

## 拡大の同型類の個数について

大阪市立大学理学部 浅芝秀人 (Hideto Asashiba)

$k$  を代数的閉体とし、考える多元環および加群はすべて  $k$  上有限次元とする。  $A$  を多元環、  $X, Z$  を右  $A$ -加群とするととき  $X$  の  $Z$  による拡大  $e$  とは、つぎの形の右  $A$ -加群の完全系列のことである：

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha(e)} M(e) \xrightarrow{\beta(e)} Z \longrightarrow 0 .$$

$X$  の  $Z$  による拡大【分裂しない拡大】の全体を  $EXT(Z, X)$  【 $ext(Z, X)$ 】で表す。 $EXT(Z, X)$  の元  $e, f$  にたいして、 $e$  と  $f$  が同型 ( $e \cong f$ ) であるとは、同型写像  $\gamma: X \rightarrow X, \delta: M(e) \rightarrow M(f)$  および  $\varepsilon: Z \rightarrow Z$  が存在して、 $\delta \cdot \alpha(e) = \alpha(f) \cdot \gamma$  かつ  $\varepsilon \cdot \beta(e) = \beta(f) \cdot \delta$  となることである。また  $e$  と  $f$  が合同 ( $e \equiv f$ ) であるとは、 $e$  と  $f$  が  $\gamma =$  「 $X$  の恒等写像」と  $\varepsilon =$  「 $Z$  の恒等写像」によって同型であることをいう。拡大群  $Ext^1(Z, X)$  は  $EXT(Z, X)$  のなかの合同類の全体とみなすことができる。そこで  $EXT(Z, X)$  の各元  $e$  にたいして、 $(e) := \{f \in EXT(Z, X) \mid e \equiv f\} \in Ext^1(Z, X)$  とおく。 $ext(Z, X)$  のなかの拡大の同型類の個数を  $n(Z, X)$  で表し、 $ext(Z, X)$  のなかの同値関係  $M(e) \cong M(f)$  を法とする同値類の個数を  $n'(Z, X)$  で表す。「 $e \equiv f \Rightarrow e \cong f \Rightarrow M(e) \cong M(f)$ 」より、 $n'(Z, X) \leq n(Z, X) \leq$  「 $Ext^1(Z, X) \setminus \{0\}$  の濃度」が分かる。

さてよく知られているように、単純右  $A$ -加群  $X, Z$  にたいして  $[Ext^1(Z, X) : k] > 1$  ならば、 $n(Z, X)$  も  $n'(Z, X)$  も無限である。ただし  $[V : k]$  は  $k$ -ベクトル空間  $V$  の  $k$ -次元を表す。他方 [2, 29 ページ] によれば、ある多元環  $A$  とその上の直既約右加群  $X, Z$  が存在して、 $n'(Z, X) = n(Z, X) = [Ext^1(Z, X) : k] (= 2)$  となる。そこで、いつこれらの数  $n'(Z, X), n(Z, X), [Ext^1(Z, X) : k]$  が有限と なって一致するか、という問題を考える。結果はつぎの定理と、最後の例で与えた。

**定理。**  $X$  と  $Z$  をある多元環  $A$  上の直既約右加群とすると、つぎは同値である：

- (1)  $n(Z, X) < \infty$ 。
- (2)  $Ext^1(Z, X)$  は  $(End. X, End. Z)$  - 両側加群として単列である。
- (3)  $n(Z, X) = [Ext^1(Z, X) : k]$ 。
- (4)  $n'(Z, X) = n(Z, X) = [Ext^1(Z, X) : k]$ 。

この定理を証明するために以下、3つの補題を用意する。最初の補題は定義から明らかである。環  $R$  の単元全体を  $R^*$  で表し、単位元を  $1_r$  で表す。

**補題1。**  $A$  を多元環、 $X, Z$  を右  $A$ -加群とする。各  $e, f \in \text{ext}(Z, X)$  についてつぎは同値である：

- (1)  $e \cong f$ 。
- (2)  $(f) = \phi(e) \Psi$  となる  $\phi \in (\text{End}, X)^*$  と  $\Psi \in (\text{End}, Z)^*$  が存在する。

**補題2。** (Cf. [3], [1])  $A, [B]$  を basic 多元環とし、 $J, [N]$  をそのジャコブソン根基とする。単列  $(A, B)$ -両側加群  $U = AxB$  にたいして、 $JU \geq UN$  [ $JU \leq UN$ ] ならば、 $U = Ax$  [ $U = xB$ ] で、 $U$  は単列左  $A$ -[右  $B$ -]加群である。そのただ1つの組成列は、 $(A, B)$ -両側加群としての  $U$  のただ1つの組成列と一致する。

**証明。** 対称性から、 $JU \geq UN$  の場合だけを考えれば十分である。すべての  $(A, B)$ -両側加群を自然に  $C := A \otimes_r B^*$  上の左加群とみなす。 $W$  を  $C$  のジャコブソン根基として、 $WS = JS + SN$  がすべての  $(A, B)$ -両側加群  $S$  にたいして成り立つことに注意すると、 $JU \geq UN$  より  $W^i U = J^i U$  ( $\forall i \geq 0$ ) が出る。これより ( $C$  が仮定から basic となることを使って、)  $[J^i U / J^{i+1} U : k] \leq 1$  ( $\forall i \geq 0$ ) となる。よって  $U$  はただ1つの組成列  $(J^i U)_i = (W^i U)_i$  をもつ。さてもし  $U \neq Ax$  とすると、 $X \in JU = WU$ 。すると  $AxB = Cx \leq WU < U$  となって矛盾。 //

**補題3。**  $A, B$  を局所多元環、 $M$  を  $(A, B)$ -両側加群、 $L$  を  $M$  の  $(A, B)$ -両側部分加群で  $M/L$  が半単純  $(A, B)$ -両側加群 ( $\neq 0$ ) となるものとする。すると  $M \setminus L$  の各元  $x, y$  にたいして、条件

- (1)  $y = axb$ ,  $\exists a \in A^*$ ,  $\exists b \in B^*$ 。

から条件

- (2)  $[y] \in k^* \cdot [x]$  (ただし  $[t] := t + L$ ,  $t = x, y$ )。

が出る。さらに  $L$  が単列  $(A, B)$ -両側加群で  $AxB$  に含まれているならば、逆に(2)から(1)が出る。

**証明。** 補題2とその証明で使った記号をそのまま使うことにする。 $k$  が代数的閉体で  $A$  も  $B$  も局所多元環であるから、 $A^* = k \cdot 1_r + J$ ,  $B^* = k \cdot 1_r + N$  となることに注意する。

- (1)  $\Rightarrow$  (2)。上の注意から明らか。

(2)⇒(1).  $C$  が局所多元環であるから、 ${}_C S := Cx = AxB$  はただ1つの極大部分加群  $WS$  をもつ。よって  $L \leq WS$ 。他方仮定より  $S/L$  は半単純左  $C$ -加群であるから  $L = WS$  となる。ゆえに  ${}_C S$  は単列である。とくに  $JS \geq SN$  または  $JS \leq SN$  が成り立つ。一般性を失うことなく、 $JS \geq SN$  が成り立っているとよい。すると補題2より、 $S = Ax$  で  $L (= WS = JS) = Jx$ 。これより  $k^*x + L = k^*x + Jx = A^*x$  となって証明が終わる。

定理の証明。  $R_x := \text{End}_A X$ ,  $R_z := \text{End}_A Z$ ,  $E := \text{Ext}^1(Z, X)$  とおく。  $X$  も  $Z$  も直既約であるから、 $R_x$  も  $R_z$  も局所多元環である。

$$(*) \quad 0 = S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n = E$$

を  $(R_x, R_z)$ -両側加群としての  $E$  の socle 列とする。各  $(e), (f) \in S_i \setminus S_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) にたいして、補題1と3をつかって、 $e \cong f$  から  $[(e)]_i \in k^* \cdot [(f)]_i$  が出る。ただし各  $g \in E$  にたいして  $[(g)]_i := (g) + S_{i-1}$  とおいた。

(4)⇒(3)⇒(1)は明らか。

(1)⇒(2)。ある  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  で  $[S_i/S_{i-1} : k] > 1$  となったとせよ。すると  $k$  上1次独立な2元  $[(e)]_i, [(f)]_i \in S_i/S_{i-1}$  がとれる。上の注意から、任意の  $s, t \in k^*$  にたいして、 $e + sf \cong e + tf \Rightarrow [(e)]_i + s[(f)]_i \in k^* \cdot ([(e)]_i + t[(f)]_i) \Rightarrow s = t$ 。よって  $n(Z, X) \geq \text{「} k^* \text{の濃度」} = \infty$ 。

(2)⇒(4)。  $E$  を単列  $(R_x, R_z)$ -両側加群とせよ。 (\*) より  $n = [E : k]$ 。各  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  にたいして  $(e_i) \in S_i \setminus S_{i-1}$  を1つずつ選んでおく。このとき  $S_i/S_{i-1} = k \cdot [(e_i)]_i$  となる。  $n \leq n'(Z, X)$  と  $n(Z, X) \leq n$  を示せばよい。

$n(Z, X) \leq n$  の証明。各  $e \in \text{ext}(Z, X)$  にたいして、ある  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  が存在して、 $(e) \in S_i \setminus S_{i-1}$  となる。すると  $(e) \in k^* \cdot (e_i) + S_{i-1}$ 。補題3を  $M = S_i, L = S_{i-1}, x = e_i$  に適用すると、補題1より  $e \cong e_i$  となる。

$n \leq n'(Z, X)$  の証明。  $e \in \text{ext}(Z, X)$  を1つとる。  $e$  に  $\text{Hom}(Z, -)$  を作用させると、完全系列

$$0 \rightarrow \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Z, M(e)) \rightarrow \text{Hom}(Z, Z) = R_z \xrightarrow{\delta} E$$

が得られる。ここで  $\text{Im } \delta = (e) \cdot R_z$  であることに注意すると、

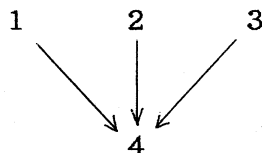
$$[(e)R_z : k] = [R_z : k] - [\text{Hom}(Z, M(e)) : k] + [\text{Hom}(Z, X) : k]。$$

そこで  $f \in \text{ext}(Z, X)$  をとり、 $M(e) \cong M(f)$  となつたとせよ。すると上の式から  
 $[(e)R_z : k] = [(f)R_z : k]$  ; さらに双対的に、  
 $[R_x(e) : k] = [R_x(f) : k]$  。

よって補題2より、 $[R_x(e)R_z : k] = \max \{ [R_x(e) : k], [(e)R_z : k] \}$   
 $= \max \{ [R_x(f) : k], [(f)R_z : k] \}$   
 $= [R_x(f)R_z : k]$  。

結局  $R_x(e)R_z = R_x(f)R_z$  となる。以上のことを、 $e = e_i, f = e_j$  に適用すると、  
 $M(e_i) \cong M(e_j)$  から  $S_i = S_j$  が出来て  $i = j$  となる。 //

例。  $n'(Z, X) \leq n(Z, X)$  より  $n(Z, X) < \infty \Rightarrow n'(Z, X) < \infty$ 。しかしこの逆は一般には成り立たない。 $n'(Z, X) < \infty$  であるが、 $n(Z, X) = \infty$  となる例を挙げよう。 $A^{\circ\circ}$  をつぎの quiver で与えられる多元環とする：



$X, Z$  をそれぞれ dimension type が  $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$  となる直既約右  $A$ -加群とする。すると  $A$  が有限表現型で、どの  $e \in \text{ext}(Z, X)$  にたいしても  $M(e)$  の dimension type は  $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & \\ & & 1 \end{matrix}$  であるから、 $n'(Z, X) < \infty$  となる。しかし  $n(Z, X) = \infty$  である。じっさい、Auslander-Reiten公式と  $A$  が遺伝的であることから  $\text{Ext}^1(Z, X) \cong \text{DHom}(X, \tau Z)$ 。よって、 $[\text{Ext}^1(Z, X) : k] = [\text{Hom}(X, \tau Z) : k] =$  「 $\tau Z$  の dimension type  $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & \\ & & 1 \end{matrix}$  の第4成分」 $= 2$  ( $X$  が vertex 4 に対応する射影的直既約右  $A$ -加群であることに注意)。他方  $R_x = R_z = k$  であるから  $\text{Ext}^1(Z, X)$  は単列両側加群ではない。したがって定理より、 $n(Z, X) = \infty$ 。

#### References

- [1] R. Bautista, P. Gabriel, A. V. Roiter and L. Salmerón: Representation-finite algebras and multiplicative bases, *Invent. math.* **81** (1985), 217-285.
- [2] P. Gabriel: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, *Proc. Ottawa 1979*, Springer Lect. Notes **831**, 1-71.
- [3] H. Kupisch: Symmetrische Algebren mit endlich vielen unzerlegbaren Darstellungen. I, II, *J. Reine Angew. Math.* **219** (1965), 1-25; **245** (1970) 1-14.