

Septiembre 8 de 2006.

Cálculo de una variable. Período Académico 062. G-19. Primer parcial.

Nombre \_\_\_\_\_ Código \_\_\_\_\_

1. (8 puntos) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) ¿Es  $f$  continua en  $x = 0$ ?  
b) ¿Es  $f$  diferenciable en  $x = 0$ ?

2. (12 puntos) Encuentre el límite, si existe.

a)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \cos \frac{1}{x} - 1 \right)$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$

3. (12 puntos) Derive la función.

a)  $g(t) = \left( \frac{t-2}{2t+1} \right)^9$       b)  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$       c)  $y = x \tan^{-1}(e^x)$

4. (8 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva

$$\operatorname{sen}(x+y) = y^2 \cos x$$

en el punto  $(0, 0)$ .

5. (10 puntos) a) Muestre por medio de un ejemplo que
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$
- puede existir aunque
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- ni
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- existan.

b) Suponga que una función  $f$  es continua sobre  $[0, 5]$ , excepto en  $x = 3$ , y que  $f(0) = 1$  y  $f(5) = 4$ . Sea  $N = 2$ . Trace dos gráficas posibles de  $f$ , una en que se muestre que  $f$  podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que  $f$  podría satisfacer ese teorema (aun cuando no se satisfaga la hipótesis).

c) ¿La gráfica de una función  $y = f(x)$  se puede intersectar con una asíntota horizontal? ¿Se puede intersectar con una asíntota vertical? Ilustre trazando gráficas.

d) Suponga que  $F(x) = f(g(x))$  y  $g(3) = 6$ ,  $g'(3) = 4$ ,  $f'(3) = 2$  y  $f'(6) = 7$ . Encuentre  $F'(3)$ .

e) Sea  $f(x) = 2^x$ . Encuentre las primeras cuatro derivadas de  $f$  y deduzca una fórmula para  $f^{(n)}(x)$ .