UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

LAS FRACCIONES Y SUS USOS DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORES:

DIANA MARÍA CALDERÓN PALACIO

KAROL CRISTINA QUIROZ PUERTA

TRABAJO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS

MEDELLÍN

2018

LAS FRACCIONES Y SUS USOS DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORES:

DIANA MARÍA CALDERÓN PALACIO

KAROL CRISTINA QUIROZ PUERTA

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

DR. MIGUEL ALEJANDRO RODRÍGUEZ JARA
DR. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS

MEDELLÍN

2018

AGRADECIMIENTOS

Queremos dar gracias al Ministerio de Educación Nacional por la oportunidad del programa de Maestrías y Becas de la Excelencia para maestros, también a los profesores que pudimos tener durante este proceso, al igual que a nuestros asesores de tesis por su constante acompañamiento y plena disposición.

Damos gracias a Dios y a las familias especialmente a los hijos de Karol Cristina Quiroz quienes cedieron su tiempo con su madre para la elaboración y puesta en práctica de nuestra tesis.

A nosotras por permitirnos asumir el reto de ser nuevamente estudiantes y sacar adelante nuestro trabajo con amor, dedicación y empeño.

"Nada de esto hubiera sido así de especial sin vuestro apoyo"

RESUMEN

En esta investigación abordamos la comprensión del concepto fracción en atención a sus diferentes usos como objeto matemático. Debido a los bajos resultados que se han obtenido para este tópico en diferentes pruebas nacionales. El marco teórico utilizado en esta investigación es la teoría de Los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska (2000), con el fin de dar elementos en el diseño de actividades para estudiantes del grado 4° de primaria, y con esto beneficiar la comprensión de las fracciones y, a su vez, proveer de tareas para el diseño de una unidad didáctica que favorezca la adquisición de conocimientos y la caracterización entre los tres Modos de Pensamiento.

ABSTRACT

In this investigation we approach the understanding of the fraction concept in attention to its different uses as mathematical object. Due to the low results that have obtained for this topic in different national tests. for which we approach this investigation is the theory of the Modes of Thought, the Anna Sierpinska (2000) in order to guide the design of activities for students of the 4th grade of elementary school with that in benefit of the understanding for the fractions and, in turn, to provide tasks for the design of a didactic unit that favors the acquisition of knowledge and the characterizacion between the three Thinking Modes.

INTRODUCCIÓN

Desde nuestra experiencia como docentes en diferentes Instituciones Educativas, hemos evidenciado la importancia de las matemáticas en el desarrollo de habilidades sociales y de pensamiento, sin dejar de mencionar su incidencia en el desarrollo del razonamiento lógico y abstracto. Según los lineamentos curriculares del Ministerio de Educación Nacional MEN esto permitiría reconocer que el conocimiento matemático en la escuela es considerado una actividad social que tiene en cuenta los intereses del niño y como toda tarea social debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones que surgen en el mundo actual. Su valor radica en que organiza y da sentido a una serie de prácticas, considerando que las matemáticas son una herramienta intelectual que proporciona privilegios y ventajas intelectuales con la cual los estudiantes pueden dar solución a diferentes situaciones cotidianas que se le presentan en contextos externos a la escuela.

Por otro lado, a partir de los resultados que se obtienen de las pruebas nacionales estandarizadas se puede inferir que los estudiantes tienen dificultades en determinados tópicos, en particular en el que aborda nuestro trabajo, las fracciones.

De acuerdo a Murillo (2013)

> La experiencia del trabajo con estudiantes a lo largo del tiempo ha demostrado que ningún método de enseñanza conocido, tiene éxito con todos, ni permite alcanzar todos los objetivos. En el proceso de la enseñanza los docentes acuden desde su experiencia y sus estudios, a una inter-relación de elementos, procesos y herramientas, con el único propósito de lograr que el binomio enseñanza-aprendizaje se alcance de una manera efectiva.

En atención a la problemática presentada, hemos considerado relevante realizar un análisis histórico epistemológico del concepto fracción y algunos de sus usos: partidor, parte-todo, cociente, operador y razón. Con ello se apunta a conocer su desarrollo como objeto matemático desde los diferentes usos que le dieron en diferentes culturas.

Además, se hace referencia a la Teoría Modos de Pensamiento **-TMP-**, ya que esta provee de constructos, que nos parecen necesarios, para explicar cómo un estudiante puede transitar por diferentes modos de pensar para comprender el objeto matemático en cuestión el modo Sintético Geométrico (SG), el modo Analítico Aritmético (AA) y el modo Analítico Estructural (AE) (Sierpinska, 2000).

Así, el trabajo que se presenta está compuesto por seis capítulos, los cuales están organizados de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se describen los antecedentes, la problemática y los objetivos de investigación. Ello permitirá analizar las causas del porqué los estudiantes de Básica primaria y específicamente los del grado 4°, que están entre 8 y 9 años de edad se les dificulta la comprensión profunda del objeto matemático Las fracciones y sus usos.

En el capítulo 2 se encentra una revisión histórica y epistemológica, esta da a conocer el origen de las fracciones y sus usos a través del tiempo por diferentes culturas, poniendo énfasis en su desarrollo en las diferentes civilizaciones según las necesidades que se lograron satisfacer y de acuerdo a los problemas que se abordaron.

En el capítulo 3 se hace una descripción detallada del marco teórico, los elementos que lo componen y su relación con el objeto matemático, fracciones y algunos de sus usos y otros posibles significados que estas adquieren.

El diseño metodológico implementado para la realización de la investigación y la recolección, tabulación, organización e interpretación de la información recopilada en cuanto al objeto matemático en estudio se encuentra en el capítulo 4.

Los análisis a priori y a posteriori de las actividades propuestas, se exhiben en el capítulo 5. El análisis a priori de cada una de las actividades propuestas en el cuestionario exploratorio, el cual muestra las respuestas que esperamos den los estudiantes, con estas se pretende ver la forma en que transitan entre los Modos de Pensamiento (SG, AA, AE) y el nivel de comprensión del objeto matemático, posterior a ello se hace el análisis a posteriori (análisis de los resultados encontrados en el taller) ordenados en una rúbrica, la cual deja ver los articuladores que se tuvieron en cuenta para hacer el tránsito que realiza un estudiante entre los Modos de Pensamiento, determinando con ello la pertinencia de las actividades propuestas en esta intervención. Cabe señalar que de acuerdo a los resultados obtenidos se generaron dos casos de estudio; estudiantes que no logran hacer una caracterización de los Modos de Pensamiento y los estudiantes que logran hacerlo, esto ayuda a dar validez y rigurosidad a la unidad didáctica que se construirá.

Finalmente, el l capítulo 6, da cuenta de las principales conclusiones del trabajo realizado respondiendo a la pregunta de investigación atendiendo a los objetivos, los antecedentes, el análisis histórico epistemológico y el marco teórico en atención al análisis de los resultados de los cuestionarios aplicados a los estudiantes del grado 4° de primaria.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan y describen los antecedentes, la problemática; sustentada desde los resultados de las pruebas nacionales –ICFES–, los objetivos de investigación, además de un rastreo bibliográfico que hace referencia al objeto matemático abordado por otros investigadores. Ello permitirá analizar las causas del porqué los estudiantes de básica y específicamente los del grado cuarto, que están entre 8 y 9 años de edad se les dificulta la comprensión profunda del objeto matemático fracciones y sus respectivos usos.

1.1.PROBLEMÁTICA

El pensamiento matemático es la capacidad que nos permite comprender, aprehender, argumentar y reflexionar las relaciones que se dan en el mundo circundante, es decir, razonar, crear y saber utilizar estas habilidades para desenvolvernos en la sociedad. Saldaña (2012) lo define como "parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas"

Con lo anterior se hace necesario desarrollar la capacidad de matematizar el conocimiento en el aula y en el entorno cotidiano, de modo tal que se puede analizar y comprender fenómenos tan variados como el crecimiento de las flores y las plantas, la simetría del cuerpo humano e inclusive la posibilidad de modelar la realidad natural para crear una realidad artificial cuantificada y formalizada para entenderla mejor y poder comunicarla así como se argumenta desde las generalidades de las pruebas PISA[1], cuyo objetivo es evaluar el proceso de aprendizaje y la adquisición de los conocimientos de los estudiantes cuando llegan al final de la etapa escolar básica, y se encuentran a punto de iniciar la educación superior o para integrarse a la vida laboral.

> Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OCDE, 2006, p. 74)

Esta forma de pensamiento matemático se relaciona con el uso y apropiación de procesos cognitivos como: razonar, demostrar, argumentar, interpretar, identificar, relacionar, graficar, calcular, inferir, efectuar algoritmos y modelar; es asequible al aprendizaje y debe ser evaluado como proceso de cognición, así como se argumenta desde el Estudio internacional de tendencias en matemáticas y ciencias, TIMSS (2015)

De acuerdo a Flores (2010), debemos hacer mención que uno de los conceptos matemáticos que más dificultades presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje en la educación básica corresponde al de las fracciones, se debe tener en cuenta que estas son un concepto complejo de asimilar y comprender por las distintas facetas que asumen, por lo que se hace pertinente abordar la temática desde el cómo es asimilado y comprendido por los estudiantes y como lo puede articular desde su entorno natural y cotidiano.

[1] Programme for International Student Assessment, Proyecto de la –OCDE– (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos)

> La diversidad fenomenológica con que sean tratadas las fracciones como cualquier otro objeto matemático resultará la riqueza final del aprendizaje […] plantea que la enseñanza de las fracciones no puede limitarse a la consideración de la muy tradicional relación parte- todo ya que por esa vía tan solo emergerían fracciones propias, es decir, sería muy limitado su alcance. En un amplio recorrido desde los partidores, los comparadores y los operadores multiplicativos, se requiere un uso irrestricto de la equivalencia que permita una amplia producción de fracciones. (Valdemoros, 2010, p. 426)

De lo anterior se puede concluir que es necesario hacer reestructuraciones escolares en cuanto a la enseñanza de las fracciones, asumiéndolas no solo como partidores, sino también como comparaciones, operadores, parte todo, razones y proporciones.

Por lo tanto, la problemática que motiva esta investigación surge de la revisión de los resultados obtenidos en las Pruebas Saber grado 5° del año 2015, propuestas por el Ministerios de Educación Nacional (MEN, 2010). Dicha revisión permite identificar las dificultades que presentan los estudiantes en los componentes numérico, geométrico y métrico a partir de los cuales se identifica un objeto matemático que transversaliza dichos componentes; las fracciones y sus usos en diferentes contextos.

Las pruebas mencionadas nacen de la necesidad de mejorar la calidad de la educación en Colombia y de la definición de los estándares, como aquellos parámetros que nos indican qué deben alcanzar los estudiantes. Para evitar confusiones, el MEN a partir del año 2010, etiquetó a todos los exámenes nacionales con un solo nombre: Saber, refiriéndose a las evaluaciones que debe presentar todo estudiante colombiano cuando finaliza tercero, quinto, noveno, undécimo, y en el último año de educación superior (ya sea una carrera técnica, tecnológica o profesional). En dichas pruebas se evalúa la habilidad del estudiante para aplicar sus conocimientos en las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Ciencias Naturales y Sociales, y un componente de ciudadanía (MEN, 2010).

Se podría sustentar y argumentar que los resultados obtenidos en el área de Matemáticas en el indicador: las fracciones y sus usos en estudiantes de grado 5 ° de básica primaria de las Instituciones Educativas José María Vélaz y Media Luna, siendo este el objeto matemático a desarrollar en la investigación, con miras a garantizar el desarrollo de competencias, demuestran que el 64% de la población de 5° de educación básica primaria en ambas Instituciones Educativas presentan dificultades en reconocer e interpretar números y fracciones en diferentes contextos como se aprecia en las tablas 1, 2 y 3.

Tabla 1: *Resultados Pruebas Saber. Aterrizando las pruebas al aula, (2015, p 26)*

RESULTADOS GENERALES POR INSTITUCIÓN	**APRENDIZAJES POR MEJORAR**
INSTITUCIÓN EDUCATIVA JOSÉ MARÍA VÉLAZ	

MATEMÁTICAS

1. Descripción general de la competencia

PRUEBA: Matemáticas	COMPETENCIA: Comunicación	
Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificada	Colombia
54%	47%	45%

Interpretación

El 54% NO contestó correctamente los ítems correspond competenc la prueba d

2. Descripción general de los aprendizajes

Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia, su establecimiento educativo tiene el 10% de aprendizajes en rojo, el 70% en naranja, el 20% en amarillo y 0% en verde.
Ponga especial énfasis en los aprendizajes que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que estan en amarillo y verde.

1. Descripción general de la competencia

PRUEBA: Matemáticas	COMPETENCIA: Resolución	
Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificada	Colombia
54%	49%	47%

Interpretación

El 54% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a la competencia Resolución en la prueba de Matemáticas.

2. Descripción general de los aprendizajes

Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia, su establecimiento educativo tiene el 13% de aprendizajes en rojo, el 75% en naranja, el 13% en amarillo y 0% en verde.
Ponga especial énfasis en los aprendizajes que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que estan en amarillo y verde.

3. Aprendizajes por mejorar

El 80% de los estudiantes no expresa grado de probabilidad de un evento, usando frecuencias o razones.

El 62% de los estudiantes no reconoce diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) y hacer traducciones entre ellas.

El 61% de los estudiantes no identifica unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establece relaciones entre ellas.

El 55% de los estudiantes no reconoce e interpreta números naturales y fracciones en diferentes contextos

El 54% de los estudiantes no traduce relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente.

3. Aprendizajes por mejorar

CENTRO EDUCATIVO RURAL MEDIA LUNA MUNICIPIO DE MEDELLÍN

El 76% de los estudiantes no resuelve y formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.

El 66% de los estudiantes no usa representaciones geométricas y establece relaciones entre ellas para solucionar problemas.

El 66% de los estudiantes no utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición.

El 60% de los estudiantes no resuelve y formula problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa.

El 53% de los estudiantes no resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones.

MATEMÁTICAS

1. Descripción general de la competencia

PRUEBA: Matemáticas **COMPETENCIA:** Comunicación

Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificada	Colombia
54%	47%	45%

Interpretación

El 54% NO contestó correctamente los ítems correspondientes a la competencia Comunicación en la prueba de Matemáticas.

2. Descripción general de los aprendizajes

Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia, su establecimiento educativo tiene el 10% de aprendizajes en rojo, el 80% en naranja, el 10% en amarillo y 0% en verde.
Ponga especial énfasis en los aprendizajes que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que estan en amarillo y verde.

3. Aprendizajes por mejorar

- El 77% de los estudiantes no expresa grado de probabilidad de un evento, usando frecuencias o razones.
- El 65% de los estudiantes no reconoce diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) y hacer traducciones entre ellas.
- El 62% de los estudiantes no traduce relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente.
- El 55% de los estudiantes no reconoce e interpreta números naturales y fracciones en diferentes contextos
- El 54% de los estudiantes no identifica unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establece relaciones entre ellas.

1. Descripción general de la competencia

PRUEBA: Matemáticas **COMPETENCIA:** Resolución

Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificada	Colombia
53%	49%	47%

Interpretación

El 53% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a la competencia Resolución en la prueba de Matemáticas.

2. Descripción general de los aprendizajes

Interpretac

De los aprendizajes evaluado competencia, su establecimiento educativo tiene el 0% de aprendizajes en rojo, el 100% en naranja, el 0% en amarillo y 0% en verde.
Ponga especial énfasis en los aprendizajes que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que estan en amarillo y verde.

*Los porcentajes son números redondeados. Por eso, en algunos casos, pueden sumar 99% o 101%.

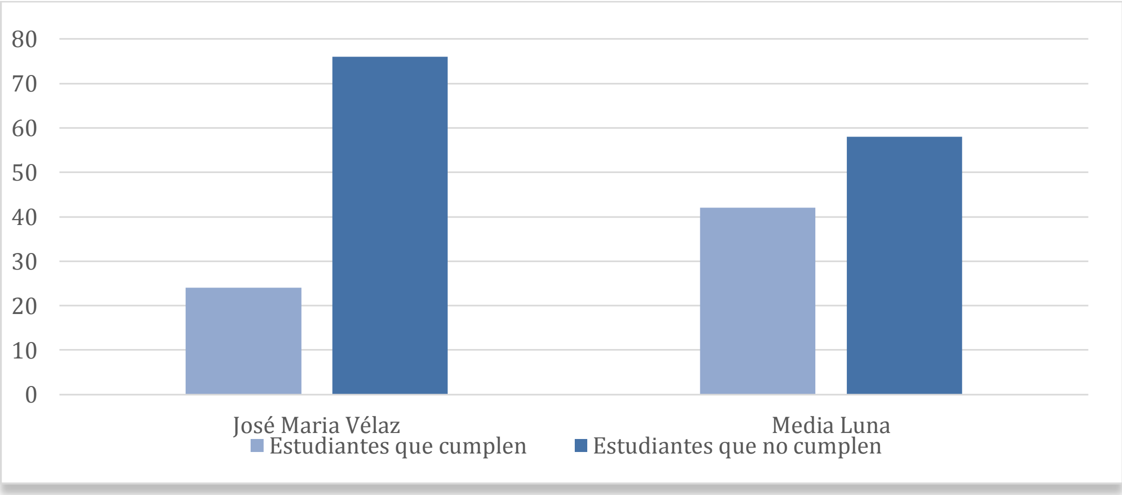
3. Aprendizajes por mejorar

- El 64% de los estudiantes no usa representaciones geométricas y establece relaciones entre ellas para solucionar problemas.
- El 63% de los estudiantes no resuelve y formula problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa.
- El 58% de los estudiantes no resuelve y formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.
- El 58% de los estudiantes no utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición.
- El 47% de los estudiantes no resuelve y formula problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano.

Tabla 2: *Comparación de resultados en (%) por Institución de las Pruebas Saber 2015*.

Instituciones Educativas	**Estudiantes que cumplen**	**Estudiantes que no cumplen**
José María Vélaz	24	76
Media Luna	42	58

Tabla 3: *Comparación de resultados en (%) por Institución de las Pruebas Saber 2015. Gráfico de barras.*

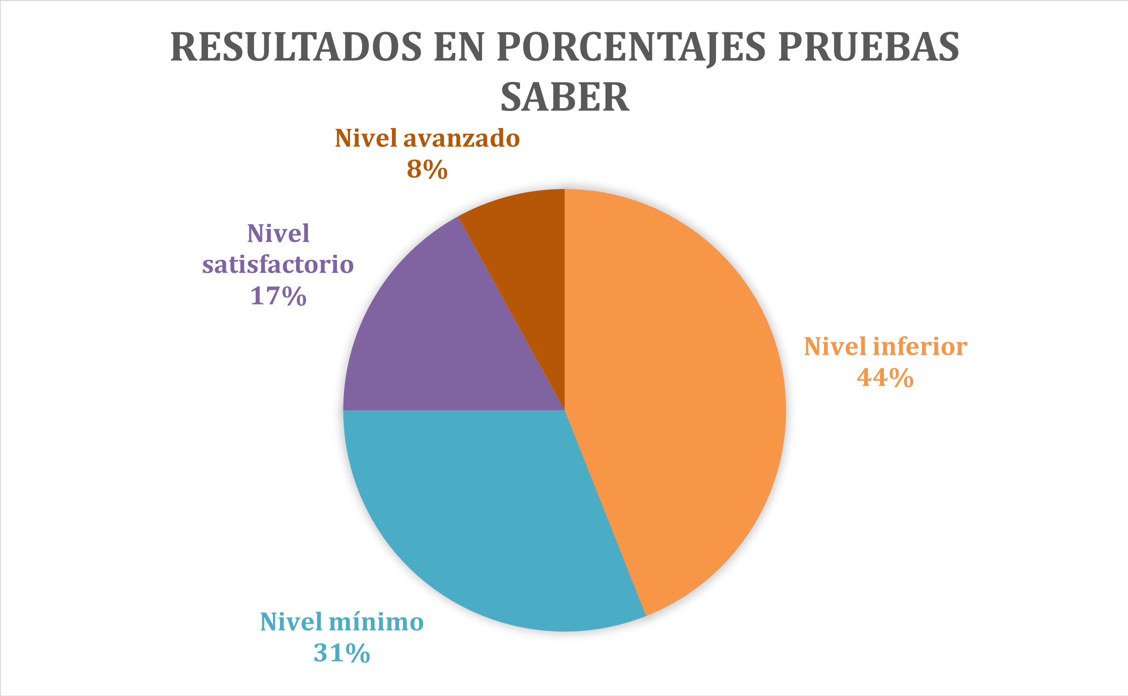


En julio de 2015, el ICFES[2] publicó los resultados de las pruebas SABER aplicadas a los estudiantes de 5° y 9° en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias; con respecto a las matemáticas se concluyó lo siguiente:

> En esta área el desempeño de los estudiantes de ambos grados, es inferior al de lenguaje y ciencias. En quinto grado, 31 de cada 100 estudiantes están en el nivel mínimo. El 17% de los estudiantes demuestra las competencias establecidas en el nivel satisfactorio, es decir, además de hacer lo definido para el nivel mínimo. El 8% de los alumnos de ese grado se ubica en el nivel avanzado, mientras que el 44% de los estudiantes no alcanza los desempeños mínimos establecidos en la evaluación de esta
>
> área al momento de culminar la básica primaria. Esta proporción es superior en 23 y 22 puntos porcentuales a las de lenguaje y ciencias, respectivamente. (Pruebas Saber, 2015, p. 13)

[2] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación

Tabla 4: *Resultados de porcentajes Pruebas Saber 2015.*



Desde nuestra experiencia, podemos reconocer que si bien la asignatura de matemáticas favorece en los estudiantes el desarrollo de un pensamiento matemático y del razonamiento lógico ya que incluye tópicos matemáticos y procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis posibilitando la solución a diferentes situaciones de la cotidianidad que se le presentan en contextos externos a la escuela. Sin embargo, no podemos desconocer que hay dificultades en el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes, ya que la manera cómo se ha trabajado y enseñado la matemática no ha permitido el acercamiento y la apropiación necesaria, esto se sustentado por Murillo:

> La experiencia del trabajo con estudiantes a lo largo del tiempo ha demostrado que ningún método de enseñanza conocido, tiene éxito con todos, ni permite alcanzar todos los objetivos. En el proceso de la enseñanza los docentes acuden desde su experiencia y sus estudios, a una inter-relación de elementos, procesos y herramientas, con el único propósito de lograr que el binomio enseñanza-aprendizaje se alcance de una manera efectiva (Murillo, 2013, p. 5).

De acuerdo al Ministerio de Educación Nacional -MEN- Se considera que la dificultad del binomio enseñanza-aprendizaje de las fracciones radica específicamente en la articulación de lo enseñado con lo cotidiano, no hay una relación del conocimiento de la matemática escolar con situaciones reales, ni en relación con las operaciones básicas y los números racionales. El estudiante debería poder reconocer su utilidad práctica y aplicar dicho conocimiento en la resolución de problemas vinculados a experiencias de su diario vivir, a su contexto, esto puede sustentarse con el siguiente apartado:

> En Colombia, particularmente se habla de las dificultades que genera en la enseñanza el concepto. Se consideran en el Ministerio de Educación Nacional —MEN— (2006), en los estándares de pensamiento numérico en cuarto, quinto, sexto y séptimo grados, en los cuales los estudiantes deben interpretar las fracciones en diferentes contextos,

> relacionarlas con la notación decimal y los porcentajes, y utilizarlas en la resolución de problemas. De allí, que los problemas enunciados en pruebas externas que realizan tanto el estado, como las instituciones de educación superior, apuntan al desarrollo de tales competencias. Sin embargo, ha sido común encontrar dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones; ello se evidencia en resultados de las pruebas SABER, en donde se consideran ítems relacionados con este tipo de números, y solo bajos porcentajes de estudiantes de la básica se ubica en un nivel avanzado, en cuanto al reconocimiento y utilización de ellas. (Murillo, 2013, p. 7)

No se puede negar que la didáctica de las fracciones requiere de una mirada unificadora, ya que los números naturales se trabajan desde el sistema de numeración decimal y cuando se llega al trabajo de las fracciones se espera que los estudiantes están preparados para avanzar, referente a esto puede considerarse;

> Los alumnos con un buen uso de esquemas algebraicos y algorítmicos aprenden a operar con fracciones de todos modos, los alumnos menos o nada dotados en este sentido específico lo aprenden por ensayo y error o no lo aprenden en absoluto. Después de uno o dos años de fracciones, algunos alumnos dominan los algoritmos, aunque no tienen ni idea de lo que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas; otros no conocen siquiera el nombre de fracciones particulares. La pobreza fenomenológica del enfoque me parece, en gran parte, responsable de este fallo didáctico (Freudenthal, 1994, pp. 8 - 20).

Por lo anterior, se manifiesta el interés de trabajar con este objeto matemático, desde el sistema de los números racionales, enfatizando en las fracciones y sus usos como parte-todo, partidores, comparadores y operadores multiplicativos, con el objeto de diseñar e implementar en las Instituciones intervenidas —José María Vélaz y Media Luna— ambas en la ciudad de Medellín, estrategias que sean llamativas para los estudiantes y así poder obtener mejores resultados en las diferentes pruebas de estado e institucionales a las que ellos deben dar cuenta en cada año escolar.

Articulando lo anterior con los parámetros propuestos por el Ministerio de Educación Nacional –MEN– y desde el punto de vista de los Estándares y los Lineamientos Curriculares en la formación integral del estudiante de educación básica, las matemáticas juegan un rol importante, ya que permiten desarrollar estrategias cognitivas de nivel superior y de esta manera tener la posibilidad de un análisis profundo de las situaciones matemáticas en contexto que se presentan a diario desde el trabajo con las fracciones y sus usos .

El –MEN– busca que los estudiantes desarrollen habilidades y competencias que les permitan resolver problemas no–rutinarios o aplicar las matemáticas a situaciones en diversos contextos no matemáticos para desenvolverse en ambientes cotidianos y así aplicar lo aprendido, esto permiten precisar algunos procesos de la actividad matemática que explicitan lo que significa ser matemáticamente competente:

> Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella. Este proceso general requiere del uso

> flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas. (MEN, 2006, p. 51)

Los estándares matemáticos organizados en cuatro pensamientos: números y operaciones, forma, espacio y medida, variación y cambio e información y azar, representando las áreas de las matemáticas, como son, la aritmética, el álgebra, la geometría, la probabilidad y la estadística las cuáles permiten el desarrollo de competencias matemáticas, para esto es necesario la comunicación, construcción de modelos, argumentación y razonamiento.

Teniendo en cuenta lo anterior, los estándares relacionados con el l objeto matemático las fracciones y sus usos, se encuentran especificados en el pensamiento numérico de los grados 4 y 5, los cuales son: "Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones (…), siendo estos los usos que abordaremos en el desarrollo de la tesis y "Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes" (…) (MEN, 2006. p 82).

A partir del 2015 y teniendo en cuenta los Lineamientos Curriculares, surge desde las directrices ministeriales los Derechos Básicos de Aprendizaje –DBA– "son un conjunto de saberes y habilidades acerca de lo fundamental que cada estudiante debe aprender al finalizar un grado escolar"(DBA, 2015, p. 2) los estudiantes desde el grado tercero deben conocer y manejar el concepto de fracción y de esta manera dar cuenta de algunos DBA como lo son: "Comprender el uso de las fracciones para describir situaciones en las que la unidad se divide en partes iguales" (DBA–MEN 2015) y más adelante en el grado cuarto se retoman haciendo alusión a las fracciones, números enteros y decimales, además de la fracción como una relación proporcional tanto inversa como directa, es aquí donde vemos la relación del concepto de fracción con la cotidianidad y el entorno de los estudiantes.

Por lo anterior se quiere lograr que los estudiantes aprendan el concepto de fracción y lo transversalicen[3] activando un pensamiento matemático, generando una articulación con otros objetos matemáticos desde un trabajo sistemático. Para lograr dicha construcción se hace necesario saber el cómo los estudiantes construyen el conocimiento mediante las distintas formas de pensamiento empleadas para la apropiación profunda del mismo, haciendo referencia a que se parte desde lo visual y concreto se llega a una formalización mediante un proceso vinculante de conceptos y pensamientos.

1.2. ANTECEDENTES

Para conocer el desarrollo del objeto matemático las fracciones y sus diferentes usos, se realizó un análisis bibliográfico de acuerdo a la literatura que se dispone; este rastreo es

[3] La Transversalidad Educativa contribuye a los aprendizajes significativos de los estudiantes desde la conexión de los conocimientos disciplinares con los temas y contextos sociales, culturales y éticos presentes en su entorno. Tomado de: https://www.ayudamineduc.cl/ficha/que-es-la-transversalidad-educativa-5

de investigaciones adelantadas del mismo, su análisis epistemológico se adelantará en el capítulo 3 de una manera más profunda para articular y contextualizar dicho objeto.

En Flores y Martínez (2009), se dan a conocer los argumentos generados en torno a un trabajo experimental realizado con estudiantes de nivel secundaria, los cuales trabajan la idea de fracción y sus significados de partidor y de parte todo. El objetivo de este trabajo, es el determinar cuántos y cuáles son los significados de la noción de fracción que trascienden, en su operatividad y en sus múltiples formas de uso. Se refiere a las fracciones como uno de los contenidos de las matemáticas que manifiestan mayores dificultades para su enseñanza-aprendizaje en los niveles básicos de educación.

Identifica errores "típicos", como las operaciones entre fracciones y entre Números Racionales, el manejo de adjetivo "igual", el reconocimiento de los diagramas más comunes y la manipulación de equivalencias. Uno de los objetivos es determinar cuáles son los significados de la noción de fracción que trascienden en su operatividad, en su trabajo algebraico y numérico.

Al finalizar la investigación los estudiantes deducen que la Aritmética pertenece a la Matemática, y sobresale la noción de estructura como un sistema de números con operaciones y relaciones, entre ellos se reconocen los naturales y los racionales; los significados asignados a la noción de fracción para los estudiantes son; cociente, parte todo, razón, operador, medida, porcentaje y racional.

En Salazar y Díaz (2009) se ilustra el concepto de fracción desde lo Socioepistemológico, articulando el- lenguaje matemático y el lenguaje natural como parte de un estudio, el cual explora la enseñanza de la fracción para dotar de significado su aprendizaje, desde el pensamiento variacional y del álgebra, éste articulado con los cuatro ejes de pensamiento matemático escolar, mostrando evidencias de vacíos e invisibilidades de la enseñanza –para y entre–, los cuales presentan en el aula dificultad en el trabajo realizado en cuanto a la comparación, operadores de un número, equivalencias, porcentaje, decimal, entre otros, dificultando en los estudiantes la resolución de problemas. Se aborda un diseño de enseñanza de las fracciones con base en una Ingeniería Didáctica –ID– que busca superar las dificultades que experimentan los estudiantes para lograr aprender de manera significa.

Se concluye que el aula de clase presenta vacíos para trabajar los conceptos de fracción y razón, los cuáles crean obstáculos con relación a las fracciones, a la razón matemática y a su enseñanza.

Considerando el trabajo realizado por Carillo (2012), se considera que el aprendizaje de las fracciones y las dificultades que conlleva podrían estar vinculadas a la manera como los textos escolares abordan su enseñanza, la manera como omiten algunos conceptos y a su organización matemática, las cuales no guardan relación con éstas, debido a esto presentan dificultad para su comprensión y asimilación.

El análisis se fundamenta en el estudio de las OM vinculadas a las concepciones de fracción en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico –TAD–asumiendo que el saber matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas y surge como producto de un proceso de estudio. Al término de esta investigación se determina que los textos escolares analizados permiten el uso de dos concepciones de fracción, tales como parte-todo y operador. La concepción como parte-todo es el que predomina, es el que está presente en la mayoría de las tareas; la concepción de fracción como operador, aunque no se le define de esta manera sino como fracción de un número, se oficializa a través de la técnica de dividir las cantidades por el denominador y multiplicar el resultado por el numerador del operador.

Hurtado Orduz (2012), realiza una investigación cuyo foco era analizar las dificultades que presentan los estudiantes en la interpretación de textos al resolver situaciones y problemas que involucran las fracciones y en la solución de problemas que requieren de los conocimientos básicos de la fracción.

El objetivo de Hurtado (2012) es desarrollar las capacidades de los niños para comprender textos, proponer soluciones en diferentes contextos, resolver problemas y valorar e interpretar los resultados, vinculando la representación simbólica a partir de la construcción de significados planteados desde situaciones cotidianas concretas.

Las situaciones matemáticas deben estar diseñadas y planteadas adecuadamente para ser comprendidos por los estudiantes, en este proceso el docente debe estar presto a cualquier dificultad e interrogante que tenga el estudiante para guiarlo y darle claridad.

Por otra parte en Ruiz (2013) se presenta una propuesta didáctica en Educación Básica para la enseñanza del concepto de fracción, basada en la construcción del concepto de fracción desde la como relación parte–todo y como cociente, haciendo énfasis en el aspecto matemático del concepto y del proceso de enseñanza aprendizaje dando un significante en el contexto real del estudiante en la educación básica, con el fin de mejorar la calidad educativa, bajo el marco de la Sociepistemología.

La propuesta muestra una serie de actividades, en las cuales los estudiantes pueden estructurar y articular de manera coherente y clara el concepto en lo cotidiano llegando a la conclusión que: los conocimientos matemáticos de los docentes deben ser amplios y claros para ser transmitidos de manera correcta a los estudiantes, despertando en ellos su interés y gusto, además de la implementación de una metodología acorde con las necesidades e intereses de los mismos.

De las anteriores investigaciones se concluye que el desarrollo de las matemáticas ha dado cuenta de las múltiples relaciones entre la misma y el mundo real, su abordaje desde la didáctica ha sido ampliamente discutido y estudiado por los investigadores en la enseñanza y de la misma manera ha sido reflexionado y analizado en torno a las posibles representaciones que ofrece para la enseñanza de la fracción.

Como se verá, la presente investigación tiene elementos diferenciadores de los trabajos revisados, ya que la tesis de investigación que elaboramos se permite el tránsito por los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), lo que debiera permitir en los estudiantes de grado 4 y 5 de primaria la adquisición del concepto de fracción, de esta manera podrán lograr dar significado en su cotidianidad. El propósito por tanto es darle un reconocimiento a la construcción del conocimiento, no solo desde lo cotidiano sino también formalizarlo permitiendo que se genere un lugar matemático dentro de lo real y cotidiano.

1.3.PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y sus usos en el grado 4° de primaria al implementar la teoría Modos de Pensamiento para el desarrollo de las competencias matemáticas y la construcción de una unidad didáctica?

1.4. OBJETIVO GENERAL

Analizar un modelo de aprendizaje del sistema de los números racionales al implementar una unidad didáctica validada y fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento (Sintético- Geométrico, Analítico- Aritmético, Analítico- Estructural.

1.5.OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterización de los modos de Pensamiento Sintético Geométrico (SG), Analítico Aritmético (AA), Analítico Estructural (AE) para la enseñanza de las fracciones a partir del desarrollo de actividades estructuradas en el aula de clase.
- Diseñar una unidad didáctica, que considere la carateterización de los modos de pensamiento.

1.6.CONCUSIONES DEL CAPÍTULO

Después de haber revisado los antecedentes teóricos y los resultados de evaluaciones Institucionales, de pruebas nacionales y de los parámetros ministeriales es de considerar que el objeto matemático elegido para desarrollar y profundizar “fracciones y algunos de sus usos” es pertinente para cada una de las Instituciones intervenidas, José María Vélaz, Media Luna, ya que requiere de un exhaustivo trabajo para así tener unos resultados satisfactorios al ser evaluados en las futuras pruebas externas.

CAPÍTULO 2

ASPECTO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO-DE LAS FRACCIONES

En este capítulo se muestra una revisión histórica-epistemológica con el fin de identificar el origen de las fracciones y sus usos a través del tiempo, además de tener el sustento teórico para las diferentes civilizaciones según sus necesidades.

2.1.ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS A TENER EN CUENTA

Recurrir a la historia en el desarrollo temático de cualquier disciplina es una estrategia que deja ver el contraste entre la cotidianidad, la cultura y los avances obtenidos a través del tiempo y la historia de nuestros antepasados.

Las matemáticas están en la cultura y la sociedad, el desarrollo de la humanidad ha estado ligado a la necesidad de solucionar problemas, las fracciones aparecen cuando el ser humano debe medir longitudes, áreas, volúmenes, pesos y otras clases de medidas del entorno, ya que se da la necesidad de encontrar otra forma de representación para el reparto, los Números Naturales ya no son suficientes, puesto que aparecen cantidades más pequeñas que la unidad o más grandes; es ahí donde se da su surgimiento. Las anteriores afirmaciones se sustentan en el rastreo epistémico que aparece a continuación:

Según Cataño (2014), las fracciones egipcias fueron encontradas a mediadios del siglo XIX cuando el escocés Henry Rhind compró en un mercado de Luxor el papiro, donde había gran cantidad de acertijos matemáticos, geométricos, además de fracciones y cálculos para la construcción, este papiro contiene la descripción de las fracciones egipcias y las tablas de fracciones escritas como fracciones egipcias.

Los egipcios resolvían problemas cotidianos con operaciones con fracciones, entre ellas estaban la distribución del pan, el sistema de construcción de las pirámides y las medidas utilizadas para estudiar el planeta tierra, esto evidenciado en numerosas inscripciones antiguas encontradas en la reconstrucción del Papiro de Rhind elaborado por el escriba Ahmes. (Ver figura 1).

> Esta reconstrucción ha permitido interpretar las fracciones egipcias como la suma de los resultados parciales obtenidos al efectuar el reparto en fases sucesivas, así, como elaborar dos posibles alternativas sobre el modo en que el escriba realizaría los cálculos numéricos asociados al proceso de reparto. (Gairín, 2001, p. 1)

Figura 1:
https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/460372.pdf

Según Gairín (2001), los egipcios sólo utilizaron en sus cálculos fracciones unitarias, es decir, no generalizaron el concepto numérico de fracción debido a que dicho concepto presentaba limitaciones epistemológicas que les impedía verlo como un número, para explicar por qué, hay que remitirse al origen funcional de las Fracciones, es decir, los contextos y situaciones en que se inscribe su uso.

La técnica egipcia supone la acción de reparto sencilla por el procedimiento de divisiones sucesivas por la mitad, lo que hizo que las Fracciones de Horus $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32})$ hayan sido de uso tan frecuente.

> El objeto de estudio son las fracciones unitarias utilizadas en el antiguo Egipto y que en su forma más básica están contenidas en el Ojo de Horus o Udyat, uno de los amuletos más populares de Egipto porque ofrece protección y representa la consecución de la "totalidad", Las fracciones que utilizaban los egipcios eran siempre unitarias, es decir, el numerador de todas ellas era 1. Las diversas partes que forman el Ojo de Horus (Ver figura 2) se utilizaban como sistema de numeración fraccionario en particiones agrarias y de capacidad de cereales. La sucesión de Fracciones del Ojo de Horus tiene una ventaja práctica a la hora de hacer particiones ya que cada fracción es la mitad de la anterior. (Fraile, 2010, p. 3-4)

De esta manera la fracción 7/12 se puede escribir como la suma de las fracciones egipcias 1/3 y ¼, como 1=1/2+1/3+1/6 se tiene que 7/12 se puede presentar como la suma de 4 fracciones egipcias; 7/12 =1/3+1/4(1/2+1/3*1/6)=1/3+1/8+1/12+1/24

Así vemos que se puede descomponer en un número determinado de fracciones egipcias.

Según el análisis realizado por Ordóñez (2014) estos aportes se pueden vincular con el lenguaje natural y el lenguaje matemático de la fracción, la cual puede hacer una descripción de situaciones cotidianas y experiencias del aula de clase, los egipcios adquirieron una gran maestría en el manejo de Fracciones en lo cotidiano, esto explica la importancia de los problemas de reparto y de la fidelidad al sistema de fracciones.

Desde un análisis epistémico —en la civilización egipcia— el concepto de fracción, podría verse enmarcado una mirada geométrica, ya que permite que los objetos matemáticos se puedan analizar desde una representación gráfica y concreta, una figura, un conjunto de puntos, etc., resaltando que en este es fundamental la visualización

(Cifuentes, 2011), en la historia se pudo evidenciar desde lo experiencial y el trabajo cotidiano con la partición de sus tierras, conteo de los alimentos u otros objetos, fue dónde se pudo realizar el análisis del mismo y así hacer una articulación del pensamiento espacial-métrico y darle un significado instrumental.

A partir de esto, empezó a verse la fracción como un número finito de particiones de una magnitud discreta al presentarse como una magnitud continua pasa a ser partición infinita, generando así una barrera epistémica, esta situación es abordada por los griegos. En la Revista Latinoamericana de educación Matemática (2010) encontramos que la civilización griega hizo grandes aportes al concepto de fracción e implementación instrumentalista con sus postulados e implementación del método deductivo. Desde las matemáticas, las razones parecen haber sido la primera construcción del concepto las cuales permitieron expresar en las antiguas matemáticas griegas relaciones entre números no múltiplos cuando solo los números naturales eran reconocidos como números; también permitió dar cuenta desde entonces de relaciones entre magnitudes inconmensurables las cuales luego fueron expresadas con números irracionales, por ejemplo, la identificación de que la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal es constante (Smith, 1958; Collette, 1998; Comín, 2000) o la proporción del diámetro de una cuerda y el sonido que esta emite. Así, las razones representaron más de una vez un papel en la historia para permitir explorar una estructura numérica antes de que ésta se estableciera formalmente (Ordóñez, 2012).

"Los elementos de Euclides" tratan separadamente la aritmética y las magnitudes, no sólo por tradición, sino también porque las razones de magnitudes inconmensurables no son reconocidas como números" (Comín, 2000 citado por Ordóñez, 2012); ya que hasta el siglo XVI las razones de magnitudes inconmensurables no eran reconocidas de objetos matemáticos independientes de las magnitudes físicas. "Los matemáticos no los consideraban como números susceptibles de sumar o multiplicar. Se habla de números obscuros, sordos, inexplicables, absurdos" (Comín, 2000 citado por Ordóñez, 2012) Notables matemáticos de Grecia viajaron por Egipto y Babilonia aprendiendo de estos pueblos pero a diferencia de éstos los griegos utilizaron el método deductivo.

> Pitágoras es recordado como el creador de la teoría de números irracionales y el constructor de los cinco sólidos regulares. La herencia cultural que recibieron los griegos fue llevada a ciencia deductiva, en la cual eran claves las nociones de demostración teorema, definición y axioma. (Ruiz, 2013, p. 36)

Puede concluirse que la grandeza de la matemática griega e hindú durante los siglos IV a. C y VI d. C tuvo su sustento en los aportes académicos de los egipcios y babilonios desde el siglo XIX a. C, quienes hicieron propuestas y estructuraron el concepto como respuesta a las necesidades surgidas de la cotidianidad del momento, (Ordóñez, 2014) relacionándolo con una estructura aritmética, ya que fueron los griegos e hindúes quienes brindaron una rigurosidad y formalidad al objeto matemático en cuestión, partiendo de la observación y articulándolo a un lenguaje matemático, es decir, estructuraron el concepto logrando construir un conjunto numérico, con reglas, relaciones, elementos y operaciones al interior del mismo, generado así un sistema analítico y aritmético trascendiendo de lo espacial a lo formal dentro de un lenguaje matemático brindando rigurosidad al mismo.

Además las fracciones surgen como medida y reparto, sin embargo, los babilónicos hacia finales del siglo IV a.C desarrollaron un Sistema de notación fraccionaria que permitió establecer aproximaciones decimales y realizar cálculos de las raíces cuadradas, en el siglo VI d.C, los hindúes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones, durante el periodo Alejandrino tardío, la costumbre griega de escribir las fracciones con el numerador debajo del denominador se invirtió, siendo esta la forma que adoptaron los Indios sin la barra que los separa, en los Hindús se manejaban las cuatro operaciones aritméticas con fracciones elementales, también en el estudio epistémico realizado por Tibaduiza (2016) se argumenta que "los chinos conocían las operaciones con fracciones ordinarias, hallando el mínimo común denominador de varias fracciones, en el siglo XIII, Leonardo de Pisa (Fibonacci) introdujo en Europa la barra horizontal creada por los Árabes para separar numerador y denominador."

En cuanto a la escritura implementada en la actualidad, $\frac{a}{b}$ en Tamayo (2011) vemos que esta se comenzó a utilizar hacia 1784 por razones tipográficas, a principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue quien generalizó el uso de los números decimales tal como los conocemos hoy. De acuerdo con Tamayo (2011) citado por Castaño A. (2014). "las matemáticas Árabes tienen un auge importante en el manejo de los números racionales e introducen una notación más actual" (pág. 25).

> A finales del siglo XVI, Simón Stevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los expresaba de una forma complicada: para 123,456 escribía 123(0) 4(1) 5(2) 6(3). Según Freudenthal (1994), "en las propuestas de Stevin, las fracciones decimales se conectaron estrechamente a un sistema decimal de medida". A principios del siglo XVII, los números decimales ya aparecieron tal como los escribimos hoy, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal." Los números decimales se impusieron en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal en el siglo XVIII. La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros. Los números racionales se expresan de dos formas diferentes, como fracción y con notación decimal. La escritura fraccionaria tiene, para Aleksandrov (1973) su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría. El uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes como el tiempo, da lugar a la notación decimal (Tamayo, citado por Castaño A, 2014, p. 25).

Como puede observarse, el símbolo matemático de fracción $\frac{n}{m}$ viene empleándose desde la antigüedad presentando algunas reestructuraciones de acuerdo la cultura, al igual que los términos "numerador" y "denominador" que tienen un origen incierto, pero sabemos que se ratificaron en el curso del siglo XV en Europa, según lo explica Fandiño (2009): "fracción" deriva del término latino "fractio", es decir, "parte obtenida rompiendo"

Puede concluirse que los Números Racionales se expresan como razón o cociente de dos números enteros, entre ellos se encuentran las fracciones, porcentajes y demás decimales representables mediante fracciones.

Las operaciones con fraccionarios y algunos aspectos epistemológicos y didácticos sobre la enseñanza de las fracciones según Freudenthal (1994) sustenta que "en la didáctica tradicional de las fracciones, la multiplicación está vinculada al patrón rectangular antes que al operador fracción" (pág. 48), considerando que "tres veces" no es una operación natural, igual como lo es " $\frac{1}{3}$ $de\ 36$ ", lo cual da a entender que para la multiplicación de fracciones se puede reemplazar "$\frac{n}{m}$ de" por "veces" Kieren (1980) propone un modelo de construcción de conocimiento mediante una red de pequeños esquemas de los números racionales, evidenciando una relación de significados asociados a la noción de fracción, tales como: medida, cociente, operador, razón y parte todo (Flores, 2010). En relación con la enseñanza, sostiene que:

> Las interpretaciones de los números racionales forman una base conceptual para la construcción de estructuras cognitivas y de enseñanza relacionadas. A partir de esta base, cinco ideas de números fraccionarios emergen como fundamento para un constructo de número racional, éstas representan cinco patrones de pensamiento numérico fraccionario o racional (Kieren, 1980, citado en Flores, 2010, p.134).

De esta manera el concepto de fracción deja de ser tratado solo de manera geométrica en las magnitudes conmensurables, pasando ser generalizado y formalizado en un lenguaje riguroso aritmético para articularse y generar relaciones entre otros conceptos que desde lo histórico y epistémico transitando así a un pensamiento analítico relacionando el objeto de las fracciones como una magnitud, un elemento numérico trascendiendo a un elemento racional, discreto e inconmensurable y generando nuevos elementos.

Así mismo, la base para mejorar la enseñanza del número fraccionario y racional necesita tomar en consideración la visión de Wagner propuesta en 1976 (citado por Kieren, 1980, pág. 133), que reconoce los números racionales como un concepto amplio, lo cual indica que la enseñanza debe orientarse a los componentes que comprende dicho concepto. En suma, la enseñanza necesita considerar las interrelaciones entre los principales componentes. Kieren plantea un modelo teórico con cuatro sub–constructos esenciales, el otro (parte–todo) se encuentra implícito en cada uno de ellos (Kieren, 1980).

2.2. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Al realizar un rastreo epistémico del objeto matemático permite que los procesos de enseñanza– aprendizaje se encuentren contextualizados, lo cual abre paso a una reestructuración de los planes de estudio de las Instituciones Educativas a partir del momento en que los docentes conozcan los excelentes resultados obtenidos a partir de una herramienta de trabajo básico como lo son las guías de trabajo en el aula, pero contando con un valor agregado, el cual es el desarrollo epistemológico.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

En el capítulo 3 se hace una descripción del marco teórico Modos de Pensamiento propuesto por Ana Sierpinska, los elementos que lo componen en el que se sustenta la tesis y se desarrolla el objeto matemático que se trabajó; las fracciones y sus usos.

3.1.MODOS DE PENSAMIENTO

El referente teórico de la didáctica de la matemática en esta investigación corresponde a los Modos de Pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), este marco provee de elementos que permiten describir la forma en que los estudiantes comprenden los objetos matemáticos vistos desde teorías cognitivas, es por esto que se trabajará para desarrollar el objeto matemático las fracciones y sus usos –**FU**–.

Estos modos de pensar permiten describir e interpretar los enfoques "Geométricos, Analíticos o Estructurales", es importante destacar que cuando se hace referencia a los "Modos de Pensamiento", se alude a la comprensión de un concepto matemático que requiere un significado para el estudiante, dependiendo del modo como se esté trabajando, permitiendo que logren priorizar el desarrollar distintas tareas y las conexiones que logran establecer entre ellas, además de visualizar la manera cómo adquieren una comprensión profunda del concepto, dando una serie de argumentos que desarrollan la forma cómo se hace una aprehensión del concepto matemático.

Anna Sierpinska identifica tres Modos de Pensamiento que implican maneras de análisis diferentes, clasificándolos de la siguiente forma: el Sintético-Geométrico que se relaciona con el pensamiento práctico y los Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural, que se relacionan con el pensamiento teórico (Sierpinska, 2000, citada en Parraguez, 2012)

A continuación, se describe de manera detallada cada uno de los modos de pensamiento mencionados anteriormente y su relación con el objeto matemático las fracciones y sus usos.

El Modo Sintético-Geométrico (SG) permite que los objetos matemáticos se puedan analizar desde una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos, etc., resaltando que en este es fundamental la visualización (Cifuentes, 2011).

El modelo cognitivo de razonamiento geométrico, que plantea que los procesos de razonamiento son posibles gracias a la interacción de tres procesos: visualización, construcción y razonamiento (Duval, 1998, citado por Cifuentes, 2011), se hace presente en este modo de pensamiento, el estudiante hace un acercamiento al concepto de fracción, sin hacer mención a magnitudes cuando permite la transformación de dicho número mediante la representación gráfica o conjuntista del mismo, es decir, que desde un Modo Sintético Geométrico (SG) el estudiante tiene su primer acercamiento al objeto matemático a través de una percepción visual, gráfica, concreta y de construcción.

En el Modo Analítico-Aritmético (AA), los objetos matemáticos se manifiestan por medio de "relaciones numéricas", la recta numérica se puede visualizar no como un objeto conmensurable, sino que hay al interior de esta unas magnitudes inconmensurables que se pueden representar con relaciones numéricas (Parraguez, 2012). Este modo plantea la posibilidad de interpretar el objeto desde otro punto de vista, lo que implica poner en consideración elementos que no están presentes en el modo SG por considerar otras relaciones que no son de tipo espacial, en este modo de pensar no solo ve la fracción como un partidor y transformador de un gráfico en cuanto a la modificación del tamaño de su área o de una colección sino también como un operador con los números naturales, los decimales y puede hacer una representación en la recta numérica.

Es importante resaltar la principal diferencia entre los modos Sintético y Analítico, la cual radica en que, desde el Modo Sintético, la mente puede acceder directamente a los objetos para describirlos, mientras que en el Modo Analítico estos se presentan de manera indirecta (Sierpinska, 2000, citada por Parraguez, 2012).

El Modo Analítico-Estructural (AE) se manifiesta en la interpretación por medio de propiedades y axiomas en los sistemas matemáticos que contienen los objetos (Cifuentes, 2011), es un modo de pensar más avanzado donde se exigen otras relaciones, buscando generalizar elementos que ya se habían considerado en los modos SG y AA, el estudiante vincula el concepto con sus propiedades, las razones y las proporciones, además de la interacción con lo cotidiano y establece relaciones entre otros conceptos, generando un campo de conocimiento, estableciendo la definición del sistema de números racionales, los cuales cumplen con las siguientes condiciones como estructura matemática: tener un conjunto de números, unas operaciones y cumplir con unas propiedades al interior del sistema, por ser un cuerpo cumple con la operación suma con su inverso aditivo y multiplicación con su inverso multiplicativo.

Visto desde la teoría plantada por Anna Sierpinska (2000), el estudiante hace un acercamiento al concepto de fracción como partidor, término implementado escolarmente como fraccionador de los objetos físicos, sin hacer mención a magnitudes en función de parte todo de un objeto concreto y real (Vasco, 1996), es decir, que desde un modo Sintético Geométrico el estudiante tiene su primer acercamiento al objeto matemático a través de una percepción visual, luego tiene una caracterización del modo Analítico Aritmético cuando puede reconocer y ver la fracción no sólo como un partidor sino también como un operador con los números naturales y los decimales, al vincularse a este concepto las razones y las proporciones con sus propiedades, además de la interacción con lo cotidiano y establecerse relaciones entre otros conceptos se genera un campo de conocimiento acá el estudiante ha caracterizado el modo de pensamiento Analítico Estructural.

Según Morales (2011), “la fracción parte–todo se considera como un todo –continuo o discreto– que se divide en partes iguales indicando esencialmente la relación existente entre el todo y un número designado de partes” (p, 22) entendida esta desde el SG-FU, ya que permite una visualización de la fracción desde un objeto concreto, el cual puede ser figura o conjunto, relaciona el todo con las partes y la caracterización del AA-FU desde las relaciones de equivalencia, las propiedades de la fracción y su operatividad. El SG-FU da una visión de la fracción como razón entendida esta como “la relación entre dos cantidades o conjuntos de unidades los cuales pueden ser de igual o diferente magnitud.” (Morales, 2011, p. 24).

La importancia de interpretar la fracción como razón consiste en comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte – todo sólo comparan cantidades del mismo tipo; este significado se usa comúnmente con la idea de formar proporciones y permite también desarrollar o integrar los conceptos de fracciones equivalentes, probabilidad y porcentajes y caracterización de los modos SG-FU—AE-FU, logrando el generar transversalización entre los conceptos.

Es pertinente definir la fracción como cociente dentro del AA-FU, entendida como el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes, situándose así en el AA-FU, también puede definirse como el valor numérico resultante de la fracción $\frac{a}{b}$, asumida esta como una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales (Morales, 2011).

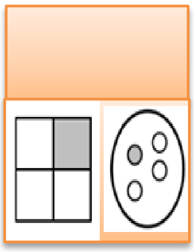
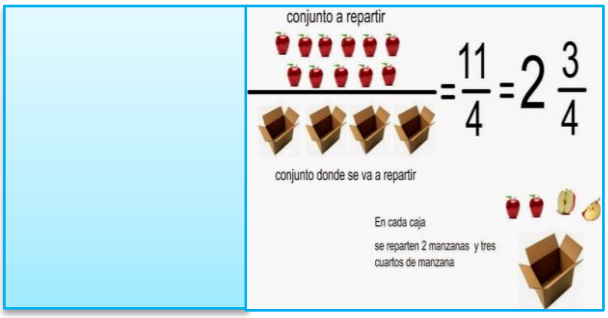
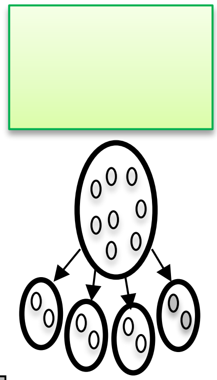
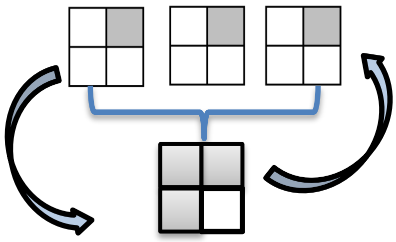
El significado de la fracción como cociente es importante, porque permite preparar el camino para entender los números racionales como conjunto Abeliano, permitiendo así un tránsito entre AA-FU—AE-FU, esta interpretación aporta una herramienta poderosa para el trabajo en otras interpretaciones de las fracciones como la recta numérica o las razones.

Es importante destacar que cuando se hace referencia a los "Modos de Pensamiento" se alude a la comprensión de un concepto matemático el cual requiere un significado para el estudiante dependiendo del modo como se esté trabajando, lo que podría ser la causa de las dificultades que se presentan en el aula cuando el docente le plantea un interrogante en el "Modo Sintético" y le pide interpretarla desde un Modo Analítico (Parraguez, 2012), aspecto que favorece notoriamente el trabajo en contextos educativos en cuanto que el docente podrá tomar conciencia de la importancia de saber direccionar la pregunta dependiendo del objetivo interpretativo que esté buscando.

De acuerdo a Parraguez, 2012, abordar el estudio de un objeto matemático desde la mirada de la teoría de Modos de Pensamiento es útil en cuanto permita que el aprendiz interprete las situaciones de diferentes maneras dependiendo de la construcción cognitiva presente en ella, es decir, cada individuo encuentra útil uno u otro modo de pensar dependiendo de su propia formación y de los objetivos que esté buscando, en sus palabras "estos modos de pensamiento es preferible considerarlos igualmente útiles, cada uno es su propio contexto, para propósitos específicos y principalmente cuando están interactuando" , en el caso de las fracciones y sus usos según Vasco (1998), son entendidas como un transformador multiplicativo o aditivo de una cantidad, magnitud o conjunto, este es también considerado como un transformador.

La tabla 5, muestra la definición del objeto matemático las fracciones y sus usos desde la teoría Modos de Pensamiento.

Tabla 5: Los modos de comprender el Concepto de fracción desde la teoría Modos de Pensamiento.

Modo SG	Se puede afirmar que el estudiante está en el pensamiento SG para la fracción cuando utiliza representaciones gráficas en cada uno de sus usos:    **Como operador:** Adiciona cantidades fraccionarias o de parte todo de manera simbólica. Establece la fracción como un indicador de cambio mediante el lenguaje natural. 
Modo AA	Se reconoce la fracción como; • **Como partidor** $\frac{a}{b}$ *, donde b es el todo y a las partes que se toman del todo y* $b \neq 0$ Al tener la fracción por ejemplo $\frac{3}{5}$ donde el objeto lo divido en 5 partes isométricas y tomo 3 de las partes. • **Como razón** $\frac{a}{b}$ *a elementos de b elementos de un conjunto o coleccion y* $b \neq 0$. Al tener la fracción por ejemplo $\frac{3}{5}$ tengo una colección de 5 elementos de los cuales tomo 3, 3 de 5 elementos. • **Cociente de la forma** $\frac{a}{b}$ *donde b son las veces que se divide o reparte a y* $b \neq 0$. Al tener la fracción por ejemplo $\frac{3}{5}$ y la presenta como 3÷5=0,6. • **Un operador de un número** $c \bullet \frac{a}{b}$. • Promueve descomposiciones a nivel simbólica, es decir expresa simbólicamente, por ejemplo, que “tres cuartos” se puede descomponer en un cuarto y dos cuartos”. Al tener la fracción por ejemplo $\frac{3}{5}$ y la presenta como $3*\frac{3}{5}$.
Modo AE	Para la básica primaria el estructural se logra cuando los estudiantes vinculan el concepto de fracción al contexto mediante lectura e interpretación de porcentajes y lo representan como fracción y representación decimal; lo articulan a un conjunto de números con sus operaciones (aditivo y multiplicativo con sus inversos) y reconocen unas propiedades al interior del mismo Este modo de pensamiento por ser más avanzado y complejo no es posible que se de en todos los estudiantes de enseñanza básica. Si se logra una caracterización adecuada de los modos de pensamiento SG y AA permitirá que los estudiantes logren un AE después de un proceso en grado 8° de educación básica

3.2. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Se puede concluir que los Modos de Pensamiento hacen alusión a que el estudiante referencia el objeto de estudio con las estructuras adquiridas por experiencias anteriores (SG). Una vez incorporado al imaginario del estudiante se pasa a un segundo momento, donde se logra la aritmetización del objeto matemático (AA), es aquí cuando se generan las relaciones entre lo aritmético con lo geométrico llevando el objeto matemático a una relación con diversos conceptos logrando así una transversalización e interconexión de procesos y conceptos entre los objetos matemáticos y sus relaciones (AE).

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta el diseño metodológico con el método, la población, las técnicas e instrumentos de recolección de información, tabulación, organización e interpretación de la información asociada al objeto matemático en cuestión, con el cual se pretende realizar un análisis a priori, para finalmente llegar a un análisis a posteriori. Además se presenta una descripción de las tareas que se plantearon para la construcción de la unidad didáctica.

4.2. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO METODOLÓGICO

El diseño metodológico a implementar considera un estudio de caso y la evaluación cualitativa basados en Stake (2010), la cual destaca la relación entre todo lo que existe y realiza las investigaciones para impulsar la comprensión; “el investigador en estudios cualitativos de casos intenta facilitar la comprensión al lector, ayudar a comprender que las acciones humanas importantes pocas veces tienen una causa simple, y que normalmente no se producen por motivos que se puedan averiguar” (Stake, 2010, p.43).

Stake plantea el estudio de caso visto desde dos perspectivas o estudios, el intrínseco y el instrumental; siendo el primero elegido porque al maestro le surge una duda o curiosidad sobre los procedimientos de un estudiante o grupo de estudiantes, este es elegido porque se quiere aprender de este caso en particular “tenemos un interés intrínseco en el caso, y podemos llamar a nuestro trabajo estudio intrínseco de casos” (Stake, 2010, p.16).

Por otra parte el estudio de caso instrumental se enfrenta a situaciones que se deben investigar, una situación paradójica donde hay una necesidad de compresión general, este puede ser entendido de manera particular “un buen estudio instrumental de casos no depende de la capacidad de defender la tipicidad del caso” (Stake, 2010, p.18).

Quienes trabajan la técnica del estudio de caso desarrollan diferentes habilidades tales como el análisis, síntesis y evaluación de la información, además se posibilita el desarrollo del pensamiento crítico, el trabajo en equipo y la toma de decisiones, la técnica de estudio de casos es vista como una alternativa factible en su aplicación en diferentes áreas del conocimiento.

“El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular para llegar a comprender su actividad en casos importantes” (Stake, 2010, p.11), la finalidad del estudio de caso es conocer el caso en profundidad, sus particularidades y modificaciones válidas de sus generalizaciones.

El estudio de caso es utilizado para diagnosticar y reconocer en el terreno de los problemas donde las relaciones humanas van a jugar un papel importante, es posible además analizar problemas, determinar métodos de análisis según el caso, adquirir agilidad en determinar alternativas o cursos de acción y tomar decisiones. “El caso es un sistema integrado. No es necesario que las partes funcionen bien, los objetivos pueden ser irracionales, pero es un sistema. Por eso las personas y los programas constituyen casos evidentes. (Stake, 2010, p. 16).

4.3.POBLACIÓN

Teniendo en cuenta las anteriores definiciones y el objetivo en el desarrollo del objeto matemático las fracciones y sus usos, se elige el estudio de casos intrínseco, ya que permite tener un conocimiento profundo de uno o varios estudiantes y analizar sus posiciones frente a situaciones concretas de aprendizaje.

La población objeto de estudio está conformada por estudiantes de cuarto grado de básica primaria de las Instituciones José María Vélaz y Media Luna, con una edad promedio entre los 8 y 10 años, con niveles académicos alto, medio y bajo.

Tabla 6: Población objeto de estudio.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA –IE-	GRUPOS	TOTAL DE ESTUDIANTES
José María Vélaz	4°A, 4°B, 4°C	110
Media Luna	4° (Escuela Nueva[4]	15

La investigación se realizará tomando una muestra de 18 estudiantes escogidos de forma aleatoria (9 por institución), luego se hará el análisis de la información recolectada. En cuanto a la selección de casos Stake plantea que el investigador puede elegir casos que favorezcan la interpretación de su investigación:

> El objetivo primordial del estudio de un caso no es la comprensión de otros. La primera obligación es comprender este caso. En un estudio intrínseco, el caso el caso está preseleccionado. En un estudio instrumental algunos casos servirán mejor que otros. Algunas veces un caso "típico" funciona bien, pero a menudo otro poco habitual resulta ilustrativo de circunstancias que pasan desapercibidas en los casos típicos. ¿Cómo se deben seleccionar los casos?
>
> El primer criterio debe ser la máxima rentabilidad de aquello que aprendemos. Una vez establecidos los objetivos ¿Qué casos pueden llevarnos a la comprensión, a los asertos, quizá incluso a la modificación de las generalizaciones? El tiempo que tenemos para el trabajo de campo y la posibilidad de acceso al mismo es limitado. Si es posible, debemos escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas. (Stake, 2010, p. 17).

4.4.INSTRUMENTOS

Para comparar los datos se utilizan técnicas cualitativas que han sido diseñadas precisamente para comprender e interpretar los fenómenos a partir de conjuntos relativamente grandes de datos.

> Las principales funciones del análisis de datos: Describir de una forma comprensiva conjuntos de datos brutos, ayudar a decidir si alguna relación aparente en los datos puede admitirse con confianza, o por el contrario, podría considerarse una relación espontánea debida al azar, estimar magnitudes, especialmente cantidades de cambio o

[4] Escuela Nueva es un sistema que integra estrategias curriculares, comunitarias, con el fin de ofrecer la educación primaria completa e introducir un mejoramiento cualitativo en las escuelas rurales y urbanas, desde un proceso de aprendizaje activo, centrado en el estudiante, un currículo pertinente y muy relacionado con la vida del niño, calendarios y sistemas de promoción y evaluación flexibles. Tomado de: www.escuelanueva.org/

diferencias, determinar si ciertos efectos que aparecen en la información alcanzaran un nivel relevante en el contexto del programa. (Herrera, 2013, p. 8)

Según Fernández-Ballesteros (2003) un informe de evaluación tiene que tener las fases siguientes: plantear la evaluación, quién recibe los resultados, el objetivo de la evaluación, lo que se va a evaluar, la aparición de algún obstáculo durante el proceso evaluativo; luego de reconocer las fases se debe seleccionar qué de esta información será recogida, mediante qué instrumentos y qué fuentes se utilizarán, además de seleccionar el diseño de evaluación, recoger la información, analizar los datos y elaboración del informe de evaluación.

Para la recolección de datos se utilizó un cuestionario al cual se le realizó un análisis a priori (análisis previo) para ser aplicado en tres sesiones, cada una de 90 minutos; para esto se habían planteados dos casos de análisis de acuerdo a las Instituciones Educativas, una vez aplicado y analizado el instrumento (cuestionario) se detectó que los casos de estudio debían ser reevaluados de acuerdo a los resultados obtenidos en las respuestas de los estudiantes y se generaron dos nuevos casos de estudio: caso 1: quienes no transitan y caso 2: quienes transitan y sobre estos se hizo el análisis a posteriori.(comparación y verificación de hipótesis y articuladores hipotéticos).

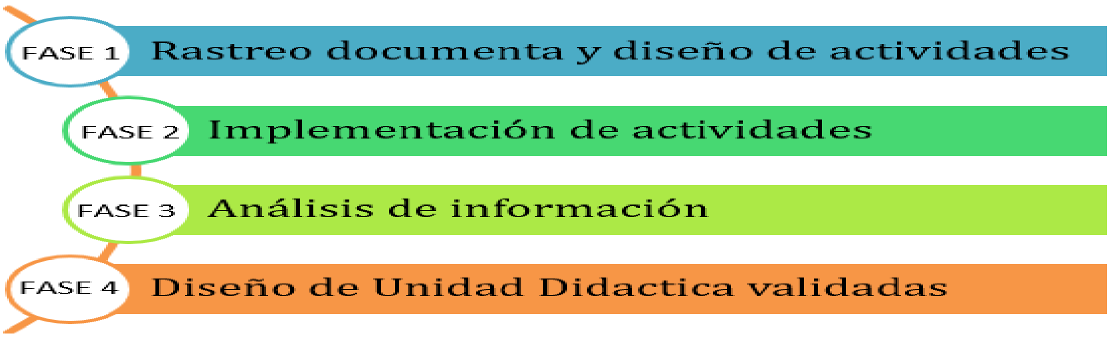
Para el análisis se declaran los estudiantes de la siguiente manera, estudiantes que no transitan entre los pensamientos serán del caso 1, declarados ENC y los estudiantes que transitan serán del caso 2, declarados Ec.

Tabla 7: Estudio de casos (1 y 2) y participantes

CASO 1: ESTUDIANTES QUE NO CARACTERIZAN UN MODO (ENC)	**10 ESTUDIANTES 4° (EN)** ENC1, ENC2, ENC3, ENC4, ENC5, ENC6, ENC7, ENC8, ENC9, ENC10.
CASO 2: ESTUDIANTES QUE CARACTERIZAN (EC)	**8 ESTUDIANTES 4° (ET)** EC1, EC2, EC3, EC4, EC5, EC6, E7, EC8

4.5.FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Ilustración 2: Fases de la investigación



4.5.1. Fase 1: RASTREO DOCUMENTAL Y DISEÑO DEL CUESTIONARIO

Luego de hacer una exploración teórica, histórica y epistemológica del objeto matemático antes mencionado y relacionándolo con la teoría Modos de Pensamiento se diseñan unas actividades para el grado 4 de primaria con su A priori correspondiente, dónde se deja ver a la luz de la teoría las respuestas esperadas por los estudiantes –respuestas de expertos– estas buscan conocer el modo de pensamiento en el que se encuentra el sujeto de investigación en relación al objeto matemático.

El cuestionario fue realizado a partir de los Lineamientos Curriculares y los Derechos Básico de Aprendizaje para el grado 4 de primaria, estipulados por el MEN, además de esto se tuvieron en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes relacionado a las fracciones. A partir de esto se diseñaron actividades prácticas que requerían manipulación de material concreto, las cuales fueron revisadas y validadas por el asesor experto.

En el siguiente capítulo se hará una descripción detallada del cuestionario con el A priori en el que se hacen explicitas las categorías que fueron tomadas en cuanta y sus articuladores.

4.5.2. Fase 2: IMPLEMENTACIÓN DEL CUESTIONARIO

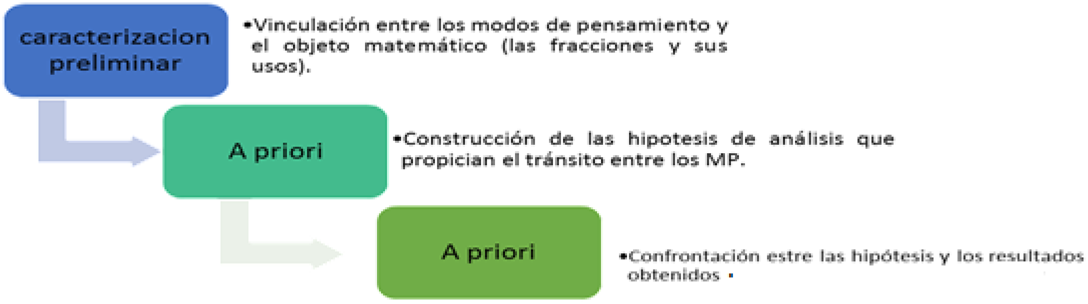
Para la implementación del cuestionario se eligen 18 estudiantes de forma aleatoria de las dos Instituciones Educativas, –9 por Institución– del grado 4 de primaria, se diseñan para ser trabajadas en 3 sesiones, cada una de ellas de 90 minutos, con el fin de propiciar tiempo suficiente para el desarrollo de cada uno de los ejercicios propuestos, estos deben realizarse de manera individual utilizando material concreto –regleteas de cousinaire–.

El maestro investigador cumple el rol de observador y recolector de evidencias del trabajo realizado, tales como registro fotográfico.

4.5.3. Fase 3: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En esta fase se reúnen las evidencias obtenidas en los tres momentos de la aplicación del cuestionario, teniendo en cuenta esta información se categorizan dos estudios de caso –ENC (estudiantes que no caracterizan los modos), a los cuales se les dificulta reconocer el objeto matemático y sus diferentes representaciones, por lo cual se considera que permanecen en el modo SG, por su parte los EC (estudiantes que caracterizan los modos), son aquellos que logran una caracterización exitosa de un pensamiento, esto permite obtener información necesaria y relevante que servirá de insumo para hacer el análisis y plantear las conclusiones del trabajo realizado y sus aportes valiosos por la implementación desde la teoría Modos de Pensamiento.

Lo anterior se generó a partir de dos categorías de análisis:



4.5.4. Fase 4: DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA VALIDADA

Al diseñar la unidad didáctica se reúnen en un solo texto las actividades construidas y planteadas luego de hacer un exhaustivo análisis vinculando el objeto matemático trabajado con la teoría elegida Modos de Pensamiento, el objetivo principal es que los estudiantes puedan hacer una caracterización los tres modos.

En el siguiente capítulo se explicarán de manera detallada las actividades que forman el cuestionario el cual da insumos necesarios para el posterior análisis.

4.6. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Con el desarrollo de estos elementos queda construido el diseño metodológico a implementar, de esta manera consideramos que hay insumos suficientes y un amplio contenido para el desarrollo del anteproyecto, se obtiene información necesaria para analizar y así elaborar la unidad didáctica y tener herramientas para mejorar los resultados en las pruebas saber basado en el objeto matemático las fracciones y sus usos.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

A continuación, se presenta el cuestionario exploratorio con su correspondiente análisis A priori de cada una de las actividades, este instrumento cuenta con 20 ejercicios distribuidos en 3 sesiones cada una con una duración de 90 minutos, se pretende posibilitar a los estudiantes la caracterización de los diferentes modos de pensamiento (SG-FU, AA-FU. AE-FU) de FU.

5.1. CUESTIONARIO Y ANÁLISIS A PRIORI

Antes de aplicar el cuestionario a los estudiantes, se hace necesario hacer un análisis previo a partir de los modos descritos (AA–FU, SG–FU y AE–FU) y su caracterización, donde los investigadores plantean claramente la intención de cada pregunta, precisando aquellos elementos del objeto matemático que permiten la caracterización de los modos, las fracciones y sus usos. Para realizar el análisis se elaboró una tabla (una para cada sesión) con los siguientes ítems: pregunta declarada P1, P2, P3 etc, objetivo, interpretación desde los modos, respuesta esperada, esto con el fin de contrastar las respuestas de los estudiantes con las de los expertos partiendo de los objetivos propuestos en el cuestionario, como lo indica Parraguez (2017), las respuestas dadas reúnen elementos desde lo práctico y lo teórico que se ponen a tono con los propósitos del diseño del instrumento.

Tabla 9: *Sesión 1 cuestionario*

SESIÓN 1 CUESTIONARIO
DURACIÓN 90 MINUTOS
¿CÓMO LO HARÍAS?

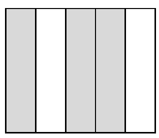
Pregunta 1 Representa:

a) Tres veces un séptimo
b) Tres séptimos
c) Un séptimo tres veces
d) Tres de siete
e) Si tienes un conjunto de 7 manzanas ¿cómo expresarías qué seleccionas 3 manzanas de las siete? Explica con tus palabras.

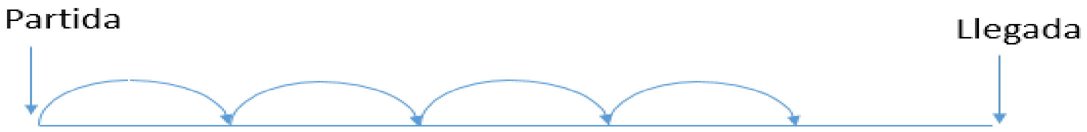
Pregunta 2 Luego de dada la respuesta se les pregunta a los estudiantes:

- ¿De qué otra forma puede representarse esta fracción?
- ¿Es posible representar esta fracción con números?
- ¿Qué tienen en común estas representaciones?

Pregunta 3 Completa la siguiente tabla

Frase	Conjuntista	Gráfica
Tres de ocho		
		
		

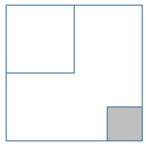
Pregunta 4 Representa en términos de fracción: “Un insecto saltador intento de manera consecutiva saltos de una vez. Según el registro que se obtuvo cuánto logró de una vez. Explica tu respuesta.



Pregunta 5 Inventa una situación matemática para la fracción $\frac{4}{7}$. Explica.

Pregunta 6 Cómo determinarías la mitad de la mitad de doce. Explica.

Pregunta 7 Represente en el lenguaje de las fracciones la parte achurada. Explica tu repuesta.



Pregunta 8 En el modelo que se te ofrece representa la mitad de un cuarto de entero.

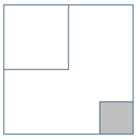
Pregunta 9 Explica si hay más de una manera de responder a lo que se te pide. Puedes usar dibujos o palabras.

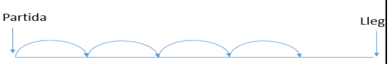
Pregunta 10 Podrías expresar en lenguaje de fracciones el resultado que muestra la segunda figura.

Pregunta 11 Cómo expresarías en un modelo “un tercio más un medio de un entero”

Tabla 10: A priori sesión 1

ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO SESIÓN 1			
PREGUNTA	OBJETIVO	INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS	RESPUESTA ESPERADA
P1 y P2 Representa Tres veces un séptimo f) Tres séptimos g) Un séptimo tres veces h) Tres de siete i) Si tienes un conjunto de 7 manzanas ¿cómo expresarías qué seleccionas 3 manzanas de las siete? Explica con tus palabras. Luego de dada la respuesta se les pregunta a los estudiantes: ¿De qué otra forma puede representarse esta fracción? ¿Es posible representar esta	Representar de diferentes formas las Fracciones dadas.	Sintético- geométrico **(SG)** Representación de la fracción de forma gráfica o mediante un conjunto o colección.	El estudiante puede hacer la representación partiendo de una unidad completa y así responder al $SG_{gráfico}$-FU caracterizarlo. Se puede dar que el estudiante pueda hacer la representación desde un conjunto respondiendo al $SG_{comjuntista}$ sin caracterizarlo. Al realizar el

fracción con números? ¿Qué tienen en común estas representaciones?			cuestionamiento de otras formas de representación de la fracción se pretende que el maestro movilice en sus estudiantes las múltiples formas de representación de una fracción y pueda establecer una relación entre fracción, conjunto, gráfico y operación.
P3 y P7 Completa la siguiente tabla  Representa en el lenguaje de las fracciones la parte sombrada. Explica tu repuesta 	Representar la fracción desde sus diferentes formas. Establecer la relación entre fracción como un conjunto o fracción como gráfico.	Sintético- geométrico **(SG)** Es posible caracetrizar los modos Sintético- geométrico y Analítico- aritmético **(SG y AA).** Las partes de un total de éstas se relacionan a través de un par de palabras claves que dan cuenta de una cuantificación del fraccionamiento El lenguaje natural relaciona los elementos seleccionados de un total de elementos.	El estudiante puede saber que una fracción representa una o más partes congruentes de uno o más enteros. Entero que representa una unidad (pudiendo ser un trazo, dirigido o no, de una recta numérica). Una fracción corresponde en faceta de razón a uno o más elementos de un conjunto (puede ser más conjuntos). Representa numéricamente fraccionamientos haciendo alusión a conjuntos o enteros. Realiza lecturas y representación simbólica de una fracción presentada de forma conjuntista

			o gráfica.
P4 Representa en términos de fracción: "Un insecto saltador intento de manera consecutiva saltos de una vez. Según el registro que se obtuvo cuánto  logró de una vez. Explica tu respuesta.	Definir la fracción no sólo como un partidor gráfico sino también como la repartición equitativa de un conjunto. Representar la fracción como la partición de un segmento de un entero.	Posible caracterización de los modos Sintético-geométrico y analítico-aritmético. **(SG y AA).** Utiliza un par de números para referirse a un fraccionamiento o a relaciones parte todo. Realiza diferentes representaciones de una fracción (puede ser de manera simbólica, gráfica o conjuntista indistintamente).	Representa numéricamente fraccionamientos haciendo alusión a conjuntos o enteros. Realiza lecturas y representación simbólica de una fracción presentada de forma conjuntista o gráfica.
P5, P6 y P8 Inventa una situación matemática para la fracción $\frac{4}{7}$. Explica Cómo determinarías la mitad de la mitad de doce. Explica En el modelo que se te ofrece representa la mitad de un cuarto de entero. 	Interpretar las diferentes formas de representar la fracción como un Operador de un Número.	Posible caracterización de los modos Analítico-aritmético y analítico-estructural **(AA y AE)** analítico- estructural **(AE)** La fracción como par de números reales que representa trasformaciones, con o sin modelos, y se desprenden propiedades. Adiciona cantidades fraccionarias o de parte todo de manera simbólica. Establece la fracción como un indicador de cambio mediante el lenguaje natural	El estudiante puede hacer las representaciones de la fracción en la recta numérica utilizando los términos de Numerador y Denominador en las operaciones suma y/o multiplicación; y vincular también el término de Número Natural Entero en dicha operación, logrando así una caracterización. Reconoce en el lenguaje natural el eslabón para transitar entre trasformaciones, a nivel simbólico, con o sin un modelo. Reconoce propiedades de las

			operaciones al manipular un fraccionamiento, distinguiendo entre el numerador y denominador. Reconoce la fracción como una división desde el rol del denominador, desprendiendo propiedades.
P9 Explica si hay más de una manera de responder a lo que se te pide. Puedes usar dibujos o palabras **P10** Podrías expresar en lenguaje de fracciones el resultado que muestra la segunda figura. **P11** Cómo expresarías en un modelo "un tercio más un medio de un entero"	Reconocer la fracción como par de números reales que representa trasformaciones, con o sin modelos, y se desprenden propiedades.	Posible caracterización de los modos analítico-aritmético y analítico-estructural. **(AA y AE)** Utiliza un par de números para referirse a un fraccionamiento o a relaciones parte todo. Reconoce las múltiples funcionalidades que puede otorgársele a la fracción desde trasformaciones de carácter simbólicas.	Reconoce en el lenguaje natural el eslabón para crear entre trasformaciones a nivel simbólico, con o sin un modelo. Reconoce propiedades de las operaciones al manipular un fraccionamiento, distinguiendo entre el numerador y denominador. Distingue el rol de numerador, para numerar, y el respectivo denominador, para denominar, refiriéndose a una unidad o unidades (geométricas o conjuntistas). Diferencia entre la cantidad entera y fraccionaria. Utiliza los términos numerador, denominador y relaciona el

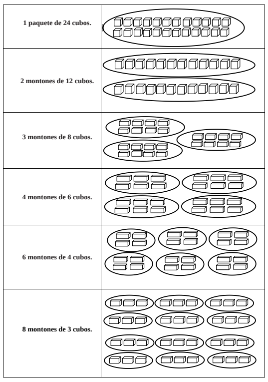
			numerador con operaciones (adición y/o multiplicación). Adiciona cantidades fraccionarias o de parte todo de manera simbólica. Establece la fracción como un indicador de cambio mediante el lenguaje natural.

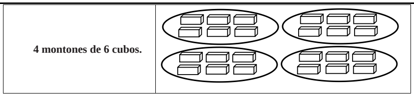
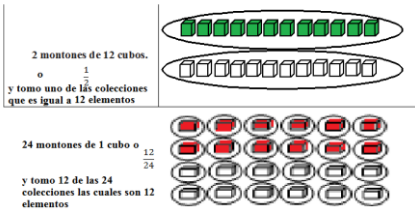
Tabla 11: *Sesión 2 cuestionario*

SESIÓN 2 CUESTIONARIO DURACIÓN 90 MINUTOS **REPARTIENDO CUBOS**
Se hará entrega de 24 cubos de regletas a cada estudiante (material concreto), **Pregunta 1** encontrar diferentes maneras de hacer repartos equitativos de los 24 cubos en uno o más conjuntos, ($SG_{conjuntista}$-$FU_{,}$). Posterior a esto en el tablero con ayuda de los estudiantes se dibujarán todas las posibles maneras de los repartos realizados según el material que se les entregó. Luego se le plantearán tareas complementarias como: Verificar si realmente hay un tránsito es posible con los siguientes cuestionamientos: **Pregunta 2** Elige una de las partes del reparto que ha elegido y represéntelo como una fracción. Comparta con sus compañeros lo realizado y espere comentarios. **Pregunta 3** Si obtengo 4 conjuntos de 6 cubos cada conjunto ¿Qué fracción del total seria? **Pregunta 4** Representa simbólicamente un agrupamiento con respecto del total de un $\frac{1}{2}$. **Pregunta 5** Representa simbólicamente un agrupamiento con respecto del total de un $\frac{12}{24}$. **Pregunta 6** Teniendo en cuenta los literales c y d ¿qué puedes concluir? **Pregunta 7** Elige una de los repartos y sin dejar de considerar el total representa en leguaje de fracciones cada reparto. Explica en cada caso por qué tú respuesta.

Tabla 12: A priori sesión 2

ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO SESIÓN 2			
PREGUNTA	OBJETIVO	INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS	RESPUESTA ESPERADA
P1 y P2 Encontrar diferentes maneras de	Establecer las diferentes maneras de repartición equitativa de una colección	Sintético geométrico conjuntista **($SG_{conjuntista}$-FU)** Posible	El estudiante puede hacer la representación partiendo de un conjunto respondiendo al $SG_{comjuntista}$ sin transitar.

hacer repartos equitativos de los 24 cubos en uno o más conjuntos  Elige una de parte del reparto que ha elegido y represéntelo como una fracción. Comparta con sus compañeros lo realizado y espere comentarios	Representar la fracción de forma numérica para evidenciar el tránsito de pensamientos.	caracterización de los modos sintético geométrico y analítico aritmético **(SG y AA).** Representación de la fracción mediante un conjunto o colección. Al representar la repartición como una fracción se logra que haya una caracterización exitosa. Posible caracterización de los modos sintético-geométrico y analítico- aritmético **SG y AA** Para así iniciar con la fracción como operador de un número y lograr una compresión profunda del objeto matemático.	 Al realizar el cuestionamiento de otras formas de representación de la fracción se pretende que el maestro movilice en sus estudiantes las múltiples formas de representación y pueda establecer una relación entre fracción, conjunto y operación. Mediante la caracterización el estudiante requiere un manejo adecuado del concepto de la fracción, para esto el docente debe generar momentos de indagación, esto requiere un buen manejo de estrategias de enseñanza que generen un tránsito exitoso.
P3 Si obtengo 4 conjuntos de 6 cubos cada conjunto ¿Qué fracción del total seria?	Realizar representaciones de una fracción partiendo de una representación conjuntista. Analizar operaciones de un número con fracción partiendo de una gráfica.	Posible caracterización de los modos sintético-geométrico y analítico- estructural. **(SG y AE)** Desprende criterios de comparación en atención a posición. Articula el concepto fracción como una división indicada con un número entero y al realizar el interrogante por la parte resultante se visualiza el uso del inverso multiplicativo, lo que puede conllevar a una caracterización exitosa de **(SG y AE)**	El estudiante puede articular la imagen desde la operación fracción y buscar no solo las reparticiones equitativas, sino también todos los divisores de un número entero determinado. Requiere del esquema de multiplicación y así visualizar su inverso llegando a una respuesta que no solo requiera de una representación desde una gráfica, también articular está a unas propiedades ya establecidas desde una teorización de un conjunto de los números Racionales con operaciones, relaciones y elementos. Aunque se puede generar que los estudiantes no logren la caracterización que se busca con y solo realizar la representación desde lo conjuntista entonces las posibles respuestas podrían ser: - **Respuesta 2:** Representación en forma numérica argumentando que se puede realizar una división de 24 entre todos sus divisores: D_{24} {1,2,3,4,6,8,12,24} logrando un tránsito entre el $SG_{conjuntista}$↔AE pues vincula el concepto de la fracción como una división indica y un operador de un número Natural.

			 Lo que evidenciaría el no tránsito y solo se presentaría un estadio en SG con
P4 y P5 Representa simbólicamente un agrupamiento con respecto del total de un $\frac{1}{2}$ Representa simbólicamente un agrupamiento con respecto del total de un $\frac{12}{24}$	Representar fracciones dónde los estudiantes vinculen lo gráfico con lo numérico, transitando entre mediante el articulador "Inverso multiplicativo teniendo en cuenta que el inverso multiplicativo de un numero Natural se define como "1/a. siendo a ϵ N" y "a≠ 0" y donde a ● 1/a = 1"	Posible caracterización de sintético-geométrico y analítico-estructural. **(SG y AE)** Reconoce las múltiples funcionalidades que puede otorgársele a la fracción desde las trasformaciones gráficas a la elaboración de propiedades.	Al lograr el representar las fracciones se genera que los estudiantes logren comparar una fracción y así otorgarle la propiedad de transformación y como media entre el comportamiento de una colección, además de generar una articulación entre el concepto de comparación y relación, da paso a la construcción de fracciones equivalentes y de transformaciones numéricas de máximos y mínimos dentro de un conjunto de números en nuestro caso entre los reales. 
P6 y P7 Teniendo en cuenta los literales c y d ¿qué puedes concluir? Elige una de los repartos y sin dejar de considerar el total representa en leguaje de fracciones cada reparto. Explica en cada caso por qué tú	Comparar las diferentes formas de expresar una fracción y determinar las propiedades de operadores como un número.	Posible caracterización de sintético-geométrico y analítico-estructural. **(SG y AE)** Reconoce las múltiples funcionalidades que puede otorgársele a la fracción desde trasformaciones de carácter simbólicas.	Mediante el lenguaje natural como un eslabón para transitar entre trasformaciones, a nivel simbólico, con o sin un modelo puede realizar las representaciones de una fracción. Podrían llegar a la conclusión que ambas expresiones se refieren al mismo cambio de la colección y que ambas están buscando dividir la colección en dos partes iguales cada una de 12 elementos, no importa como expresemos la fracción se pude visualizar una equivalente. Realiza transformaciones simbólicas y hace alusión a propiedades. Por ejemplo, el múltiplo escalar de una fracción no es conmutativa. Promueve descomposiciones a nivel simbólica, es decir expresa simbólicamente, por ejemplo, que "tres cuartos se pueden descomponer en un cuarto y dos cuartos". Una respuesta que se pretende que logren los estudiantes es que busque

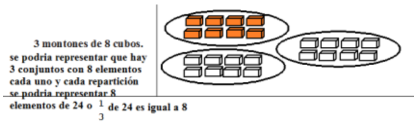
respuesta.			cualquiera de las reparticiones y la represente numéricamente y explique por qué cualquier elección podría ser viable 

Tabla 13: Sesión 3 cuestionario

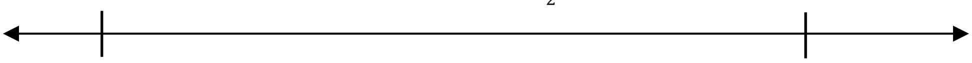
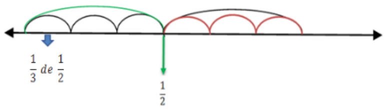
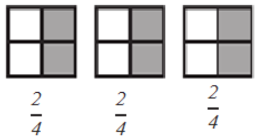
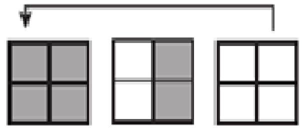
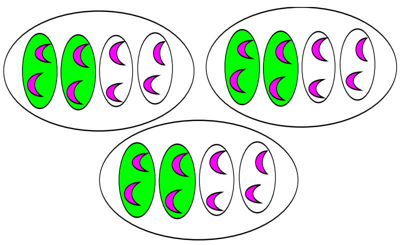
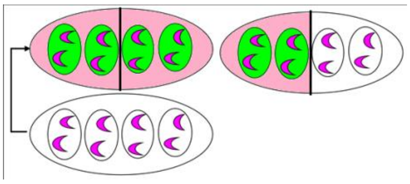
SESIÓN 3 CUESTIONARIO DURACIÓN 90 MINUTOS **DESPLACÉMONOS POR LA RECTA**
Pregunta 1: En siguiente recta numérica ubica la fracción $\frac{1}{2}$.  Luego en uno de los segmentos resultantes ubica $\frac{1}{3}$ **Pregunta 3** Resuelve la siguiente operación $3X\frac{2}{4}$ = y represéntala.

Tabla 13: A priori sesión 3

ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO SESIÓN 3			
PREGUNTA	OBJETIVO	INTERPRETACIÓN DESDE LOS MODOS	RESPUESTA ESPERADA
P1 y P2 En siguiente recta numérica ubica la fracción 1/2  ¿Qué parte de la fracción es el segmento resultante?	Ubicar en la recta numérica una fracción dada.	Posible caracterización de analítico- aritmético y analítico- estructural. **(AA y AE)** Reconoce las múltiples funcionalidades que puede otorgársele a la fracción desde trasformaciones de carácter simbólicas.	**POSIBLE RESPUESTA** **Respuesta 1:** (Ver figura 3) Con este ejercicio se pretende la caracterización ya que podrá realizar la operación multiplicación con su inversos entre las dos fracciones que debe ubicar en la recta dada y encontrar el resultado. **La fracción podría ser uno de seis particiones en total o** $\frac{1}{6}$  El estudiante puede relacionar la primera expresión numérica con la segunda mediante la operación multiplicación, haciendo la caracterización y teniendo como operador: $\frac{1}{2}X\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

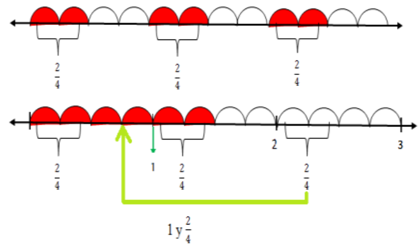
			Pero se puede dar el caso que un estudiante solo parta de la operación multiplicación sin tener la representación en la recta numérica y para refrendar su respuesta realice la ubicación en la recta numérica, entonces se da la caracterización de AE y AA.
P3 Resuelve la siguiente operación $3X\frac{2}{4}$ = y representala.	Identificar la fracción cómo el operador de un número entero Realizar el cambio en el área o el tamaño de un conjunto	Posible caracterización de Enalítico- estructural y el Sintético-geométrico grágico. **(AE→ $SG_{\text{gráfica}}$)** O posible caracterización de Sintético-Geométrico y analítico- aritmético **(SG y AA)** O posible caracterización de Analítico- Aritmético y Sintético-geométrico conjuntista. **(AA y $SG_{\text{conjuntista}}$-FU)** Representa en la recta numérica y/o graficas números decimales, porcentajes y/o razones, estableciendo relaciones. La sumar más de dos veces la mitad se obtiene más de un entero. Realiza trasformaciones simbólicas y hace alusión a propiedades.	Con esta representación el estudiante muestra puede hacer una caracterización de **(AE → $SG_{\text{gráfica}}$)**.  2/4 2/4 2/4 Se  La nueva grafica resultante es una unidad copleta con la mitad de otra unidad 1 y 1/2 toma 2/4 de la unidad **Respuesta 2: Forma conjuntista** Con esta representación el estudiante muestra la caracterización de AA y $SG_{\text{conjuntista}}$-FU, ya que realiza lectura y representación numérica, grafica o conjuntista de una fracción y sus operaciones y puede realizar la simplificación de la fracción obteniendo 3/2  Se toma 2/4 de la unidad y se multiplica por 3 de la siguiente manera

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
$3 \times \frac{2}{4} = \frac{(3\times2)}{(1\times4)} = \frac{6}{4} = \frac{(6\div2)}{(4\div2)} = \frac{3}{2}$



Respuesta 3: Representación en la recta

Con esta representación el estudiante evidencia la caracterización de SG-FU↔AA-FU, realiza operatividad de suma y multiplicación con sus inversos respectivos y aplica las propiedades del grupo Abeliano.



</td></tr>
</table>

5.1.ANÁLISIS A POSTERIORI

Después de llevar a cabo los encuentros se presenta la información obtenida en dos rubricas denominadas cada una “registro de datos” (Ver anexo 2).

La rúbrica 1 corresponde a los estudiantes que no lograron la caracterización de los modos de pensamientos, la cual está organizada en tres columnas; en ella se nombra el encuentro y la pregunta –los encuentros son codificados con la letra S1, S2, S3 (sesiones) y las preguntas (P1, P2, P3…)–, en la segunda columna el estudiante denominado (ENC) declarado así en el capítulo 4, en la tercera se presenta un espacio en el cual se selecciona el modo de pensar (SG, AA, AE) nombrados así en el capítulo 3, se ubica la pregunta y el modo en el que el estudiante trata de dar respuesta a la pregunta.

La rúbrica dos corresponde a los estudiantes que lograron la caracterización de cada uno de los pensamientos denominados (EC) declarados así en el capítulo 4, está organizada de la misma manera que en la rúbrica 1 y se le anexa una cuarta columna en la que se encuentra un apartado encabezado por las posibles caracterizaciones que pueden presentarse en las actividades de cada sesión.

Para hacer el análisis correspondiente al trabajo realizado con los estudiantes se tomó el siguiente criterio, quienes transitan en los modos de pensamiento y quienes no logran transitar, para realizar éste se tienen en cuenta los talleres desarrollados de manera individual, las respuestas allí encontradas y la comparación entre los mismos, puede evidenciarse que la mayoría de los estudiantes (10) hacen una caracterización del pensamiento Sintético Geométrico las fracciones y sus usos, ya que en sus talleres resueltos hacen una representación gráfica y conjuntista adecuada de las fracciones y relacionan parte-todo utilizando adecuadamente el algoritmo $\frac{a}{b}$, también se evidencia que (8) de los estudiantes se mantienen en el modo de pensar SG-FU y no logran hacer una caracterización, y (5) de los 10 que logran caracterizar el AA-FU también lo hacen con el AE-FU y el SG-FU.

Teniendo en cuente el análisis de las respuestas dadas por cada uno de los estudiantes se realizó una rúbrica en la cual puede verse el tránsito que cada uno de ellos tuvo entre los modos de pensamiento. (Ver anexo 2)

5.1.1. ANÁLISIS CASO 1 (estudiantes que no hacen caracterización de los modos de pensamiento)

A este caso pertenecen 8 de los 18 estudiantes analizados que no hacer una caracterización de los pensamientos, corresponden los estudiantes declarados en le primera parte de la tabla. (Ver tabla 8)

Tabla 14: Estudiantes declarados en estudio de casos

CASO 1: ESTUDIANTES QUE NO TRANSITAN (ENC)	**10 ESTUDIANTES 4° (ET)** ENC1, ENC2, ENC3, ENC4, ENC5, ENC6, ENC7, ENC8, ENC9, ENC10.
CASO 2: ESTUDIANTES QUE TRANSITAN (EC)	**8 ESTUDIANTES 4° (EN)** EC1, EC2, EC3, EC4, EC5, EC6, EC7, EC8

El cuestionario se elaboró para ser resuelto en 3 sesiones cada una de 90 minutos, la sesión #1 hace alusión al estadío en cada uno de los pensamientos y a la caracterización de los pensamientos SG-FU y AA-FU, con un total de 11 preguntas para analizar.

La sesión #2 enfatiza en el estadío AA- FU y su permanencia en este y a la caracterización del AA-FU **y** AE-FU y AE-FU y SG-FU, esta sesión consta de 7 preguntas, la sesión #3 muestra a la caracterización de los tres modos de pensamiento SG-FU y AA- FU, AA-FU y AE-FU, AE- FU y SG-FU, consta de 3 preguntas.

Las preguntas 1, 2, 3 y 7 se refieren expresamente al pensamiento SG-FU y a la caracterización de SG-FU y AA-FU, buscando visualizar si se genera este de forma natural en los estudiantes vinculando así el lenguaje matemático.

En las actividades planteadas para lograr la caracterización de los modos de pensamiento los estudiantes antes mencionados se quedan en el modo de pensamiento SG-FU y en varias ocasiones tratan de dar la respuesta en uno de ellos sin lograrlo; ejemplo de esto se visualiza con el estudiante ENC1 en la pregunta 1 que hace una representación de la fracción como $\frac{a}{b}$ sin apropiarla como como un partidor y sin asumirla como cociente.
No hay caracterización del SG-FU y el AA-FU. (Ver figura 10, pregunta 1)

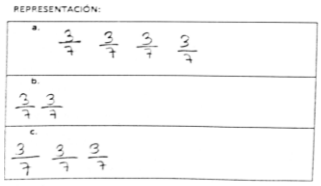


Figura 10
Respuesta ENC 1

En la anterior figura no se evidencia una compresión profunda del concepto de fracción lo que deja como conclusión que se deben implementar actividades que vinculen la representación geométrica conjuntista o gráfica para que se pueda evidenciar que el estudiante articula el lenguaje matemático al lenguaje natural, y así poder comprender la representación simbólica de la fracción $\frac{a}{b}$ en cualquier contexto y de cualquier forma de expresión.

En la pregunta 2 se evidenció en los estudiantes ENC1, ENC3, ENC4, ENC5, ENC6 asumen la fracción como una partición gráfica, no articulan el lenguaje natural con el lenguaje matemático, no hay una comprensión profunda del concepto de fracción ni como conjuntista ni como $\frac{a}{b}$.

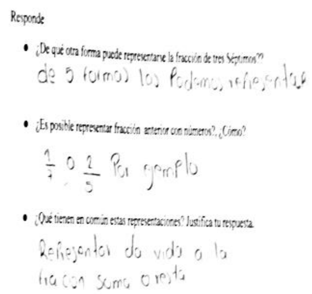


Figura 11
Respuesta ENC3

No hay caracterización del SG-FU y el AA-FU. (Ver figura 11, pregunta 2)

En la pregunta 3 se percibe dificultad en la compresión y articulación del lenguaje matemático y el lenguaje natural y en la asociación de la fracción como conjunto y como partidor gráfico.

No hay caracterización del AA-FU y el SG-FU. (Ver figura 12, pregunta 3).

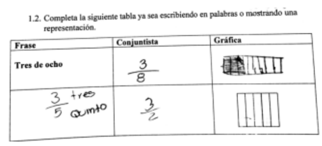
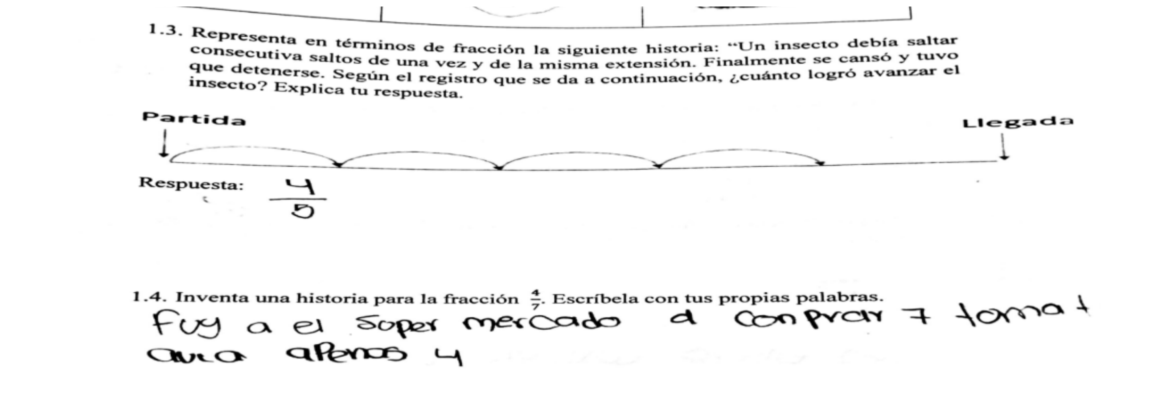


Figura 12
Respuesta ENC 4

La pregunta 4 busca que los estudiantes puedan hacer una caracterización de SG-FU y AA-FU y encontrar la relación parte-todo, además de realizar la representación de una fracción en el algoritmo $\frac{a}{b}$, o si se le presenta el algoritmo, representarlo de forma gráfica o conjuntista indistintamente para así realizar la lectura correspondiente.

No hay caracterización del SG-FU y el AA- (Ver figura 13, pregunta 4)



1.3. Representa en términos de fracción la siguiente historia: "Un insecto debía saltar consecutiva saltos de una vez y de la misma extensión. Finalmente se cansó y tuvo que detenerse. Según el registro que se da a continuación, ¿cuánto logró avanzar el insecto? Explica tu respuesta.

Partida Llegada

Respuesta: $\frac{4}{5}$

1.4. Inventa una historia para la fracción $\frac{4}{7}$. Escríbela con tus propias palabras.

Fuy a el soper mercado a comprar 7 tomat
aura apenas 4

Figura 13
Respuesta ENC6

En la imagen anterior se muestra la dificultad para relacionar ambos conceptos de fracción como partidor y como conjuntista, evita la caracterización de los modos y se deja de visualizar como un operador, esto se evidencia en que los 8 estudiantes no trasfieran la partición o la fracción a un segmento de recta, que es donde se puede dar la fracción como operador, ya que hace parte de una cantidad numérica y solo se queda el lenguaje natural.

La pregunta 6 hace alusión a la caracterización del Modo AA-FU y AE-FU y a su permanencia en el AE-FU, acá se presenta la fracción cómo un par de Números Reales que se transforman a un número o un conjunto con o sin modelo, permitiendo que se deriven de allí sus propiedades, estas transformaciones son mediadas por las operaciones aditiva y multiplicativa.

No se reconoce la fracción cómo parte todo, se dificulta el reconocimiento de la fracción cómo operador.
No se logra caracterización del AA-FU y el AE-FU. (Ver figura 15, pregunta 6)

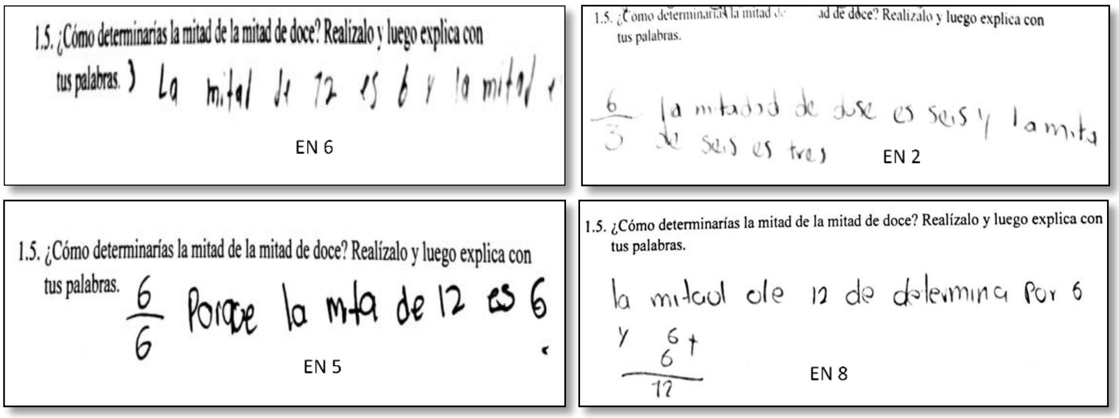


Figura 15
Respuestas Pregunta 6 ENC 2, ENC 5, ENC 6, y ENC 8

En la pregunta 8 es importante reconocer que al no lograr la comprensión de la fracción no es posible realizar su representación de forma gráfica, esto hace que no se de la caracterización de los pensamientos AA-FU y SG-FU.

No logran articular el lenguaje aritmético con el gráfico. No se asume la fracción como cociente ni como operador.
No se evidencia la caracterización de AA-FU y SG-FU, (Ver figura 16, pregunta 8)

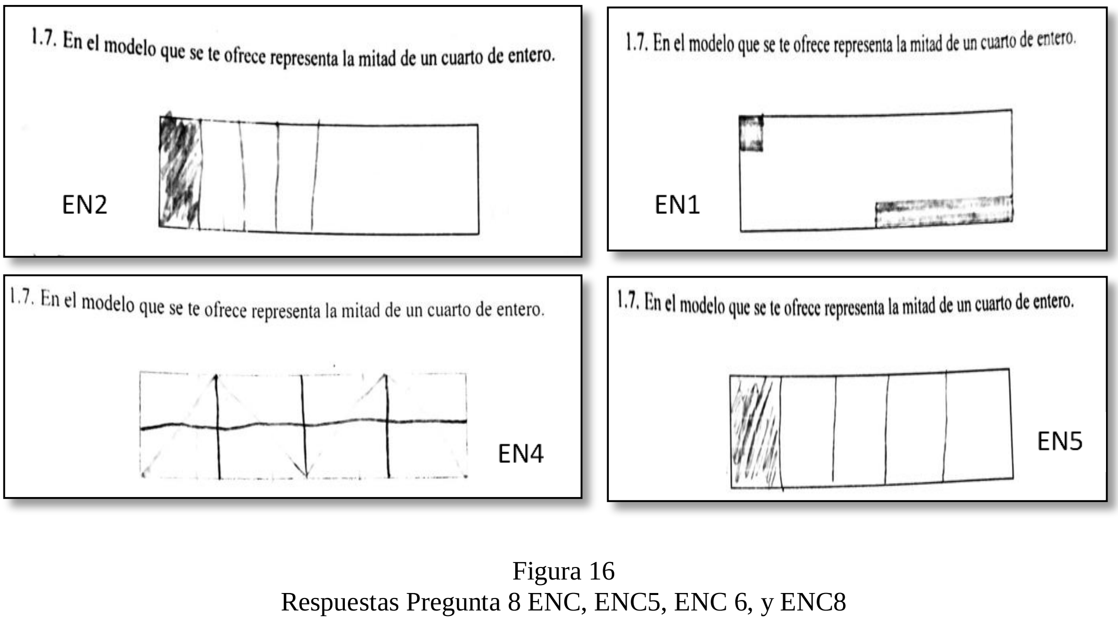


Figura 16
Respuestas Pregunta 8 ENC, ENC5, ENC 6, y ENC8

La pregunta 9 hacen alusión a la caracterización del modo AA-FU y AE-FU y reconocen las fracciones como números racionales que representan una transformación, a su vez es utilizada para referirse a la relación parte- todo; distinguiendo así el rol del numerador y el denominador como transformación a un conjunto, un número o un gráfico.

Estos estudiantes que no caracterizan, se les dificulta hacer un reconocimiento de la fracción como parte de un todo y la representación de una cantidad a un número entero, además no logran articular el lenguaje natural con el matemático, ya que no hay una comprensión del algoritmo $\frac{a}{b}$ ni de la fracción como partidor y como operador, se dificulta la representación gráfica y numérica de la fracción dada.

No se logra una caracterización del AE-FU y el SG-FU. (Ver figura 17, pregunta 9).

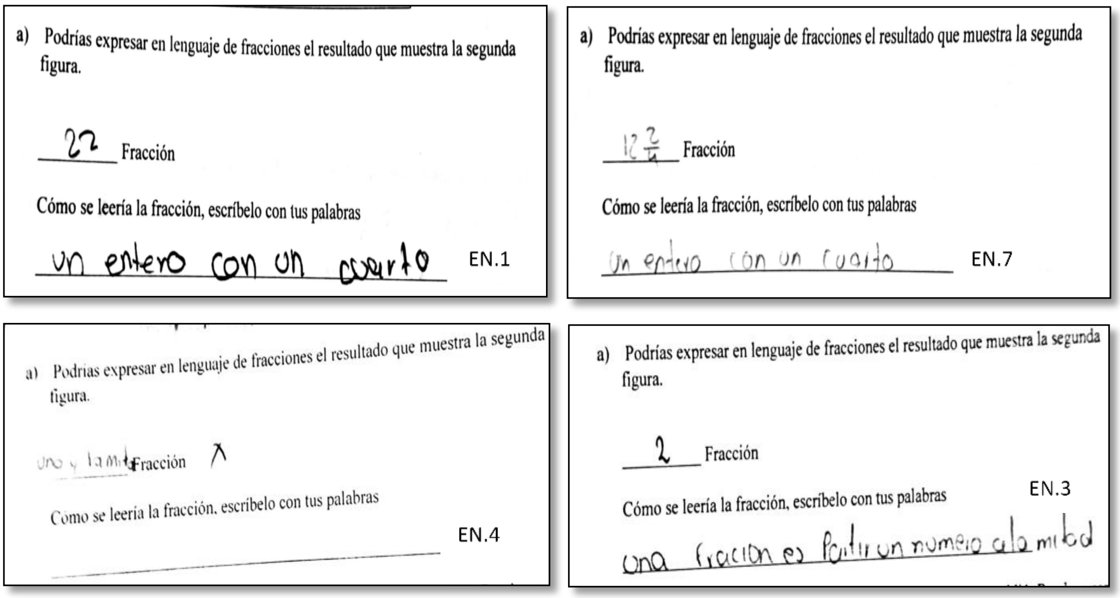


Figura 17
Respuestas Pregunta 9 ENC 1, ENC 3, ENC 4, y ENC 7

Pregunta 2 y 7 de la sesión 2: Se dificulta la representación gráfica, conjuntista y numérica de fracciones.
Se les dificulta hacer repartos y no los formalizan en lenguaje matemático.
No se da la caracterización del SG-FU el AA-FU ni del AA-FU y el AE-FU, ni del AE-FU y el SG-FU. (Ver figura 17, pregunta 2 y 7).

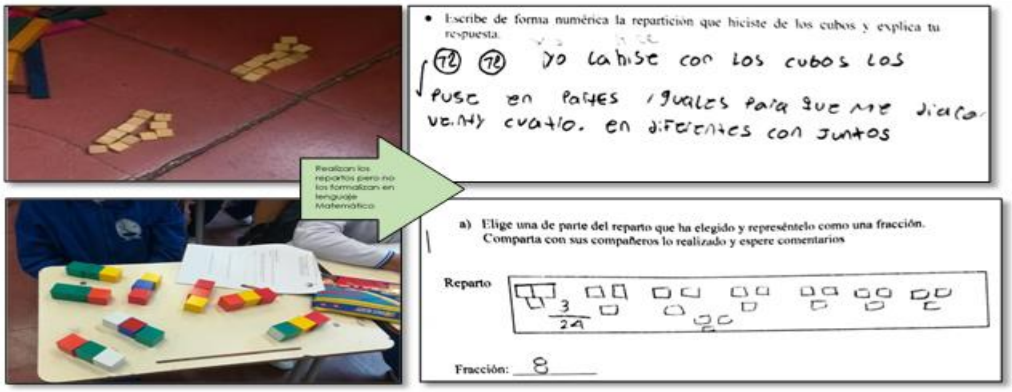


Figura 17
Respuestas Preguntas 1, 2, 3, Sesión 2

En la pregunta 1 y 2, sesión 3 no se logra la comprensión de la fracción como cociente, no se evidencia la utilización de la operación multiplicación.

No hay caracterización de AA-FU y AE-FU. (Ver figura 18, pregunta 1 y 2).

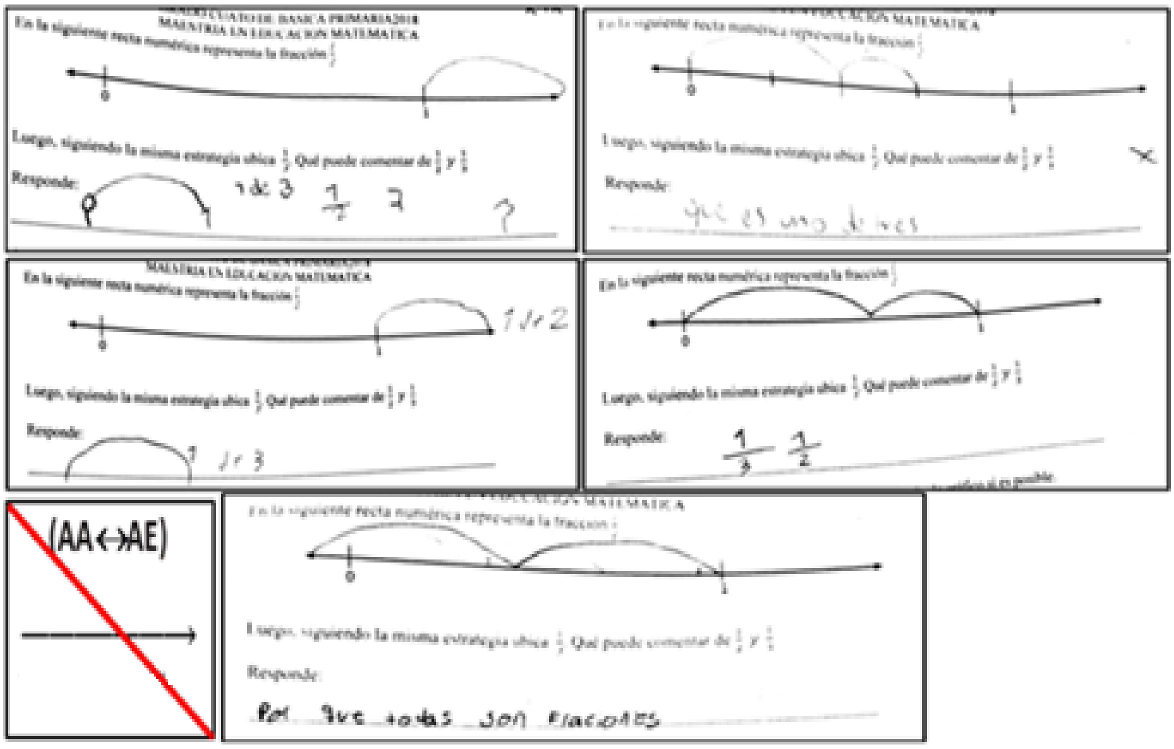


Figura 18
Respuestas Preguntas 1 y 2, Sesión 3

De lo anterior se puede concluir que los estudiantes analizados a los que se les aplicó el cuestionario presentan vacíos y confusiones conceptuales en cuanto al objeto matemático y por esto no logran hacer las caracterizaciones esperados desde la teoría, se les dificulta reconocer los números racionales como un sistema numérico, por esto no tienen una compresión profunda de las operaciones dentro del mismo y por último se evidencia que les cuesta articular las fracciones al contexto, lo que indica que no es posible reconocer cada uno de sus usos.

5.1.2. ANÁLISIS CASO 2 (estudiantes que hacen caracterización de los modos de pensamiento a otro).

A este caso pertenecen 10 de los 18 estudiantes analizados que lograron un tránsito exitoso entre los pensamientos, a este caso corresponden los estudiantes declarados en la segunda parte de la tabla. (Ver tabla 5)

Tabla 1: Estudiantes declarados en estudio de casos

CASO 1: ESTUDIANTES QUE NO TRANSITAN (ENC)	**10 ESTUDIANTES 4° (ET)** ENC1, ENC2, ENC3, ENC4, ENC5, ENC6, ENC7, ENC8, ENC9, ENC10.
CASO 2: ESTUDIANTES QUE TRANSITAN (EC)	**8 ESTUDIANTES 4° (EC)** EC1, EC2, EC3, EC4, EC5, EC6, EC7, EC8

Como se mencionó en el análisis del caso 1, el cuestionario se elaboró para ser resuelto en 3 sesiones, cada una de 90 minutos, la sesión #1 hace alusión al estadío en cada uno de los pensamientos y a las caracterizaciones de los modos de pensamiento SG-FU y AA-FU, con un total de 11 preguntas para analizar, la sesión #2 hace alusión al estadío en el AA- FU y su permanencia en este y a las caracterizaciones del AA-FU y AE-FU y AE-FU y SG-FU, esta sesión consta de 7 preguntas; por último se presenta la sesión #3 en esta se evidencia netamente las caracterizaciones de los tres modos de pensamiento SG-FU y AA- FU, AA-FU y AE-FU, AE- FU y SG-FU, consta de 3 preguntas.

SESIÓN #1:

Las preguntas 1, 2, 3 y 7 se refieren expresamente al pensamiento SG-FU y al tránsito SG-FU↔ AA-FU, buscando poder visualizar si se genera este de forma natural en los estudiantes vinculando así el lenguaje matemático.
Se evidencia una caracterización ya que permite ver la estructra de fracción de un número con una representación simbolica de $\frac{a}{b}$,también a hay una clara representación de la fracción como una parte de una colección lo que permite en el estudiante hacer una caracterización de los modos SG FU y AA FU, además permite la articulación del lenguaje natural con el matemático, visualizan en la representación la modificación del tamaño de un conjunto pero también ve la parte que le correponde al total de la colección.

Hay apropiación del concepto de parte todo y de reparto equitativo.

Hay una caracterización del SG-FU y el AA-FU. (Ver figuras 20 y 21, pregunta 1)

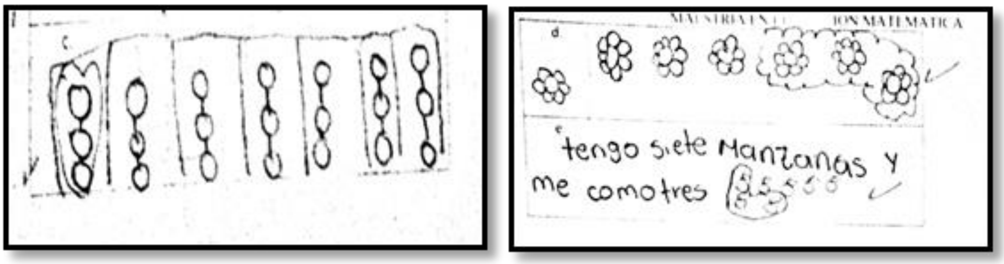


Figura 20
Preguntas 1,2, Y 3 Sesión 1.

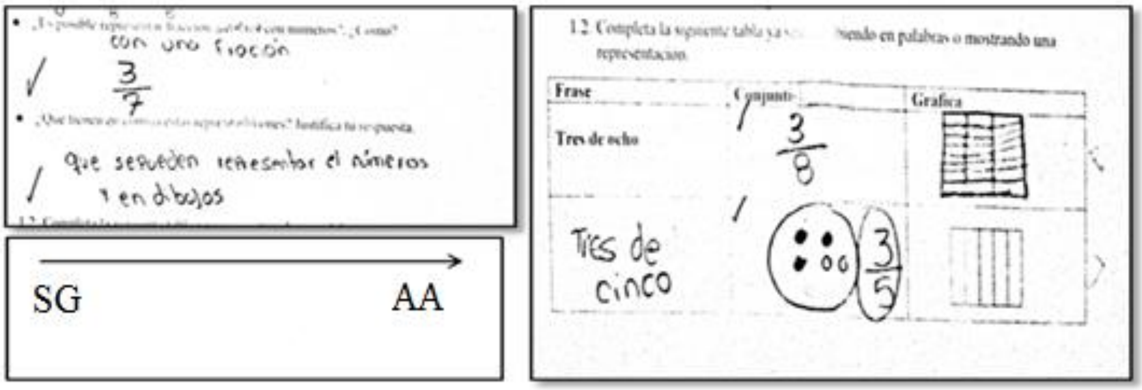


FIGURA 21
RESPUESTAS 2 y 3 sesión 1

Es importante aclarar que los estudiantes que logran lsa caracterizaciones del SG-FU y AA-FU hacen una representación de la fracción en cada uno de los contextos en los que se les pregunta por ellos.

En la pregunta 2 y 3 de la sesión 1, se reconoce la fracción como parte de un todo, como cociente y partidor y se hace una representación de la misma gráfica y numéricamente.

Hay una caracterización del SG-FU y AA-FU. (Ver figura 21, pregunta 2 y 3)

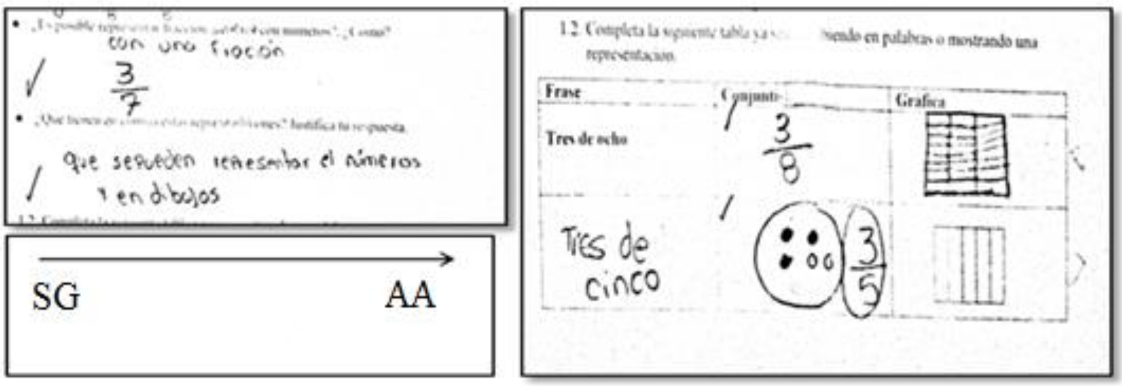


FIGURA 21
RESPUESTAS 2 y 3 sesión 1

En la pregunta 4 se hace una representación en términos de fracción en los 10 estudiantes que logran la caracterización de los modos, realizan dicha representación y a su vez una representación simbólica de la fracción y pueden también articular el lenguaje matemático al lenguaje natural tal como se observa. (Ver figura 22, pregunta 4)

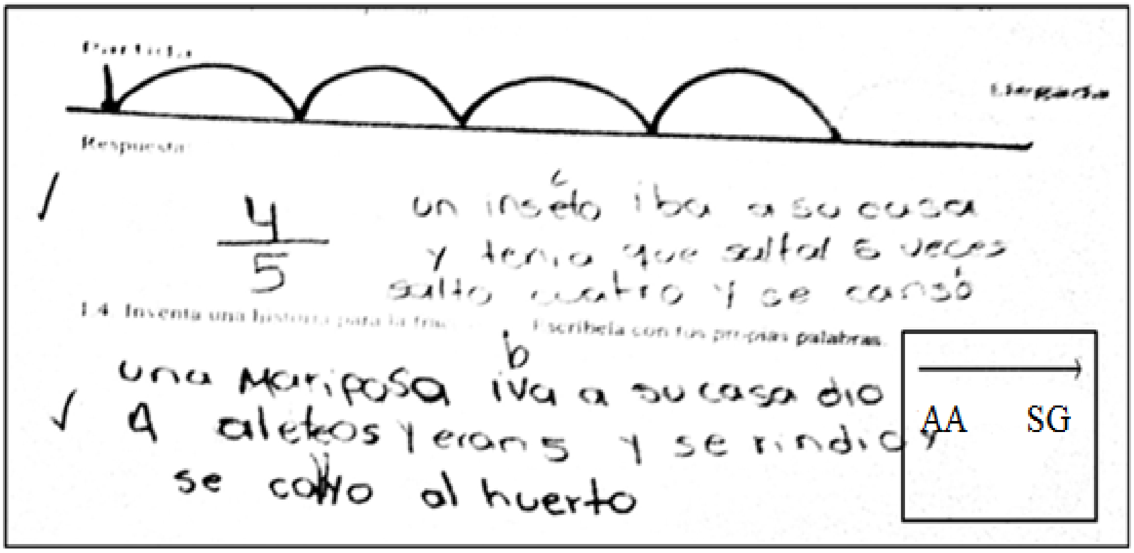


FIGURA 22
RESPUESTAS 4 v 5 sesión 1

La pregunta 4 busca que los estudiantes puedan caracterizar los modos SG-FU y AA-FU y encontrar la relación parte-todo, además de realizar la representación de una fracción en el algoritmo $\frac{a}{b}$, o si se le presenta el algoritmo, representarlo de forma gráfica o conjuntista indistintamente para así realizar la lectura correspondiente.

Las preguntas 4, 5 y 6 hacen alusión a la caracterización del modo AA-FU y AE-FU y a su permanencia en el AE-FU, acá se presenta la fracción cómo un par de números reales, permitiendo que se deriven de allí sus propiedades, estas transformaciones son mediadas por las operaciones multiplicativa y aditiva.

Hay rigurosidad del concepto, se reconoce la fracción como representación de una parte del total de una figura o un conjunto, colección o número y se articulan las propiedades de los números racióneles como conjunto Abeliano.

Se asume la fracción como parte todo, partidor, cociente, razón y proporción.
Hay caracterización del AA-FU y el AE-FU. (Ver figura 23, pregunta 4,5, 6).

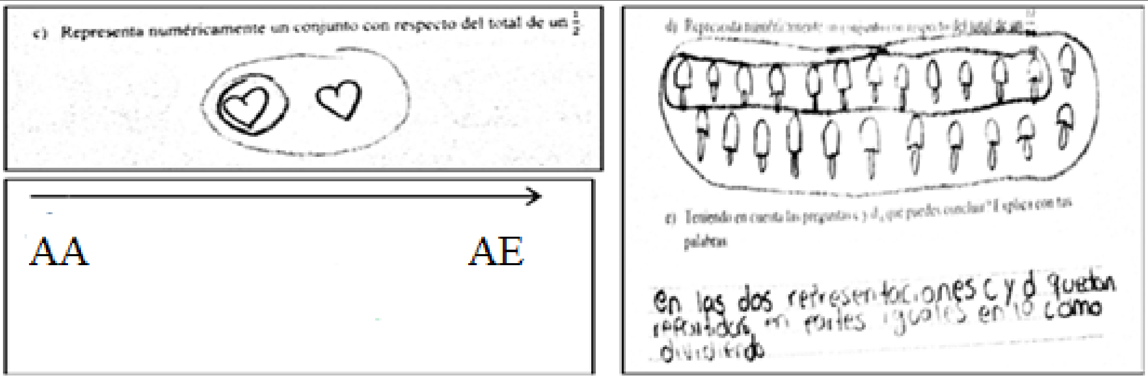


Figura 23
Respuestas sesión 2

Las preguntas 9, 10 y 11 hacen alusión a la caracterización del modo AA-FU **y** AE-FU y reconocen las fracciones como números reales que representan una transformación, a su vez es utilizada para referirse a la relación parte- todo; distinguiendo así el rol del numerador y el denominador como transformación a un conjunto, un número o un gráfico.

En la sesión 2, las preguntas 1 y 2 pretenden establecer las diferentes maneras de repartición equitativa de una colección al representar la fracción de forma numérica para evidenciar la caracterización de los modos de pensamiento.

De acuerdo con las respuestas dadas es posible decir que los estudiantes logran hacer una caracterización de los modos porque representan la fracción mediante un conjunto o colección.

Además de representar la repartición como una fracción hay una caracterización de los modos exitosa entre los modos SG-FU y AA-FU, para así iniciar con la compresión profunda del objeto matemático.

En la pregunta 3 se pretende realizar representaciones de una fracción partiendo de una representación conjuntista y analizar operaciones de un número con fracción partiendo de una gráfica, se espera que haya una caracterización de los modos de los modos SG - FU y AE-FU, por medio de la operación multiplicación el cual relaciona el concepto fracción como una división indicada con un número entero y se visualiza el uso del inverso multiplicativo.

En las preguntas 4 y 5 se muestra como los estudiantes vinculan lo gráfico con lo numérico, reconociendo las acciones "Inverso multiplicativo" y teniendo en cuenta que este se define como "1/a, siendo a ϵ N y a≠ 0" y donde "a ● 1/a = 1"

Con esta pregunta se pretende que el estudiante logre una caracterización de los modos s SG-FU y AE-FU, en estas se reconocen las múltiples funcionalidades que puede otorgársele a la fracción desde las trasformaciones gráficas a la elaboración de propiedades.

En las preguntas 6 y 7 los estudiantes hacen una comparación de las diferentes formas de expresar una fracción y determinan las propiedades de operadores como un número, además de reconocen las funcionalidades que puede otorgársele desde trasformaciones de carácter simbólicas generando una caracterización de los modos SG-FU y AE-FU.

En las preguntas 4, 5, y 6 al presentarse la fracción se otorga la rigurosidad del concepto y podemos aseverar que la fracción como operador de un numero está denotado como el cambio de una figura, colección o número y se articulan las propiedades de los números racióneles como conjunto Abeliano. (Ver figura 23)

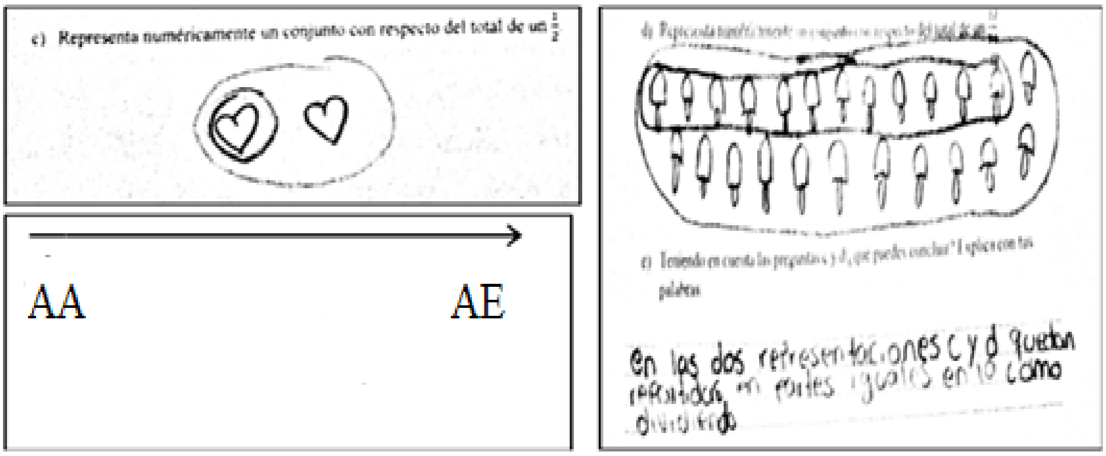


Figura 23
Respuestas sesión 2

En la sesión 3 las preguntas 1 y 2 los estudiantes ubican en la recta numérica una fracción dada, además reconocen las funcionalidades que puede otorgársele a la fracción desde trasformaciones de carácter simbólicas mediante la operación multiplicación, logrando así una caracterización de los modos AA-FU y AE-FU.

Se reconocen las múltiples funcionalidades que puede otorgársele a la fracción desde trasformaciones de carácter simbólicas se identifica la fracción cómo el operador de un número entero, realiza el cambio en el área de una figura.

Se representa en la recta numérica y/o gráficas números decimales, porcentajes y/o razones estableciendo relaciones, al sumar más de dos veces la mitad se obtiene más de un entero, al igual que la realización de transformaciones simbólicas que hacen alusión a las propiedades multiplicativa.

Hay una caracterización de SG-FU y AA-FU, AA-FU y SG -FU, AE-FU y SG- FU. (Ver figura 24).

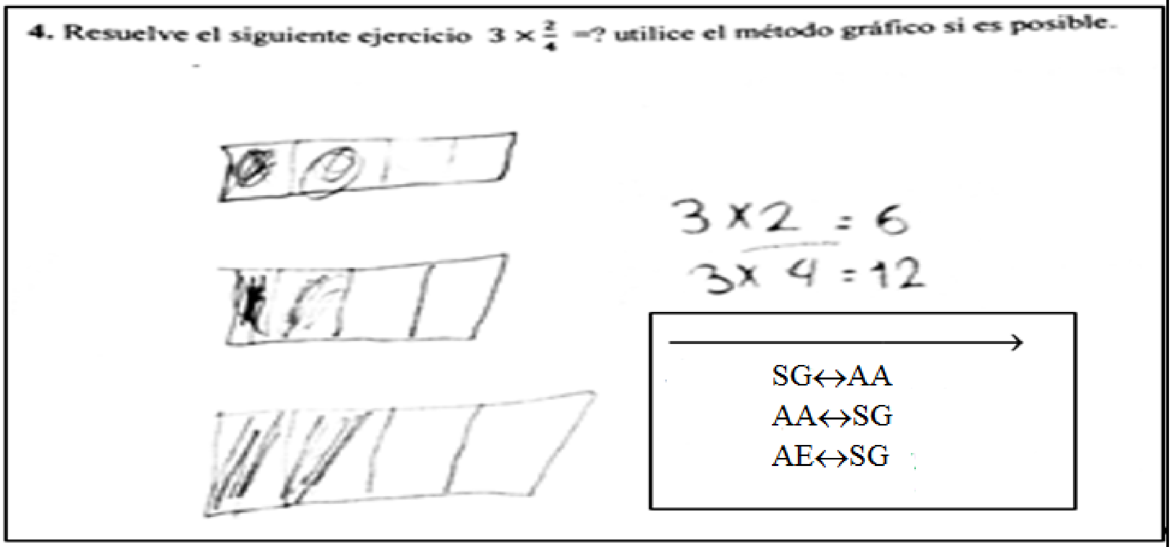


Figura 24
Respuestas sesión 3

De lo anterior se puede concluir que los estudiantes analizados a los que se les aplicó el cuestionario presentan claridad conceptual en cuanto al objeto matemático y por esto logran hacer las caracterizaciones de los modos esperados desde la teoría del modo SG-FU al AA-FU y del modo AA-FU al AE-FU, sólo 5 de los analizados logran transitar del AE-FU al SG-FU, además reconocen los números racionales como un sistema numérico, tienen una compresión profunda de las operaciones dentro del mismo y articulan las fracciones al contexto, lo que indica que reconocen cada uno de sus usos, esto muestra que implementar una estrategia dentro de la teoría resultaría viable para la comprensión profunda del objeto matemático.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

Al finalizar la investigación se pudo llegar a las siguientes conclusiones teniendo en cuanta los principales componentes de la investigación; el análisis histórico epistémico, la teoría, los objetivos general y específico, la pregunta problematizadora, los antecedentes analizados, los docentes. Además de la intervención en el aula, la cual dio como producto final la unidad didáctica –UD–.

6.1. HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

Se puede afirmar que la epistemología de las matemáticas permite que los procesos de aprendizaje se encuentren contextualizados según sus usos a través de la historia, permitiendo redireccionar las facetas que dicho concepto sugiere.

6.2. LA TEORÍA

- Permite describir e interpretar los enfoques "Geométricos, Analíticos o Estructurales" y su caracterización
- Visualizar cómo se adquiere una comprensión profunda del objeto matemático.
- Permite el desarrollo cognitivo de los estudiantes.
- Favorece los procesos de aprendizaje.
- Posibilita conocer como el estudiante adquiere los conocimientos y los utiliza en el contexto.
- Permite además el desarrollo cognitivo de los estudiantes, favorece los procesos de aprendizaje y posibilita conocer la manera como el estudiante adquiere los conocimientos y los utiliza en el contexto.

6.3. EL OBJETIVO GENERAL

Hacer un análisis de las implicaciones que se tienen en el proceso de aprendizaje al construir una unidad didáctica desde modos de pensamiento posibilitando su caracterización.

6.3.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Logró una transversalización e interconexión de procesos entre los mismos y sus relaciones.
- Se evidenció una caracterización de cada uno de los modos pensamiento mediante los conceptos asociados al objeto matemático (las fracciones y sus usos).
- Posibilitó una comprensión profunda del concepto para el diseño de una unidad didáctica.

6.4. LA PREGUNTA

El diseño de la unidad didáctica a partir de los modos de pensamiento tiene implicaciones prácticas y experienciales que la caracterización de un pensamiento a otro y ser reconocido en los estudiantes.

6.5.LOS ANTECEDENTES

Las mayores dificultades manifestadas por los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones y sus usos radican en conocimientos acumulados de conceptos previos, sin ser profundizados y trabajados en totalidad, quedándose en el lenguaje natural sin trascender al matemático, dejando así vacíos conceptuales que deberían ser fortalecidos en la experimentación y la práctica dentro y fuera del aula a partir de situaciones reales y cotidianas.

6.6.LOS DOCENTES

Conocer la teoría Modos de Pensamiento a profundidad para implementarla dentro de las aulas de clase, en las planeaciones y pensum institucionales con el fin de conocer los procesos cognitivos de los estudiantes, sus tránsitos y modo de pensamiento en el que se encuentran.

6.7. EL ANÁLISIS

De los análisis realizados es posible concluir que:

- La gran mayoría de los estudiantes analizados a los que se les aplicó el cuestionario presentan vacíos y confusiones conceptuales en cuanto al objeto matemático y por esto no logran hacer las caracterizaciones esperadas desde la teoría, se les dificulta reconocer los números racionales como un sistema numérico, por esto no tienen una compresión profunda de las operaciones dentro del mismo y por último se evidencia que les cuesta articular las fracciones al contexto, lo que indica que no es posible reconocer cada uno de sus usos.

- Solo un pequeño grupo de la población analizada presentan claridad conceptual en cuanto al objeto matemático y por esto logran hacer las caracterizaciones esperadas desde la teoría del modo SG-FU al AA-FU y del modo AA-FU al AE-FU, sólo 5 de los analizados logran transitar del AE-FU al SG-FU, además reconocen los números racionales como un sistema numérico, tienen una compresión profunda de las operaciones dentro del mismo y articulan las fracciones al contexto, lo que indica que reconocen cada uno de sus usos, esto muestra que implementar una estrategia dentro de la teoría resultaría viable para la comprensión profunda del objeto matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, C. (2010). *Necesitamos profesores más preparados.* El Espectador, p. 21.
- Carrillo, M (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria.* Tesis de Maestría publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima-Perú
- Castaño, A. (2014). *Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Colombia. Facultad de Ciencias Exactas. Manizales.
- Cifuentes, W. (2011). *Propuesta y enseñanza para el aula: ecuaciones y modelos*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Medellín.
- Duval, R. *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an icmi study. Dordrecht: Kluwer. Geometry From a Cognitive Point of View*. In Mammana and V Villani. (Eds), 1998.
- Fernández Ballesteros, Rocío, De Bruyn, E. E. J, Godoy, A., Hornke, L. F, Ter Laak, J., Vizcarro, C., Westhoff, K., Westmeyer, H., Zaccagnini, J. L., (2003). Guías para el proceso de evaluación (GAP) en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77808407> ISSN 0214-7823
- Flores García, R. Martínez, G. (2007) Una Construcción de Significado de la Operatividad De Los Números fracciónarios. *Acta X Congreso Nacional De Investigación Educativa,* 1-13. México:
- Fraile, Martín, J. (2010). Las fracciones y el Ojo de Horus. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática* 21, 187-195.
- Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* México DF: CINVESTAV-IPN, pp 8-20.
- Gairín Saillan, J. (2001). *Una interpretación de las fracciones Egipcias desde el Recto del Papiro de Rhind*. Revista Llull 24, 649-684.
- Gil, D., Pessoa, A. M., Fortuny, J. M., & Azcárate, C. (2001). *Formación del profesorado de las ciencias y la matemática. Tendencias y experiencias innovadoras.* Madrid: Editorial Popular. p11
- Godino, J., Batanero C y Font V. (2004). *Didáctica de la Matemática para Maestros. Recursos para el estudio de las Matemáticas.* (pp 1-461), Granada Universidad de Granada.
- Herrera, J. (3013). *El cambiante mundo de las organizaciones. Teoría, metodología e investigación*. Universidad de Málaga, España.
- Hurtado, O. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Bogotá, Colombia.

- Murillo, M. (2013). *Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas, mediados por fracciones.* En I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe. ICMI (pp 1-13). Santo Domingo: ICMI.
- ICFES. (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Resumen ejecutivo. Bogotá: Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación.* Pp 13-15.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Ministerio de Educación Nacional. Revolución Educativa Colombia Aprende.
- Ministerio de Educación. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá, Colombia.
- OCDE. (2006). *PISA 2006 MARCO DE LA EVALUACIÓN Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. En C.3 Base teórica del marco PISA de evaluación de las matemáticas. Instituto de Matemáticas (pp 75-81).
- Ordóñez Clavijo M. (2014) *La fracción, Elemento Dialogante en el Contexto Matemático. Tesis de maestría no publicada.* Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Bogotá, Colombia.
- Parraguez, G. (2012). *Teoría los Modos de Pensamiento*. Didáctica de la Matemática. Instituto de Matemáticas -PUCV. Chile.
- Perera D y Valdemoros A. (2009) Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado*. Doc. mat vol.21 no.1 México Abr.
- Perera, D. P. y Valdemoros A. O'Connor (2009). *Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado.* Recuperado el 05 de noviembre de 2016 de http://www-scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000100003
- Porlán, R. (1997). *Constructivismo y escuela*. Barcelona: Gedisa.
- Posada, F y Villa-Ochoa, J. A. (2006). *Razonamiento Algebraico y Modelación Matemática.* En G. O. F. Posada, Pensamiento variacional y razonamiento algebraico vol.2 (pp. 127- 163). Medellín: Gobernación de Antioquia.
- Rizo C y Campistrous P. (2014). *Fracciones y números fracciónarios en la escuela elemental: el caso de la escuela primaria cubana* Acta I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe. N° 12 133-138 diciembre de 2014. Centro de Investigación en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero México
- Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Naturales. Bogotá, Colombia
- Saldaña, B. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles, *Educación Matemática en la Infancia* 1(1), 15-37.

- Salazar, M y Díaz, L. (2009). *La Actividad de Medir Aporta Significados a Fracciones y Razones.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) Acta 22, 207 – 216. México.
- Sanmartí, N. (2000). *Didáctica de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias.* Barcelona: Marfil.
- Sierpinska, A. (2000). *On Some Aspects of Student´s thining in Linear Algebra En Dorier*, J. L. (Eds), The Teaching of Linear Algebra In Question (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- Stake R (2010) *Investigación con estudios de casos*. R, (pp 9-157). Madrid: Morata.
- Valdemoros M. (2010). *Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de las fracciones.* Reunión Latinoamericano de Matemática Educativa (RELME) Vol 13, 4-11. República Dominicana.
- Vasco, C. (1991) "El archipiélago fraccionario" Notas De Matemática Y Estadística. Vol 31, 1 – 33. Colombia.

ANEXO 1

UNIDAD DIDÁCTICA

SESIÓN 1

DURACIÓN 90 MINUTOS

¿CÓMO LO HARÍAS?

Pregunta 1 Representa: **(SG).**

j) Tres veces un séptimo

k) Tres séptimos

l) Un séptimo tres veces

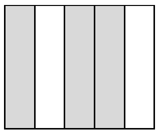
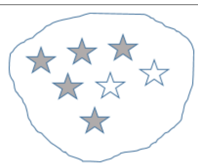
m) Tres de siete

n) Si tienes un conjunto de 7 manzanas ¿cómo expresarías qué seleccionas 3 manzanas de las siete? Explica con tus palabras.

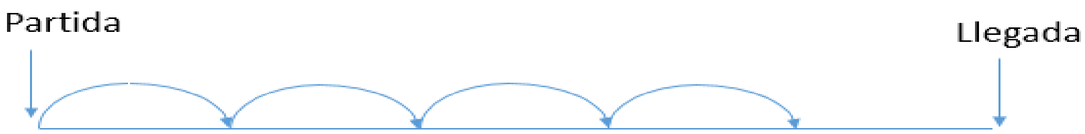
Pregunta 2 Luego de dada la respuesta se les pregunta a los estudiantes: **(SG ↔ AA).**

- ¿De qué otra forma puede representarse esta fracción?
- ¿Es posible representar esta fracción con números?
- ¿Qué tienen en común estas representaciones?

Pregunta 3 Completa la siguiente tabla **(SG).**

Frase	**Conjuntista**	**Gráfica**
Tres de ocho		
		
		

Pregunta 4 Representa en términos de fracción: “Un insecto saltador intento de manera consecutiva saltos de una vez. Según el registro que se obtuvo cuánto logró de una vez. Explica tu respuesta. **(SG ↔ AA).**

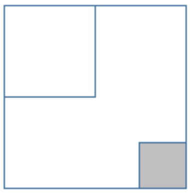


Pregunta 5 Inventa una situación matemática donde para la fracción $\frac{4}{7}$. Explica **(SG ↔ AA).**

Pregunta 6 Cómo determinarías la mitad de la mitad de doce. Explica **(SG ↔ AA).**

Pregunta 7 Representa en el lenguaje de la fracciones la parte achurada.

Explica tu repuesta **(SG ↔ AA).**



Pregunta 8 En el modelo que se te ofrece representa la mitad de un cuarto de entero. **(AA ↔ AE).**

Pregunta 9 Explica si hay más de una manera de responder a lo que se te pide. Puedes usar dibujos o palabras **(AA↔ AE)**

Pregunta 10 Podrías expresar en lenguaje de fracciones el resultado que muestra la segunda figura. **(AA↔ AE)**

Pregunta 11 Cómo expresarías en un modelo "un tercio más un medio de un entero" **(AA↔ AE)**

•

SESIÓN 2

DURACIÓN 90 MINUTOS

REPARTIENDO CUBOS

Se hará entrega de 24 cubos de regletas a cada estudiante (material concreto),

Pregunta 1 encontrar diferentes maneras de hacer repartos equitativos de los 24 cubos en uno o más conjuntos, (SGconjuntista-FU,)

Posterior a esto en el tablero con ayuda de los estudiantes se dibujarán todas las posibles maneras de los repartos realizados según el material que se les entregó.

Luego se le plantearán tareas complementarias como:

Verificar si realmente hay un tránsito es posible con los siguientes cuestionamientos:

Pregunta 2 Elige una de las partes del reparto que ha elegido y represéntelo como una fracción. Comparta con sus compañeros lo realizado y espere comentarios

Pregunta 3 Si obtengo 4 conjuntos de 6 cubos cada conjunto ¿Qué fracción del total seria?

Pregunta 4 Representa simbólicamente un agrupamiento con respecto del total de un $\frac{1}{2}$

Pregunta 5 Representa simbólicamente un agrupamiento con respecto del total de un $\frac{12}{24}$

Pregunta 6 Teniendo en cuenta los literales c y d ¿qué puedes concluir?

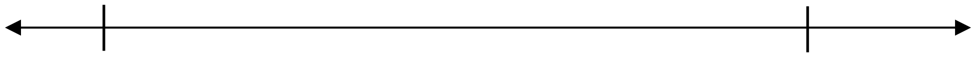
Pregunta 7 Elige una de los repartos y sin dejar de considerar el total representa en leguaje de fracciones cada reparto. Explica en cada caso por qué tú respuesta.

SESIÓN 3

DURACIÓN 90 MINUTOS

DESPLACÉMONOS POR LA RECTA

Pregunta 1: En siguiente recta numérica ubica la fracción $\frac{1}{2}$ **(AA↔AE)**



Luego en uno de los segmentos resultantes ubica $\frac{1}{3}$

Pregunta 3 Resuelve la siguiente operación $3X\frac{2}{4}$ = y representala. **(AE ↔$SG_{\text{gráfica}}$)**

ANEXO 2
RUBRICA
ESTUDIANTES QUE NO LOGRAN TRANSITAR ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

S.P	E.N	Modos de pensar la fracción como operador			S.P	E.N	Modos de pensar la fracción como operador		
		SG	AA	AE			SG	AA	AE
S1P1	E.N1		X		S2P1	E.N1	X		
	E.N2	X				E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3	X		
	E.N4		X			E.N4	X		
	E.N5		X			E.N5	X		
	E.N6		X			E.N6	X		
	E.N7		X			E.N7	X		
	E.N8		X			E.N8	X		
S1P2	E.N1	No se observa estar en ninguno de los pensamientos			S2P2	E.N1	X		
	E.N2		X			E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3	X		
	E.N4	X				E.N4	X		
	E.N5		X			E.N5		X	
	E.N6		X			E.N6		X	
	E.N7	X				E.N7		X	
	E.N8	X				E.N8		X	
S1P3	E.N1		X		S2P3	E.N1	X		
	E.N2	X				E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3		X	
	E.N4	X				E.N4		X	
	E.N5	X				E.N5		X	
	E.N6	X	,wm vd.d mv. d			E.N6	X		
	E.N7	X				E.N7	X		
	E.N8	X				E.N8	X		
S1P4	E.N1		X		S2P4	E.N1	X		
	E.N2	X				E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3	X		
	E.N4	X				E.N4	X		
	E.N5		X			E.N5	X		
	E.N6		X			E.N6		X	
	E.N7	X				E.N7		X	
	E.N8	X				E.N8		X	
S1P5	E.N1		X		S2P5	E.N1		X	
	E.N2		X			E.N2	X		
	E.N3		X			E.N3	X		
	E.N4		X			E.N4	X		
	E.N5		X			E.N5	X		
	E.N6		X			E.N6	X		
	E.N7	X				E.N7	X		
	E.N8	X				E.N8	X		
S1P6	E.N1		X		S2P6	E.N1		X	
	E.N2	X				E.N2		X	
	E.N3	X				E.N3		X	
	E.N4		X			E.N4		X	
	E.N5		X			E.N5		X	
	E.N6		X			E.N6		X	
	E.N7		X			E.N7		X	
	E.N8		X			E.N8		X	

S1P7	**E.N1**		**X**		**S2P7**	**E.N1**		**X**	
	E.N2	**X**				**E.N2**	**X**		
	E.N3	**X**				**E.N3**	**X**		
	E.N4	**X**				**E.N4**	**X**		
	E.N5	**X**				**E.N5**	**X**		
	E.N6	**X**				**E.N6**	**X**		
	E.N7	**X**				**E.N7**		**X**	
	E.N8		**X**			**E.N8**		**X**	
S1P8	**E.N1**	**No se evidencia estar en ninguno de los pensamientos**			**S3P1**	**E.N1**	**X**		
	E.N2	**X**				**.N2**	**X**		
	E.N3	**X**				**E.N3**		**X**	
	E.N4	**X**				**E.N4**		**X**	
	E.N5	**X**				**E.N5**		**X**	
	E.N6	**X**				**E.N6**		**X**	
	E.N7	**X**				**E.N7**		**X**	
	E.N8	**X**				**E.N8**		**X**	
S1P9	**E.N1**	**No se evidencia estar en ninguno de los pensamientos**			**S3P2**	**E.N1**	**X**		
	E.N2	**X**				**E.N2**	**X**		
	E.N3	**X**				**E.N3**	**X**		
	E.N4	**X**				**E.N4**	**X**		
	E.N5	**X**				**E.N5**	**X**		
	E.N6	**X**				**E.N6**	**X**		
	E.N7	**X**				**E.N7**	**X**		
	E.N8	**X**				**E.N8**	**X**		
S1P10	**E.N1**	**No se evidencia estar en ninguno de los pensamiento**			**S3P3**	**E.N1**		**X**	
	E.N2	**X**				**E.N2**		**X**	
	E.N3	**X**				**E.N3**		**X**	
	E.N4	**X**				**E.N4**		**X**	
	E.N5	**X**				**E.N5**	**X**		
	E.N6	**X**				**E.N6**	**X**		
	E.N7	**X**				**E.N7**	**X**		
	E.N8	**X**				**E.N8**	**X**		
S1P11	**E.N1**		**X**						
	E.N2		**X**						
	E.N3		**X**						
	E.N5	**X**							
	E.N6	**X**							
	E.N7	**X**							
	E.N8		**X**						

ESTUDIANTES QUE LOGRAN TRANSITAR ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

S.P	E.T	Modos de pensar fracción como operador			Caracterización de los modos de pensamiento		
		SG	AA	AE	(SG $\leftrightarrow$ AA)	(AA $\leftrightarrow$ AE)	(SG $\leftrightarrow$ AE)
S1P1	E.T1	X					
	E.T2	X					
	E.T3	X					
	E.T4	X					
	E.T5	X					
	E.T6	X					
	E.T7	X					
	E.T8	X					
	E.T9	X					
	E.T10	X					
S1P2	E.T1				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}\rightarrow$		
	E.T2				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T4				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T5				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T6				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T7				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T8				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T9				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T10				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
S1P3	E.T1				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T2				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T4				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T5				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T6				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T7				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T8				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T9				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T10				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
S1P4	E.T1				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T2				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T4				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T5				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T6				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		

	E.T7				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T8				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T9				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T10				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
S1P5	**E.T1**				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T2				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T4					$\xrightarrow[multiplicacion]{}$	
	E.T5				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T6				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T7					$\xrightarrow[multiplicacion]{}$	
	E.T8					$\xrightarrow[multiplicacion]{}$	
	E.T9					$\xrightarrow[multiplicacion]{}$	
	E.T10				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
S1P6	**E.T1**					$\xrightarrow[Aditivo]{}$	
	E.T2					$\xrightarrow[Aditivo]{}$	
	E.T3					$\xrightarrow[Aditivo]{}$	
	E.T4					$\xrightarrow[Aditivo]{}$	
	E.T5				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T6				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T7					$\xrightarrow[multiplicacion]{}$	
	E.T8					$\xrightarrow[multiplicacion]{}$	
	E.T9					$\xrightarrow[Aditivo]{}$	
	E.T10					$\xrightarrow[Aditivo]{}$	
S1P7	**E.T1**				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$ $\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T2				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$ $\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$ $\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T4				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$ $\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T5				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$ $\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		

	E.T6				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
	E.T7				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
	E.T8				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
	E.T9				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T10				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
S1P8	**E.T1**					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T2					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T3					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T4					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T5					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T6					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T7					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T8					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T9					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T10					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
S1P9	**E.T1**				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T2				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T3					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T4					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
	E.T5					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
	E.T6					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
	E.T7				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T8					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
	E.T9				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T10					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
S1P10	**E.T1**					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T2					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T3					$\xrightarrow[Art_{aditivo}]{}$	
	E.T4					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T5					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T6					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
	E.T7					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
	E.T8					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
	E.T9					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
	E.T10					$\xrightarrow[\text{Aditivo}]{}$	
S1P11	**E.T1**				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T2				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		

	E.T3				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T4				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T5				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T6					$\xrightarrow[multiplicacion]{}$	
	E.T7				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T8				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$	$\xrightarrow[multiplicacion]{}$	
	E.T9				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T10				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T1	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T2	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T3	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T4	**(SGconjunti sta-FU)**					
S2P1	**E.T5**	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T6	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T7	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T8	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T9	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T10	**(SGconjunti sta-FU)**					
	E.T1				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T2				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T4				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
S2P2	**E.T5**				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T6				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T7				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T8				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T9				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T10				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T1				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T2				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
S2P3	**E.T4**				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T5				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T6				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		
	E.T7				$\xrightarrow[parte\ de\ un\ todo]{}$		

	E.T8				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
	E.T9				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
	E.T10				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
S2P4	**E.T1**						$\xrightarrow[\substack{\text{multiplicacion}\\ \text{parte de un todo}\\ \frac{a}{b}}]{}$
	E.T2				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T4				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T5						$\xrightarrow[\substack{\text{multiplicacion}\\ \text{parte de un todo}\\ \frac{a}{b}}]{}$
	E.T6					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T7				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
	E.T8				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$		
	E.T9				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T10					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
S2P5	**E.T1**				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T2				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\frac{a}{b}]{}$		
	E.T4					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T5						$\xrightarrow[\substack{\text{multiplicacion}\\ \text{parte de un todo}\\ \frac{a}{b}}]{}$
	E.T6					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T7						$\xrightarrow[\substack{\text{multiplicacion}\\ \text{parte de un todo}\\ \frac{a}{b}}]{}$
	E.T8					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T9					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T10					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
S2P6	**E.T1**						$\xrightarrow[\substack{\text{multiplicacion}\\ \text{parte de un todo}}]{}$
	E.T2				$\xrightarrow[\substack{\text{parte de un todo}\\ \frac{a}{b}}]{}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\substack{\text{parte de un todo}\\ \frac{a}{b}}]{}$		
	E.T4						$\xrightarrow[\substack{\text{multiplicacion}\\ \text{parte de un todo}\\ \frac{a}{b}}]{}$
	E.T5				$\xrightarrow[\substack{\text{parte de un todo}\\ \frac{a}{b}}]{}$		

	E.T6				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T7						$\overrightarrow{multiplicacion}$ $parte\ de\ un\ todo$ $\frac{a}{b}$
	E.T8						$\overrightarrow{multiplicacion}$ $parte\ de\ un\ todo$ $\frac{a}{b}$
	E.T9				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T10				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
S2P7	**E.T1**						$\overrightarrow{multiplicacion}$ $parte\ de\ un\ todo$ $\frac{a}{b}$
	E.T2				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T3				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T4						$\overrightarrow{multiplicacion}$ $parte\ de\ un\ todo$ $\frac{a}{b}$
	E.T5				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T6				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T7						$\overrightarrow{multiplicacion}$ $parte\ de\ un\ todo$ $\frac{a}{b}$
	E.T8						$\overrightarrow{multiplicacion}$ $parte\ de\ un\ todo$ $\frac{a}{b}$
	E.T9				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T10				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
S3P1	**E.T1**				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T2				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T3				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T4				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T5				$\overrightarrow{parte\ de\ un\ todo}$ $\frac{a}{b}$		

	E.T6				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T7				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T8				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T9				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T10				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
S3P2	**E.T1**					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T2				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T4					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T5					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T6					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T7				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T8				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T9					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
	E.T10					$\xrightarrow[\text{multiplicacion}]{}$	
S3P3	**E.T1**				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T2				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T3				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T4					$\xrightarrow[\text{multiplicación}]{}$ $\frac{a}{b}$	
	E.T5				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T6					$\xrightarrow[\text{multiplicación}]{}$ $\frac{a}{b}$	
	E.T7						
	E.T8				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T9				$\xrightarrow[\text{parte de un todo}]{}$ $\frac{a}{b}$		
	E.T10					$\xrightarrow[\text{multiplicación}]{}$ $\frac{a}{b}$	

S.P	E.N	Modos de pensar la fracción como operador			S.P	E.N	Modos de pensar la fracción como operador		
		SG	AA	AE			SG	AA	AE
S1P1	E.N1		X		S2P1	E.N1	X		
	E.N2	X				E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3	X		
	E.N4		X			E.N4	X		
	E.N5		X			E.N5	X		
	E.N6		X			E.N6	X		
	E.N7		X			E.N7	X		
	E.N8		X			E.N8	X		
S1P2	E.N1	No se observa estar en ninguno de los pensamientos			S2P2	E.N1	X		
	E.N2		X			E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3	X		
	E.N4	X				E.N4	X		
	E.N5		X			E.N5		X	
	E.N6		X			E.N6		X	
	E.N7	X				E.N7		X	
	E.N8	X				E.N8		X	
S1P3	E.N1		X		S2P3	E.N1	X		
	E.N2	X				E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3		X	
	E.N4	X				E.N4		X	
	E.N5	X				E.N5		X	
	E.N6	X				E.N6	X		
	E.N7	X				E.N7	X		
	E.N8	X				E.N8	X		
S1P4	E.N1		X		S2P4	E.N1	X		
	E.N2	X				E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3	X		
	E.N4	X				E.N4	X		
	E.N5		X			E.N5	X		
	E.N6		X			E.N6		X	
	E.N7	X				E.N7		X	
	E.N8	X				E.N8		X	
S1P5	E.N1		X		S2P5	E.N1		X	
	E.N2		X			E.N2	X		
	E.N3		X			E.N3	X		
	E.N4		X			E.N4	X		
	E.N5		X			E.N5	X		
	E.N6		X			E.N6	X		
	E.N7	X				E.N7	X		
	E.N8	X				E.N8	X		
S1P6	E.N1		X		S2P6	E.N1		X	
	E.N2	X				E.N2		X	
	E.N3	X				E.N3		X	
	E.N4		X			E.N4		X	
	E.N5		X			E.N5		X	
	E.N6		X			E.N6		X	
	E.N7		X			E.N7		X	
	E.N8		X			E.N8		X	
S1P7	E.N1		X		S2P7	E.N1		X	
	E.N2	X				E.N2	X		
	E.N3	X				E.N3	X		
	E.N4	X				E.N4	X		
	E.N5	X				E.N5	X		
	E.N6	X				E.N6	X		
	E.N7	X				E.N7		X	
	E.N8		X			E.N8		X	

S1P8	**E.N1**	**No se evidencia estar en ninguno de los pensamientos**			**S3P1**	**E.N1**	**X**		
	E.N2	**X**				**E.N2**	**X**		
	E.N3	**X**				**E.N3**		**X**	
	E.N4	**X**				**E.N4**		**X**	
	E.N5	**X**				**E.N5**		**X**	
	E.N6	**X**				**E.N6**		**X**	
	E.N7	**X**				**E.N7**		**X**	
	E.N8	**X**				**E.N8**		**X**	
S1P9	**E.N1**	**No se evidencia estar en ninguno de los pensamientos**			**S3P2**	**E.N1**	**X**		
	E.N2	**X**				**E.N2**	**X**		
	E.N3	**X**				**E.N3**	**X**		
	E.N4	**X**				**E.N4**	**X**		
	E.N5	**X**				**E.N5**	**X**		
	E.N6	**X**				**E.N6**	**X**		
	E.N7	**X**				**E.N7**	**X**		
	E.N8	**X**				**E.N8**	**X**		
S1P10	**E.N1**	**No se evidencia estar en ninguno de los pensamiento**			**S3P3**	**E.N1**		**X**	
	E.N2	**X**				**E.N2**		**X**	
	E.N3	**X**				**E.N3**		**X**	
	E.N4	**X**				**E.N4**		**X**	
	E.N5	**X**				**E.N5**	**X**		
	E.N6	**X**				**E.N6**	**X**		
	E.N7	**X**				**E.N7**	**X**		
	E.N8	**X**				**E.N8**	**X**		
S1P11	**E.N1**		**X**						
	E.N2		**X**						
	E.N3		**X**						
	E.N5	**X**							
	E.N6	**X**							
	E.N7	**X**							
	E.N8		**X**						