = 60 \text{ mm}$ , como el mostrado en la figura, se aplica una fuerza uniformemente distribuida de  $70 \text{ kN}$  sobre sus superficies superior e inferior. Datos:  $l_1 = 20 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 20 \text{ mm}$ ,  $D_1 = 40 \text{ mm}$ ,  $D_2 = 10 \text{ mm}$ ,  $S = 180 \text{ MPa}$ . Calcular:

- a) Tensión normal resultante en los planos I y II.
- b) Distancia 'l' a la cual la tensión generada iguala la tensión de fluencia del material.



- a)  $\sigma_I = 99 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_{II} = 222.8 \text{ MPa}$
- b)  $l = 32.18 \text{ mm}$



## CAPÍTULO 2. FORJA

### 2.1. Planteamiento analítico

Los procesos de conformado de forja libre (o en abierto) como el representado en la figura, son básicamente procesos de conformado en caliente, donde el metal situado en la mesa de una prensa (o yunque) a la temperatura adecuada, es sometido a estados de compresión de forma reiterada mediante el sistema de accionamiento mecánico, hidráulico o neumático (fig. 2.1), que disponga la prensa.

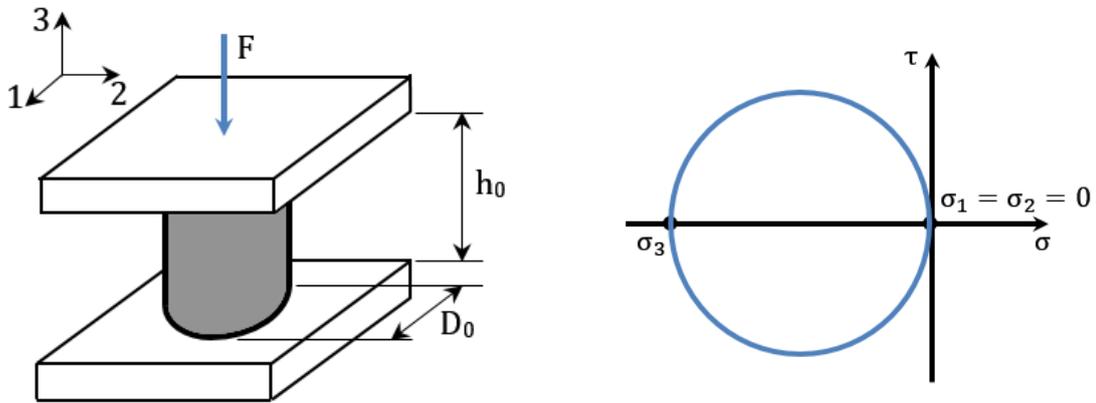


Figura 2.1. Representación de un proceso de forja libre sobre una pieza cilíndrica.

Considerando el sistema de ejes principales mostrado en la figura (fig. 2.1), se tiene el siguiente tensor de esfuerzos para procesos de forja libre o en abierto:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F/A \end{bmatrix}; \sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[0 + (-\sigma_3)^2 + (\sigma_3)^2]} = \sigma_3 = F/A_f$$

donde  $A_f$  corresponde al área final resultante de la pieza conformada, de altura  $h_f$ , cuya normal coincide con la dirección en la que actúa la fuerza de compresión aplicada  $F$ .

Por su parte, en cuanto a las deformaciones principales:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \Rightarrow (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0) \Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = -\frac{1}{2}\epsilon_3$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\epsilon_1 \end{bmatrix}; \epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_1^2 + 4\epsilon_1^2)} = 2\epsilon_1 = \ln \frac{h_0}{h_f}$$

Si se requiere tener en cuenta la fricción, se puede utilizar la ecuación:

$$F = Y \cdot A_f \cdot \left(1 + k \cdot \mu \cdot \frac{D_f}{h_f}\right)$$

donde el valor del factor de corrección  $k$  suele ser:  $1/3 \leq k \leq 2/5$ .

Cuando se limita el flujo del material en alguna de las direcciones el proceso de conformado se denomina de forja semicerrada. Se realiza también en caliente y en el mismo tipo de máquinas (prensas), aunque en este caso se utiliza también una matriz cuya geometría determina la forma final de la pieza (fig. 2.2). La restricción de deformaciones que introduce la matriz genera un estado de deformaciones plano y un estado tensional como el indicado a continuación.

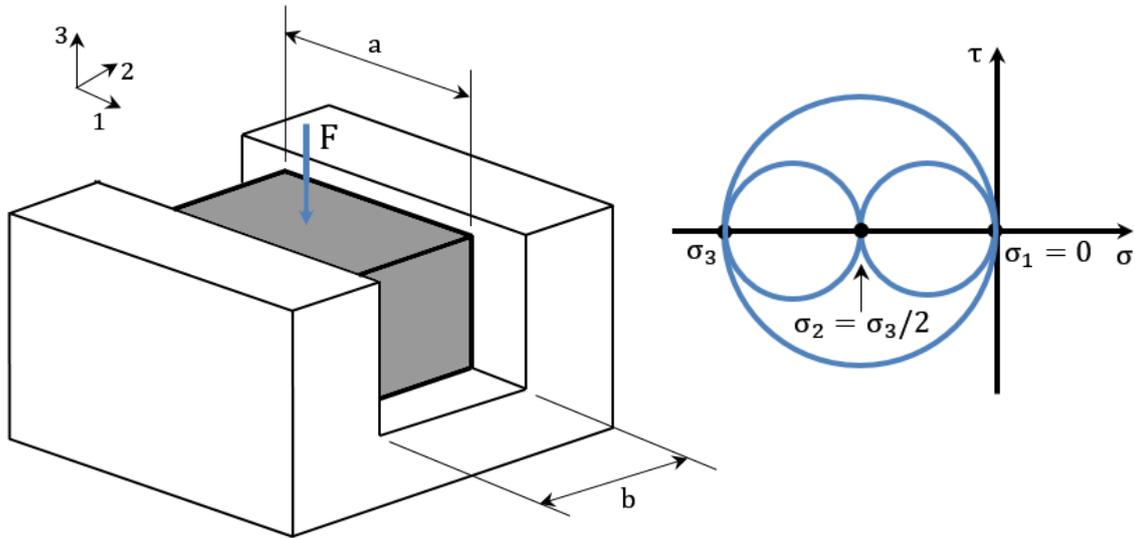


Figura 2.2. Representación de un proceso de forja sobre estampa semicerrada.

En consecuencia, a partir del equilibrio de fuerzas presente en este tipo de procesos de forja, tomando el sistema de ejes principales indicado (fig. 2.2), se obtiene:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F/2A & 0 \\ 0 & 0 & -F/A \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(-\sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3)^2]} = \frac{\sqrt{3}}{2} F/A$$

donde  $A$  corresponde al área media a conformar  $A_m$  o al área final resultante de la pieza  $A_f$ , cuya normal coincide con la dirección en la que actúa la fuerza de compresión aplicada  $F$ .

Por su parte, en cuanto a las deformaciones, el planteamiento es el siguiente:

$$\epsilon_2 = 0 \Rightarrow (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0) \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_1 \end{bmatrix}; \epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3} (\epsilon_1^2 + 0 + \epsilon_1^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_1$$

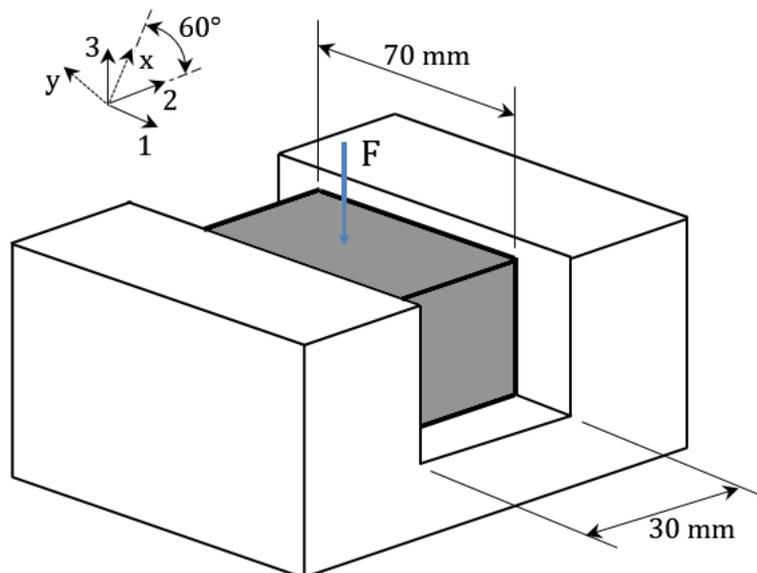
No obstante, en estos procesos la contribución de la fricción a la fuerza total puede llegar a ser significativa. Para tener en cuenta esto, se puede tomar un factor de corrección de 1.7 sobre el valor de fuerza ideal.

2.2. Problemas resueltos

**PROBLEMA 17**

Se desea conformar un bloque de latón comercial ASTM 85/15 mediante un proceso de forja con estampa semicerrada, según se indica en la figura adjunta, para lograr una longitud final del bloque de 90 mm. Despreciando los efectos de la distorsión interna del material y de la fricción, calcular:

- Fuerza  $F$  a ejercer para deformar plásticamente la pieza.
- Tensiones principales.
- Deformaciones en los ejes principales y deformación equivalente.
- Círculos de Mohr asociados al sistema.
- Tensiones producidas en unos ejes  $x$  e  $y$  e inclinados  $60^\circ$  respecto a los ejes principales '2' y '3', tal y como se muestra en la figura.
- Trabajo externo por unidad de volumen necesario para conseguir la deformación plástica, tomando un factor de corrección de 2.
- Máxima longitud que se podría obtener en el proceso sin debilitar la estructura del material.
- Trabajo de deformación homogénea realizado hasta alcanzar la inestabilidad en función de la altura inicial  $h$  del bloque de latón.
- Potencia necesaria para forjar la pieza con una velocidad de 0.02 m/s, teniendo en cuenta el efecto de la fricción.



- En cuanto a la superficie sobre la que se aplica la fuerza:

El área inicial sometida a deformación es:  $A_0 = 0.07 \cdot 0.03 = 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

El área final sometida a deformación es:  $A_f = 0.09 \cdot 0.03 = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

El área media sometida a deformación es:  $A_m = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

Por otra parte, según las tablas de propiedades mecánicas para metales comerciales (Anexo I), el latón 85/15 presenta una tensión de fluencia de 300 MPa, la cual ha de ser sobrepasada durante el proceso de forja para lograr la conformación deseada.

Para que exista deformación plástica ha de cumplirse la condición  $\sigma_e \geq Y$ , y por tanto se tiene que:

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3} F}{2 A} \geq Y \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{F}{2.4 \cdot 10^{-3}} \geq 300 \cdot 10^6 \Rightarrow F \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2.4 \cdot 300 \cdot 10^3 \Rightarrow F \geq \mathbf{831.38 \text{ kN}}$$

b) Las tensiones principales pueden ser calculadas a partir del equilibrio de fuerzas que se establece sobre la pieza, considerando o bien el área media sometida  $A_m$  a deformación o bien el área final  $A_f$  resultante al finalizar el proceso de forja:

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = -\frac{F}{2 \cdot A_m} = -\frac{831.38 \cdot 10^3}{2 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_2 = \mathbf{-173.21 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_3 = -\frac{F}{A_m} = 2 \cdot \sigma_2 = -\frac{831.38 \cdot 10^3}{2.4 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_3 = \mathbf{-346.41 \text{ MPa}}$$

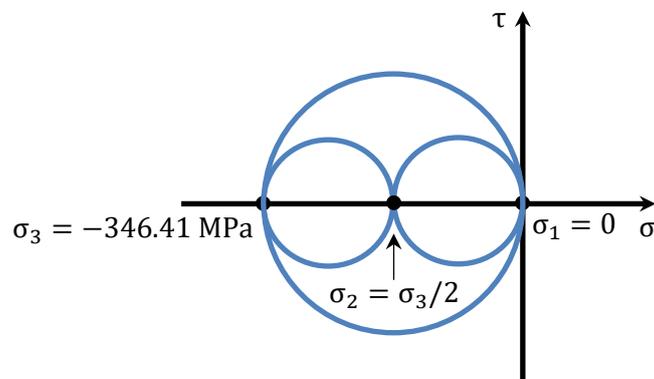
c) Las deformaciones en los ejes principales son:

$$\epsilon_2 = 0 \Rightarrow (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0) \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3$$

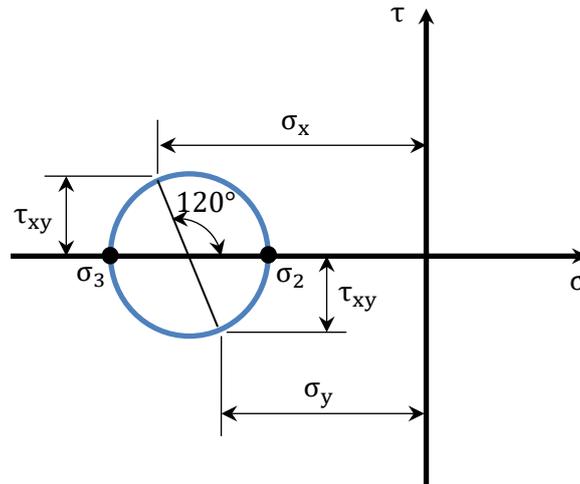
$$\epsilon_1 = -\epsilon_3 = \ln(l_f/l_0) = \ln(90/70) \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3 = \mathbf{0.251}$$

$$\epsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \epsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0.251 \Rightarrow \epsilon_e = \mathbf{0.29}$$

d) En este caso, al tratarse de una conformación mediante esfuerzos de compresión, tanto  $\sigma_2$  como  $\sigma_3$  tienen signo negativo, mientras que  $\sigma_1$  es nulo debido a que no hay restricciones al desplazamiento en el eje principal '1', quedando la representación gráfica de los círculos de Mohr como sigue:



e) Tomando en sentido anti-horario los  $60^\circ$  de inclinación del nuevo sistema de referencia, respecto a las direcciones principales '2' y '3', gráficamente se tiene lo siguiente:



El radio del círculo de Mohr que define el estado tensional en el plano 2-3 es:

$$R_{23} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \cdot (-173.21 + 346.41) \Rightarrow R_{23} = 86.6 \text{ MPa}$$

Finalmente, en el nuevo sistema de ejes X-Y, se obtienen las siguientes tensiones:

$$\tau_{xy} = R_{23} \cdot \sin 2\theta = R_{23} \cdot \sin(2 \cdot 60) = 86.6 \cdot \sin 120 \Rightarrow \tau_{xy} = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) + R_{23} \cdot \cos 2\theta = -259.81 + 86.6 \cos 120 \Rightarrow \sigma_x = -303.11 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) - R_{23} \cdot \cos 2\theta = -259.81 - 86.6 \cos 120 \Rightarrow \sigma_y = -216.51 \text{ MPa}$$

f) En los procesos de conformación plástica, el trabajo externo a ejercer por la máquina viene dado por la siguiente expresión:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} + W_f + W^*$$

Adoptando un factor de corrección de 2 para considerar la contribución del trabajo redundante y del asociado a la fricción, se tiene que:

$$W_{\text{ext}} = 2 \cdot W_{\text{int}} = 2 \cdot V \cdot \int_0^{\epsilon_e} \sigma_e \cdot d\epsilon_e$$

Tomando del Anexo II los valores numéricos de los parámetros C y n de la ley de comportamiento del material, en este caso el latón ASTM 85/15, es posible calcular el trabajo externo por unidad de volumen necesario para efectuar este proceso de forja:

$$\begin{aligned} \frac{W_{\text{ext}}}{V} &= 2 \cdot \int_0^{\epsilon_e} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = 1.7 \cdot \int_0^{0.29} 580 \cdot 10^6 \cdot \epsilon_e^{0.4} \cdot d\epsilon_e = 2 \cdot 580 \cdot 10^6 \cdot \frac{0.29^{1.4}}{1.4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{W_{\text{ext}}}{V} = 146.45 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

g) En la deformación plástica de metales, el inicio de la estricción (inestabilidad) viene dado por la condición  $\epsilon_i = n$ :

$$\epsilon_i = n = \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_{1,i} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln(l_{f,i}/l_0) \Rightarrow e^{\frac{\sqrt{3}}{2}n} = l_{f,i}/l_0 \Rightarrow l_{f,i} = l_0 \cdot e^{\frac{\sqrt{3}}{2}n}$$

$$l_{f,i} \equiv l_{f,\max} = 70 \cdot 10^{-3} \cdot e^{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.4} \Rightarrow l_{f,\max} = \mathbf{99 \text{ mm}}$$

h) En condiciones de inestabilidad, dado que  $\epsilon_i = n$ , el trabajo ideal resulta:

$$W_i = V \cdot \int_0^n \sigma_e \cdot d\epsilon_e = 70 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot h \cdot \int_0^{0.4} 580 \cdot 10^6 \cdot \epsilon_e^{0.4} \cdot d\epsilon_e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{W_i = 241.2 \cdot h \text{ kJ}}$$

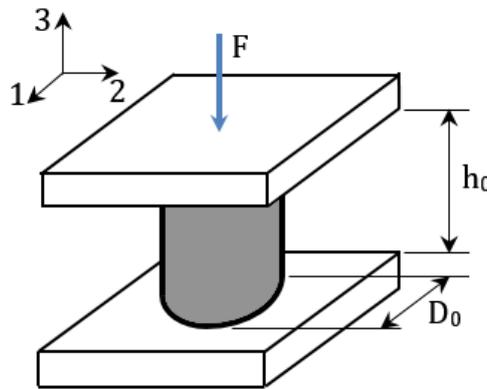
i) La potencia mecánica a aplicar por la prensa que efectúa el proceso de conformación puede obtenerse a partir de la fuerza y la velocidad, si bien, para tener en cuenta el efecto de la fricción, la fuerza ha de ser corregida con un factor de corrección. Tomando un valor habitual de 1.7 para estimar la fuerza real del proceso, la potencia resultante es:

$$P = F \cdot v = (1.7 \cdot 831.38 \cdot 10^3) \cdot 0.02 \Rightarrow \mathbf{P = 28.27 \text{ kW}}$$

**PROBLEMA 18**

Una pieza cilíndrica de bronce con diámetro  $D_0 = 35$  mm y altura  $h_0 = 50$  mm es deformada plásticamente mediante un proceso de forja libre hasta que adquiere una nueva altura  $h_f = 0.8 \cdot h_0$  mm (ver figura). Suponiendo despreciables los efectos de la fricción y la distorsión, y que el material es isótropo, siendo éste un cobre comercial, Determinar:

- Deformaciones reales en los planos principales y deformación equivalente.
- Tensiones reales en los ejes principales al final de la deformación.
- Tensión nominal al final de la deformación.
- Fuerza real  $F$  a aplicar si el coeficiente de fricción del proceso es  $\mu = 0.2$  ( $k = 0.35$ ).
- Trabajo ideal necesario para producir la deformación.
- Trabajo ideal que sería necesario para producir la inestabilidad.



a)

$$V \equiv \text{cte.} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot D_0^2 \cdot h_0 = \frac{\pi}{4} \cdot D_f^2 \cdot h_f \Rightarrow D_0^2 \cdot h_0 = D_f^2 \cdot 0.8 \cdot h_0 \Rightarrow D_f = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot D_0$$

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow (\text{Material isotropo: } \epsilon_1 = \epsilon_2) \Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = -\frac{1}{2} \epsilon_3$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \ln(D_f/D_0) = \ln(\sqrt{5}/2) \Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = \mathbf{0.112}$$

$$\epsilon_3 = \ln(h_f/h_0) = \ln(4/5) \Rightarrow \epsilon_3 = \mathbf{-0.223}$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \epsilon_3^2 + \frac{1}{4} \epsilon_3^2 + \epsilon_3^2\right)} \Rightarrow \epsilon_e = |\epsilon_3| = \mathbf{0.223}$$

b) Tomando los parámetro  $C$  y  $n$  del Anexo II, en el caso más conservador:

$$F_1 = F_2 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \mathbf{0}$$

$$\sigma_e = 320 \cdot \epsilon_e^{0.44} = 320 \cdot 0.223^{0.44} \Rightarrow \sigma_e = \sigma_3 = \mathbf{165.35 \text{ MPa}}$$

c)

$$\sigma_{\text{nom}} = \sigma_e \cdot \frac{A_f}{A_0} = \sigma_e \cdot \frac{\frac{\pi}{4} \cdot D_f^2}{\frac{\pi}{4} \cdot D_0^2} = \sigma_e \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow \sigma_{\text{nom}} = \mathbf{206.69 \text{ MPa}}$$

d)

$$F = Y \cdot A_f \cdot \left(1 + k \cdot \mu \cdot \frac{D_f}{h_f}\right) = Y \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot D_0^2\right) \cdot \left(1 + k \cdot \mu \cdot \frac{5\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{D_0}{h_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 165.35 \cdot 10^6 \cdot \frac{5\pi}{16} \cdot 35^2 \cdot 10^{-6} \cdot \left(1 + 0.35 \cdot 0.2 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{35}{50}\right) \Rightarrow F = 212.47 \text{ kN}$$

e)

$$W_{\text{int}} = V \cdot \int_0^{\epsilon_e} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \frac{\pi}{4} \cdot D_0^2 \cdot h_0 \cdot \int_0^{\epsilon_e} C \cdot \epsilon_e^n \cdot d\epsilon_e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\text{int}} = \frac{\pi}{4} \cdot (35 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 320 \cdot \frac{0.223^{1.44}}{1.44} \cdot 10^6 \Rightarrow W_{\text{int}} = 1231.8 \text{ J}$$

f)

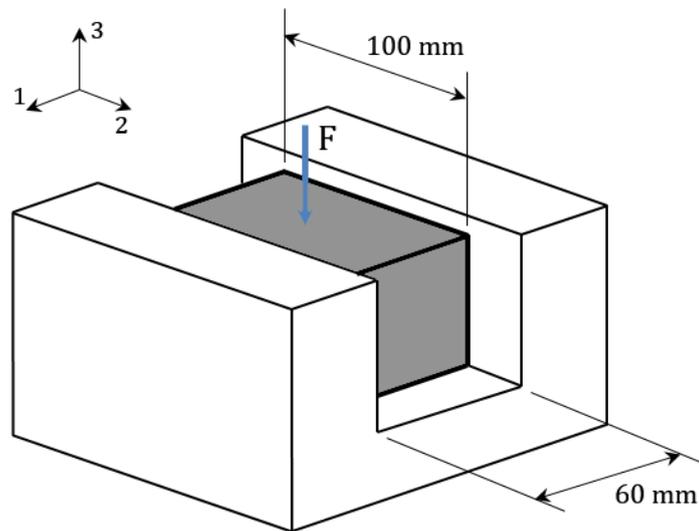
$$\epsilon_i = n \Rightarrow W_i = V \cdot \int_0^{\epsilon_i} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \frac{\pi}{4} \cdot D_0^2 \cdot h_0 \cdot \int_0^n C \cdot \epsilon_e^n \cdot d\epsilon_e \Rightarrow$$

$$W_i = \frac{\pi}{4} \cdot (35 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 320 \cdot \frac{0.44^{1.44}}{1.44} \cdot 10^6 \Rightarrow W_i = 3277.6 \text{ J}$$

**PROBLEMA 19**

Un prisma de base cuadrada de longitud  $l_0 = 100 \text{ mm}$  y ancho  $60 \text{ mm}$  es deformado plásticamente mediante un proceso de forja con estampa semicerrada hasta que adquiere una nueva longitud  $l_f = 120 \text{ mm}$ . Se suponen despreciables los efectos de la fricción y la distorsión, que el material es isótropo, perfectamente plástico y con tensión de fluencia  $Y = 420 \text{ MPa}$ . Determinar:

- Tensor de esfuerzos resultante en función de la fuerza  $F$ .
- Valor de  $F$  necesario para lograr la deformación plástica.
- Tensiones principales.
- Deformación equivalente.
- Altura máxima  $h$  del bloque a deformar, de manera que no se excedan los  $50 \text{ kJ}$  de trabajo externo, si el trabajo redundante y de fricción suponen el  $75\%$  del trabajo ideal.



a)

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{2A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F}{A} \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \frac{0.1 + 0.12}{2} \cdot 0.06 = 0.11 \cdot 0.06 = 6.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3} F}{2 A} \geq Y \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{F}{6.6 \cdot 10^{-3}} \geq 420 \cdot 10^6 \Rightarrow F \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 6.6 \cdot 10^{-3} \cdot 420 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \geq 3200.83 \text{ kN}$$

c)

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_1 = -\frac{F}{2A} = -242.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -\frac{F}{A} = -485 \text{ MPa}$$

d)

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow (\epsilon_1 = 0) \Rightarrow \epsilon_2 = -\epsilon_3$$

$$\epsilon_2 = \ln(l_f/l_0) = \ln(120/100) \Rightarrow \epsilon_2 = 0.182 = -\epsilon_3$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}(0 + 0.182^2 + (-0.182)^2)} \Rightarrow \epsilon_e = \mathbf{0.21}$$

e)

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} + W_f + W^* = W_{\text{int}} + 0.75 \cdot W_{\text{int}} = 1.75 \cdot W_{\text{int}}$$

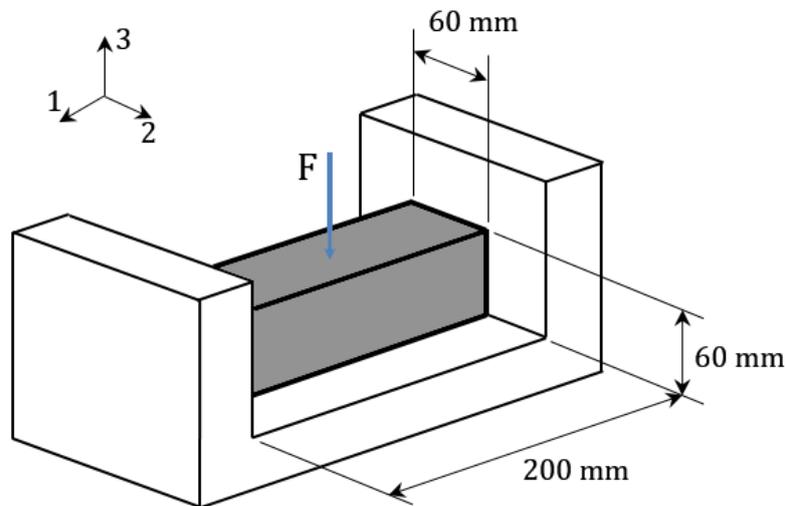
$$W_{\text{ext}} = 50 \cdot 10^3 = 1.75 \cdot V \cdot \int_0^{\epsilon} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = 1.75 \cdot 0.1 \cdot 0.06 \cdot h \cdot 420 \cdot 10^6 \cdot 0.21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{h = 54 \text{ mm}}$$

**PROBLEMA 20**

En un proceso de forja con prensa hidráulica se desea conformar un tocho de latón ASTM 70/30 de sección cuadrada de 60 mm de lado y 200 mm de longitud, para obtener una pieza de sección rectangular de 40 mm de altura y la misma longitud. Se sabe que la prensa opera a una velocidad nominal de 1.8 m/min y que el incremento de fuerza debido a la fricción se estima en un 27%. Determinar:

- Deformaciones en los ejes principales y deformación equivalente.
- Velocidad de deformación del proceso.
- Tensión desarrollada cuando el proceso se ejecuta a 20°C y 600°C.
- Fuerza a aplicar por la prensa en frío y en caliente.
- Diferencia de potencia al realizar el trabajo en frío y en caliente.



a)

$$V \equiv \text{cte} \Rightarrow 60 \cdot 60 \cdot 200 = x \cdot 40 \cdot 200 \Rightarrow x = 90 \text{ mm}$$

$$\epsilon_1 = 0; \epsilon_2 = \ln \frac{90}{60} \Rightarrow \epsilon_2 = 0.406$$

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow -\epsilon_2 = \epsilon_3 = \ln \frac{40}{60} \Rightarrow \epsilon_3 = -0.406;$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (0 + 0.406^2 + (-0.406)^2)} \Rightarrow \epsilon_e = 0.468$$

b) La velocidad de deformación viene dada por el cociente entre la velocidad de desplazamiento de la herramienta y la distancia recorrida por la misma durante la deformación, en la dirección de aplicación de la fuerza, por tanto:

$$\dot{\epsilon} = \frac{v}{l} = \frac{1.8/60}{(60 - 40) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \dot{\epsilon} = 1.5 \text{ s}^{-1}$$

c) En la tablas de propiedades de los metales también pueden encontrarse los parámetros C y n para la conformación en caliente del latón 70/30 (Anexo II). Tomando los valores más conservadores de C y n para este material, se tiene que:

$$\sigma_{20} = 600 \cdot \epsilon^{0.45} = 600 \cdot 0.468^{0.45} \Rightarrow \sigma_{20} = \mathbf{426.4 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{600} = 110 \cdot \dot{\epsilon}^{0.2} = 110 \cdot 1.5^{0.2} \Rightarrow \sigma_{600} = \mathbf{119.3 \text{ MPa}}$$

d)

$$F_{20} = \sigma_{20} \cdot A_f = (1.27) \cdot 426.4 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-3} \Rightarrow F_{20} = \mathbf{9747.5 \text{ kN}}$$

$$F_{600} = \sigma_{600} \cdot A_f = (1.27) \cdot 119.3 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-3} \Rightarrow F_{600} = \mathbf{2727.2 \text{ kN}}$$

e)

$$P_{20} = v \cdot F_{20} = \frac{1.8}{60} \cdot 9747.5 = 292.43 \text{ kW}$$

$$P_{600} = v \cdot F_{600} = \frac{1.8}{60} \cdot 2727.2 = 81.82 \text{ kW}$$

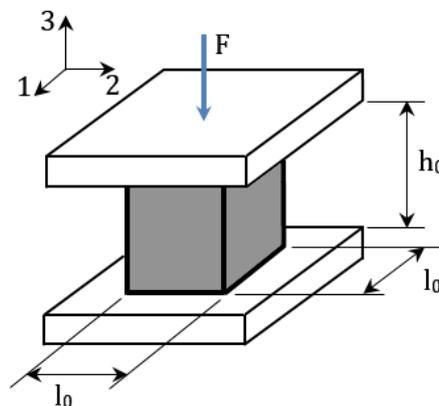
$$\Delta P = P_{20} - P_{600} \Rightarrow \Delta P = \mathbf{210.61 \text{ kW}}$$

### 2.3. Problemas propuestos

#### PROBLEMA 21

Un bloque de aluminio ASTM 1050, de base cuadrada con lado  $l_0 = 20$  mm y altura  $h_0 = 30$  mm, es deformado plásticamente mediante un proceso de forja libre, hasta una nueva altura  $h_f = 25$  mm (ver figura). Suponiendo despreciables los efectos de la fricción y la distorsión. Determinar:

- Deformaciones reales en los planos principales y deformación equivalente.
- Tensiones reales en los ejes principales al final de la deformación.
- Tensión nominal al final de la deformación.
- Trabajo de deformación homogénea necesario para producir la inestabilidad.
- Altura alcanzada por la pieza cuando se produce la inestabilidad.

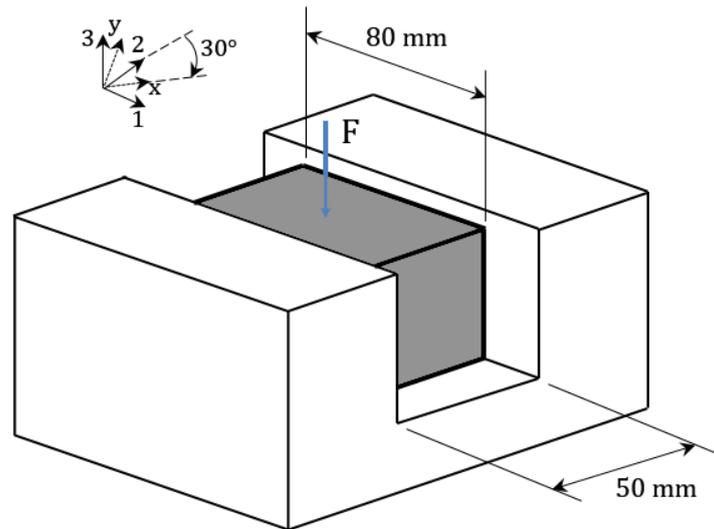


- $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.091$  ;  $\epsilon_3 = -0.182$  ;  $\epsilon_e = 0.182$
- $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  ;  $\sigma_3 = 125.9$  MPa
- $\sigma_{nom} = 151.1$  N/mm<sup>2</sup>
- $W_i = 256.57$  J
- $h_i = 24.56$  mm

#### PROBLEMA 22

Se desea realizar un proceso de forja con estampa semicerrada, en el que se desprecian la distorsión interna del material y los efectos de la fricción. Si el material es un titanio ASTM Grade-3, calcular:

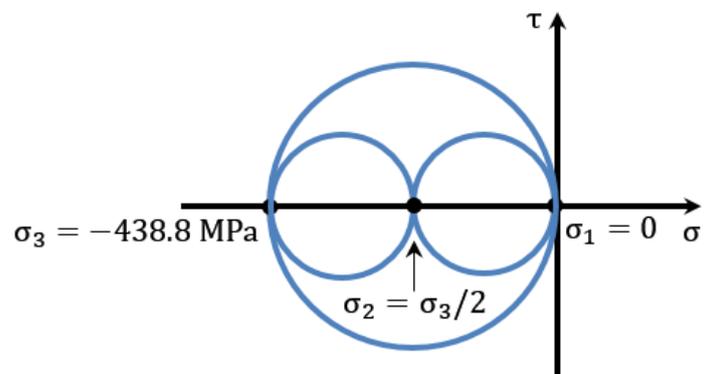
- Fuerza  $F$  a ejercer para deformar plásticamente la pieza.
- Tensiones principales.
- Círculos de Mohr correspondientes.
- Tensiones producidas en unos ejes inclinados  $30^\circ$  en sentido antihorario respecto de los ejes principales 2 y 3.



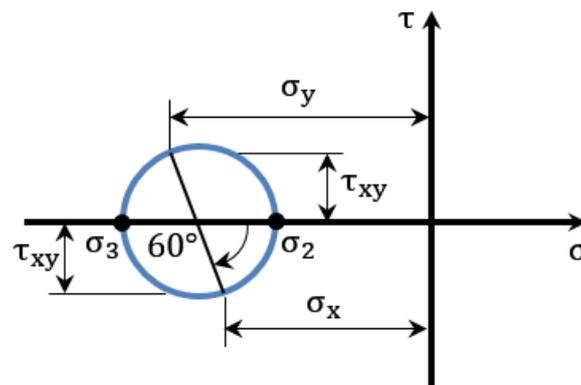
a)  $F \geq 1755.1 \text{ kN}$

b)  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\frac{F}{A} = -438.8 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_2 = -\frac{F}{2A} = -219.4 \text{ MPa}$

c)



d)  $\sigma_x = -274.25 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_y = -384 \text{ MPa}$ ;  $\tau_{xy} = 95 \text{ MPa}$



**PROBLEMA 23**

Se desea reducir el espesor de una pieza de  $t_0 = 20$  mm a  $t_f = 15$  mm, siendo su ancho de 60 mm y su longitud de 100 mm, utilizando para ello un proceso de forja con estampa semicerrada, como el mostrado en la figura. Se supone que los efectos de fricción y distorsión son despreciables y que el material es isótropo, siendo éste un acero ASTM 4135. Determinar:

- Deformaciones en los ejes principales y deformación equivalente.
- Fuerza  $F$  necesaria para deformar plásticamente la pieza, considerando el área media sometida a deformación durante el proceso.
- Tensiones en los ejes principales.

a)  $\epsilon_1 = -\epsilon_3 = 0.288$  ;  $\epsilon_2 = 0$  ;  $\epsilon_e = 0.333$

b)  $F \geq 7034.5$  kN

c)  $\sigma_1 = 0$  ;  $\sigma_2 = -\frac{F}{2A_m} = -502.5$  MPa ;  $\sigma_3 = -\frac{F}{A_m} = -1005$  MPa

**PROBLEMA 24**

Se dispone de una palanquilla de cobre con una sección cuadrada de 4x6 mm y 80 mm de longitud, que se pretende deformar plásticamente hasta obtener una sección transversal de ax8 mm, conservando la longitud. Si a fuerza aplicada sobre el material es ejercida a una velocidad de 120 mm/min y la ecuación de comportamiento del material viene dada por la expresión  $\sigma(T_0) = 440 \cdot \epsilon^{0.33}$  MPa. Determinar:

- Ancho final de la pieza.
- Deformación nominal y real en la dirección de aplicación de la fuerza.
- Velocidad de deformación real aplicada.
- Tensión de fluencia resultante.
- Tensión de fluencia resultante si la operación se desarrolla a una temperatura de 600 °C, sabiendo que  $C(T) = C(T_0) \cdot [T/2300]$  y  $n(T) = n(T_0) \cdot [0.00028 \cdot T]$ .
- Fuerza requerida para efectuar la conformación a 600 °C.

a)  $a = 3$  mm

b)  $e = -0.25$  ;  $\epsilon = -0.288$

c)  $\dot{\epsilon} = 2$  s<sup>-1</sup>

d)  $\sigma(T_0) = 305.8$  MPa

e)  $\sigma(600) = 119.3$  MPa

f)  $F(600) = 76.34$  kN



## CAPÍTULO 3. LAMINACIÓN

### 3.1. Planteamiento analítico

La laminación es un proceso de conformación por deformación plástica en el cual el material es deformado en una dirección preferente, mediante fuerzas de compresión ejercidas al hacer pasar el metal entre varios cilindros, y de cizallamiento, originadas por la fricción originada entre los cilindros y el metal. Estos cilindros o rodillos están separados una distancia inferior al espesor  $t_0$  del metal entrante y rotan en sentido contrario (fig. 3.1). Los rodillos giran con una velocidad superficial ligeramente superior a la del metal entrante, debido al deslizamiento con la superficie de la pieza, logrando impulsar el metal hacia delante que sale del laminador con un espesor final inferior al inicial,  $t_f$ .

Se considera que la anchura del material  $b$  se mantiene constante durante el proceso (eje principal 2), en consecuencia la reducción de espesor (a lo largo del eje principal 3) supone un incremento de longitud en la pieza (a lo largo del eje principal 1).

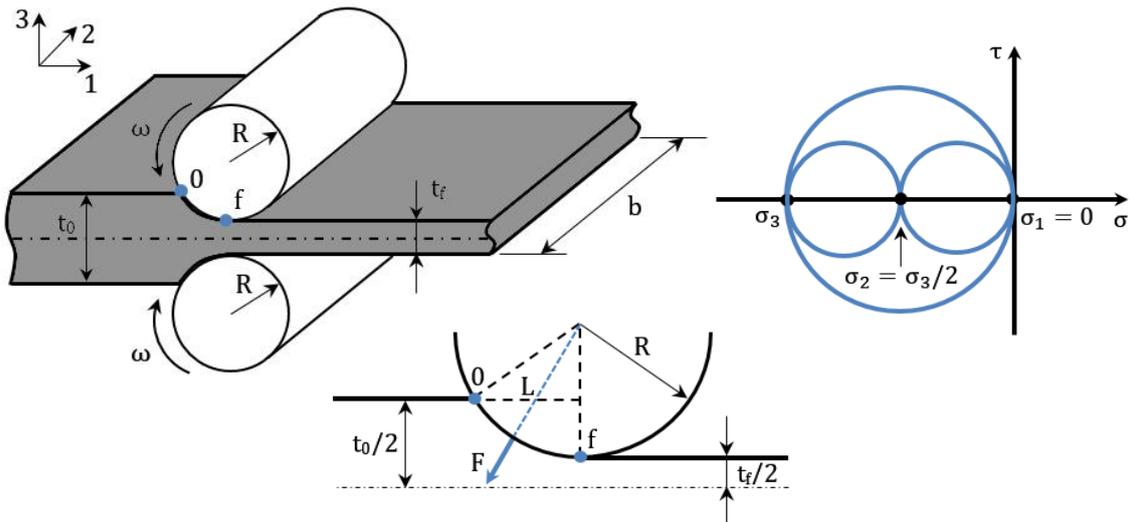


Figura 3.1. Representación esquemática de un proceso de laminación.

Considerando el sistema de ejes principales mostrado en la figura (fig. 3.1), se tiene el siguiente tensor de esfuerzos para procesos de laminación simple:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{2A} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F}{A} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \equiv Y = \frac{\sqrt{3}}{2} F/A$$

Donde el área  $A$  de la pieza sobre la que actúa la fuerza de laminación  $F$  se puede estimar en función de la reducción de espesor  $\Delta t$ , asumiendo que  $R \gg \Delta t$ :

$$A \approx b \cdot L; R^2 = L^2 + (R - \Delta t/2)^2 \Rightarrow \left( R \cdot \Delta t \gg \frac{\Delta t^2}{4} \right) \Rightarrow L \approx \sqrt{R \cdot \Delta t} \Rightarrow A \approx b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t}$$

El tensor de deformaciones y la deformación equivalente, son:

$$\epsilon_2 = 0 \Rightarrow (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0) \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + 0 + (-\epsilon_1)^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\epsilon_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\epsilon_3; \epsilon_3 = \ln \frac{t_f}{t_0}$$

La reducción de área vendrá dada por la siguiente expresión:

$$RA(\%) = 100 \cdot \frac{b \cdot t_0 - b \cdot t_f}{b \cdot t_0} \Rightarrow RA(\%) = 100 \cdot \frac{t_0 - t_f}{t_0}$$

Además, también existe una reducción de espesor máxima que puede lograrse en un proceso de laminación para vencer la fuerza de fricción que existe entre la pieza y los rodillos, para un factor de fricción, cuyo valor aproximado es:

$$t_0 - t_{f,\min} = \mu^2 \cdot R$$

Cuando se requiere considerar el efecto de la fricción sobre la fuerza de laminación  $F$  (el coeficiente de fricción suele ser bajo cuando se trata de procesos en caliente;  $\mu < 0.1$ ), se puede aplicar un factor de seguridad de 1.2 para realizar una primera estimación.

$$F^* \approx 1.2 \cdot F; F = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot A \cdot Y \Rightarrow F \cong \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot b \cdot L \cdot Y_m; Y_m = \frac{Y_0 + Y_f}{2}$$

siendo  $Y_m$  la tensión de fluencia media entre el inicio '0' y el final 'f' de la laminación.

Cuando la tensión de fluencia del material es la obtenida en un ensayo de compresión,  $S$  (ensayo Ford), se ha de tener en cuenta que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\sigma_e \equiv Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S; \epsilon_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \epsilon_e$$

En consecuencia, el trabajo de deformación homogénea por unidad de longitud puede quedar expresado de la siguiente manera:

$$W_{\text{int}} = V \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = t_0 \cdot b \cdot l \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S \cdot d\epsilon_e \Rightarrow \frac{W_{\text{int}}}{V} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e(\epsilon_s) \cdot d\epsilon_e$$

En cuanto a la potencia  $P$  y el par  $M$  requeridos por el sistema de laminación, estos pueden estimarse de manera sencilla, para cada rodillo, como:

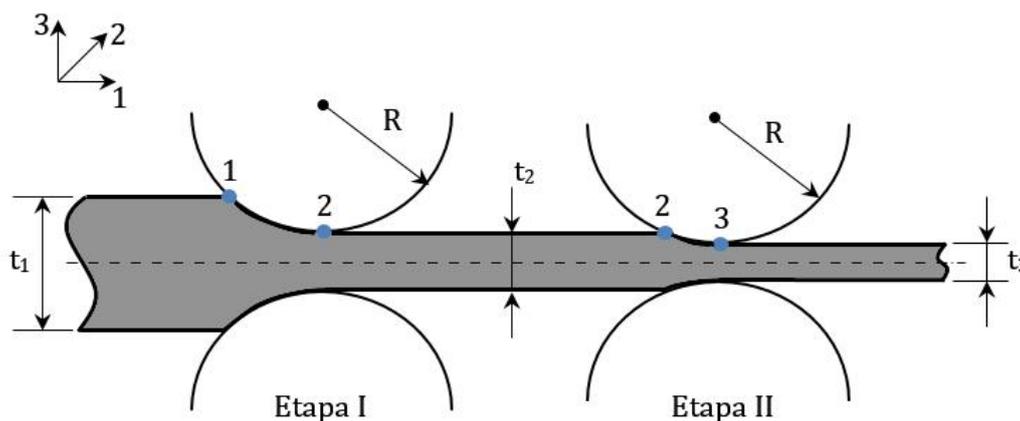
$$P = \pi \cdot n \cdot F \cdot L = M \cdot \omega; M = F \cdot L/2$$

### 3.2. Problemas resueltos

#### PROBLEMA 25

Se desea laminar en frío chapa de acero de 8 mm de espesor y 400 mm de ancho, con objeto obtener un espesor final de 2 mm. Sabiendo que los rodillos laminadores tienen un diámetro de 200 mm, que el comportamiento del acero obtenido en un ensayo de compresión en condiciones de deformación plana es  $S = 280 + 350\epsilon_s$  MPa, y que se ha estimado un coeficiente de fricción de 0.2, determinar:

- Número de etapas necesarias para lograr la reducción de espesor deseada.
- Deformaciones y tensiones equivalentes en el proceso.
- Fuerza requerida en cada etapa de laminación, tomando un factor de corrección de 1.4.
- Tensiones teóricas o ideales en los ejes principales.
- Trabajo de deformación homogénea por unidad de longitud.
- Potencia real necesaria del tren de laminación si la velocidad de rotación de los rodillos es 20 rpm.
- Máxima velocidad de laminación que podría lograrse con un laminador de 500 kW.



a) Para un coeficiente de fricción conocido entre el material de trabajo y los rodillos laminadores, es posible estimar la reducción de espesor máxima que se puede lograr en el proceso, lo que permite determinar el número de etapas de laminación necesarias:

$$t_0 - t_{f,\min} = \mu^2 \cdot R \Rightarrow t_{f,\min} = t_0 - \mu^2 \cdot R = 8 - 0.2^2 \cdot 100 \Rightarrow t_{f,\min} = 4 \text{ mm}$$

Como se parte de una chapa de 8 mm, se requiere al menos una segunda etapa de laminación, lo que implica la realizar la misma comprobación sobre la máxima reducción de espesor:

$$t_0 - t_{f,\min} = \mu^2 \cdot R \Rightarrow t_0 = t_{f,\min} + \mu^2 \cdot R = 2 + 0.2^2 \cdot 100 \Rightarrow t_0 = 6 \text{ mm}$$

Por tanto, en una primera etapa de laminación es posible alcanzar un espesor mínimo de 4 mm, partiendo de una chapa de 8 mm, y en una segunda etapa basta con partir de una chapa de 6 mm para obtener un espesor final de 2 mm.

Repartiendo por igual la deformación a aplicar en ambas etapas, se tendría lo siguiente:

Etapla I:

$$t_{0,I} \equiv t_1 = 8 \text{ mm}, t_{f,I} \equiv t_2 = 5 \text{ mm}$$

Etapla II:

$$t_{0,II} \equiv t_2 = 5 \text{ mm}, t_{f,II} \equiv t_3 = 2 \text{ mm}$$

b) En los procesos de laminación se puede considerar que no existen variaciones en el ancho de la pieza, por lo que es habitual asumir que  $\epsilon_2 = 0$ . Tomando el sistema de ejes principales definido en la figura, y según el principio de conservación del volumen, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 &= 0 \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3 \\ \epsilon_e &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \epsilon_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \epsilon_3 ; \epsilon_3 = \ln(t_f/t_0) \end{aligned}$$

Por su parte, las relaciones entre la deformación equivalente y las deformaciones obtenidas en un ensayo de compresión en condiciones de deformación plana, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \epsilon_e \\ \epsilon_s &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{t_f}{t_0}\right) \Rightarrow \epsilon_s = \ln\left(\frac{t_0}{t_f}\right) \\ S &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Y \end{aligned}$$

Etapla I:

$$\epsilon_{s,I} = \ln\left(\frac{t_1}{t_2}\right) = \ln\left(\frac{8}{5}\right) \Rightarrow \epsilon_{s,I} = 0.47 ; \epsilon_I = 0.543$$

$$S_{I,1} = 280 + 350 \cdot 0 = 280 \text{ MPa} ; S_{I,2} = 280 + 350 \cdot 0.47 = 444.5 \text{ MPa}$$

$$S_{m,I} = \frac{S_{I,1} + S_{I,2}}{2} \Rightarrow S_{m,I} = 362.25 \text{ MPa} ; Y_{m,I} = 313.718 \text{ MPa}$$

Etapla II:

$$\epsilon_{s,II} = \ln\left(\frac{t_2}{t_3}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \epsilon_{s,II} = 1.386 ; \epsilon_{II} = 1.601$$

$$S_{I,2} = S_{II,1} = 444.5 \text{ MPa} ; S_{II,2} = 280 + 350 \cdot 1.386 = 765.2 \text{ MPa}$$

$$S_{m,II} = \frac{S_{II,1} + S_{II,2}}{2} \Rightarrow S_{m,II} = 604.85 \text{ MPa} ; Y_{m,II} = 523.82 \text{ MPa}$$

c)

El área sometida a deformación plástica es:  $A = b \cdot L \approx b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t}$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{F}{A} \geq Y \Rightarrow F = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Y \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t} = S \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t}$$

Etapa I:

$$F_I = S_{m,I} \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t_I} = 362.25 \cdot 10^6 \cdot 0.4 \cdot \sqrt{0.1 \cdot (8 - 5) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow F_I = 2509.7 \text{ kN}$$

Etapa II:

$$F_{II} = S_{m,II} \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t_{II}} = 604.85 \cdot 10^6 \cdot 0.4 \cdot \sqrt{0.1 \cdot (5 - 2) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow F_{II} = 4190.5 \text{ kN}$$

A efectos prácticos, resulta necesario considerar la aportación de la fricción a la fuerza total desarrollada durante el proceso de laminación.

Para procesos acometidos en caliente, la fuerza puede ser mayorada un 20% para tener en cuenta la fricción, pero en esta ocasión la laminación se realiza en frío y, por tanto, se ha de optar por un factor de seguridad mayor, que es del 40%:

$$F^* \approx 1.4 \cdot F \Rightarrow F_I^* = 3513.6 \text{ kN}; F_{II}^* = 5866.7 \text{ kN}$$

d)

$$\sigma_{1,I} = \sigma_{1,II} = 0; \sigma_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} = -\frac{1}{2} \cdot S; \sigma_3 = -\frac{F}{A} = -S$$

Etapa I:

$$\sigma_{2,I} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{F_I}{A} = -\frac{2509.7 \cdot 10^3}{2 \cdot 0.4 \cdot \sqrt{0.3 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow \sigma_{2,I} = -181.12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3,I} = -\frac{F_I}{A} = -\frac{2509.7 \cdot 10^3}{0.4 \cdot \sqrt{0.3 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow \sigma_{3,I} = -362.24 \text{ MPa}$$

Etapa I:

$$\sigma_{2,II} = -\frac{1}{2} \cdot S_{m,II} = -\frac{4190.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 0.4 \cdot \sqrt{0.3 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow \sigma_{2,II} = -302.43 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3,II} = -S_{m,II} = -\frac{4190.5 \cdot 10^3}{0.4 \cdot \sqrt{0.3 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow \sigma_{3,II} = -604.85 \text{ MPa}$$

e) A su vez, para calcular dicho trabajo interno, se debe operar con deformaciones y tensiones equivalentes, de modo que:

$$\frac{W_{\text{int}}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t_0 \cdot b \cdot \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} (80 + 350 \cdot \epsilon_s) \cdot d\epsilon_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t_0 \cdot b \cdot \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} (80 + 350 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \epsilon_e) \cdot d\epsilon_e$$

Etapa I:

$$\frac{W_{\text{int,I}}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 0.4 \cdot \int_0^{0.543} (80 + 350 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \epsilon_e) \cdot 10^6 \cdot d\epsilon_e \Rightarrow \frac{W_{\text{int,I}}}{l} = 244.22 \frac{\text{kJ}}{\text{m}}$$

Etapa II:

$$\frac{W_{\text{int,II}}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 0.4 \cdot \int_{0.543}^{1.601} (80 + 350 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \epsilon_e) \cdot 10^6 \cdot d\epsilon_e \Rightarrow \frac{W_{\text{int,II}}}{l} = 1186.72 \frac{\text{kJ}}{\text{m}}$$

f) La potencia necesaria para realizar una etapa de laminación, es decir, para cada par de rodillos de laminación (superior e inferior), viene dada por la siguiente expresión:

$$P = 2\pi \cdot n \cdot F \cdot L = F \cdot v = M \cdot \omega; L \approx \sqrt{R \cdot \Delta t}$$

Ya que se trata de la potencia de laminación necesaria para el proceso completo, habrá que considerar potencia máxima de todas las etapas de laminación y tener en cuenta en la estimación la fuerza real a ejercer por los rodillos:

Etapa I:

$$P_I^* = 2\pi \cdot n \cdot F_I^* \cdot L = 2\pi \cdot \frac{20}{60} \cdot 3513.6 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{0.1 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow P_I^* = 127.46 \text{ kW}$$

Etapa II:

$$P_{II}^* = 2\pi \cdot n \cdot F_{II}^* \cdot L = 2\pi \cdot \frac{20}{60} \cdot 5866.7 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{0.1 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow P_{II}^* = 212.82 \text{ kW}$$

g) A efectos de ritmo productivo, disponiendo de un tren laminador con 500 kW, la máxima velocidad de laminación viene dada por la primera etapa, que demanda una fuerza menor:

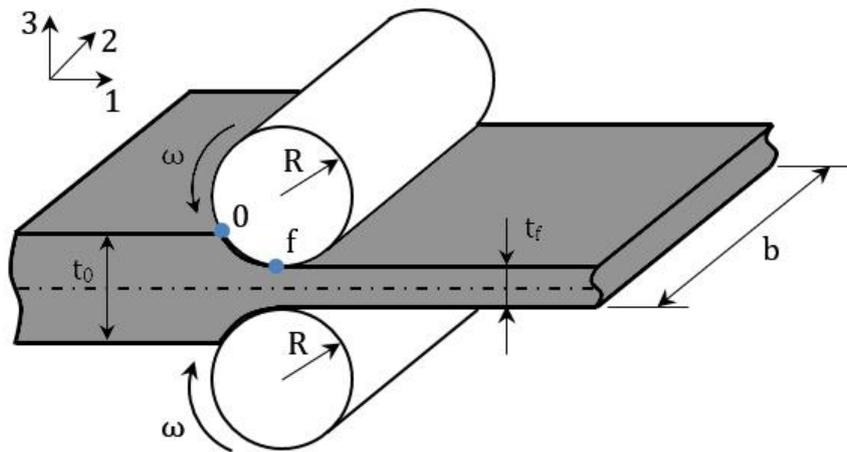
$$P = 2\pi \cdot n \cdot F \cdot L = F \cdot v \Rightarrow v_{\text{max}} = \frac{P}{F_{\text{min}}} = \frac{500}{3513.6} \Rightarrow v_{\text{max}} = 14.23 \text{ mm/s}$$

En el Anexo III se puede encontrar más información sobre otros trenes de laminación comerciales, en función de su potencia y sección transversal de trabajo.

**PROBLEMA 26**

Se desea reducir 5 mm una chapa de 30 mm el espesor de mediante un proceso de laminación, siendo el ancho de la chapa de 700 mm y empleando unos cilindros de laminación de 250 mm de radio. Si la tensión de fluencia del material, obtenida en un ensayo de compresión en condiciones deformación plana es:  $S = 400 + 200\epsilon_s$  MPa, asumiendo la ausencia de fuerzas externas y despreciando las fuerzas de fricción, determinar:

- Deformaciones en los ejes principales y deformación equivalente.
- Fuerza F necesaria para realizar la laminación.
- Par que ha de generar cada cilindro.
- Tensiones en los ejes principales definidos en la figura.
- Trabajo realizado por unidad de volumen.
- Potencia del laminador si los cilindros giran a 30 rpm.



a)

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow (\epsilon_2 = 0) \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3$$

$$\epsilon_3 = \ln(t_f/t_0) = \ln(25/30) \Rightarrow \epsilon_3 = -0.182 = -\epsilon_1$$

$$\epsilon_e = -\frac{2}{\sqrt{3}}\epsilon_3 \Rightarrow \epsilon_e = 0.211$$

b) Para determinar la fuerza F, es necesario determinar en primer lugar la tensión media desarrollada durante el proceso de laminación, lo cual requiere a su vez calcular previamente la deformación equivalente asociada a dicha conformación:

$$\epsilon_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \epsilon_e = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\epsilon_3 \Rightarrow \epsilon_s = -\epsilon_3 = \ln(t_0/t_f)$$

$$S_1 = 400 + 200 \cdot 0 = 400 \text{ MPa}; S_2 = 400 + 200 \cdot \ln\left(\frac{30}{25}\right) = 454.7 \text{ MPa}$$

$$S_m = \frac{S_1 + S_2}{2} \Rightarrow S_m = 427.35 \text{ MPa}$$

El área sometida a deformación es:  $A = b \cdot L \approx b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t}$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{F}{A} \geq Y \Rightarrow F = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Y \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t} = S \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t}$$

$$F = 427.35 \cdot 10^6 \cdot 0.7 \cdot \sqrt{0.25 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \mathbf{F = 10.58 MN}$$

c)

$$M = F \cdot \frac{L}{2} = 0.5 \cdot 10.58 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{0.25 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \mathbf{M = 187 kNm}$$

d)

$$\sigma_1 = \mathbf{0}; \sigma_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} = -\frac{1}{2} \cdot S; \sigma_3 = -\frac{F}{A} = -S$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2} \cdot S_m \Rightarrow \sigma_2 = \mathbf{-213.68 MPa}$$

$$\sigma_3 = -\frac{F}{A} = -S_m \Rightarrow \sigma_3 = \mathbf{-427.35 MPa}$$

d)

$$W_{\text{int}} = V \cdot \int_{\epsilon_{e,1}}^{\epsilon_{e,2}} S \cdot d\epsilon_e \Rightarrow \frac{W_{\text{int}}}{V} = \int_0^{\epsilon_e} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_e(\epsilon_s) \cdot d\epsilon_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int_0^{\epsilon_e} (400 + 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \epsilon_e) \cdot d\epsilon_e$$

$$\Rightarrow \frac{W_{\text{int}}}{V} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left[ 400 \cdot 0.211 + 200 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{0.211^2}{4} \right] \Rightarrow \frac{W_{\text{int}}}{V} = \mathbf{76.43 MJ/m^3}$$

e)

$$P = 2\pi \cdot n \cdot F \cdot L = M \cdot \omega = M \cdot 2\pi \cdot n = 187000 \cdot 2\pi \cdot \frac{30}{60} \Rightarrow \mathbf{P = 587.48 kW}$$

**PROBLEMA 27**

Mediante un proceso de laminación, una chapa de 10 mm de espesor anchura 450 mm reduce su espesor hasta 8 mm, empleando rodillos de 300 mm de diámetro. La tensión de fluencia del material, obtenida en un ensayo de tracción uniaxial, es:  $\sigma = 200 + 150 \cdot \epsilon^{0.8}$  MPa. Despreciando las fuerzas fricción, hallar:

- Deformación equivalente.
- Tensión equivalente.
- Fuerza F necesaria para fabricar la pieza.
- Tensiones en los ejes principales.
- Trabajo ideal por unidad de volumen.
- Selección del tren de laminación comercial más apropiado para esta aplicación, de modo que se logre una velocidad de laminación de 300 mm/s.

Modelo	Potencia (kW)	Diámetro de rodillos (mm)	Tipo de sección transversal
TL-35-3-500	500	300	Chapa
TL-30-3/4-630	630	300	Perfil
TL-30-5-1000	1000	300	Cuadrada/chapa

a) Tomando el habitual sistema de ejes principales para el proceso de laminación, se tiene:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow (\epsilon_2 = 0) \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} \Rightarrow \epsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}}\epsilon_1 = \frac{-2}{\sqrt{3}}\epsilon_3 = \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{t_f}{t_0}\right)$$

$$\epsilon_e = \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{8}{10}\right) \Rightarrow \epsilon_e = \mathbf{0.258}$$

b)

$$Y_0 = 200 + 150 \cdot 0^{0.8} = 200 \text{ MPa}; Y_f = 200 + 150 \cdot 0.258^{0.8} = 250.74 \text{ MPa}$$

$$Y_m = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_f) = \frac{200 + 250.74}{2} \Rightarrow Y_m = \mathbf{225.37 \text{ MPa}}$$

c)

El área sometida a deformación es:  $A = b \cdot L \approx b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t}$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{F}{A} \geq Y_m \Rightarrow Y_m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{F}{A} \Rightarrow F = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Y_m \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t}$$

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 225.37 \cdot 10^6 \cdot 0.45 \cdot \sqrt{0.15 \cdot 0.002} \Rightarrow F = \mathbf{2028.33 \text{ kN}}$$

d)

$$\sigma_1 = 0; \sigma_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Y_m; \sigma_3 = -\frac{F}{A} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Y_m$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Y_m = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 225.37 \Rightarrow \sigma_2 = -130.12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Y_m = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 225.37 \Rightarrow \sigma_3 = -260.24 \text{ MPa}$$

e)

$$W_{\text{int}} = V \cdot \int_{\epsilon_{e,1}}^{\epsilon_{e,2}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e \Rightarrow \frac{W_{\text{int}}}{V} = \int_0^{0.258} (200 + 150 \cdot \epsilon_e^{0.8}) d\epsilon_e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W_{\text{int}}}{V} = 200 \cdot 0.258 + 150 \cdot \frac{0.258^{1.8}}{1.8} \Rightarrow \frac{W_{\text{int}}}{V} = 58.87 \text{ MJ/m}^3$$

f)

$$P = F \cdot v = 2028.33 \cdot 0.3 = 608.5 \text{ kW}$$

Dado que el tren de laminación de 630 kW es un modelo específico para perfilera (ver Anexo III), la opción más adecuada para esta aplicación, de entre las disponibles, es el modelo:

**TL-30-5-1000**

**PROBLEMA 28**

Para realizar el proceso de laminación de un material con una tensión de fluencia de 500 N/mm<sup>2</sup>, 50 mm de espesor y 1000 mm de anchura se dispone de un tren de laminación con las características indicadas en la tabla adjunta. Si se desea realizar la laminación sin sobrepasar el 90% de la potencia y con una velocidad de producción de 30 mm/s, calcular:

- Fuerza F que deben ejercer los rodillos.
- Espesor final que se obtendría en el proceso.
- Velocidad de rotación de los rodillos necesaria para obtener el mínimo espesor posible, con un coeficiente de fricción de 0.3 y manteniendo el mismo nivel de carga del laminador.
- Reducción de sección resultante en cada caso.

Modelo	Potencia (kW)	Diámetro de rodillos (mm)	Tipo de sección transversal
TL-35-3-500	500	300	Chapa

a)

$$P = F \cdot v \Rightarrow 0.9 \cdot 500 \cdot 10^3 = F \cdot 0.03 \Rightarrow \mathbf{F = 15 \text{ MN}}$$

b)

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Y \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 500 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot \sqrt{0.15 \cdot (0.05 - t_f)} = 15 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{t_f = 45.5 \text{ mm}}$$

c)

$$t_0 - t_{f,\min} = \mu^2 \cdot R \Rightarrow t_{f,\min} = 50 \cdot 10^{-3} - 0.3^2 \cdot 0.15 \Rightarrow t_{f,\min} = 36.5 \text{ mm}$$

$$F_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Y \cdot b \cdot \sqrt{R \cdot \Delta t_{\max}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 500 \cdot 1 \cdot \sqrt{0.15 \cdot (0.05 - 0.0365)} \Rightarrow F_{\max} = 26 \text{ MN}$$

$$P = F \cdot v \Rightarrow 0.9 \cdot 500 \cdot 10^3 = 26 \cdot 10^6 \cdot v_{\min} \Rightarrow \mathbf{v_{\min} = 17.3 \text{ mm/s}}$$

d)

$$RA(\%) = 100 \cdot \frac{b \cdot t_0 - b \cdot t_f}{b \cdot t_0} = 100 \cdot \frac{50 - 45.5}{50} \Rightarrow \mathbf{RA = 9 \%}$$

$$RA_{\min}(\%) = 100 \cdot \frac{b \cdot t_0 - b \cdot t_{f,\min}}{b \cdot t_0} = 100 \cdot \frac{50 - 36.5}{50} \Rightarrow \mathbf{RA_{\min} = 27 \%}$$

### 3.3. Problemas propuestos

#### PROBLEMA 29

Se desea reducir el espesor de una chapa de 10 mm a 8.5 mm, mediante un proceso de laminación, siendo el ancho de la misma de 600 mm y el diámetro de los rodillos de laminación de 400 mm. Si la tensión de fluencia del material, obtenida en un ensayo de tracción uniaxial, es  $\sigma = 300 + 180\epsilon$  MPa, y se considera despreciable el efecto de la fricción, determinar:

- Fuerza  $F$  necesaria para laminar la chapa.
- Tensiones en los ejes principales.
- Trabajo de deformación homogénea por unidad de volumen.

a)  $F = 3803 \text{ kN}$

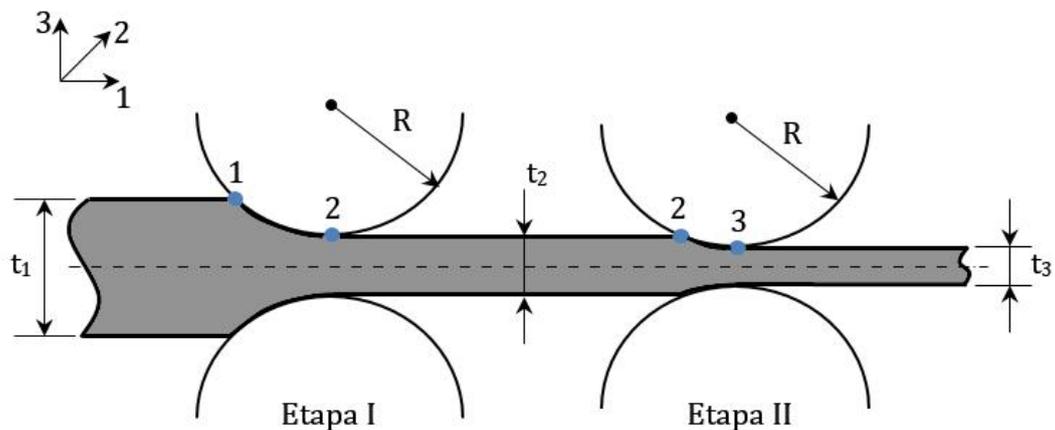
b)  $\sigma_1 = 0$  ;  $\sigma_2 = -183 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_3 = -365.9 \text{ MPa}$

c)  $\frac{W}{V} = 59.58 \text{ MJ/m}^3$

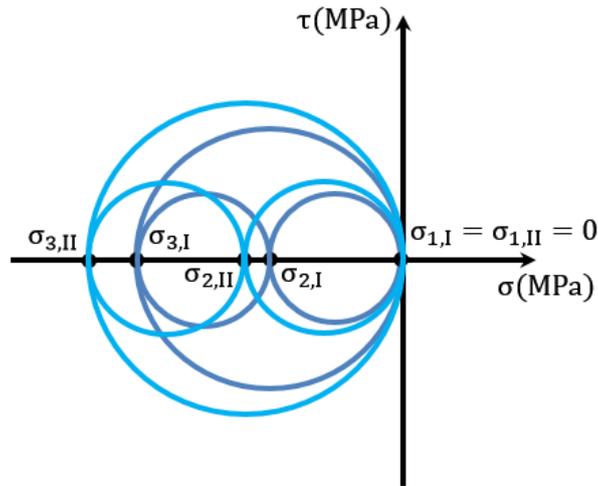
#### PROBLEMA 30

En un tren de laminación se pretende reducir una chapa de acero recocido de 3 mm de espesor y 1000 mm de ancho a 2 mm de espesor en dos etapas; de 3 a 2.5 mm en la primera etapa y de 2.5 a 2 mm en la segunda. Si los cilindros de laminación tienen 300 mm de diámetro y la tensión de fluencia obtenida en un ensayo de compresión en condiciones e deformación plana es  $S = 500 + 300\epsilon_s$  MPa, calcular:

- Deformaciones equivalentes.
- Tensión de fluencia desarrollada.
- Fuerza  $F$  necesaria a aplicar por los cilindros.
- Tensiones principales generadas.
- Representación gráfica de los círculos de Mohr.



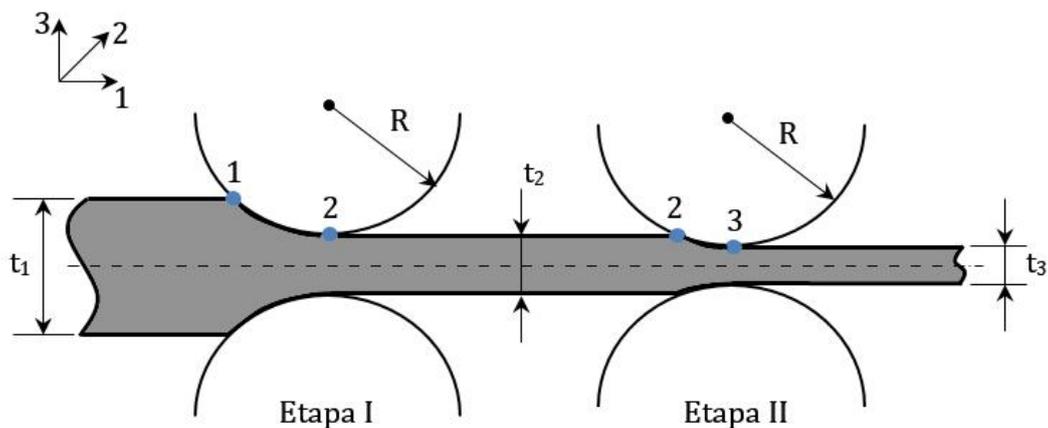
- a)  $\epsilon_{s,I} = 0.182$  ;  $\epsilon_{s,II} = 0.405$
- b)  $S_{m,I} = 527.3 \text{ MPa}$  ;  $S_{m,II} = 574.4 \text{ MPa}$
- c)  $F_I = 4567 \text{ kN}$  ;  $F_{II} = 4974 \text{ kN}$
- d)  $\sigma_{1,I} = 0$  ;  $\sigma_{2,I} = -263.65 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_{3,I} = -527.3 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{1,II} = 0$  ;  $\sigma_{2,II} = -287.2 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_{3,II} = -574.4 \text{ MPa}$
- e)



**PROBLEMA 31**

Se desea reducir el espesor de una chapa de acero de 5 mm a 4 mm en una primera etapa de laminación, y a 2.5 mm en una segunda etapa, siendo su ancho de 1500 mm. Si los rodillos de los laminadores tienen un diámetro de 300 mm y la tensión de fluencia obtenida en un ensayo de compresión en condiciones de deformación plana es  $S = 440 + 320\epsilon_s$  MPa, determinar:

- a) Fuerza requerida en la primera etapa de laminación.  
 b) Fuerza requerida en la segunda etapa de laminación.  
 c) Error que se cometería al considerar una tensión de fluencia constante en cada etapa.



- a)  $F_I = 8740 \text{ kN}$
- b)  $F_{II} = 13198.5 \text{ kN}$
- c)  $\epsilon_I(\%) = 8.12$  ;  $\% \epsilon_{II}(\%) = 33.32 \%$

### PROBLEMA 32

Se pretende laminar chapa de bronce ASTM PB104 de 8 mm de espesor y 800 mm de ancho, en un tren de laminación con unos rodillos de 400 mm de diámetro, con el fin de reducir su espesor a 6 mm. Calcular:

- a) Fuerza F necesaria para realizar la conformación.
- b) Reducción de la fuerza aplicada que se lograría si en la salida del laminador se aplica una fuerza  $F_{ext}$  de 30 kN a tracción en la dirección de avance de la chapa.

- a)  $F = 6651 \text{ kN}$
- b)  $\Delta F = 283 \text{ kN}$

## CAPÍTULO 4. TREFILADO

### 4.1. Planteamiento analítico

El trefilado son procesos de conformado por deformación plástica en los cuales la deformación permanente es producida por fuerzas de tracción aplicadas en el material deformado. La fuerza o carga aplicada genera una reducción de la sección y un alargamiento del material, al hacerlo pasar a través de orificios calibrados, denominados hileras (fig. 4.1). El principal objetivo del proceso de trefilado es conseguir grandes reducciones de sección, por lo que se suelen realizar diversas pasadas de reducción progresiva durante la conformación.

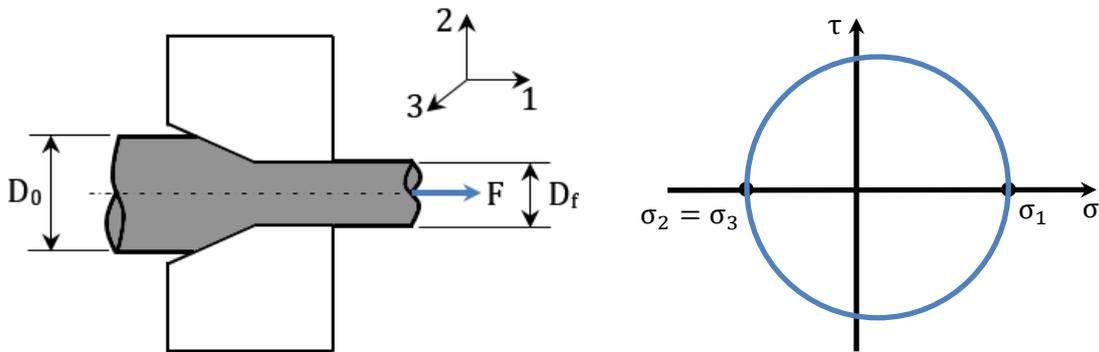


Figura 4.1. Representación del proceso de trefilado de un material de sección circular.

Para el sistema de ejes principales indicado en fig. 4.1, el tensor de tensiones asociado a este tipo de procesos y la tensión equivalente son:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}; \sigma_1 > 0 \text{ y } \sigma_2 = \sigma_3 < 0$$

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_1 - \sigma_2$$

Las deformaciones principales y la deformación equivalente ejercidas sobre material son las siguientes:

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0) \Rightarrow \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{1}{2}\epsilon_1$$

$$\epsilon_1 = \ln \frac{l_f}{l_0} = \ln \frac{A_0}{A_f} = 2 \cdot \ln \frac{D_0}{D_f}$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} = \epsilon_1$$

En el trefilado, la fuerza de tracción máxima que se puede aplicar a la salida de la hilera queda limitada por la resistencia del material deformado, es decir, por la tensión de fluencia del material a la salida de la hilera.

Por tanto, la máxima reducción de área que puede alcanzarse en un proceso de este tipo debe cumplir la siguiente condición límite:

$$A_f \equiv A_{f,\min} \leftrightarrow \int_0^{\epsilon_{\max}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = Y_f$$

Si se considera que la deformación experimentada por el material es homogénea, es decir, que pueden despreciarse las fuerzas de fricción y el trabajo redundante, el trabajo de deformación vendría dado por la siguiente expresión:

$$W_{\text{int}} = V_f \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e$$

Siendo  $V_f$  ( $V_f = A_f \cdot L_f$ ) el volumen de material sometido a la conformación.

Por su parte, el trabajo externo que es necesario aplicar sobre el material puede determinarse como:

$$W_{\text{ext}} = F \cdot L_f$$

Igualando el trabajo externo al trabajo de deformación homogénea, se puede obtener la siguiente expresión para la fuerza o carga necesaria para deformar plásticamente el material:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \Rightarrow F = A_f \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = A_f \cdot Y_f$$

En consecuencia, la potencia requerida para realizar el proceso viene dada por la siguiente expresión:

$$P = F \cdot v = Y_f \cdot A_f \cdot v_f$$

Dado que este proceso suele realizarse en diversas etapas, se suele imponer en cada etapa una cierta reducción porcentual de área transversal, que viene dada por:

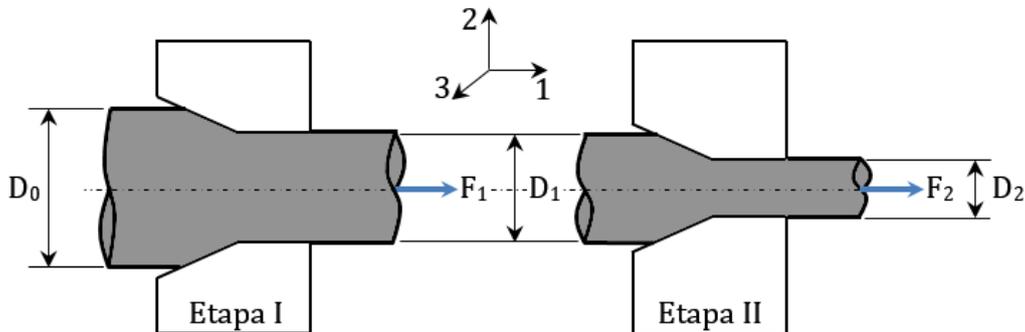
$$RA(\%) = 100 \cdot \left(1 - \frac{A_f}{A_0}\right)$$

4.2. Problemas resueltos

**PROBLEMA 33**

En una empresa se pretende fabricar cable de 1.5 mm de diámetro de un cobre comercial, disponible en redondos normalizados de 5, 6, 8 y 10 mm. El comportamiento del material se puede describir razonablemente por la ecuación:  $\sigma = 70 + 320 \epsilon$  (MPa). Teniendo en cuenta que la maquinaria disponible en la empresa, dispone de hileras normalizadas para diámetros de entrada de: 0.5, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 mm, se desea poder acometer este proceso en solo dos etapas, asegurando una velocidad de alimentación en la primera etapa de 130 mm/s. Suponiendo que el trabajo de fricción y redundante suponen el 63% de trabajo de deformación homogénea, determinar:

- a) Máxima reducción posible en cada etapa.
- b) Diámetro más económico que se puede emplear e hileras normalizadas a utilizar.
- c) Deformaciones que se producirán en las hileras disponibles y material seleccionado en el anterior apartado.
- d) Fuerza de tracción necesaria en cada etapa.
- e) Velocidad a la salida de cada etapa.
- f) Potencia consumida en cada etapa.
- g) Trabajo mecánico  $W_{ext}$  por unidad de volumen requerido en cada etapa.



- a) La máxima reducción de área que se puede obtener en un proceso de trefilado es:

$$A_f \equiv A_{f,min} \leftrightarrow \int_0^{\epsilon_{max}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = Y_f$$

La máxima deformación ( $\epsilon_{max}$ ) que podría producirse en cada etapa del proceso es:

Etapa I:

$$\int_0^{\epsilon_{max,I}} (70 + 320\epsilon_e) \cdot d\epsilon_e = 70 + 320\epsilon_I \Rightarrow 70\epsilon_I + 160\epsilon_I^2 = 70 + 320\epsilon_I \Rightarrow$$

$$16\epsilon_I^2 - 25\epsilon_I - 7 = 0 \Rightarrow (\epsilon_I > 0) \Rightarrow \epsilon_{I,max} = \mathbf{1.8}$$

Etapa II:

$$\int_{\epsilon_{\max,I}}^{\epsilon_{\max,II}} (400 + 90\epsilon_e) \cdot d\epsilon_e = 70 + 320\epsilon_{II} = 70\epsilon_{II} + 160\epsilon_{II}^2 - 70 \cdot 1.8 - 160 \cdot 1.8^2 \Rightarrow$$

$$16\epsilon_{II}^2 - 25\epsilon_{II} - 71.44 = 0 \Rightarrow (\epsilon_{II} > 0) \Rightarrow \epsilon_{\max,II} = \mathbf{3.03}$$

b) Dado que se conoce la deformación real máxima en cada etapa y el diámetro final que se desea obtener, es posible deducir el máximo diámetro de entrada que admitiría el proceso:

$$\epsilon = \ln \frac{d_0^2}{d_f^2} \Rightarrow e^{\epsilon_{\max}} = \frac{d_{0,\max}^2}{d_f^2} \Rightarrow d_{0,\max} = d_{II} \cdot \sqrt{e^{\epsilon_{II,\max}}} = 1.5 \cdot \sqrt{e^{3.03}} \Rightarrow d_{0,\max} = 6.82 \text{ mm}$$

En este caso, entre los materiales disponibles, sería posible operar con los diámetros normalizados de 5 y 6 mm, siendo lógicamente el más económico el de 5 mm.

Una vez seleccionado el material de partida, análogamente, se puede calcular el diámetro mínimo que se podría obtener en la primera etapa:

$$e^{\epsilon_{\max}} = \frac{d_0^2}{d_{f,\min}^2} \Rightarrow d_{f,\min} = \frac{d_0}{\sqrt{e^{\epsilon_{\max,I}}}} = \frac{5}{\sqrt{e^{1.8}}} \Rightarrow \mathbf{d_{\min,I} = 2.033 \text{ mm}}$$

Por tanto, no es posible operar con las hileras de 0.5 y 2 mm de diámetro de entrada en la segunda etapa, **ha de emplearse la hilera de diámetro de entrada 4 mm**. En la **primera etapa ha de emplearse la hilera de diámetro de entrada 5 mm**.

c) Una vez seleccionadas las hileras de cada etapa, es posible determinar las deformaciones que se obtendrán:

$$\epsilon = \ln \frac{d_0^2}{d_f^2} \Rightarrow \epsilon_I = \ln \frac{5^2}{4^2} \Rightarrow \epsilon_I = \mathbf{0.446}$$

$$\epsilon = \ln \frac{d_0^2}{d_f^2} \Rightarrow \epsilon_{II} = \ln \frac{4^2}{1.5^2} \Rightarrow \epsilon_{II} = \mathbf{1.96}$$

d) Las fuerzas de tracción de cada etapa pueden calcularse a partir de ecuación:

$$F = A_f \cdot Y_f = A_f \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e$$

$$F_I = Y_{f,I} \cdot A_{f,I} = (70 + 320 \cdot 0.446) \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (4 \cdot 10^{-3})^2 \Rightarrow \mathbf{F_I = 2.673 \text{ kN}}$$

$$F_{II} = Y_{f,II} \cdot A_{f,II} = (70 + 320 \cdot 1.96) \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1.5 \cdot 10^{-3})^2 \Rightarrow \mathbf{F_{II} = 1.232 \text{ kN}}$$

e) Para calcular las velocidades de cada etapa del proceso, se puede hacer empleo de la condición de conservación del volumen:

$$V_0 = V_f \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot D_0^2 \cdot v_0 = \frac{\pi}{4} \cdot D_f^2 \cdot v_f \Rightarrow D_0^2 \cdot v_0 = D_f^2 \cdot v_f$$

$$v_I = v_0 \cdot \frac{d_0^2}{d_I^2} = 0.13 \cdot \frac{5^2}{4^2} \Rightarrow v_I = 0.2 \text{ m/s}$$

$$v_{II} = v_I \cdot \frac{d_I^2}{d_{II}^2} = 0.2 \cdot \frac{4^2}{1.5^2} \Rightarrow v_{II} = 1.42 \text{ m/s}$$

f) Potencia consumida en cada etapa del proceso:

$$P = Y_f \cdot A_f \cdot v_f = F \cdot v_f$$

$$P_I = F_I \cdot v_I = 2.673 \cdot 10^3 \cdot 0.2 \Rightarrow P_I = 535 \text{ W}$$

$$P_{II} = F_{II} \cdot v_{II} = 1.232 \cdot 10^3 \cdot 1.42 \Rightarrow P_{II} = 1750 \text{ W}$$

g) Puesto que existe una estimación de la energía disipada en el proceso, un 63% del trabajo de deformación homogénea, se tiene que:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} + W_f + W^* = W_{\text{int}} + 0.63 \cdot W_{\text{int}} = 1.63 \cdot W_{\text{int}}$$

$$W_{\text{ext}} = 1.63 \cdot V \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e \Rightarrow \frac{W_{\text{ext}}}{V} = 1.63 \cdot \left\{ \int_0^{0.446} \sigma_e \cdot d\epsilon_e + \int_{0.446}^{1.96} \sigma_e \cdot d\epsilon_e \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{W_{\text{ext}}}{V} = 1.63 \cdot \int_0^{1.96} (70 + 320\epsilon) \cdot d\epsilon \Rightarrow \frac{W_{\text{ext}}}{V} = 1225.5 \text{ MJ/m}^3$$

**PROBLEMA 34**

Un material caracterizado por la ecuación obtenida en un ensayo de compresión en condiciones de deformación plana  $S = 400 + 200 \epsilon_s$  MPa es sometido a una operación de trefilado con una velocidad a la salida de la hilera de 9 m/min, obteniéndose un el diámetro final de 1.8 mm. Determinar:

- a) Diámetro máximo inicial que se podría utilizar en este proceso.  
 b) Si el proceso podría llevarse a cabo con una máquina de 300 W de potencia.  
 c) Diámetro mínimo que se podría alcanzar en una segunda pasada, en el caso de que esto fuera posible.

a)

$$A_f \equiv A_{f,\min} \leftrightarrow \int_0^{\epsilon_{\max}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \int_0^{\epsilon_{s,\max}} S \cdot d\epsilon_s = Y_f$$

$$\int_0^{\epsilon_{s,\max}} (400 + 200\epsilon_s) \cdot d\epsilon_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (400 + 200\epsilon_s) \Rightarrow 400\epsilon + 100\epsilon_s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (400 + 200\epsilon_s)$$

$$\Rightarrow \epsilon_s^2 + (4 - \sqrt{3}) \cdot \epsilon_s - 2 \cdot \sqrt{3} = 0 \Rightarrow (\epsilon_s > 0) \Rightarrow \epsilon_{s,\max} = 1.05 ; \epsilon_{\max} = 1.21$$

$$\epsilon_e = \ln \frac{d_0^2}{d_f^2} \Rightarrow e^{\epsilon_{\max}} = \frac{d_{0,\max}^2}{d_f^2} \Rightarrow d_0 = d_f \cdot \sqrt{e^{\epsilon_{\max}}} = 1.8 \cdot \sqrt{e^{1.21}} \Rightarrow \mathbf{d_{0,\max} = 3.3 \text{ mm}}$$

b)

$$P = Y_f \cdot A_f \cdot v_f \Rightarrow P_I = \frac{\sqrt{3}}{2} (400 + 200 \cdot 1.05) \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1.8^2 \cdot 10^{-6} \cdot 0.15 \Rightarrow \mathbf{P = 202 \text{ W}}$$

La potencia requerida es de 202 W < 300 W; sí se podría llevar a cabo.

c)

$$\int_{\epsilon_{\max,I}}^{\epsilon_{\max,II}} (400 + 200\epsilon_s) \cdot d\epsilon_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (400 + 200\epsilon_s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_s^2 + (4 - \sqrt{3}) \cdot \epsilon_s - 8.77 = 0 \Rightarrow (\epsilon_s > 0) \Rightarrow \epsilon_{s,\max,II} = 2.036 ; \epsilon_{\max,II} = 2.351$$

$$\epsilon_e = \ln \frac{d_0^2}{d_f^2} \Rightarrow e^{\epsilon_{\max}} = \frac{d_0^2}{d_{f,\min}^2} \Rightarrow d_{f,\min} = \frac{d_0}{\sqrt{e^{\epsilon_{\max}}}} = \frac{3.3}{\sqrt{e^{2.351}}} \Rightarrow \mathbf{d_{f,\min,II} = 1.02 \text{ mm}}$$

d)

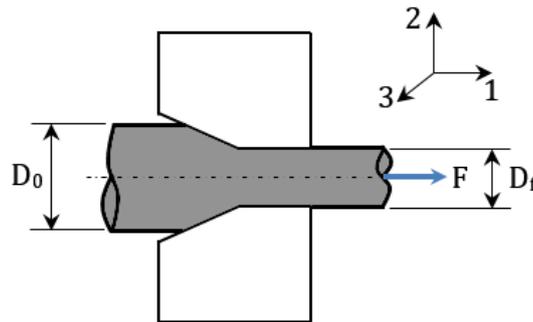
$$P = Y \cdot A_0 \cdot v_0 \Rightarrow P_{II} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (400 + 200 \cdot 2.036) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1.8^2 \cdot 0.15 \Rightarrow \mathbf{P_{II} = 266.8 \text{ W}}$$

La segunda etapa requiere una potencia de 267 W < 300 W; sí es posible realizarla.

**PROBLEMA 35**

Un cable de acero de 4 mm de diámetro es sometido a un proceso de trefilado hasta alcanzar un diámetro de 3 mm. Suponiendo que el material empleado puede caracterizarse su comportamiento mediante la ecuación  $\sigma = 350 + 200 \epsilon$  MPa y que se desprecian los efectos de la fricción, determinar:

- Fuerza de tracción mínima.
- Diámetro mínimo que se podría alcanzar si se realizara una segunda etapa.
- Reducción máxima de la segunda etapa.



a)

$$\epsilon_e = \epsilon_1 = \ln \frac{A_0}{A_f} = \ln \frac{D_0^2}{D_f^2} \Rightarrow \epsilon_e = 2 \cdot \ln \frac{4}{3} = 0.575$$

$$Y_f = \int_0^{\epsilon_e} (350 + 200\epsilon_e) \cdot d\epsilon_e = 350 \cdot 0.575 + 200 \cdot 0.575^2 \Rightarrow Y_f = 267.4 \text{ MPa}$$

$$P = F \cdot v = Y_f \cdot A_f \cdot v_f \Rightarrow F = Y_f \cdot A_f$$

$$F = Y_f \cdot A_f = 267.4 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 3^2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \mathbf{F = 1890 \text{ N}}$$

b)

$$A_f \equiv A_{f,\min} \leftrightarrow \int_0^{\epsilon_{\max}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = Y_f$$

$$\int_0^{\epsilon_{\max}} (350 + 200\epsilon_e) \cdot d\epsilon_e = 350 + 200\epsilon \Rightarrow 350\epsilon + 100\epsilon^2 = 350 + 200\epsilon \Rightarrow \epsilon_{\max,II} = 1.27$$

$$\epsilon_e = \ln \frac{D_0^2}{D_f^2} \Rightarrow e^{\epsilon_{\max}} = \frac{D_0^2}{D_{f,\min}^2} \Rightarrow D_{f,\min} = \frac{D_0}{\sqrt{e^{\epsilon_{\max}}}} = \frac{4}{\sqrt{e^{1.27}}} \Rightarrow \mathbf{d_{f,\min,II} = 2.12 \text{ mm}}$$

c)

$$RA(\%) = 100 \cdot \left(1 - \frac{A_f}{A_0}\right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{D_{f,\min,II}^2}{D_{0,II}^2}\right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{2.12^2}{3^2}\right) \Rightarrow \mathbf{RA_{\max,II} = 50 \%}$$

**PROBLEMA 36**

Se desea someter a un proceso de trefilado una barra normalizada de 50 mm de diámetro de acero ASTM 4340. Determinar:

- Fuerza máxima que se podría aplicar a tracción sobre este material.
- Sección mínima que se podría lograr.
- Reducción máxima que se obtendría si el material fuera perfectamente plástico.
- Mínimo número de etapas que serían necesarias para obtener barras de 10 mm si el material fuera perfectamente plástico.

a) Extrayendo los parámetros C y n del Anexo II para el acero ASTM 4340:

$$\epsilon_i = n \Rightarrow Y_i = 2640 \cdot 0.15^{0.15} \Rightarrow Y_i = 1986.18 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_e = \ln \frac{d_0^2}{d_f^2} \Rightarrow e^{\epsilon_i} = \frac{d_0^2}{d_i^2} \Rightarrow d_i = \frac{d_0}{\sqrt{e^{\epsilon_i}}} = \frac{50}{\sqrt{e^{0.15}}} \Rightarrow d_i = 46.4 \text{ mm}$$

$$F_i = Y_i \cdot A_i = 1986.18 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 46.4^2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow F_i = 3356.64 \text{ kN}$$

b) La sección mínima se puede calcular a partir de la ecuación:

$$A_f \equiv A_{f,\min} \leftrightarrow \int_0^{\epsilon_{e,\max}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = Y_f$$

$$\int_0^{\epsilon_{e,\max}} (2640 \cdot \epsilon^{0.15}) \cdot d\epsilon_e = 2640 \cdot \epsilon^{0.15} \Rightarrow \epsilon^{1.15}/1.15 = \epsilon^{0.15} \Rightarrow \epsilon_{e,\max} = 1.15$$

$$\epsilon_e = \ln \frac{d_0^2}{d_f^2} \Rightarrow e^{\epsilon_{e,\max}} = \frac{d_0^2}{d_{f,\min}^2} \Rightarrow d_{f,\min} = \frac{d_0}{\sqrt{e^{\epsilon_{e,\max}}}} = \frac{50}{\sqrt{e^{1.15}}} \Rightarrow d_{f,\min} = 28.14 \text{ mm}$$

$$A_{f,\min} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{f,\min}^2 \Rightarrow A_{f,\min} = 621.7 \text{ mm}^2$$

c) En n material que presenta un comportamiento perfectamente plástico se puede suponer que:  $\sigma_e = Y$ , por tanto:

$$\int_0^{\epsilon_{\max}} Y \cdot d\epsilon_e = Y \Rightarrow \epsilon_{\max} = 1$$

$$d_{f,\min} = \frac{d_0}{\sqrt{e^{\epsilon_{\max}}}} = \frac{50}{\sqrt{e^1}} \Rightarrow d_{f,\min} = 30.33 \text{ mm} ; A_{f,\min} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{f,\min}^2 \Rightarrow A_{f,\min} = 722.3 \text{ mm}^2$$

d) Suponiendo que en las sucesivas etapas el material se comporta de la misma manera, perfectamente plástico ( $\epsilon_{\max} = 1$ ), se puede deducir que:

$$d_1 = \frac{d_0}{\sqrt{e^1}} ; d_2 = \frac{d_1}{\sqrt{e^1}} ; d_3 = \frac{d_2}{\sqrt{e^1}} ; \dots ; d_p = \frac{d_{p-1}}{\sqrt{e}} \Rightarrow d_p = \frac{d_0}{(\sqrt{e})^p} \Rightarrow e^{p/2} = \frac{d_0}{d_p}$$

$$\Rightarrow p = 2 \cdot \ln \left( \frac{d_0}{d_p} \right) = 2 \cdot \ln \left( \frac{50}{10} \right) = 3.22 \Rightarrow \text{Se requiere de 4 etapas para el proceso}$$

**PROBLEMA 37**

Mediante un proceso de trefilado se desea conformar de un tubo de aluminio ASTM 7075 de 60 mm de diámetro, para reducir su diámetro hasta los 50 mm. Despreciando el efecto de la fricción y de la distorsión, calcular:

- a) Fuerza necesaria a aplicar.
- b) Máxima reducción de área que podría obtenerse.
- c) Diámetro resultante para la máxima reducción de área.

a) Tomando del Anexo II los valores de C y n para el aluminio ASTM 7075:

$$\epsilon_e = \ln \frac{A_0}{A_f} = \ln \frac{60^2}{50^2} = 0.508$$

$$F = Y_f \cdot A_f = A_f \cdot \int_0^{\epsilon_e} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \frac{\pi}{4} \cdot 50^2 \cdot 400 \cdot \frac{0.508^{1.17}}{1.17} \Rightarrow F = 146.4 \text{ kN}$$

b)

$$RA(\%) = 100 \cdot \left(1 - \frac{A_f}{A_0}\right) \Rightarrow \left(r = 1 - \frac{A_f}{A_0}\right) \Rightarrow \frac{A_0}{A_f} = \frac{1}{1-r}$$

$$F = A_f \cdot \int_0^{\epsilon_e} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = A_f \cdot \frac{C}{n+1} \cdot \left(\ln \frac{A_0}{A_f}\right)^{n+1} = A_f \cdot \frac{C}{n+1} \cdot \left(\ln \frac{1}{1-r}\right)^{n+1} \Rightarrow$$

$$F \equiv F_{\max} \leftrightarrow \left(\ln \frac{1}{1-r_{\max}}\right)^{n+1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-r_{\max}} = e^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow r_{\max} = 1 - \frac{1}{e^{1.17}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{\max} = 1 - \frac{1}{e^{1.17}} \Rightarrow r_{\max} = 0.575$$

c)

$$r = 1 - \frac{A_f}{A_0} \Rightarrow A_{f,\min} = A_0 \cdot (1 - r_{\max}) \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot D_{f,\min}^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 60^2 \cdot (1 - 0.575) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_{f,\min} = 39.1 \text{ mm}$$

### 4.3. Problemas propuestos

#### PROBLEMA 38

Un alambión cuyo material puede ser caracterizado por la ecuación  $S = 500 \cdot \epsilon_s^{0.4}$  MPa, obtenida en un ensayo Ford, es sometido a una operación de trefilado con una velocidad a la salida de la hilera de 0.1 m/s. Sabiendo que el diámetro final que se desea obtener es de 2 mm, determinar:

- Diámetro máximo inicial que se podría utilizar en este proceso.
- Potencia consumida.
- Trabajo realizado por unidad de volumen.

a)  $d_{0,max} = 4.03 \text{ mm}$

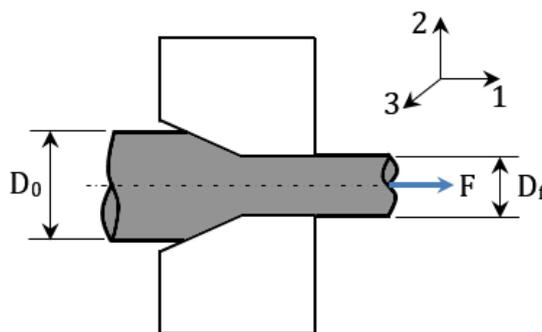
b)  $P = 146.8 \text{ W}$

c)  $\frac{W}{V} = 467.7 \text{ MJ/m}^3$

#### PROBLEMA 39

Para realizar el trefilado de un redondo de acero recocido de 30 mm de diámetro, con un comportamiento  $S = 300 + 100\epsilon_s$  MPa, se aplica una velocidad de alimentación de 0.1 m/s. Suponiendo despreciables la fricción y la distorsión, hallar:

- Diámetro mínimo que puede obtenerse en el proceso.
- Máxima reducción de sección.
- Potencia consumida para lograr dicha reducción de sección.



a)  $D_{f,min} = 16.96 \text{ mm}$

b)  $RA_{max} = 68 \%$

c)  $P = 24.4 \text{ kW}$

#### PROBLEMA 40

Un cable de un material caracterizado por la ecuación de tensión uniaxial  $\sigma = 360 + 240\epsilon$  MPa es sometido a una operación de trefilado, utilizando un motor eléctrico de 1 kW de potencia y una velocidad a la salida de la hilera de 12 m/min, donde el diámetro final es de 3 mm. Determinar:

- a) Diámetro máximo inicial que se podría utilizar en este proceso.
- b) Potencia consumida.
- c) Viabilidad de una segunda etapa en la que se desea obtener el diámetro mínimo.

a)  $d_{0,max} = 5.75 \text{ mm}$

b)  $P = 950 \text{ W}$

c)  $d_{f,min,II} = 1.15 \text{ mm}$  ;  $P_{II} = 1160.4 \text{ W} > 1000 \text{ W} \Rightarrow \text{NO es posible realizarla.}$

#### PROBLEMA 41

Un cable de material caracterizado por la ecuación de tensión uniaxial  $\sigma = 400 + 100\epsilon$  MPa es sometido a una operación de trefilado, utilizando un motor eléctrico de 500 W de potencia y una velocidad a la salida de la hilera de 12 m/min, donde el diámetro final es de 2 mm. Determinar:

- a) Diámetro máximo inicial que se podría utilizar en este proceso.
- b) Diámetro mínimo que se podría alcanzar en una segunda pasada.
- c) Si la segunda etapa puede ser realizada con el motor eléctrico disponible.

a)  $d_{0,max} = 3.5 \text{ mm}$

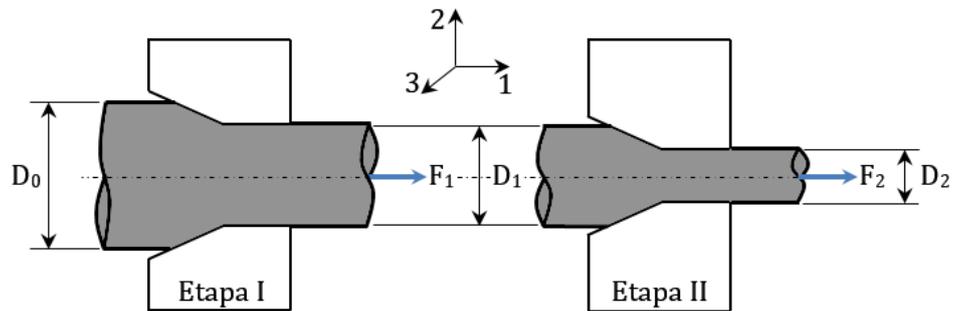
b)  $d_{f,min} = 1.15 \text{ mm}$

c)  $P_{II} = 129.2 \text{ W} < 500 \text{ W} \Rightarrow \text{SÍ es posible realizar esta segunda etapa.}$

#### PROBLEMA 42

Se realiza el trefilado de un redondo de latón recocido de 25 mm de diámetro, con una velocidad de alimentación a la primera etapa de 50 mm/s. Asumiendo para el material de trabajo, presenta un comportamiento que se puede caracterizar por la ecuación  $\sigma = 350 + 100\epsilon$  MPa, y suponiendo despreciable el efecto de la fricción y de la distorsión, calcular:

- a) Máxima deformación que puede aplicarse en cada etapa.
- b) Diámetro mínimo del redondo a la salida de cada etapa.
- c) Velocidad resultante a la salida de cada etapa.
- d) Potencia consumida en cada etapa.



- a)  $\epsilon_{\max,I} = 1.14$  ;  $\epsilon_{\max,II} = 2.25$
- b)  $D_1 = 14.14$  mm ;  $D_2 = 8.12$  mm
- c)  $v_1 = 0.156$  m/s ;  $v_2 = 0.474$  m/s
- d)  $P_I = 11.37$  kW ;  $P_{II} = 14.11$  kW

## CAPÍTULO 5. EXTRUSIÓN

### 5.1. Planteamiento analítico

La extrusión es un proceso de conformación, en el mediante el sistema de accionamiento de la máquina, habitualmente un pistón o tornillo sin fin, se presiona al material de trabajo contra una matriz, que contiene una abertura con la geometría que se desea conferir al producto extruido (fig. 5.1), por lo que este proceso se emplea en la obtención de piezas de sección transversal constante. La deformación plástica se logra (tanto en caliente como en frío) mediante la acción combinada de esfuerzos de compresión y cizalladura, existiendo muy diversos tipos de extrusión: directa, inversa, mixta, etc.; en cualquier caso, el planteamiento analítico es básicamente el mismo. En este tipo de procesos, los efectos de la recuperación elástica a la salida de la matriz pueden resultar significativos, en función de tipo de material, la longitud del canal de extrusión y la temperatura de la operación.

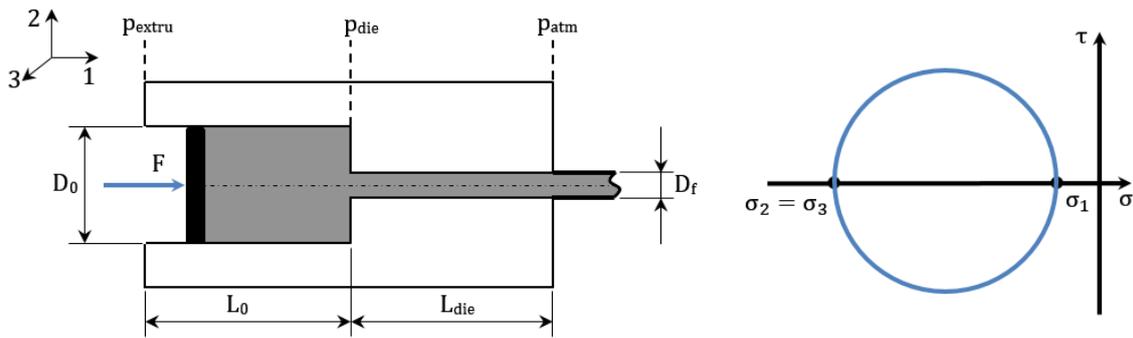


Figura 5.1. Representación de un proceso de extrusión, donde el material es presionado por la acción de un pistón en una matriz que presenta con una longitud del canal de extrusión  $L_{die}$ ,

Para el tipo más sencillo de proceso de extrusión, matriz cilíndrica y sección de salida circular:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}; \sigma_1 < 0; \sigma_2 = \sigma_3 < 0$$

$$\sigma_{e,VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0) \Rightarrow \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{1}{2}\epsilon_1; \epsilon_1 = \ln \frac{A_0}{A_f} = 2 \cdot \ln \frac{D_0}{D_f}$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\epsilon_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\epsilon_1}{2} \end{bmatrix}; \epsilon_e = \epsilon_1$$

Teniendo en cuenta la conservación de flujo volumétrico:

$$V_0 = A_0 \cdot L_0 = V_f = A_f \cdot L_f = A_f \cdot (L_{\text{die}} + L_{\text{extru}}); Q = A_0 \cdot v_0 = A_f \cdot v_f$$

Cuando se trata de procesos de extrusión lubricados, donde la fricción en el canal de extrusión puede despreciarse ( $\Delta p_{\text{die}} \approx 0$ ), se puede obtener el trabajo de deformación de manera análoga a los procesos de trefilado:

$$W_{\text{ext}} = F \cdot L_0; F = \Delta p_0 \cdot A_0 + \Delta p_{\text{die}} \cdot A_{\text{die}}$$

$$W_{\text{int}} = V_f \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e \Rightarrow (V_0 = V_f) \Rightarrow W_{\text{int}} = A_0 \cdot L_0 \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e$$

Si el material se comporta plásticamente según un modelo de comportamiento de endurecimiento por deformación, la caída de presión asociada a la conformación plástica  $\Delta p_0$  se puede estimar según la siguiente expresión:

$$\Delta p_0 = \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \frac{C}{n+1} \cdot \left[ \ln \left( \frac{A_0}{A_f} \right) \right]^{n+1}$$

La potencia requerida para lograr la deformación plástica durante el proceso de extrusión puede ser calculada mediante la siguiente expresión, en la cual puede añadirse el efecto de la fricción y del trabajo redundante (asociado a la distorsión del producto extruido), por medio de un factor de seguridad en la caída de presión:

$$P_0 = \Delta p_0^* \cdot \pi \cdot R_0^2 \cdot v_0; \Delta p_0^* (\text{fricción} + \text{distorsión}) \approx 1.5 \cdot \Delta p_0$$

No obstante, también se pueden utilizar algunas expresiones empíricas sencillas para estimar la caída de presión adicional debida a la fricción, como puede ser la siguiente:

$$\Delta p_f \cong \frac{2 \cdot L_0}{D_0} \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e$$

Cuando no se puede despreciar la caída de presión asociada al esfuerzo cortante desarrollado a lo largo de la matriz ( $\Delta p_{\text{die}} \gg 0$ ), es posible realizar ciertas estimaciones para geometrías sencillas de la sección transversal del canal de extrusión y un comportamiento a fluencia newtoniano ( $\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}$ ;  $\dot{\gamma} \equiv$  Velocidad de cizalla). Para el caso de un canal circular se pueden utilizar expresiones analíticas para estimar el esfuerzo cortante en la dirección radial  $\tau(r)$  y la caída de presión  $\Delta p_{\text{die}}$  en el canal de extrusión, o la velocidad de salida del producto extruido  $v_f$ , para un material newtoniano con viscosidad aparente  $\eta$ :

$$\tau(r) = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot r}{2 \cdot L_{\text{die}}} \quad (0 \leq r \leq R); v_{f,\text{med}} = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot R_f^2}{8 \cdot L_{\text{die}} \cdot \eta}$$

Si se trata de procesos de extrusión de láminas de espesor  $h$  y ancho  $b$ , donde  $b/h > 20$ , también se puede hacer uso de las siguientes expresiones:

$$\tau(x) = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot x}{L_{\text{die}}} \quad (0 \leq x \leq \frac{h}{2}); v_{f,\text{med}} = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot h^2}{12 \cdot L_{\text{die}} \cdot \eta}$$

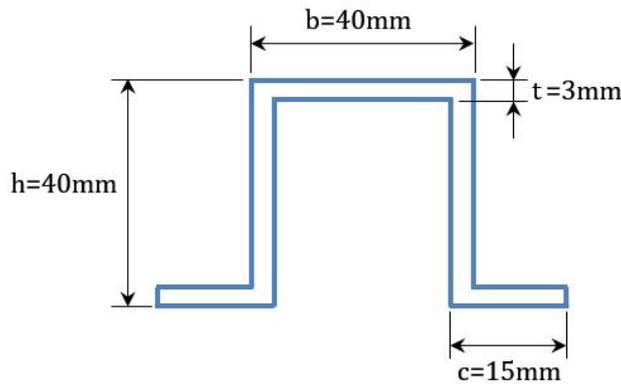
5.2. Problemas resueltos

**PROBLEMA 43**

Se pretende fabricar perfiles normalizados OF de 40x40x3 mm de 1 m de longitud, como el mostrado en la figura, en aluminio ASTM 6063 (ver Anexo II), del cual se conoce que su viscosidad efectiva al ser conformado por extrusión es de 2 MPa·s.

La extrusora posee un contenedor de sección rectangular de 68x44 mm y 200 mm de profundidad, aunque los últimos 40 mm de material no son extruidos por cuestiones de seguridad operativa. Para efectuar los cálculos del proceso, se asume que el canal de extrusión puede tomarse como uno de sección rectangular de altura igual al espesor del perfil OF y de un ancho equivalente a la longitud total de dicho perfil. Si se realiza la extrusión con una velocidad de alimentación de 2 mm/s y una velocidad de deformación en la matriz de 10 s<sup>-1</sup>, calcular:

- Deformación equivalente.
- Caída de presión de la extrusión, suponiendo unas pérdidas de energía por trabajo redundante y de fricción del 20% y 40%, respectivamente, del trabajo de deformación.
- Caída de presión en el canal de extrusión.
- Trabajo externo necesario en el proceso.
- Potencia requerida para este proceso de extrusión.



a)

$$A_0 = b \cdot h = 68 \cdot 44 = 2992 \text{ mm}^2$$

$$A_f = (15 + 15) \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 2 \cdot (40 - 6) \cdot 3 = 414 \text{ mm}^2$$

La deformación asociada a la reducción de sección viene dada por:

$$\epsilon_e = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) = \ln\left(\frac{2992}{414}\right) \Rightarrow \epsilon_e = \mathbf{1.98}$$

b) Cuando se desprecia el efecto de la fricción y la distorsión, trabajo externo resulta ser igual al trabajo de deformación homogénea, lo cual permite determinar la caída de presión asociada exclusivamente a la deformación originada por la reducción de sección entre la sección el contenedor y la sección de entrada a la matriz:

$$W_{\text{ext}} = F \cdot L = W_{\text{int}} = A \cdot L \cdot \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e \Rightarrow \frac{F}{A} \equiv \Delta p_0 = \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e$$

$$\Delta p_0 = \int_0^{1.98} 410 \cdot \epsilon^{0.05} \cdot d\epsilon = 410 \cdot \frac{1.98^{1.05}}{1.05} \Rightarrow \Delta p_0 \approx \mathbf{800 \text{ MPa}}$$

Si a la caída de presión en el contenedor de la extrusora, se le suman las caídas de presión asociadas a la distorsión ( $\Delta p_r$ ) y a la fricción ( $\Delta p_f$ ), se obtiene la caída de presión total necesaria para hacer pasar el material a través de la sección de entrada de la matriz:

$$\Delta p_0^* = \Delta p_0 + \Delta p_f + \Delta p_r = \Delta p_0 + 0.4 \cdot \Delta p_0 + 0.2 \cdot \Delta p_0 \Rightarrow \Delta p_0^* = \mathbf{1280 \text{ MPa}}$$

c) Cuando el material fluye en la matriz, se produce otra caída de presión a lo largo del canal de extrusión ( $\Delta p_{die}$ ), como consecuencia del esfuerzo de cizalladura que se produce en las paredes, que es función de la longitud del mismo. Teniendo en cuenta la conservación del volumen de material, y que se desean perfiles extruidos de 1 m de longitud:

$$V_0 = V_f \Rightarrow A_0 \cdot L_0 = A_f \cdot L_f \Rightarrow A_0 \cdot L_0 = A_0 \cdot 20 + A_f \cdot (L_{die} + 1000) \Rightarrow$$

$$2992 \cdot 200 = 2992 \cdot 40 + 414 \cdot (L_{die} + 1000) \Rightarrow L_{die} = 156.33 \text{ mm}$$

Teniendo en cuenta que el canal de extrusión equivale a uno rectangular de altura  $h$  y ancho  $b$ , puede utilizarse la siguiente ecuación, válida cuando  $b/h > 20$ :

$$\tau(x) = \frac{\Delta p_{die} \cdot x}{L_{die}} ; \left(0 \leq x \leq \frac{h}{2}\right)$$

Puesto que la altura del canal sería igual al espesor de perfil y la anchura de dicho canal se asume como equivalente a la longitud que tendría el perfil OF desarrollado, se puede comprobar que:

$$A_f \equiv b \cdot h = 414 = b \cdot 3 \Rightarrow b = 138 \text{ mm} ;$$

$$\frac{b}{h} = \frac{138}{3} = 46 > 20 \Rightarrow \text{Sí se puede utilizar la ecuación}$$

Teniendo en cuenta la relación entre la tensión de cizalladura y la caída de presión sobre las paredes del canal:

$$\tau_{\max} = \tau\left(x = \frac{h}{2}\right) = \eta \cdot \dot{\gamma} = \frac{\Delta p_{die} \cdot h}{2 \cdot L_{die}} \Rightarrow \Delta p_{die} = \eta \cdot \dot{\gamma} \cdot \frac{2 \cdot L_{die}}{h} \Rightarrow$$

$$\Delta p_{die} = 2 \cdot 10 \cdot \frac{2 \cdot 156.33 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \Delta p_{die} = \mathbf{2084.4 \text{ MPa}}$$

d)

$$W_{\text{ext}} = F \cdot L = \Delta p \cdot A_0 \cdot L = (\Delta p_0^* + \Delta p_{die}) \cdot A_0 \cdot L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\text{ext}} = (1280 + 2084.4) \cdot 10^6 \cdot 2992 \cdot 10^{-6} \cdot (200 - 40) \cdot 10^{-3} \Rightarrow \mathbf{W_{\text{ext}} = 1610.6 \text{ kJ}}$$

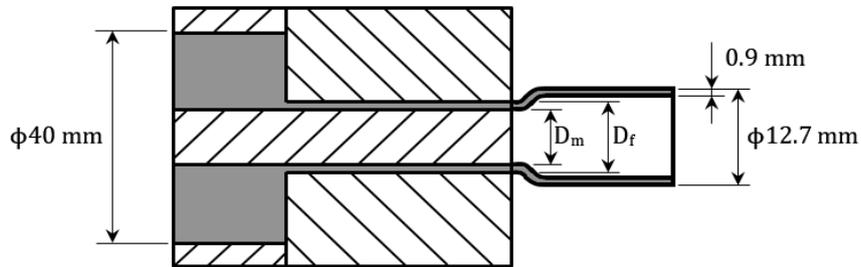
e)

$$P = \Delta p \cdot A_0 \cdot v_0 = (1280 + 1042.2) \cdot 10^6 \cdot 2992 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \mathbf{P = 13.9 \text{ kW}}$$

**PROBLEMA 44**

Mediante un proceso de extrusión en caliente, a 600°C, se fabrica tubería de cobre comercial de 12.7 mm de diámetro exterior y 0.9 mm de espesor. Este proceso se realiza en una extrusora con un recipiente de extrusión de 40 mm de diámetro y 15 mm de profundidad, a una velocidad de extrusión de 12 mm/s de. , Debido a que existe una recuperación elástica de la tubería extruida del 2%, afectando igualmente su diámetro interior y exterior, se requiere redimensionar la matriz y el mandril. Calcular:

- Diámetro de la matriz y el mandril necesarios para compensar la recuperación elástica.
- Presión a aplicar para vencer la reducción de sección de la matriz, si  $\Delta p_f \approx 0$ .
- Fuerza a ejercer por el pistón de la extrusora, suponiendo que  $\Delta p_{die} = 0.4 \cdot \Delta p_0$ .
- Velocidad de desplazamiento del pistón de la extrusora en mm/s.
- Longitud de tubería que se obtendría en el proceso de extrusión si  $L_{die} = 47.2$  mm.



a)

$$D_e = 1.02 \cdot D_f \Rightarrow 12.7 = 1.02 \cdot D_f \Rightarrow \mathbf{D_f = 12.45 \text{ mm}}$$

$$D_i = 12.7 - 2 \cdot 0.9 = 10.9 \text{ mm} ; D_i = 1.02 \cdot D_m \Rightarrow 10.9 = 1.02 \cdot D_m \Rightarrow \mathbf{D_m = 10.69 \text{ mm}}$$

b) Tomando del Anexo II los valores de C y n para bronce comercial:

$$\epsilon_e = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) = \ln\left(\frac{D_0^2 - D_m^2}{D_f^2 - D_m^2}\right) = \ln\left(\frac{40^2 - 10.69^2}{12.45^2 - 10.69^2}\right) \Rightarrow \epsilon_e = 3.6$$

$$\Delta p_0 = \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e \Rightarrow \Delta p_0 = \int_0^{3.6} 88 \cdot \epsilon^{0.06} \cdot d\epsilon = 88 \cdot \frac{3.6^{1.06}}{1.06} \Rightarrow \mathbf{\Delta p_0 = 322.74 \text{ MPa}}$$

c)

$$F = (\Delta p_0 + 0.4 \cdot p_0) \cdot A = 1.4 \cdot 322.74 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (40^2 - 10.69^2) \cdot 10^{-6} \Rightarrow \mathbf{F = 527.24 \text{ kN}}$$

d)

$$A_0 \cdot v_0 = A_f \cdot v_f \Rightarrow (40^2 - 10.69^2) \cdot v_0 = (12.45^2 - 10.69^2) \cdot 10 \Rightarrow \mathbf{v_0 = 0.33 \text{ mm/s}}$$

e)

$$A_0 \cdot L_0 = A_f \cdot (L_{die} + L_{extru}) \Rightarrow (40^2 - 10.69^2) \cdot 15 = (12.45^2 - 10.69^2) \cdot (47.2 + L_{extru})$$

$$\Rightarrow \mathbf{L_{extru} = 500 \text{ mm}}$$

**PROBLEMA 45**

Se desea diseñar una matriz para extrusión de láminas de aluminio ASTM 1050, de 5 mm de espesor y 1 m de ancho. Considerando que para una temperatura de operación de 700°C, la viscosidad aparente del material es aproximadamente  $8 \cdot 10^5$  Pa·s, que la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$  del material, en el canal de extrusión, no supera el valor de  $100 \text{ s}^{-1}$ , de modo que no se confiera al producto extruido una distorsión excesiva; y no sobrepasar  $2 \cdot 10^8$  Pa de presión en el proceso ni  $8 \cdot 10^7$  Pa en el canal de extrusión. Determinar:

- a) Longitud del canal de extrusión.
- b) Velocidad de producción.
- c) Potencia real necesaria en el proceso.

a) El máximo esfuerzo cortante, en un flujo de extrusión, siempre se produce en las paredes del canal, en este caso cuando  $x=t/2$ :

$$\tau_{\max} = \tau \left( x = \frac{t}{2} \right) = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot t}{2 \cdot L_{\text{die}}}$$

Considerando un comportamiento newtoniano del material:  $\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}$

$$\tau_{\max} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{\max} = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot t}{2 \cdot L_{\text{die}}} \Rightarrow L_{\text{die}} = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 100} \Rightarrow L_{\text{die}} = \mathbf{0.25 \text{ m}}$$

b)

$$v_{f,\text{med}} = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot t^2}{12 \cdot L_{\text{die}} \cdot \eta} = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2}{12 \cdot 0.25 \cdot 8 \cdot 10^4} \Rightarrow v_f = \mathbf{8.33 \text{ mm/s}}$$

c)

$$\epsilon_e = \ln(A_0/A_f) = \ln\left(\frac{h \cdot b}{t \cdot b}\right) \Rightarrow \epsilon_e = \ln\left(\frac{h}{t}\right)$$

$$\Delta p_0 = \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \int_0^{\epsilon_e} 109 \cdot \epsilon^{0.16} \cdot d\epsilon = 109 \cdot \frac{[\ln(h/t)]^{1.16}}{1.16} \cdot 10^6 = 1200 \cdot 10^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(h/5) = (1.277)^{1/1.16} \Rightarrow h = 17.2 \text{ mm}$$

$$Q = \text{cte} \Rightarrow A_0 \cdot v_0 = A_f \cdot v_f \Rightarrow h \cdot b \cdot v_0 = t \cdot b \cdot v_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = v_f \cdot \frac{t}{h} = 8.33 \cdot \frac{5}{17.2} \Rightarrow v_0 = 2.42 \text{ mm/s}$$

$$P = (1.5 \cdot \Delta p_0) \cdot A_0 \cdot v_0 = 1.5 \cdot 17.2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 2.42 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^8 \Rightarrow \mathbf{P = 12.5 \text{ kW}}$$

**PROBLEMA 46**

Se desea seleccionar una extrusora para fabricar barras de latón ASTM 70/30, de 20 mm de diámetro. La temperatura de operación es 600°C, y se requiere que el esfuerzo cortante en la matriz no supere el valor de 200 MPa, de modo que no se confiera al producto extruido una distorsión excesiva. Considerando una viscosidad aparente del producto de  $4 \cdot 10^5$  Pa·s. y que la caída de presión en la matriz es del orden de la mitad de la caída de presión ideal. Determinar:

- a) Potencia necesaria para este proceso.
- b) Extrusora comercial que mejor se adapta a este proceso.
- c) Longitud necesaria de la matriz de extrusión.

Modelo (SRE)	Potencia (kW)	Diámetro del tornillo (mm)
SRE-15	15	50.8
SRE-30	30	63.5
SRE-45	45	76.2

La deformación y la caída de presión asociadas a la reducción de sección en cada extrusora serán las siguientes:

$$\epsilon_e = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) = \ln\left(\frac{D_0^2}{D_f^2}\right)$$

$$\epsilon_e(\text{SSE15}) = \ln\left(\frac{50.8^2}{20^2}\right) \Rightarrow \epsilon_e(\text{SSE15}) = 1.86$$

$$\epsilon_e(\text{SSE30}) = \ln\left(\frac{63.5^2}{20^2}\right) \Rightarrow \epsilon_e(\text{SSE15}) = 2.31$$

$$\epsilon_e(\text{SSE15}) = \ln\left(\frac{76.2^2}{20^2}\right) \Rightarrow \epsilon_e(\text{SSE15}) = 2.68$$

$$\Delta p = \int_{\epsilon_{e,0}}^{\epsilon_{e,f}} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \int_0^{\epsilon_e} 110 \cdot \epsilon^{0.2} \cdot d\epsilon$$

$$\Delta p(\text{SSE15}) = 110 \cdot \frac{1.86^{1.2}}{1.2} \cdot 10^6 \Rightarrow \Delta p(\text{SSE15}) = 193.03 \text{ MPa}$$

$$\Delta p(\text{SSE30}) = 110 \cdot \frac{2.31^{1.2}}{1.2} \cdot 10^6 \Rightarrow \Delta p(\text{SSE15}) = 250.35 \text{ MPa}$$

$$\Delta p(\text{SSE45}) = 110 \cdot \frac{2.68^{1.2}}{1.2} \cdot 10^6 \Rightarrow \Delta p(\text{SSE15}) = 299.21 \text{ MPa}$$

El máximo esfuerzo cortante, en un flujo de extrusión, siempre se produce en las paredes del canal, en esta ocasión cuando  $r=R$ :

$$\tau_{\max} = \tau(r = 10 \text{ mm}) \Rightarrow \tau(R) = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot R}{2 \cdot L_{\text{die}}} = 2 \cdot 10^8 = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot L_{\text{die}}} \Rightarrow \frac{\Delta p_{\text{die}}}{L_{\text{die}}} = 4 \cdot 10^8$$

$$v_{f,\text{med}} = \frac{\Delta p_{\text{die}} \cdot R_f^2}{8 \cdot L_{\text{die}} \cdot \eta} \Rightarrow v_{f,\text{med}} = \frac{R_f^2}{8 \cdot \eta} \cdot 4 \cdot 10^8 = \frac{(10 \cdot 10^{-3})^2}{8 \cdot 4 \cdot 10^5} \cdot 4 \cdot 10^8 \Rightarrow v_f = 12.5 \text{ mm/s}$$

$$Q = \text{cte} \Rightarrow A_0 \cdot v_0 = A_f \cdot v_f = \pi \cdot R_f^2 \cdot v_f$$

a)

$$P = 1.5 \cdot \Delta p \cdot A_0 \cdot v_0 = 1.5 \cdot \Delta p \cdot \pi \cdot R_f^2 \cdot v_f$$

$$P(\text{SSE15}) = 1.5 \cdot \pi \cdot (10 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 12.5 \cdot 10^{-3} \cdot 193.03 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$P(\text{SSE15}) = 1.137 \text{ Kw}$$

La extrusora de menor potencia sería suficiente para cubrir esta aplicación, ya que se verifica que  $1.137 \text{ kW} < 15 \text{ kW}$ . Por tanto, para la extrusora SSE-15 se tiene que:  $\epsilon_e = 1.86$ ;  $\Delta p = 193.03 \text{ MPa}$  (en el Anexo III se pueden encontrar más datos de extrusoras comerciales).

**Modelo SRE – 15  $\Rightarrow$  P = 1.137 kW**

b)

$$\Delta p_{\text{die}} \cong \frac{\Delta p}{2} = \frac{193.03}{2} = 96.52 \text{ MPa}$$

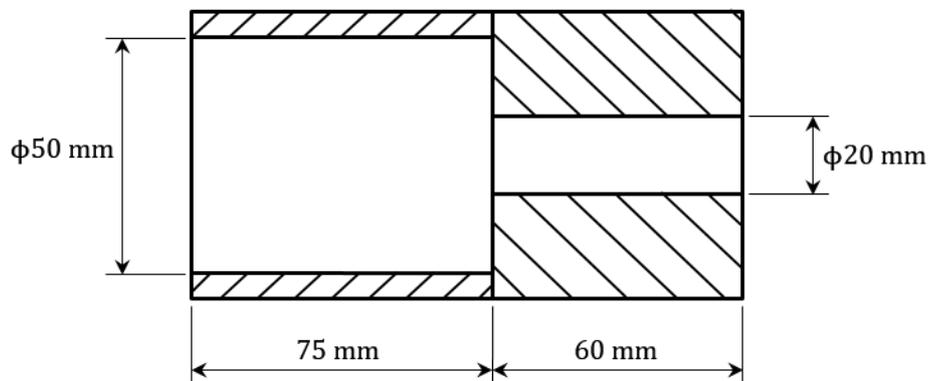
$$\frac{\Delta p_{\text{die}}}{L_{\text{die}}} = 2 \cdot 10^8 \Rightarrow L_{\text{die}} = \frac{96.52 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^8} \Rightarrow L_{\text{die}} = \mathbf{241.3 \text{ mm}}$$

### 5.3. Problemas propuestos

#### PROBLEMA 47

Se desea fabricar mediante extrusión directa, a 400°C, un perfil circular macizo de 20 mm de diámetro y 400 mm de longitud, con aluminio ASTM 2017. Si las dimensiones de la matriz de extrusión son las indicadas en la figura y se desprecia el efecto de la distorsión ( $\Delta p_r \approx 0$ ), determinar:

- Presión asociada a la deformación plástica, teniendo en cuenta el efecto de la fricción.
- Fuerza a aplicar para lograr la extrusión, suponiendo que el flujo en la matriz está perfectamente lubricado ( $\Delta p_{die} \approx 0$ ).
- Verificar que se obtiene la longitud necesaria del producto extruido.



- $\Delta p_0^* = 288.1 \text{ MPa}$
- $F = 565.64 \text{ kN}$
- $L_{\text{extru}} = 408.75 \text{ mm}$

#### PROBLEMA 48

Se desea conformar un latón ASTM 70/30, mediante un proceso de extrusión en caliente, a 600°C, su viscosidad aparente; 3 MPa·s. El diámetro del depósito de la prensa es de 400 mm y 300 mm de longitud, y se pretende obtener un producto de sección circular de 50 mm de diámetro. Calcular:

- Presión media a aplicar en el proceso, despreciando los efectos de la fricción.
- Velocidad del pistón de la extrusora, considerando que la caída de presión en el canal  $\Delta p_{die}$ , de 500 mm de longitud, es un 30% la caída de presión ideal en contenedor  $\Delta p_0$ .
- Potencia total de la extrusión.
- Fuerza que debe aplicar el pistón de la prensa para realizar la extrusión.

- $\Delta p_0 = 507.1 \text{ MPa}$
- $v_0 = 0.124 \text{ mm/s}$

c)  $P = 10.27 \text{ kW}$

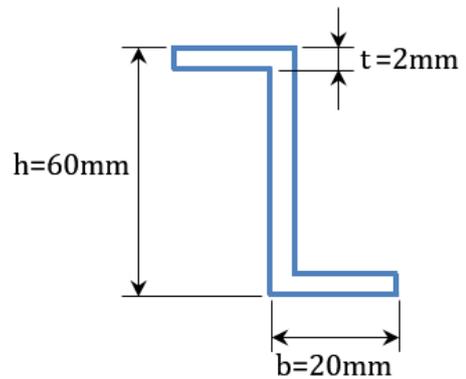
d)  $F = 82823 \text{ kN}$

**PROBLEMA 49**

Se desea extruir en frío perfiles normalizados de tipo NF, como el mostrado en la figura, con aluminio ASTM 2024 (densidad:  $2768 \text{ kg/m}^3$ ). En las extrusoras comerciales disponibles, el recipiente que alimenta el doble tornillo sin fin tiene un diámetro de entrada a la matriz, común a todos los modelos, de 64 mm de diámetro. Determinar:

- a) Fuerza requerida para extruir este tipo de perfiles.
- b) Potencia necesaria en el proceso para obtener una velocidad de producción de al menos 80 kg/h, sabiendo que las pérdidas por fricción y distorsión son del 50%.
- c) Extrusora comercial más adecuada de entre las disponibles.

Modelo (SRE)	Potencia (kW)	Diámetro del tornillo (mm)	L/D del tornillo
SRE-50	15	50.8	24:1
SRE-65	30	63.5	24:1
SRE-75	37.5	75	24:1



a)  $F = 7197 \text{ kN}$

b)  $P = 27 \text{ kW}$

c) **Modelo SRE-65 (30 kW)**

## CAPÍTULO 6. EMBUTICIÓN

### 6.1. Planteamiento analítico

La embutición es un proceso de conformación por deformación plástica mediante el cual una chapa metálica es sometida mediante un punzón a una deformación sobre una matriz con objeto de adoptar una forma ahuecada tridimensional de una profundidad varias veces el espesor del metal original (fig. 6.1). Este tipo de procesos puede realizarse con o sin debilitamiento, es decir, con o sin reducción significativa del espesor de chapa pueden obtenerse piezas de paredes relativamente gruesas y geometría sencilla (habitualmente recipientes cilíndricos).

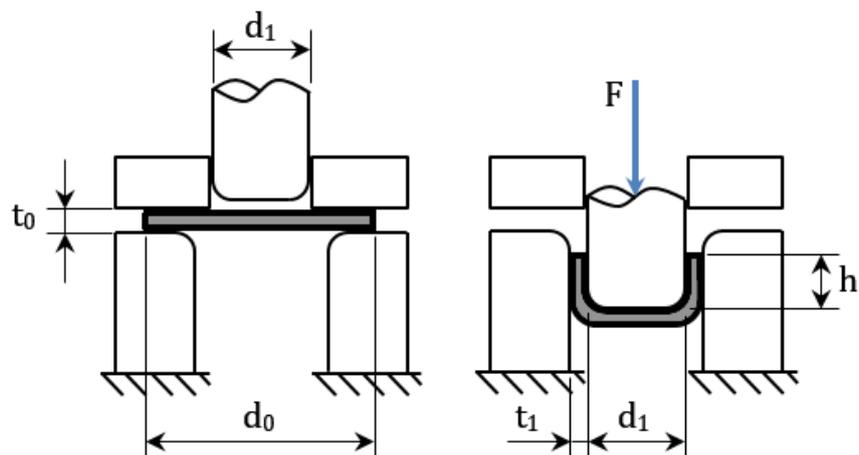


Figura 6.1. Esquema básico de un proceso de embutición de chapa.

En este tipo de procesos, lo habitual es conocer el diámetro interior del recipiente que se desea obtener, por lo que el diámetro necesario de la chapa circular de partida es el principal parámetro geométrico que suele ser objeto de cálculo. Teniendo en cuenta que:

$$A_0 = \frac{\pi}{4} \cdot d_0^2 \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 + \pi \cdot d_1 \cdot h$$

$$V_0 = V_1 \Rightarrow A_0 \cdot t_0 = A_1 \cdot t_1 \Rightarrow d_0 = \sqrt{(d_1^2 + 4 \cdot d_1 \cdot h) \cdot \frac{t_1}{t_0}}$$

Existen diversas fórmulas específicas para el cálculo del diámetro de partida de la chapa para diferentes geometrías cilíndricas, algunas incluidas en el Anexo IV, no obstante, se puede emplear en ciertos casos la ecuación simplificada siguiente como aproximación:

$$d_0 \approx 1.1 \cdot (d_1 + h)$$

Un parámetro importante en estos procesos es la relación de embutición  $\beta$ , definida como la relación entre el diámetro inicial  $d_0$  y el diámetro final  $d_1$ .

$$\beta = \frac{d_0}{d_1}$$

También resulta de importancia establecer la relación de embutición máxima  $\beta_{\max}$  que se puede aplicar, de modo que no se produzca una disminución significativa en las propiedades mecánicas del material.

El valor de la relación de embutición máxima puede ser determinado mediante tablas específicas o bien analíticamente para las geometrías más sencillas. Para este último caso se tiene que:

$$\beta_{\max} = 2 - 0.0011 \cdot \frac{d_1}{t}$$

Si el proceso de embutición presenta un valor de la relación de embutición superior al máximo ( $\beta > \beta_{\max}$ ), entonces el proceso ha de realizarse en varias etapas, de manera que en cada una de ellas no se sobrepase el valor estimado de  $\beta_{\max}$ , para lo cual se establecen los siguientes límites entre las sucesivas etapas:

$$\text{Primera etapa: } 1.5 \leq \beta_{(1)} \leq 1.65$$

$$\text{Sigüientes etapas: } 1.2 \leq \beta_{(i)} \leq 1.33$$

En cuanto a la fuerza de embutición que se ha de ejercer para realizar la operación, ésta puede determinarse a partir de la siguiente ecuación:

$$F = \sigma_{\text{uts}} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t_0 \cdot n$$

donde el coeficiente  $n$  viene dado por la siguiente expresión:

$$n = 1.2 \cdot \frac{\beta - 1}{\beta_{\max} - 1}$$

En general, también puede estimarse la fuerza máxima de embutición utilizando la siguiente ecuación:

$$F_{\max} = \sigma_{\text{uts}} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t_0 \cdot \left( \frac{d_0}{d_1} - 0.7 \right)$$

Por su parte, la reducción de sección del proceso de embutición se calcula como:

$$\text{RA}(\%) = 100 \cdot (d_0 - d_1)/d_0$$

Si además se desea realizar el corte de la chapa metálica utilizando la misma prensa en la que se realiza el proceso de embutición, como primera aproximación, se puede estimar la fuerza de corte o punzonado mediante alguna de las siguientes expresiones:

$$F_c = \tau_{\text{uts}} \cdot \pi \cdot d_0 \cdot t_0$$

$$F_c \approx 0.7 \cdot \sigma_{\text{uts}} \cdot \pi \cdot d_0 \cdot t_0$$

donde  $\tau_{\text{uts}}$  es la resistencia última a cizalladura del material.

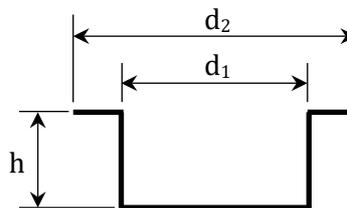
6.2. Problemas resueltos

**PROBLEMA 50**

Una empresa recibe un pedido para fabricar recipientes cilíndricos como el mostrado en la figura, de 430 mm de diámetro, de Aluminio ASTM 6063. Según las especificaciones del pedido, estos recipientes han de tener el mayor espesor y altura posibles, teniendo en cuenta que la pieza embutida ha de tener un volumen de 5500 cm<sup>3</sup>. Teniendo en cuenta en la empresa se dispone de chapas de 0.5, 1, 2 y 3 mm de espesor y de una prensa de embutición, cuyos parámetros operativos se muestran en la tabla adjunta, determinar:

- a) Espesor de chapa a utilizar.
- b) Dimensiones de la pieza embutida: h, d<sub>1</sub> y d<sub>2</sub>.
- c) Número de etapas que se requiere para realizar el proceso.
- d) Fuerza de corte de la chapa y fuerza máxima de embutición.

Prensa	Potencia (kW)	Fuerza de embutición (kN)	Diámetro máximo (mm)	Profundidad máxima (mm)
12-15-7BD	56	3725	233	191



Puesto que volumen de la pieza a fabricar es fijo, conseguir la máxima altura en la embutición, equivale a lograr también el mínimo diámetro posible d<sub>1</sub>. Con un diámetro de chapa inicial d<sub>0</sub> conocido, d<sub>1</sub> será el mínimo posible si se cumple que β=β<sub>max</sub>, y por tanto:

$$\beta_{\max} = 2 - 0.0011 \cdot \frac{d_{1,\min}}{t} = \frac{d_0}{d_{1,\min}} \Rightarrow \frac{0.0011}{t} \cdot d_{1,\min}^2 - 2 \cdot d_{1,\min} + d_0 = 0$$

Por otro lado, se pretende que el espesor de chapa sea el mayor posible de entre los considerados, por lo que habrá que evaluar las dimensiones de la pieza que se pueden obtener en cada caso, con la prensa de embutición de que dispone:

Para t = 3 mm:

$$\frac{0.0011}{3} \cdot d_1^2 - 2 \cdot d_1 + 430 = 0 \Rightarrow d_{1,\min} = 224.22 \text{ mm}$$

Para t = 2 mm:

$$\frac{0.0011}{2} \cdot d_1^2 - 2 \cdot d_1 + 430 = 0 \Rightarrow d_{1,\min} = 229.48 \text{ mm}$$

Para  $t = 1 \text{ mm}$ :

$$\frac{0.0011}{1} \cdot d_1^2 - 2 \cdot d_1 + 430 = 0 \Rightarrow d_{1,\min} = 249.14 \text{ mm}$$

Para el espesor de chapa de 1 mm se excede el diámetro máximo de embutición de la prensa (249.14 mm > 233 mm). Por tanto, se descartan los espesores de 0.5 y 1 mm.

a) Dado que se conoce el volumen del recipiente a obtener:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot h = 5500 \text{ cm}^3 \Rightarrow h_{\max} = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d_{1,\min}^2}$$

Para  $t = 3 \text{ mm}$ :

$$h_{\max} = \frac{4 \cdot 5500 \cdot 10^3}{\pi \cdot 224.22^2} = 139.29 \text{ mm} \Rightarrow \text{Menor que la profundidad máxima de la prensa}$$

Para  $t = 2 \text{ mm}$ :

$$h_{\max} = \frac{4 \cdot 5500 \cdot 10^3}{\pi \cdot 229.48^2} = 132.98 \text{ mm} \Rightarrow \text{Menor que la profundidad máxima de la prensa}$$

El espesor de chapa de 3 mm, resulta viable para efectuar el proceso de embutición, ya que 224.22 mm < 233 mm y 139.29 mm < 191 mm.

Por tanto, dada la capacidad de la prensa y la condición de máxima altura, de entre las chapas disponibles, **para este proceso se emplearán las chapas de 3 mm de espesor.**

b) Según los criterios de máximo espesor y máxima altura del recipiente, se tiene que:

$$\mathbf{d_1 = 224.22 \text{ mm}}$$

$$\mathbf{h = 139.29 \text{ mm}}$$

Para la geometría cilíndrica que se desea obtener, el diámetro inicial de la chapa viene dado por la siguiente expresión, que se puede encontrar en la tabla del Anexo IV), a partir de la cual se puede extraer el valor de  $d_2$ :

$$d_0 = \sqrt{d_2^2 + 4 \cdot d_1 \cdot h} \Rightarrow 430 = \sqrt{d_2^2 + 4 \cdot 224.22 \cdot 139.29} \Rightarrow \mathbf{d_2 = 244.9 \text{ mm}}$$

c) En general, la relación de embutición  $\beta$  en cada etapa ha de cumplir:

$$\text{Primera etapa: } 1.5 \leq \beta_{(1)} \leq 1.65$$

$$\text{Sigüientes etapas: } 1.2 \leq \beta_{(i)} \leq 1.33$$

$$\beta = \frac{d_0}{d_1} = \frac{430}{224.22} = 1.92 > 1.65 \Rightarrow \text{Se requiere más de una etapa de embutición}$$

Tomando para la primera etapa  $\beta=1.6$  se tiene que:

$$\beta_I = 1.6 = \frac{430}{d_I} \Rightarrow d_I = 268.75 \text{ mm}$$

$$\beta_{II} = \frac{268.75}{224.22} = 1.2$$

Por tanto, **el proceso se puede realizar en 2 etapas.**

d)

$$F_c = 0.7 \cdot \sigma_{uts} \cdot \pi \cdot d_0 \cdot t_0 = 0.7 \cdot 241 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 430 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_c = \mathbf{683.68 \text{ kN}}$$

Etapas (I)

$$F_I = \sigma_{uts} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t_0 \cdot (\beta_I - 0.7) = 241 \cdot \pi \cdot 268.75 \cdot 3 \cdot (1.6 - 0.7) \Rightarrow F_I = \mathbf{488.35 \text{ kN}}$$

Etapas (II)

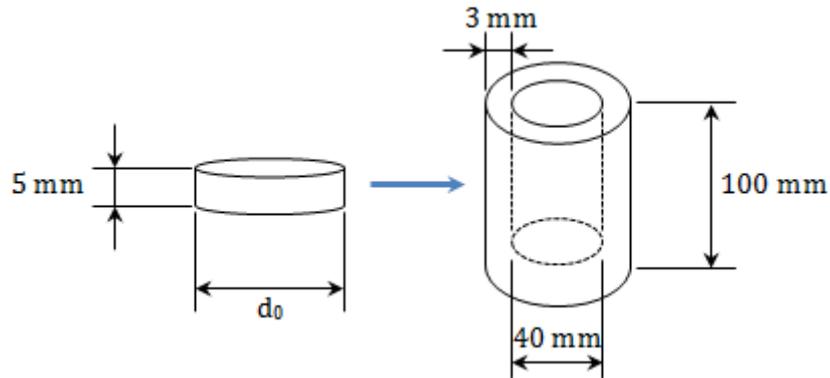
$$\beta_{II,max} = 2 - 0.0011 \cdot \frac{224.22}{3} = 1.92 ; \beta_I = 1.2$$

$$F_{II} = \sigma_{uts} \cdot \pi \cdot d_2 \cdot t_0 \cdot (\beta_{II} - 0.7) = 241 \cdot \pi \cdot 224.22 \cdot 3 \cdot (1.2 - 0.7) \Rightarrow F_{II} = \mathbf{132.86 \text{ kN}}$$

**PROBLEMA 51**

Mediante un proceso de embutición se pretende conformar una pieza cilíndrica de latón ASTM 70/30 como la mostrada en la figura. Determinar:

- Diámetro inicial de chapa necesario.
- Fuerza de corte necesaria para obtener el disco de partida.
- Relación de embutición.
- Reducción de sección porcentual del proceso.
- Fuerza de embutición a aplicar para ejecutar el proceso.



a)

$$d_0 = \sqrt{(d_1^2 + 4 \cdot d_1 \cdot h) \cdot \frac{t_1}{t_0}} = \sqrt{(40^2 + 4 \cdot 40 \cdot (100 - 5)) \cdot \frac{5}{3}} \Rightarrow d_0 = 164.2 \text{ mm}$$

b)

$$F_c = 0.5 \cdot \sigma_{\text{uts}} \cdot A_c = 0.5 \cdot \sigma \cdot \pi \cdot d_0 \cdot t = 0.5 \cdot 420 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 164.2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$F_c = 541.6 \text{ kN}$$

c)

$$\beta = \frac{d_0}{d_1} = \frac{164.2}{40} \Rightarrow \beta = 4.11$$

d)

$$RA(\%) = 100 \cdot \frac{d_0 - d_1}{d_0} = 100 \cdot \frac{164.2 - 40}{164.2} \Rightarrow RA(\%) = 75.64\%$$

e) Fuerza de embutición:

$$F = \sigma_{\text{uts}} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t_0 \cdot \left( \frac{d_0}{d_1} - 0.7 \right) = 400 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{164.2}{40} - 0.7 \right) \Rightarrow$$

$$F = 394.7 \text{ kN}$$

**PROBLEMA 52**

En una producción en serie se pretende embutir chapas de acero AISI 1020 de 4 mm de espesor, para fabricar recipientes cilíndricos con diámetro interior de 180 mm, espesor de 3 mm y 50 mm de profundidad. Determinar:

- a) Diámetro inicial de la chapa circular.
- b) Fuerza de corte necesaria para obtener la chapa circular a embutir.
- c) Fuerza de embutición requerida.
- d) Prensa industrial más económica con capacidad para realizar el proceso de embutición.

Modelo	Potencia (kW)	Presión máxima (bar)	Diámetro máximo pistón (mm)	Fuerza de embutición (kN)
EP-37-76	37	1379	76	1225
EP-56-203	56	1034	203	3725
EP-123-387	123	689	387	8825

a)

$$d_0 = \sqrt{(d_1^2 + 4 \cdot d_1 \cdot h) \cdot \frac{t_1}{t_0}} = \sqrt{(180^2 + 4 \cdot 180 \cdot 50) \cdot 0.75} \Rightarrow d_0 = 227 \text{ mm}$$

b)

$$F_c = 0.5 \cdot \sigma_{uts} \cdot A_c = 0.5 \cdot \sigma_{uts} \cdot 2\pi r \cdot t = 0.5 \cdot 393 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 227 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$F_c = 560.5 \text{ kN}$$

c)

$$F = \sigma_{uts} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t_0 \cdot \left(\frac{d_0}{d_1} - 0.7\right) = 393 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 180 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{227}{180} - 0.7\right) \Rightarrow$$

$$F = 500 \text{ kN}$$

d) En cuanto a la fuerza de conformación requerida, cualquiera de las prensas del suministrador podrá realizar estas operaciones de embutición. La elección más económica será la siguiente:

**Prensa EP-37-76**

**PROBLEMA 53**

Con la prensa de embutición cuyos datos se facilitan en la siguiente tabla, se pretende fabricar un nuevo tipo de piezas cilíndricas para el sector naval, de 5 mm de espesor, 70 mm de diámetro y al menos 80 mm de profundidad, hechas con bronce PB104 ( $\tau_{uts} = 340$  MPa). Para alcanzar el ritmo productivo deseado en la embutición, se ha estimado que la velocidad de bajada del pistón debería ser de 0.04 m/s. Teniendo en cuenta que se dispone de una prensa de punzonado con una fuerza de corte máxima de 1000 kN y un juego de pisadores para las chapas a intervalos de 5 mm en diámetro, determinar:

- a) Diámetro máximo de la chapa de partida y profundidad máxima de la embutición.
- b) Verificar que la maquinaria disponible es adecuada para efectuar el proceso.

Modelo	Potencia (kW)	Diámetro máximo pistón (mm)	Profundidad máxima (mm)	Fuerza de embutición (kN)
EP-37-76	37	76	89	1225

a)

$$d_0 \approx 1.1 \cdot (d_1 + h) \Rightarrow d_{0,max} \leq 1.1 \cdot (70 + 89) \Rightarrow d_{0,max} \leq 174.9 \text{ mm}$$

Debido a que la prensa posee un juego de pisadores de chapa a saltos de 5 mm en diámetro, se ha de operar con los siguientes parámetros:

$$d_{0,max} \cong 170 \text{ mm}$$

$$d_0 \approx 1.1 \cdot (d_1 + h) \Rightarrow h_{max} = 84.5 \text{ mm}$$

b)

$$P = F \cdot v \Rightarrow F_{max} = P_{max}/v = 37 \cdot 10^3/0.04 \Rightarrow F_{max} = 925 \text{ kN}$$

$$F = \sigma_{uts} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t_0 \cdot \left(\frac{d_0}{d_1} - 0.7\right) \Rightarrow F_{max} \geq \sigma_{uts} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t_0 \cdot \left(\frac{d_{0,max}}{d_1} - 0.7\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 925 \geq 500 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 70 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{d_{0,max}}{70} - 0.7\right) \Rightarrow 550 \text{ mm} \geq d_{0,max} \Rightarrow \text{Sí}$$

$$F_{c,max} = 0.7 \cdot \tau_{uts} \cdot A_{c,max} = 0.7 \cdot \tau_{uts} \cdot \pi \cdot d_{0,max} \cdot t \Rightarrow 1000 \geq 0.7 \cdot 340 \cdot \pi \cdot 5 \cdot d_{0,max} \Rightarrow$$

$$267 \text{ mm} \geq d_{0,max} \Rightarrow \text{Sí}$$

Teniendo en cuenta la maquinaria de la que se dispone, es posible realizar la fabricación de las nuevas piezas, teniendo en cuenta que:

$$d_{0,max} = 170 \text{ mm} ; h_{max} = 84.5 \text{ mm}$$

**PROBLEMA 54**

En un taller mecánico se dispone de una prensa de embutición con las características indicadas en la tabla. Se desea punzonar y embutir chapas de 400 mm de diámetro y 3 mm de espesor, de aleación de aluminio ASTM 2024, con una misma carrera descendente del pistón. Determinar:

- Dimensiones de la pieza cilíndrica de mayor profundidad que puede embutirse.
- Si este proceso se puede realizar con la prensa de que se dispone.

Modelo	Potencia (kW)	Profundidad máxima (mm)	Diámetro máximo pistón (mm)	Fuerza de embutición (kN)
EP-56-203	56	191	233	3725

- La profundidad máxima de embutición se logrará cuando  $\beta = \beta_{\max}$ , por tanto:

$$\beta_{\max} = 2 - 0.0011 \cdot \frac{d_1}{t} = \frac{d_0}{d_1} \Rightarrow \frac{0.0011}{t} \cdot d_1^2 - 2 \cdot d_1 + d_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.0011}{3} \cdot d_1^2 - 2 \cdot d_1 + 400 = 0 \Rightarrow d_1(\beta_{\max}) = 208 \text{ mm}$$

$$d_0 \approx 1.1 \cdot (d_1 + h) \Rightarrow d_0 \approx 1.1 \cdot (d_1(\beta_{\max}) + h_{\max}) \Rightarrow 400 = 1.1 \cdot (208 + h_{\max}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{h_{\max} = 155.6 \text{ mm}}$$

- 

$$F_c = 0.5 \cdot \sigma_{\text{uts}} \cdot A_c = 0.5 \cdot \sigma_{\text{uts}} \cdot \pi \cdot d_0 \cdot t = 0.5 \cdot 469 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 400 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F_c = 884 \text{ kN} < 3725 \text{ kN}}$$

$$F = \sigma_{\text{uts}} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot t_0 \cdot \left( \frac{d_0}{d_1} - 0.7 \right) = 469 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 208 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{400}{208} - 0.7 \right)$$

$$\mathbf{F = 1124.5 \text{ kN} < 3725 \text{ kN}}$$

La prensa de embutición que se dispone puede acometer este proceso de conformación, quedando limitado a 203 mm el diámetro interior de la pieza embutida, aunque en teoría podría llegar a ser de hasta 208 mm, según los cálculos realizados.

**PROBLEMA 55**

En la fabricación de botes de refrescos se ha empleado aleaciones de aluminio del tipo ASTM 6063, a partir de chapa de 125 mm de diámetro. Siendo las dimensiones aproximadas de estos recipientes las siguientes: diámetro de 60 mm, altura de 130 mm, espesor de 0.15 mm, espesor del fondo/base de 0.35 mm (espesor inicial). Calcular:

- Número de etapas de embutición necesarias para fabricar estos productos.
- Viabilidad de las dimensiones de la chapa de partida.
- Fuerza máxima de embutición necesaria para efectuar el proceso, suponiendo que la prensa tiene un 70% de rendimiento.
- Coste unitario y coste total del proceso para fabricar 10 millones de latas, teniendo en cuenta que el precio de esta aleación es de unos 20€/kg y su densidad 2700 kg/m<sup>3</sup>.

a)

$$\beta_{\max} = 2 - 0.0011 \cdot \frac{d_1}{t} = 2 - 0.0011 \cdot \frac{60}{0.35} = 1.811$$

$$\beta = \frac{d_0}{d_1} = \frac{125}{60} = 2.083 > \beta_{\max} \Rightarrow \text{Se requiere más de una etapa de embutición}$$

Para obtener el mínimo número posible de etapas se toman los valores límites del coeficiente de embutición  $\beta$  (se asume 1 mm de regulación en la prensa):

$$\beta_I = 1.65 = \frac{d_0}{d_I} \Rightarrow (d_I = 75.75 \text{ mm}) \Rightarrow d_I = 76 \text{ mm}$$

$$\beta_{II} = \frac{d_I}{d_{II}} = \frac{76}{60} = 1.266 < 1.33 \Rightarrow \text{Se requieren 2 etapas de embutición}$$

b)

$$d_0 = \sqrt{(d_I^2 + 4 \cdot d_I \cdot h) \cdot \frac{t_1}{t_0}} = 125 = \sqrt{(60^2 + 4 \cdot 60 \cdot h) \cdot \frac{0.15}{0.35}} \Rightarrow$$

$$h = 136.9 \text{ mm} > h_{\text{lata}} = 130 \text{ mm} \Rightarrow \text{El diámetro inicial de 125 mm sí es viable}$$

c) La máxima fuerza que se requiere para efectuar el proceso de conformación corresponde a la primera etapa, que posee el mayor valor de  $\beta$ .

$$F = \sigma_{\text{uts}} \cdot \pi \cdot d_I \cdot t_0 \cdot \left( \frac{d_0}{d_I} - 0.7 \right) = 241 \cdot \pi \cdot 76 \cdot 0.35 \cdot \left( \frac{125}{76} - 0.7 \right) \Rightarrow F = 19.026 \text{ kN}$$

$$F_{\text{prensa}} = \frac{F}{0.7} \Rightarrow F_{\text{prensa}} = 27.18 \text{ kN}$$

d)

$$C_u = m \cdot c = V \cdot \rho \cdot c = \frac{\pi}{4} \cdot 0.125^2 \cdot 0.35 \cdot 10^{-3} \cdot 2700 \cdot 20 \Rightarrow C_u = 0.0116 \text{ €}$$

$$C = n \cdot C_u = 10 \cdot 10^6 \cdot 0.0116 \Rightarrow C = 116000 \text{ €}$$

### 6.3. Problemas propuestos

#### PROBLEMA 56

Mediante una misma prensa de embutición se pretende conformar una serie de piezas cilíndricas de aluminio ASTM 6063 y de titanio ASTM Grade-4. Para las piezas de aluminio se utiliza un punzón de 200 mm de diámetro, y chapas de 320 mm de diámetro y un espesor de 0.8 mm. Para las de titanio se emplean chapas de 200 mm de diámetro y un espesor de 0.5 mm, con un punzón de 80 mm de diámetro. Determinar:

- Fuerza de embutición necesaria para efectuar ambos tipos de piezas.
- Prensa industrial capaz de realizar el proceso con ambos materiales.

Modelo	Potencia (kW)	Presión máxima (bar)	Diámetro máximo pistón (mm)	Fuerza de embutición (kN)
EP-37-76	37	1379	76	1225
EP-56-203	56	1034	203	3725
EP-123-387	123	689	387	8825

a)  $F_{Al6063} = 174.4 \text{ kN}$  ;  $F_{Ti64} = 311 \text{ kN}$

b) La fuerza requerida para fabricar los productos deseados no supone una restricción para seleccionar la prensa, pero sí el diámetro máximo de los machos de embutición. Por tanto, como se requiere un macho de 200 mm de diámetro, la elección más económica será la siguiente: **Prensa EP-56-203.**

#### PROBLEMA 57

Para una determinada aplicación, se requiere fabricar una gran serie de recipientes cilíndricos de  $0.1 \text{ m}^3$  de volumen interior, con el mínimo espesor de chapa posible. Para reducir costes en las materias primas, se desea que tanto el diámetro de partida de la chapa como el espesor del producto sean el mínimo posible, y el mismo en todas las superficies del producto. Determinar:

- Diámetro mínimo del disco de partida que podría utilizarse.
- Altura del recipiente embutido que se obtendría.
- Espesor del disco de partida.

a)  $d_{0,\min} = 1100 \text{ mm}$

b)  $h = 31.66 \text{ mm}$

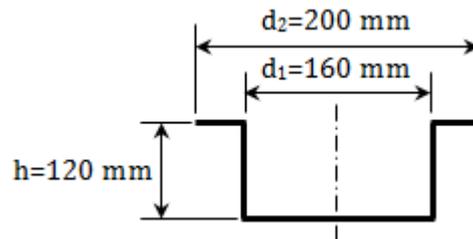
c)  $t_0 = t_1 = 2.7 \text{ mm}$

**PROBLEMA 58**

Se pretende fabricar un conjunto de recipientes cilíndricos, con las dimensiones que se especifican en la figura, a partir de chapas de acero AISI 3140 de 2 mm de espesor. Para este tipo de conformación se tiene la relación entre los diámetros que se especifica junto a la figura. Determinar:

- a) Prensa más adecuada para realizar este proceso embutición.

$$d_0 = \sqrt{d_2^2 + 4 \cdot d_1 \cdot h}$$



Modelo	Potencia (kW)	Profundidad máxima (mm)	Diámetro máximo pistón (mm)	Fuerza de embutición (kN)
EP-37-76	37	1379	76	1225
EP-56-203	56	1034	203	3725
EP-123-387	123	689	387	8825

- a)  $F_I = 1087.4 \text{ kN}$  ;  $F_{II} = 627 \text{ kN}$ . Dado que la prensa de menor potencia resulta inviable para este proceso, debido al diámetro máximo del pistón, la elección más económica es: **Prensa EP-56-203**.

**PROBLEMA 59**

En una empresa se pretende realizar la fabricación en serie de unos nuevos recipientes cilíndricos por embutición. Este nuevo producto ha de tener un diámetro interior de 100 mm y una profundidad de 300 mm, con un espesor de 4 mm, siendo el material utilizado un acero AISI 1045. Calcular:

- a) Número mínimo de etapas de embutición, tomando como criterio de diseño:  $h_i/d_i = 0.5 \cdot i$ .  
 b) Fuerza de embutición máxima del proceso.
- a) Para obtener el mínimo número posible de etapas se toman los valores límites del coeficiente de embutición  $\beta$ . Operando sucesivamente se obtiene:  $h_{IV} = 372 \text{ mm}$ .  
**En la cuarta etapa se pueden obtener el diámetro y la profundidad requeridos.**
- b) La máxima fuerza que se requiere por parte de la prensa de embutición para efectuar el proceso de conformación corresponde a la primera etapa, que posee el mayor valor de  $\beta$ :  $F_{\max} = 1475.7 \text{ kN}$ .

## CAPÍTULO 7. DOBLADO

### 7.1. Planteamiento analítico

El doblado o curvado es uno de los procesos más comunes de conformación por deformación plástica de chapas metálicas. Estos procesos se caracterizan por conferir un estado tensional a tracción de las fibras exteriores de la chapa curvada, y una compresión de las fibras interiores. Se realizan en prensas de plegado de chapa, en las cuales mediante la aplicación de una carga sobre un punzón, con un determinado radio de curvatura, se produce un curvado en una chapa de espesor  $t$ , que puede estar apoyada sobre una matriz, la cual impone el ángulo de doblado deseado  $\alpha$  (fig. 10.1).

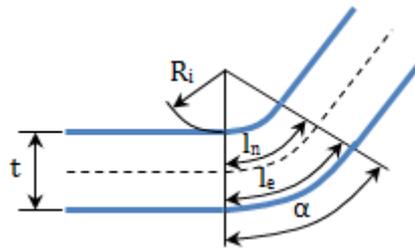


Figura 10.1. Representación de un doblado de chapa de espesor  $t$ , con un radio interior de curvatura  $R_i$  y un ángulo de doblado  $\alpha$ .

En estos procesos de conformación de chapa metálica se tienen las siguientes relaciones para las deformaciones nominal y logarítmica (fig. 10.1):

$$e = \frac{l_e - l_n}{l_n} = \frac{1}{2 \cdot \frac{R_i}{t} + 1} ; \epsilon = \ln \left( \frac{l_e}{l_n} \right) = \ln \left( \frac{R_i + t}{R_i + t/2} \right)$$

donde  $R_i$  es el radio interior de curvatura,  $l_n$  la longitud de doblado en la sección media de la chapa y  $l_e$  es la longitud de doblado de las fibras exteriores de la chapa.

Por su parte, la longitud de doblado de la línea media de la chapa  $l_n$ , expresada en términos del espesor de chapa, cumple con la siguiente expresión:

$$l_n = \alpha \cdot (R_i + k_b \cdot t) ; R_n = R_i + k_b \cdot t$$

$$R_i < 2t \Rightarrow k_b = \frac{1}{3} ; R_i \geq 2t \Rightarrow k_b = \frac{1}{2}$$

siendo  $k_b$  el denominado coeficiente longitud de doblado y  $R_n$  el radio de curvatura de la chapa en su línea media.

Para estimar la fuerza máxima de doblado  $F_{max}$ , se puede hacer uso de la siguiente expresión analítica, función del ancho de chapa  $b$  y la abertura de la matriz  $u$ :

$$F_{\max} = k_f \cdot \sigma_{\text{uts}} \cdot t^2 \cdot \frac{b}{u}$$

siendo  $k_f$  el coeficiente fuerza de doblado, el cual depende del tipo de matriz (fig. 10.2).

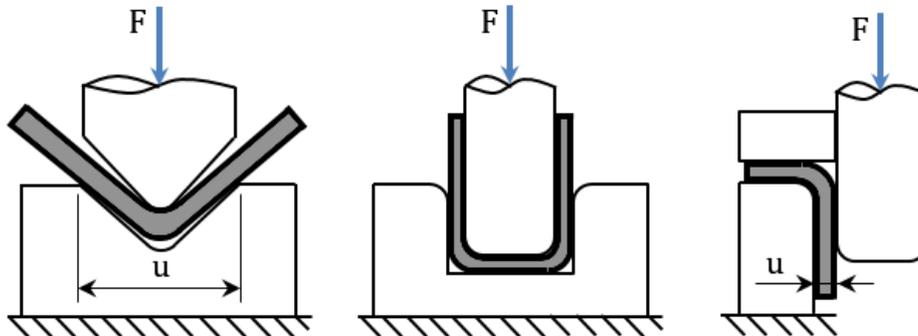


Figura 10.1. Principales tipos de matrices empleadas en el curvado de chapa. Se muestran, de izquierda a derecha; matriz en V, matriz en U y matriz pasante.

$$\text{Matriz en V} \Rightarrow 1.2 \leq k_f \leq 1.35$$

$$\text{Matriz en U} \Rightarrow 0.7 \leq k_f \leq 0.8$$

$$\text{Matriz pasante} \Rightarrow 0.3 \leq k_f \leq 0.33$$

En cuanto a la fuerza de doblado necesaria para obtener deformaciones permanentes en la chapa, ésta depende de diversos factores, como la geometría de la matriz y el punzón, el espesor del material o la resistencia mecánica. No obstante, existen algunas expresiones, obtenidas experimentalmente para caso sencillos, que permiten obtener la fuerza requerida para acometer el proceso de doblado o curvado, donde  $u$  es la abertura de la matriz y  $b$  el ancho de la chapa:

Matriz en V ( $\alpha=90^\circ$ ):

$$F = \left(1 + \frac{4 \cdot t}{u}\right) \cdot \sigma_{\text{uts}} \cdot t^2 \cdot \frac{b}{u}$$

Matriz en U:

$$F = \frac{2}{5} \cdot \sigma_{\text{uts}} \cdot t \cdot b$$

Un aspecto importante en estos procesos es el de alcanzar una determinada deformación permanente de la chapa, para lo cual se requiere de un radio de curvado adecuado.

Puesto que en estos procesos las deformaciones elásticas no son despreciables frente a las plásticas (contrariamente a lo que se sucede en los procesos de conformado volumétricos), cuando el radio de curvatura del punzón es demasiado grande, la deformación elástica de la chapa es muy importante frente a la plástica y no se podrá realizar adecuadamente el proceso.

Es por ello que existe un radio interior máximo de curvado, por encima del cual no es posible asegurar la deformación permanente, y que puede ser determinado mediante la siguiente expresión:

$$R_i \leq R_{i,\max} = \frac{E \cdot t}{2 \cdot Y}$$

Por tanto, en los procesos de doblado de chapa, el efecto de la recuperación elástica (*springback*) suele ser significativo y, en consecuencia, tanto el radio de curvatura  $R_n$  como el ángulo de curvatura  $\alpha$  resultantes del proceso serán mayores que los determinados inicialmente por el punzón y la matriz, obteniéndose al final del proceso unos valores diferentes  $R_{r,n}$  y  $\alpha_r$ .

Aunque los fenómenos de recuperación elástica son complejos y no se suele disponer de expresiones analíticas de uso general, para ciertos casos se pueden encontrar relaciones experimentales, dentro de ciertos rangos de resistencia mecánica y metales comúnmente empleados, que pueden emplearse. Entre estas relaciones empíricas, con objeto de realizar una primera estimación de diseño, se pueden tomar las siguientes:

$$t_r = \frac{2 \cdot R_n \cdot Y}{E}$$
$$R_{r,n} = R_n \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot t_r^3}{3 \cdot t \cdot (t^2 - t_r^2)} \right); \quad \frac{R_{r,n}}{R_n} = \frac{180 - \alpha}{180 - \alpha_r}$$

siendo  $t_r$  un espesor de chapa ficticio, representativo de la fracción del espesor de chapa cuya deformación sería exclusivamente elástica.

7.2. Problemas resueltos

**PROBLEMA 60**

Se desea doblar a 90° una chapa de acero inoxidable AISI 304 de 2 mm de espesor, con un radio interior de doblado igual a la mitad del radio máximo de doblado con objeto de asegurar la deformación permanente del material. Para ello, se pretende diseñar una matriz en V con una abertura que sea la mínima posible. Calcular:

- a) Radio de doblado de la chapa,
- b) Abertura mínima posible de la matriz, y
- c) Ángulo que ha de tener la matriz, teniendo en cuenta que la recuperación elástica ha de ser compensada.

a)

$$R_{i,max} = \frac{E \cdot t}{2 \cdot Y} = \frac{193 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 215 \cdot 10^6} \Rightarrow R_{i,max} = 0.898 \text{ m}$$

$$R_i = \frac{R_{i,max}}{2} \Rightarrow R_i = 0.449 \text{ m}$$

$$R_i = 449 \text{ mm} > 2t = 4 \text{ mm} \Rightarrow k_b = \frac{1}{2}$$

$$R_n = R_i + k_b \cdot t = 0.449 + \frac{0.002}{2} \Rightarrow R_n = \mathbf{0.45 \text{ m}}$$

b)

$$F_{max} = k_f \cdot \sigma_{uts} \cdot t^2 \cdot \frac{b}{u}; F(\alpha = 90^\circ) = \left(1 + \frac{4 \cdot t}{u}\right) \cdot \sigma_{uts} \cdot t^2 \cdot \frac{b}{u}$$

$$F_{max} = F(\alpha = 90^\circ) \leftrightarrow u \equiv u_{min} \Rightarrow k_f = \left(1 + \frac{4 \cdot t}{u_{min}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.35 = 1 + \frac{4 \cdot 2}{u_{min}} \Rightarrow u_{min} = 22.86 \text{ mm} \Rightarrow \mathbf{u = 23 \text{ mm}}$$

c)

$$t_r = \frac{2 \cdot R_n \cdot Y}{E} = \frac{2 \cdot 0.45 \cdot 215 \cdot 10^6}{193 \cdot 10^9} \Rightarrow t_r = 1.0026 \text{ mm}$$

$$R_{r,n} = R_n \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot t_r^3}{3 \cdot t \cdot (t^2 - t_r^2)}\right) = R_n \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 1.0026^3}{3 \cdot 2 \cdot (2^2 - 1.0026^2)}\right) \Rightarrow \frac{R_{r,n}}{R_n} = 1.1122$$

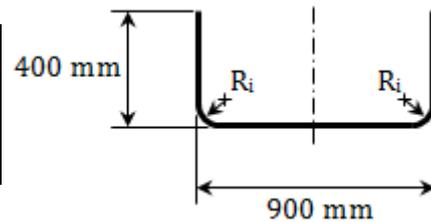
$$\frac{R_{r,n}}{R_n} = \frac{180 - \alpha}{180 - \alpha_r} \Rightarrow 1.1122 = \frac{180 - \alpha}{180 - 90} \Rightarrow \alpha = \mathbf{79.9^\circ}$$

**PROBLEMA 61**

Se desea fabricar un lote de piezas con una sección transversal como la indicada en la figura, a partir de chapas de aluminio ASTM 2024 de 3 mm de espesor, utilizando una matriz de doblado en U. Considerando un factor de seguridad del 70% para el radio interior de doblado, determinar:

- a) Radio interior de doblado.
- b) Longitud total de chapa a conformar.
- c) Seleccionar la prensa de doblado más adecuada, de modo que se utilice el mayor ancho de chapa posible, sin llegar a sobrepasar los 10 kN de fuerza de doblado.

Modelo	Potencia (kW)	Longitud Máxima (mm)	Velocidad (mm/s)
B1400CNC	4	1455	9.3
B3003CNC	9.5	3125	6.7



a)

$$R_{i,max} = \frac{E \cdot t}{2 \cdot Y} = \frac{73 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 324 \cdot 10^6} \Rightarrow R_{i,max} = 0.338 \text{ m}$$

$$1.7 \cdot R_i = R_{i,max} \Rightarrow R_i = 198.8 \text{ mm}$$

$$R_i = 198.8 \text{ mm} \geq 2t = 10 \text{ mm} \Rightarrow k_b = \frac{1}{2}$$

$$l_n = \alpha \cdot (R_i + k_b \cdot t) = \frac{\pi}{2} \cdot (198.8 + 0.5 \cdot 3) \Rightarrow l_n = 314.63 \text{ mm}$$

b)

$$L = (900 - 2 \cdot R_i) + (400 - R_i) + (400 - R_i) + 2 \cdot l_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = (900 - 2 \cdot 198.8) + 2 \cdot (400 - 198.8) + 2 \cdot 314.63 \Rightarrow L = 1534.1 \text{ mm}$$

c)

$$F_{max} = k_f \cdot \sigma_{uts} \cdot t^2 \cdot \frac{b}{u} \Rightarrow 10 \cdot 10^3 = 0.7 \cdot 469 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{b_{max}}{0.9} \Rightarrow$$

$$b_{max} = 3.046 \text{ m}$$

Para optimizar el proceso se tomarán chapas de 3046 mm de ancho, por lo que la prensa de doblado de chapa que ha de utilizar es la siguiente:

**Prensa B3003CNC**

**PROBLEMA 62**

Se desea realizar el conformado de chapas de aleación de titanio ASTM Grado 2, de 3.6 mm de espesor y 1000 mm de ancho, que en una primera fase requiere de un doblado a 30°. Se requiere que la recuperación elástica no sea mayor de 1° y se debe tener en cuenta que para este material, se ha estimado que el radio de la herramienta de doblado debe ser el 10% de la abertura de la matriz. Con objeto de poder dimensionar la herramienta y la matriz, se pide determinar:

- a) Radio de la herramienta (equivalente al radio interior de doblado).
- b) Fuerza máxima de doblado.
- c) Longitud de doblado.

a)

$$\frac{R_{r,n}}{R_n} = \frac{180 - \alpha}{180 - \alpha_r} = \frac{180 - \alpha}{180 - (\alpha + 1)} = \frac{180 - 30}{180 - 31} \Rightarrow \frac{R_{r,n}}{R_n} = 1.0067$$

$$R_{r,n} = R_n \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot t_r^3}{3 \cdot t \cdot (t^2 - t_r^2)} \right) \Rightarrow 1.0067 = 1 + \frac{2 \cdot t_r^3}{3 \cdot 2 \cdot (2^2 - t_r^2)} \Rightarrow 0.02 \cdot (4 - t_r^2) = t_r^3$$

$$\Rightarrow t_r^3 + 0.02 \cdot t_r^2 - 0.08 = 0 \Rightarrow (t_r^3 \gg 0.02 \cdot t_r^2) \Rightarrow t_r \approx 0.43 \text{ mm}$$

$$t_r = \frac{2 \cdot R_n \cdot Y}{E} \Rightarrow R_n = 0.43 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{130 \cdot 10^9}{2 \cdot 280 \cdot 10^6} \Rightarrow R_n = 0.0998 \text{ m} \Rightarrow R_n = 99.8 \text{ mm}$$

$$R_i \approx R_n = 99.8 \text{ mm} > 2t = 7.2 \text{ mm} \Rightarrow k_b = \frac{1}{2}$$

$$R_n = R_i + \frac{t}{2} \Rightarrow 99.8 = R_i + \frac{3.6}{2} \Rightarrow \mathbf{R_i = 98 \text{ mm}}$$

b)

$$R_i \cong 0.1 \cdot u \Rightarrow u \cong 10 \cdot R_i$$

$$F_{\max} = k_f \cdot \sigma_{\text{uts}} \cdot t^2 \cdot \frac{b}{u} = 1.3 \cdot 340 \cdot 10^6 \cdot (3.6 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \frac{1}{10 \cdot 0.098} \Rightarrow \mathbf{F_{\max} = 5.845 \text{ kN}}$$

c)

$$R_i = 98 \text{ mm} > 2t = 7.2 \text{ mm} \Rightarrow k_b = \frac{1}{2}$$

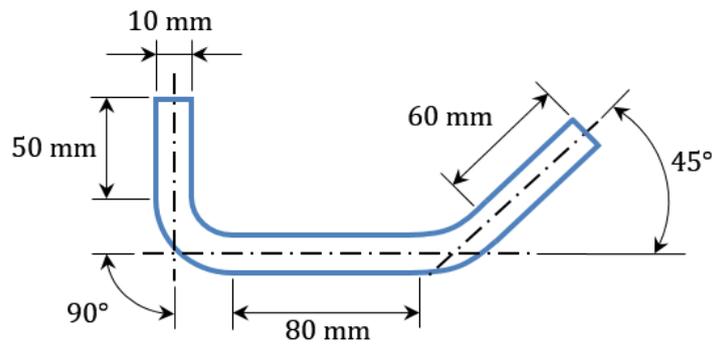
$$l_n = \alpha \cdot (R_i + k_b \cdot t) = \frac{\pi}{6} \cdot (98 + 0.5 \cdot 3.6) \Rightarrow \mathbf{l_n = 52.56 \text{ mm}}$$

7.3. Problemas propuestos

**PROBLEMA 63**

Se desea doblar una chapa de aluminio ASTM 6063 de 10 mm de espesor y 100 mm de ancho, según se indica en la siguiente figura. Si los radios interiores de doblado son de 12 mm, calcular:

- Longitudes de la línea neutra de ambos doblados.
- Longitud total de chapa para efectuar la operación de conformación.
- Fuerza máxima que requiere el proceso de doblado, utilizando una matriz en V de 20 mm de abertura para el doblado de 45° y una matriz pasante para el doblado de 90°.



- $l_{n,90} = 24.09 \text{ mm} ; l_{n,45} = 12.04 \text{ mm}$
- $L = 226.13 \text{ mm}$
- $F_{\max,90} = 79530 \text{ N} ; F_{\max,45} = 162675 \text{ N}$



## CAPÍTULO 8. ESTIRADO

### 8.1. Planteamiento

El estirado es un proceso de conformado por deformación plástica de perfiles planos de pequeño espesor, en el cual la deformación es producida por un estado de tensiones, capaz de generar un cambio en la geometría de la superficie, que normalmente es chapa metálica. Para ello, el material es estirado contra una matriz, que le confiere la forma deseada (fig. 8.1).

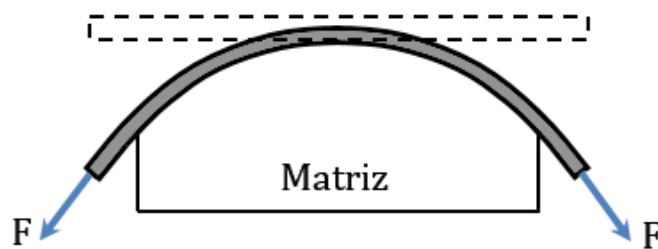


Figura 8.1. Representación del proceso de estirado de una chapa plana.

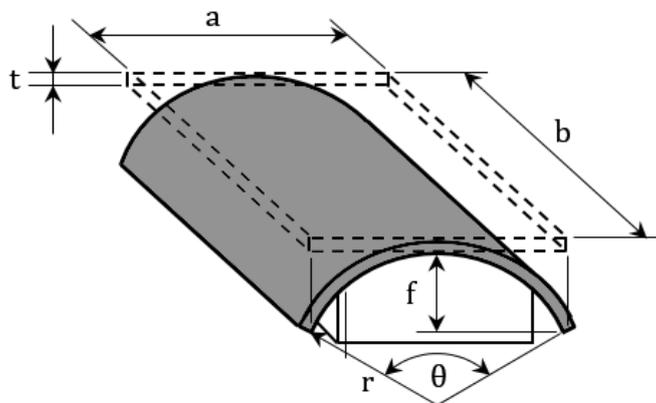
Cuando la superficie es cerrada, se pueden realizar conformaciones de piezas tales como expansiones o reducciones de tubos, entre otras aplicaciones. En cualquier caso, en este tipo de procesos como en todos los de conformación de chapa las deformaciones elásticas no son despreciables, llegando a ser en determinadas condiciones muy significativas.

8.2. Problemas

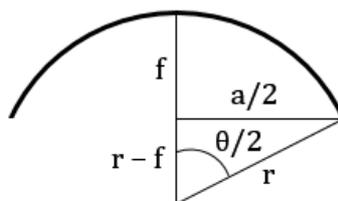
**PROBLEMA 64**

Se desea estirar una chapa de acero AISI 302, de largo  $a = 1000$  mm, ancho  $b = 800$  mm y espesor  $t = 5$  mm, contra una matriz de radio constante  $r$ , tal y como se muestra en la figura, hasta alcanzar una flecha  $f = 400$  mm. Suponiendo que en el proceso de estirado se mantiene constante el ancho de la chapa, calcular:

- Radio de curvatura  $r$  necesario para producir el estirado.
- Espesor final  $t_f$  de la chapa.
- Deformación y tensión equivalente experimentada por la chapa.
- Mínimo espesor que podría obtenerse.



a) Teniendo en cuenta las condiciones geométricas del proceso, se puede establecer las siguientes relaciones entre el radio, la flecha y el largo de la pieza:



$$r^2 = \frac{a^2}{4} + (r - f)^2 \Rightarrow r = \frac{a^2}{8 \cdot f} + \frac{f}{2} = \frac{1^2}{8 \cdot 0.4} + \frac{0.4}{2} \Rightarrow r = 512.5 \text{ mm}$$

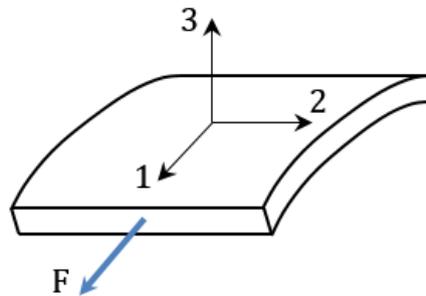
b) Así mismo, se puede establecer la siguiente relación entre el ángulo de estirado  $\theta$ , radio y flecha:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a/2}{r - f} \Rightarrow \theta = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{a/2}{r - f}\right) = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1/2}{0.5125 - 0.4}\right) \Rightarrow \theta = 2.7 \text{ rad}$$

Dado en el estirado de chapa existe conservación del volumen a conformar:

$$V \equiv \text{cte.} \Rightarrow a \cdot b \cdot t = (\theta \cdot r) \cdot b \cdot t_f \Rightarrow t_f = \frac{a}{\theta \cdot r} \cdot t = \frac{1000}{2.7 \cdot 512.5} \cdot 5 \Rightarrow t_f = 3.6 \text{ mm}$$

c) El sistema de deformaciones principales que debe ser elegido teniendo en cuenta la geometría del material a conformar, tal y como se muestra en la siguiente figura:



$$\epsilon_2 = 0 \Rightarrow \epsilon_1 = \ln\left(\frac{\theta \cdot r}{a}\right) = -\epsilon_3 = -\ln\left(\frac{t_f}{t}\right) \Rightarrow \epsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \epsilon_1 ; \Rightarrow \epsilon_e = \mathbf{0.38}$$

$$\sigma_e = 1520 \cdot \epsilon_e^{0.6} = 1520 \cdot 0.38^{0.6} \Rightarrow \sigma_e = \mathbf{850.6 \text{ MPa}}$$

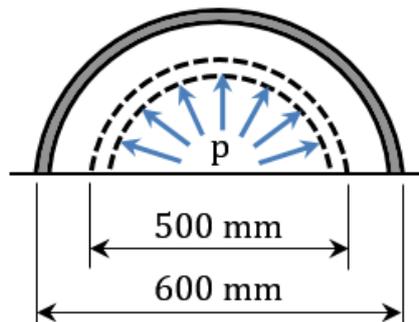
d) Teniendo en cuenta las características del material empleado (Anexo II):

$$\epsilon_i = n = 0.6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{t_i}{t}\right) \Rightarrow t_i = \frac{t}{e^{\frac{n \cdot \sqrt{3}}{2}}} = \frac{5}{e^{0.6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow t_i = \mathbf{2.97 \text{ mm}}$$

**PROBLEMA 65**

Una chapa con forma casquete semiesférico hueco de latón naval, con 500 mm de diámetro y 2 mm de espesor, se somete a un proceso de estirado para aumentar su diámetro hasta a 600 mm, mediante aplicación de presión hidráulica, tal y como se indica en la figura. Determinar:

- Espesor final del casquete.
- Si es posible realizar la expansión prevista.
- Diámetro máximo que se podría obtener en el proceso.



- El área de la superficie de un casquete esférico  $A_{cas}$  viene dada por la expresión:

$$A_{cas} = \pi \cdot D \cdot h$$

siendo  $h$  la altura del mismo y  $D$  el diámetro de la esfera.

Como en este caso se tiene un casquete semiesférico:

$$h = \frac{D}{2} \Rightarrow A_{cas} = \frac{\pi}{2} \cdot D^2$$

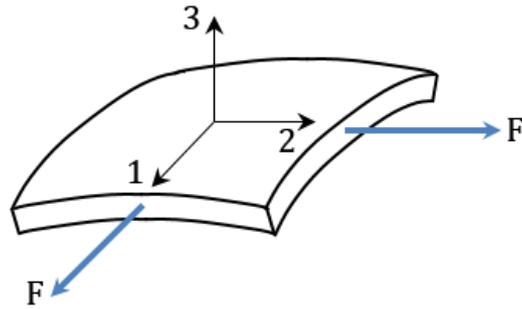
Cuando se tiene que  $D \gg t$ , como sucede en este caso (500 mm  $\gg$  2 mm), el volumen se puede obtener como el producto del área de la superficie por su espesor:

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot D^2 \cdot t \equiv cte. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_0^2 \cdot t_0 = D_f^2 \cdot t_f \Rightarrow \frac{t_f}{t_0} = \frac{D_0^2}{D_f^2} \Rightarrow t_f = 1.39 \text{ mm}$$

b) Como el material que se deforma tiene una geometría cuya superficie se corresponde con la de un casquete semiesférico, si bien su volumen no es el del casquete esférico ya que no es maciza (es una superficie hueca), el sistema de ejes principales ha de definirse sobre la superficie sometida a deformación, según se indica en la siguiente figura. De este modo se puede establecer que:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow (\epsilon_1 = \epsilon_2) \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_3/2$$



$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} = \epsilon_3 = \ln\left(\frac{t_0}{t_f}\right) = 2 \cdot \ln\left(\frac{D_f}{D_0}\right) = 2 \cdot \ln\left(\frac{600}{500}\right) = 0.365$$

Teniendo en cuenta que el material empleado tiene un coeficiente  $n = 0.21$  (ver Anexo II):

$$\epsilon_e = 0.365 > \epsilon_i = n = 0.21 \Rightarrow \text{No es posible realizar el proceso.}$$

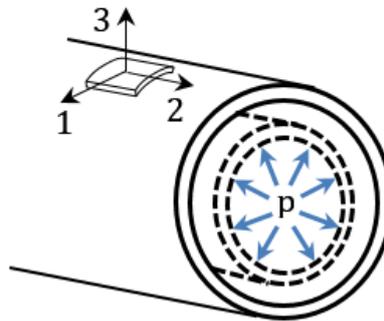
c)

$$\epsilon_e = 2 \cdot \ln\left(\frac{D_f}{D_0}\right) = n \Rightarrow 2 \cdot \ln\left(\frac{D_{f,\max}}{500}\right) = 0.21 \Rightarrow D_{f,\max} = 555.4 \text{ mm}$$

**PROBLEMA 66**

Un tubo de acero inoxidable de 80 mm de diámetro exterior y 3 mm de espesor es estirado para aumentar su diámetro, mediante un sistema de presión interna, según se muestra en la figura. De los ensayos de tracción realizados sobre este acero, con probetas cilíndricas de 100 mm de longitud y 73.54 mm<sup>2</sup> de sección, se obtuvo en promedio una fuerza máxima de 39.3 kN cuando la elongación era de 40.4 mm. Suponiendo que la expansión se realiza de tal manera que la longitud se mantiene constante, se pide determinar:

- Si es posible expandir el tubo de acero hasta un diámetro exterior de 110 mm.
- Máximo diámetro que se podría alcanzar en el proceso con dicho acero.



a) De los datos del ensayo de tracción del material empleado se puede obtener la ecuación de comportamiento del material, para un modelo potencial:

$$\epsilon_i = n = \ln\left(\frac{l_i}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{100 + 40.5}{100}\right) \Rightarrow n = 0.34$$

$$A_0 \cdot l_0 = A_i \cdot l_i \rightarrow A_i = A_0 \cdot \frac{l_0}{l_i} = 73.54 \cdot \frac{100}{140.4} \Rightarrow A_i = 52.38 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_e = C \cdot \epsilon_e^n \Rightarrow \sigma_i = \frac{F_i}{A_i} = C \cdot n^n \Rightarrow C = \frac{750.3}{0.34^{0.34}} \Rightarrow C = 1082.8 \text{ MPa}$$

En este proceso, dado que se desea expandir el diámetro manteniendo la longitud, el espesor se reducirá debido a la conservación del volumen. Teniendo en cuenta el sistema de ejes principales definido en la figura:

$$\text{Longitud} \equiv \text{cte.} \Rightarrow (\epsilon_2 = 0; \epsilon_1 = -\epsilon_3) \Rightarrow \epsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \epsilon_3; \epsilon_3 = 2 \cdot \ln\left(\frac{D_f}{D_0}\right)$$

$$\epsilon_e = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left[\frac{110}{80}\right] \Rightarrow \epsilon_e = 0.735 > \epsilon_i = 0.34 \Rightarrow \text{No se puede realizar}$$

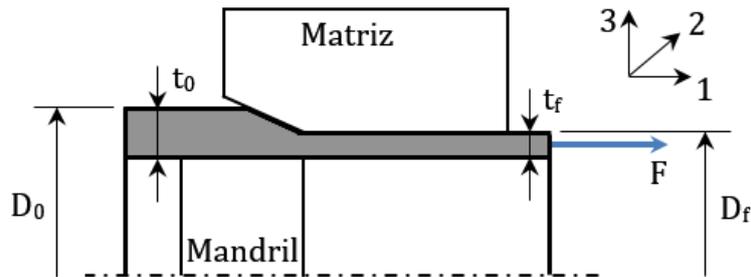
b)

$$\epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{D_i}{D_0}\right) = 0.34 \Rightarrow e^{0.34 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{D_i}{80} \Rightarrow D_i = 107.39 \text{ mm}$$

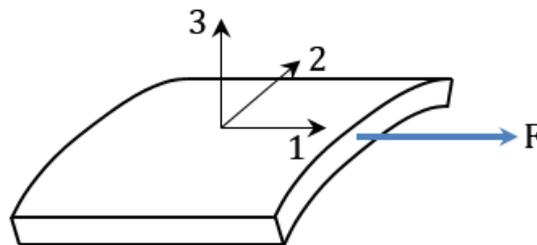
**PROBLEMA 67**

Un tubo de bronce comercial, de diámetro exterior  $D_1 = 100$  mm y espesor  $t_1 = 8$  mm, es sometido a un proceso de estirado para reducir su diámetro hasta  $D_2 = 90$  mm, de acuerdo con el esquema indicado. Determinar:

- a) Si es posible realizar el estirado para obtener un espesor final de 6 mm.
- b) Máxima reducción de espesor que se podría alcanzar.
- c) Fuerza de estirado necesaria para obtener un espesor final de 7 mm.



a) El estirado se realiza por aplicación de una Fuerza de tracción, que hace pasar al tubo por una matriz, en cuyo interior se aloja un mandril. Para definir es estado de formaciones de este proceso, puede tomarse un elemento diferencial de superficie, como el que se muestra a continuación, para definir los ejes principales:



$$\epsilon_1 = \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right); \epsilon_2 = \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right); \epsilon_3 = \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)$$

$$\epsilon_1 = \ln\left(\frac{90}{100}\right) = -0.105; \epsilon_3 = \ln\left(\frac{6}{8}\right) = -0.288$$

Aplicando la conservación del volumen se obtiene:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \Rightarrow \epsilon_2 = -\epsilon_1 - \epsilon_3$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + (-\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \epsilon_3^2)} = 0.41$$

Teniendo en cuenta las características del material, que pueden encontrar en el Anexo II, se tiene que:

$$n = 0,35; \epsilon_i = n = 0.35$$

$$\epsilon_i = 0,35 < 0,41 = \epsilon_e \Rightarrow \text{No es posible realizar el estirado}$$

b) Dado que en condiciones de inestabilidad se obtendrá la máxima reducción posible:

$$\epsilon_e = n = 0,35 = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + (-\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \epsilon_3^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 0,35^2 = \epsilon_1^2 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 + \epsilon_3^2 \Rightarrow (\epsilon_1 = -0,105) \Rightarrow \epsilon_3^2 - 0,105 \cdot \epsilon_3 - 0,081 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\epsilon_3 < 0) \Rightarrow \epsilon_3 = -0,237 = \ln\left(\frac{t_{2,\min}}{10}\right) \Rightarrow t_{2,\min} = \mathbf{6.31 \text{ mm}}$$

c)

$$\epsilon_1 = \ln\left(\frac{90}{100}\right) = -0,105 ; \epsilon_3 = \ln\left(\frac{7}{8}\right) = -0,134$$

$$\epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + (-\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \epsilon_3^2)} = 0,24 < 0,35 \Rightarrow \text{Sí se puede realizar}$$

$$A_f = \frac{\pi}{4} \cdot [D_2^2 - (D_2 - 2 \cdot t_2)^2] \Rightarrow A_f = \pi \cdot t_2 \cdot (D_2 - t_2)$$

$$F = A_f \cdot \int_0^{\epsilon_e} \sigma_e \cdot d\epsilon_e = \pi \cdot 7 \cdot (90 - 7) \cdot 10^{-6} \cdot \int_0^{0,24} 700 \cdot \epsilon_e^{0,35} \cdot d\epsilon_e \Rightarrow F = \mathbf{137.84 \text{ kN}}$$

## BIBLIOGRAFÍA

López Rodríguez, J; (2017). *Fundamentos de procesos convencionales de fabricación mecánica*. Universidad Politécnica de Cartagena.

Kalpakjian, S., & Schmid, S. R. (2014). *Manufacturing engineering and technology*. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson.

Groover, M. P. (2007). *Fundamentals of modern manufacturing: materials processes, and systems*. John Wiley & Sons.

Miguélez, M. H., Cantero, J. L., Canteli, J. A., & Filippone, J. G. (2005). *Problemas resueltos de Tecnología de Fabricación*. Thomson Paraninfo.

Hu, J., Marciniak, Z., & Duncan, J. (2002). *Mechanics of sheet metal forming*. Elsevier.

Creese, R. (1999). *Introduction to manufacturing processes and materials*. Marcel Dekker.

DeGarmo, E. P., Black, J. T., Kohser, R. A., & Klamecki, B. E. (1997). *Materials and process in manufacturing*. Prentice Hall.

Alting, L. (1994). *Manufacturing engineering processes*. Marcel Dekker.

Coca, P., & Rosique, J. (1993). *Tecnología mecánica y metrotecnica*. Pirámide.

Berrocal, L. O. (1991). *Resistencia de materiales*. McGraw-Hill.

Del Río, J. (1980). *Deformación plástica de los materiales: La forja y la laminación en caliente*. Gustavo Gili.

Oehler, G., Kaiser, F. (1977). *Herramientas de troquelar, estampar y embutir*. Gustavo Gili.

Rowe, G. W. (1972). *Conformado de los metales*. Urmo.

[www.asminternational.org/materials-resources/online-databases](http://www.asminternational.org/materials-resources/online-databases)

[www.astm.org](http://www.astm.org)

[www.matweb.com](http://www.matweb.com)

[www.makeitfrom.com](http://www.makeitfrom.com)

[www.azom.com](http://www.azom.com)



### Anexo I. Propiedades mecánicas de algunas aleaciones metálicas comerciales

Material	E (GPa)	UTS (MPa)	Y (MPa)
Acero AISI 1020	190-200	393-448	295-346
Acero AISI 1045	190-200	565	310
Acero AISI 3140	190-200	689-891	422-599
Acero AISI 4340	190-210	745	470
Acero AISI 8620	190-210	530-632	357-385
Acero inoxidable AISI 302	193-200	515-585	255
Acero inoxidable AISI 304	193-200	505	215
Acero inoxidable AISI 316	193-200	579	290
Aluminio ASTM 2017	72-75	427	276
Aluminio ASTM 2024	73	469	324
Aluminio ASTM 6063	69	241	214
Cobre comercial	110-138	205-235	70
Bronce ASTM PB102	121	650	560
Bronce ASTM PB104	105	500	360
Latón ASTM 70/30	110	280-420	85-95
Latón ASTM 85/15	117	300	100
Titanio comercial	120	345-515	240-350
Titanio ASTM Grade 1	80-130	240	170
Titanio ASTM Grade 2	80-130	340	280
Titanio ASTM Grade 3	80-130	450	380
Titanio ASTM Grade 4	80-130	550	480
Níquel ASTM 200	180-214	462	
Níquel ASTM 400	180-214	550	
Níquel ASTM 600	180-214	655	



## Anexo II. Parámetros de las ecuaciones de comportamiento de algunas aleaciones comerciales

$$\sigma = C \cdot \epsilon^n$$

$$\sigma = C(T) \cdot \dot{\epsilon}^{n(T)}$$

Material	C (MPa)	n	T(°C)	C(T) (MPa)	n(T)
Acero AISI 1020	745	0.2			
Acero AISI 1045	1020	0.11	1000	109	0.16
Acero AISI 4135	1015-1100	0.14-0.17			
Acero AISI 4340	2640	0.12-0.15			
Acero inoxidable AISI 302	1520	0.6	1000	177	0.102
Acero inoxidable AISI 304	1275-1400	0.45			
Acero inoxidable AISI 410	960	0.1			
Aluminio ASTM 1050	177	0.2	1000	109	0.16
Aluminio ASTM 1100	180	0.2			
Aluminio ASTM 2017	311	0.18	400	102	0.11
Aluminio ASTM 2024	690-780	0.16			
Aluminio ASTM 5052	202	0.13			
Aluminio ASTM 6063	410	0.05			
Aluminio ASTM 7075	400	0.17			
Cobre comercial	320-530	0.44-0.54	600	88	0.06
Bronce comercial	700	0.35			
Latón ASTM 70/30	600-900	0.45-0.49	600	110	0.2
Latón ASTM 85/15	580	0.34-0.41	600	110	0.2
Latón Naval	585	0.21			
Titanio comercial	1400	0.01-0.02	800	350	0.17



### Anexo III. Especificaciones de algunas máquinas comerciales para conformación plástica de metales

#### Trenes de laminación

Modelo	Potencia (kW)	Diámetro de rodillos (mm)	Tipo de sección transversal
TL-20-100	100	200	Cuadrada
TL-22-2-180	185	220	Chapa
TL-22-3-180	155	220	Cuadrada
TL-25-2/3-240	240	250	Cuadrada
TL-25-2-240	240	250	Chapa
TL-25-5-500	500	250	Perfil
TL-25-6-500	500	250	Chapa
TL-30-3/4-630	630	300	Perfil
TL-30-5-1000	1000	300	Cuadrada
TL-35-3-500	500	300	Chapa
TL-35-2/3-630	630	350	Cuadrada

#### Extrusoras de tornillo único

Modelo (SRE)	Potencia (kW)	Diámetro del tornillo (mm)	L/D del tornillo
SRE-200	15	50.8	24:1
SRE-250	30	63.5	24:1
SRE-300	45	76.2	24:1
SRE-350	75	88.9	24:1
SRE-450	112	114.3	24:1
SRE-600	300	152.4	30:1

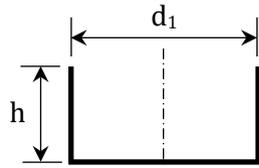
**Prensas de embutición**

Modelo	Potencia (kW)	Fuerza de embutición (kN)	Diámetro máximo (mm)	Profundidad máxima (mm)
610-20-3SC	37	1225	76	89
12-15-7BD	56	3725	233	191
20-10-10BD	123	8825	387	266

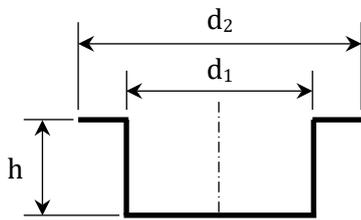
**Prensas de doblado**

Modelo	Potencia (kW)	Fuerza máxima (kN)	Longitud Máxima (mm)	Velocidad (mm/s)
BP-1400CNC	4		1455	9.3
BP-3003CNC	9.5		3125	6.7
PD-3066		660	2040	<15
PD-3100		1000	3060	<15
PD-3170		1700	4080	<10
PD-8230		2300	5050	<10

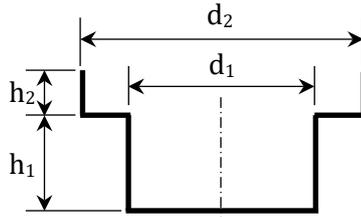
Anexo IV. Fórmulas del diámetro inicial de chapa en procesos de embutición para diversas geometrías cilíndricas



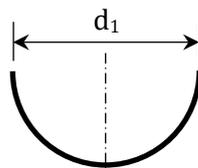
$$d_0 = \sqrt{d_1^2 + 4 \cdot d_1 \cdot h}$$



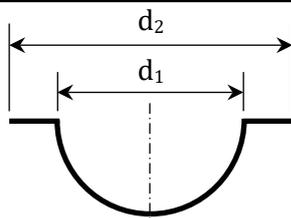
$$d_0 = \sqrt{d_2^2 + 4 \cdot d_1 \cdot h}$$



$$d_0 = \sqrt{d_2^2 + 4 \cdot (d_1 \cdot h_1 + d_2 \cdot h_2)}$$



$$d_0 = \sqrt{2} \cdot d_1$$



$$d_0 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

