



Universidad de Sonora
Departamento de Física



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

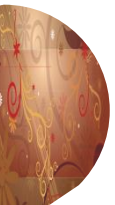
Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

© 2019

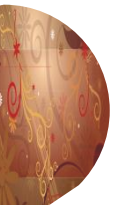
Temario

- 1) Cinemática rotacional.
- 2) Dinámica rotacional.
- 3) Las leyes de Newton en sistemas de referencia acelerados.
- 4) La ley de la gravitación de Newton.
- 5) Oscilaciones.
- 6) Movimiento ondulatorio.
- 7) Ondas sonoras.



Temario

3. Las leyes de Newton en sistemas de referencia acelerados.
 1. Marcos de referencia inerciales y no inerciales.
 2. Seudofuerzas. Fuerza de inercia.
 3. Sistemas de referencia rotacionales.
 4. El efecto Coriolis.
 5. Ecuaciones de movimiento en la tierra.
 6. El péndulo de Foucault.



I. Marcos de referencia inerciales y no inerciales

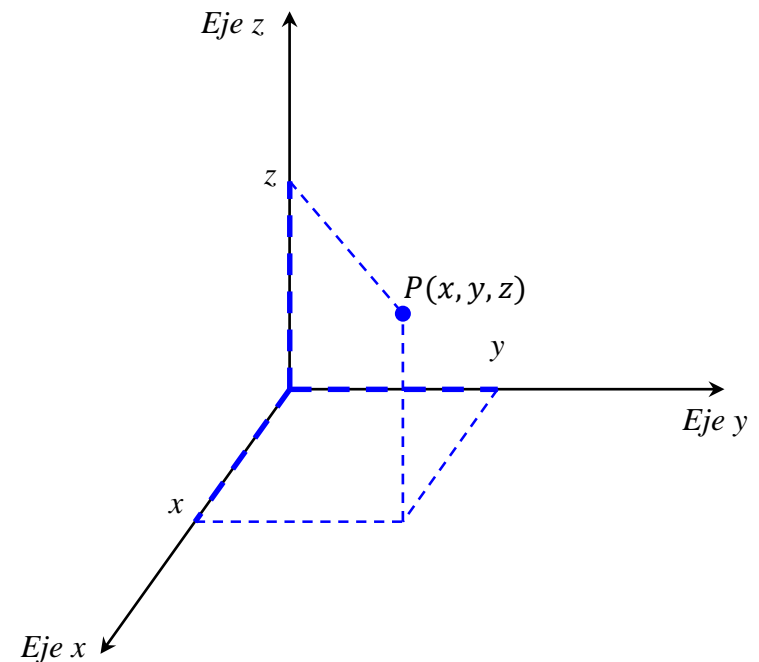
En mecánica se estudia el movimiento de los cuerpos físicos y para su descripción se emplea el concepto de partícula.

Es posible describir el movimiento de una partícula especificando las coordenadas de un punto en el espacio.

En general se requiere de tres coordenadas, una por cada dirección de movimiento en un sistema de ejes cartesianos.

La descripción del movimiento implica conocer la dependencia temporal de cada una de las coordenadas, es decir

$$x(t), y(t) \text{ y } z(t).$$



I. Marcos de referencia inerciales y no inerciales

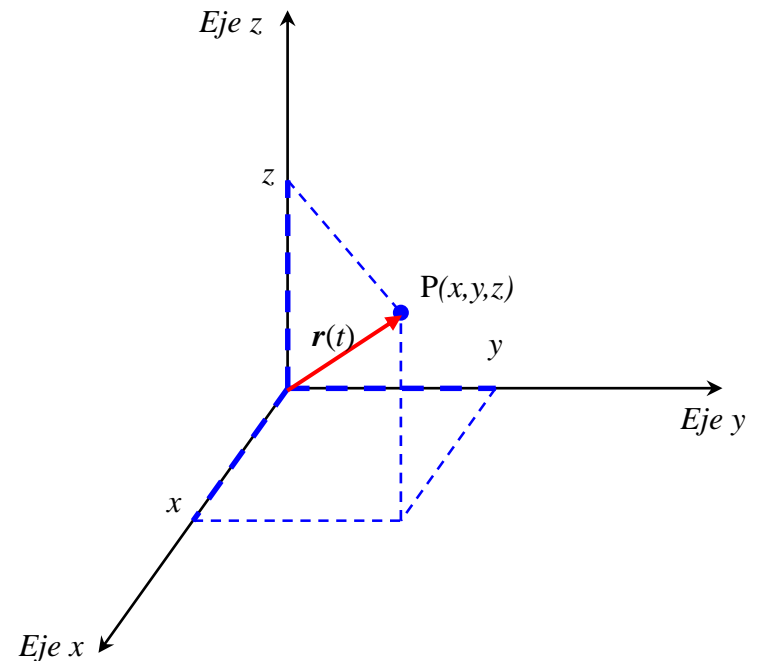
Matemáticamente es más fácil asociar con el punto P , un vector $\vec{r}(t)$ con origen coincidente en el origen de coordenadas y terminación en el punto en cuestión, es decir

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Para encontrar la expresión de la posición como función del tiempo se emplean las Leyes de Newton; en particular, la Segunda Ley permite establecer que

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}_T = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i$$

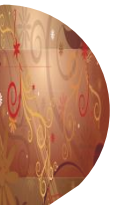
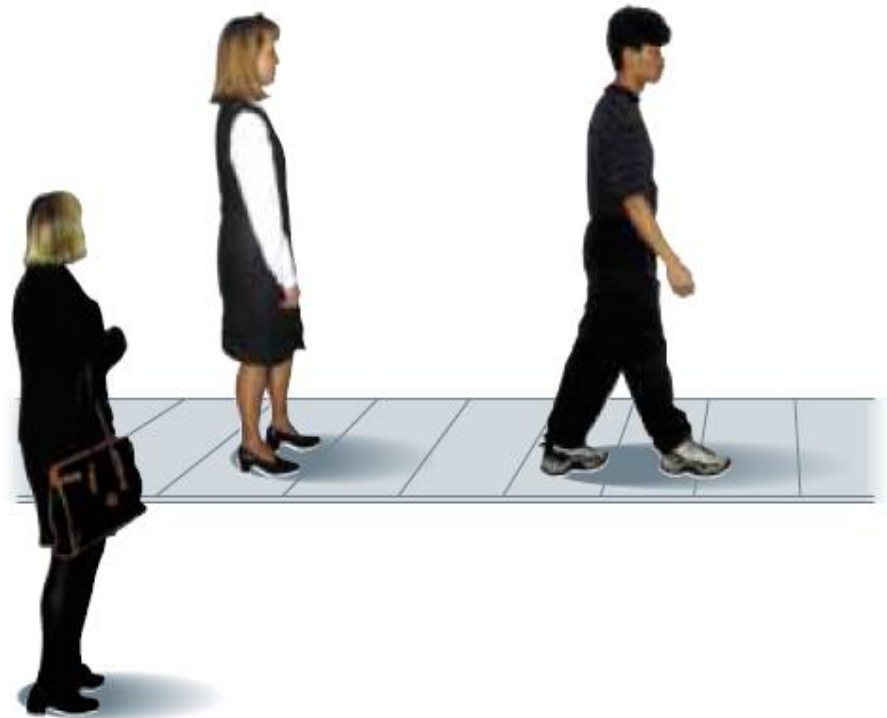
donde \vec{F}_T es la fuerza total que actúa sobre la partícula que estamos analizando.



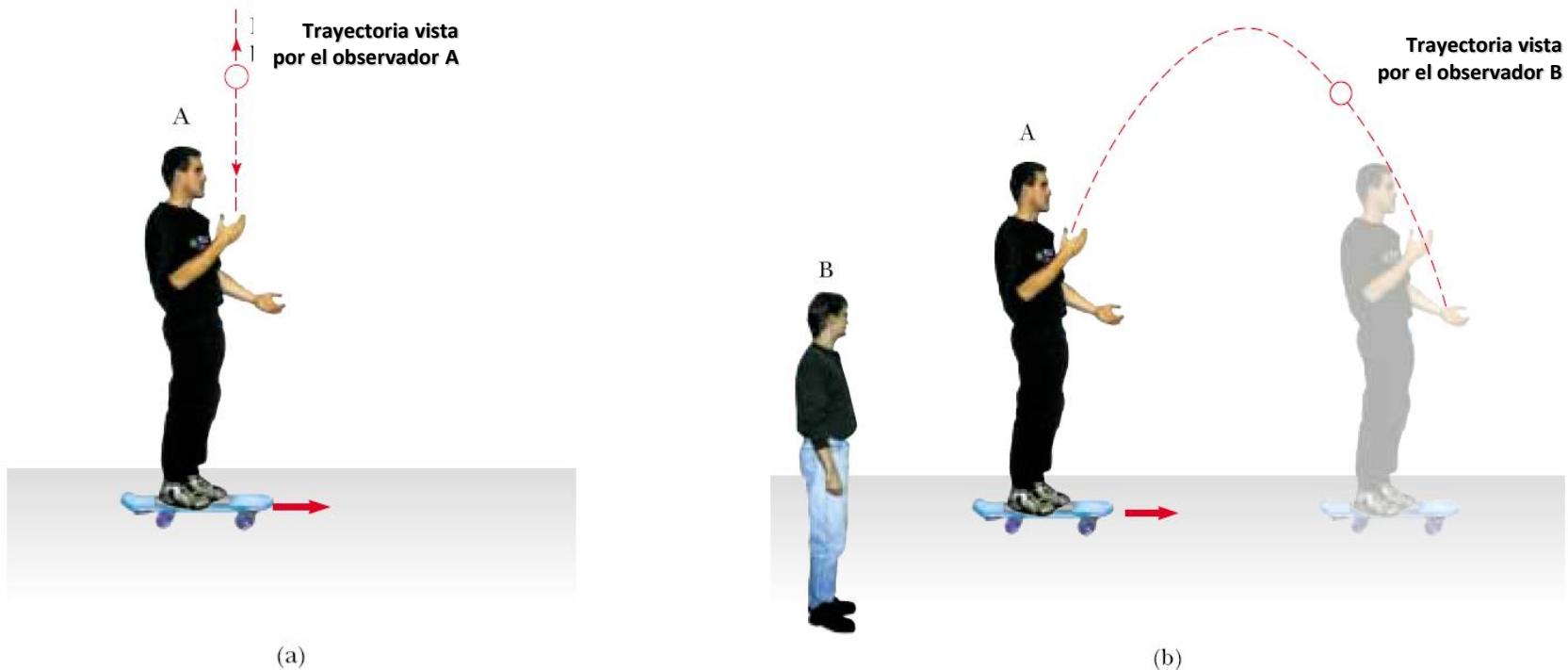
I. Marcos de referencia inerciales y no inerciales

Mientras que la Primera Ley de Newton define a los sistemas de referencia inerciales, estableciendo que en ellos, una partícula sobre la cual actúe una fuerza neta nula, mantiene su estado de movimiento, es decir, permanecerá en reposo o se moverá en línea recta con rapidez constante.

El movimiento relativo entre dos sistemas de referencia es importante en la descripción del movimiento, y sobre todo en la caracterización de los mismos.



I. Marcos de referencia inerciales y no inerciales



La descripción de la partícula depende del observador.

- (a) Para la persona parada sobre la patineta (Observador A) la pelota desarrolla un movimiento vertical;
- (b) mientras que para una persona parada en la acera (observador B) la pelota desarrolla un tiro parabólico.

I. Marcos de referencia inerciales y no inerciales

A continuación consideremos el esquema mostrado.

Para el observador montado sobre una banda (S^*) que se mueve con una velocidad u , la persona que camina sobre ella tiene una rapidez ($v^* = dr^*/dt$), mientras que para el observador parado al lado de la banda (S) la persona tiene una velocidad ($v = dr/dt$).

La relación entre ellas se obtiene notando que

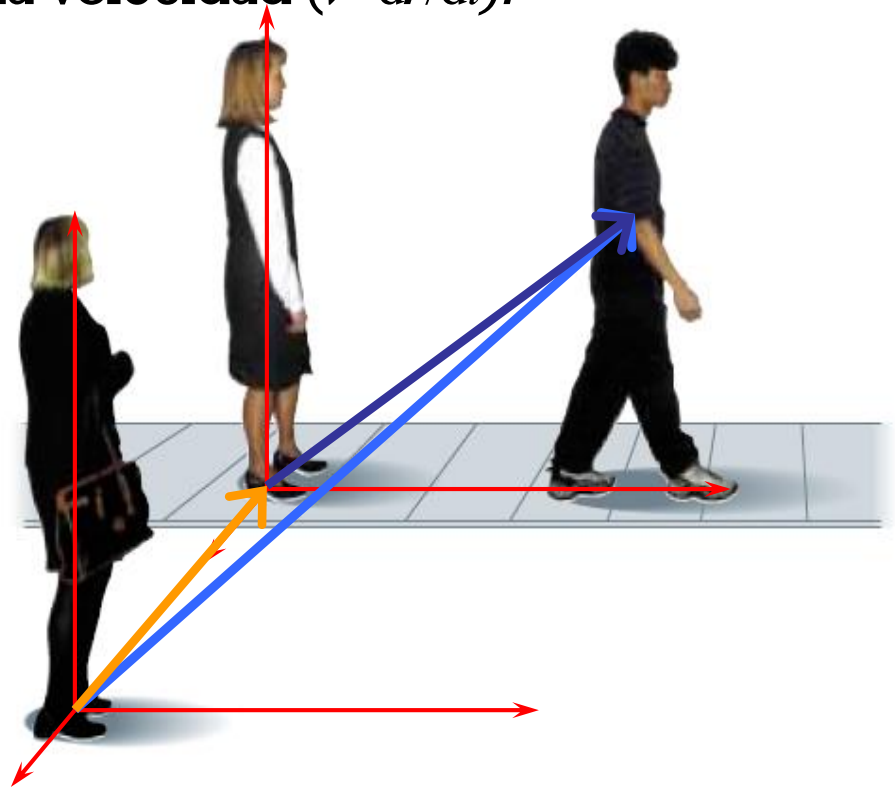
$$r = s + r^*$$

por lo que

$$dr/dt = ds/dt + dr^*/dt$$

o

$$v = u + v^*$$



I. Marcos de referencia inerciales y no inerciales

Con lo anterior, la Segunda Ley de Newton en el sistema en reposo (S) se escribe como

$$\vec{F}_T = m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \quad (1)$$

y considerando la relación vectorial entre las posiciones respecto a ambos sistemas de referencia, podemos escribir

$$\vec{F}_T = m \frac{d^2 (\vec{s}(t) + \vec{r}^*(t))}{dt^2} = m \frac{d^2 \vec{s}(t)}{dt^2} + m \frac{d^2 \vec{r}^*(t)}{dt^2} \quad (2)$$

Si la aceleración del sistema móvil (dado por el primer término) es cero, entonces resulta

$$\vec{F}_T = m \frac{d^2 \vec{r}^*(t)}{dt^2} \quad (3)$$

Lo anterior permite concluir que “cualquier sistema de referencia que se mueva con velocidad constante respecto a uno inercial será también inercial”, esto debido a que en ambos se verifican las ecuaciones de movimiento de Newton.

2. Pseudofuerzas. Fuerza de inercia

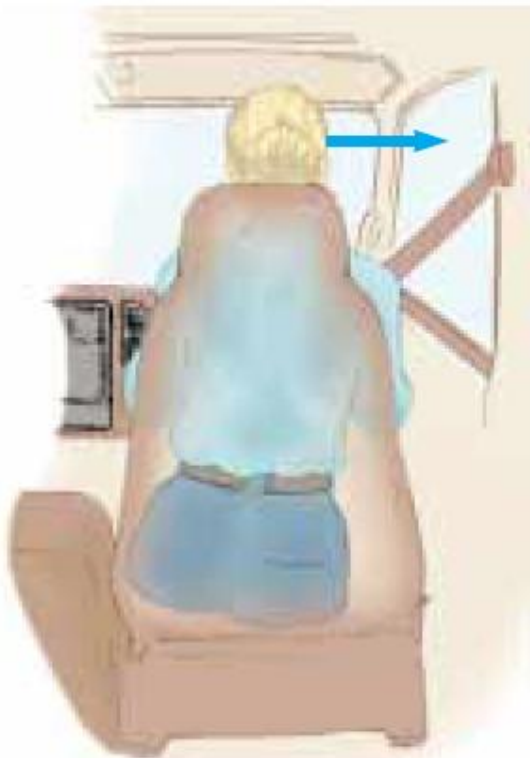
Por ello, establecemos que una fuerza ficticia es una fuerza aparente que un observador en un sistema acelerado (no inercial) ve aparecer cuando analiza su sistema como si fuese un sistema inercial.

Por ejemplo, el pasajero de un automóvil que toma como referencia el automóvil en movimiento, para medir la aceleración de su propio cuerpo, cuando el automóvil frena o describe una curva, siente una fuerza que le empuja hacia delante o a un lado, como no hay ninguna causa que origine esta aceleración según su sistema de referencia, y para justificarla, la representa como una fuerza ficticia que dé lugar al mismo resultado.

Si en lugar de tomar como referencia el automóvil, tomamos como referencia el suelo de la carretera, y determinamos la trayectoria del automóvil, cuando calculamos la aceleración que experimenta el pasajero, no son necesarias las fuerzas ficticias, dado que el suelo terrestre es un sistema de referencia, que podemos considerar inercial, cuando menos comparándolo con el del automóvil.

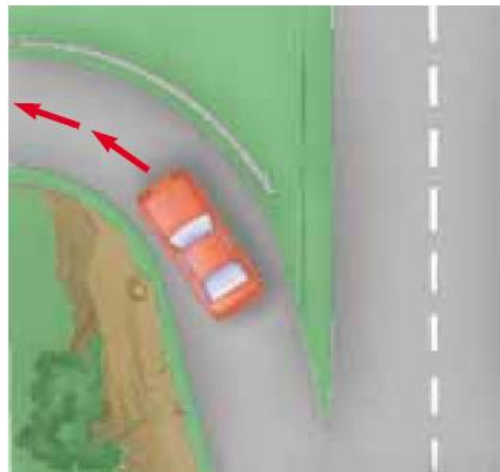
2. Seudofuerzas. Fuerza de inercia

A continuación se presentan algunos ejemplos de fuerzas ficticias o seudofuerzas.



SRNI: “Una fuerza centrífuga empuja hacia fuera”

Un carro toma una curva y la descripción del movimiento de un pasajero tiene dos vertientes:



SRI: “El carro ejerce una fuerza centrípeta para poder tomar la curva”

2. Pseudofuerzas. Fuerza de inercia

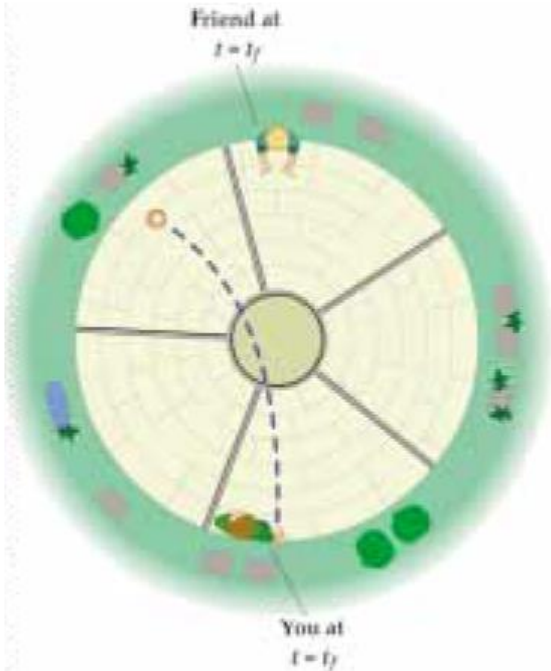
La frase (comúnmente escuchada) “fuerza centrífuga” se usa para describir una “fuerza” que tira hacia fuera en un objeto que se mueve en una trayectoria circular.

Cabe entonces preguntarse: Si se está sintiendo una “fuerza centrífuga” en un paseo en un carrusel que rota, ¿cuál es el otro objeto con el cual se está interactuando de manera recíproca?

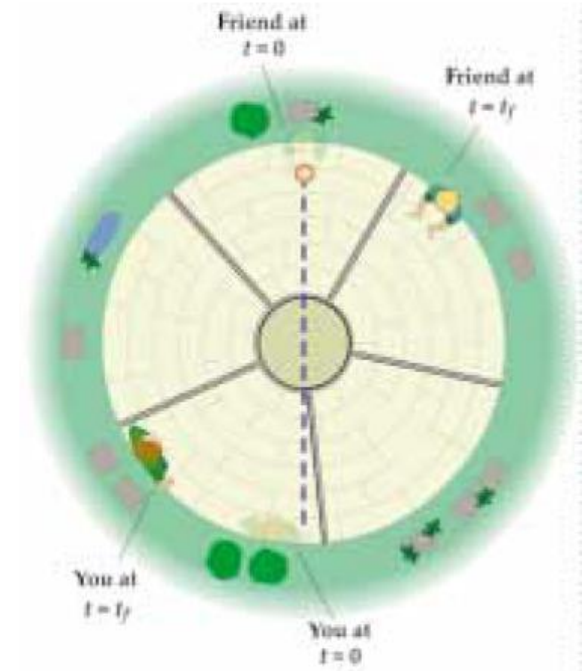
No se puede identificar el otro objeto porque esta es una fuerza ficticia que aparece como resultado de estar en un marco de referencia no inercial.



2. Pseudofuerzas. Fuerza de inercia



Desde una mesa giratoria se lanza una pelota.



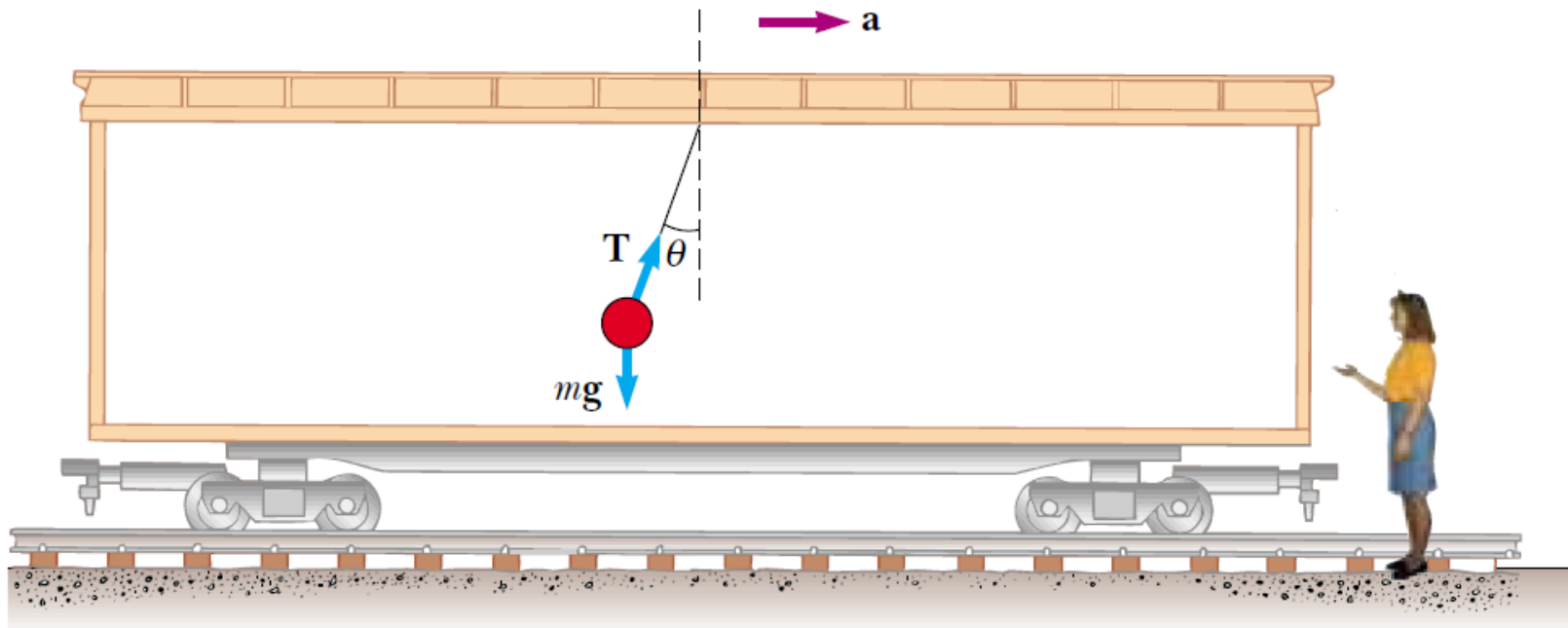
SRNI: "Una fuerza (de Coriolis) desvía a la pelota (describiendo el movimiento mostrado)"

SRI: "La pelota, en ausencia de fuerzas, describe una trayectoria en línea recta"

2. Pseudofuerzas. Fuerza de inercia

Un péndulo colocado en un vagón acelerado

$$\begin{aligned}\sum F_x &= T \sin \theta = ma \\ \sum F_y &= T \cos \theta - mg = 0\end{aligned}$$

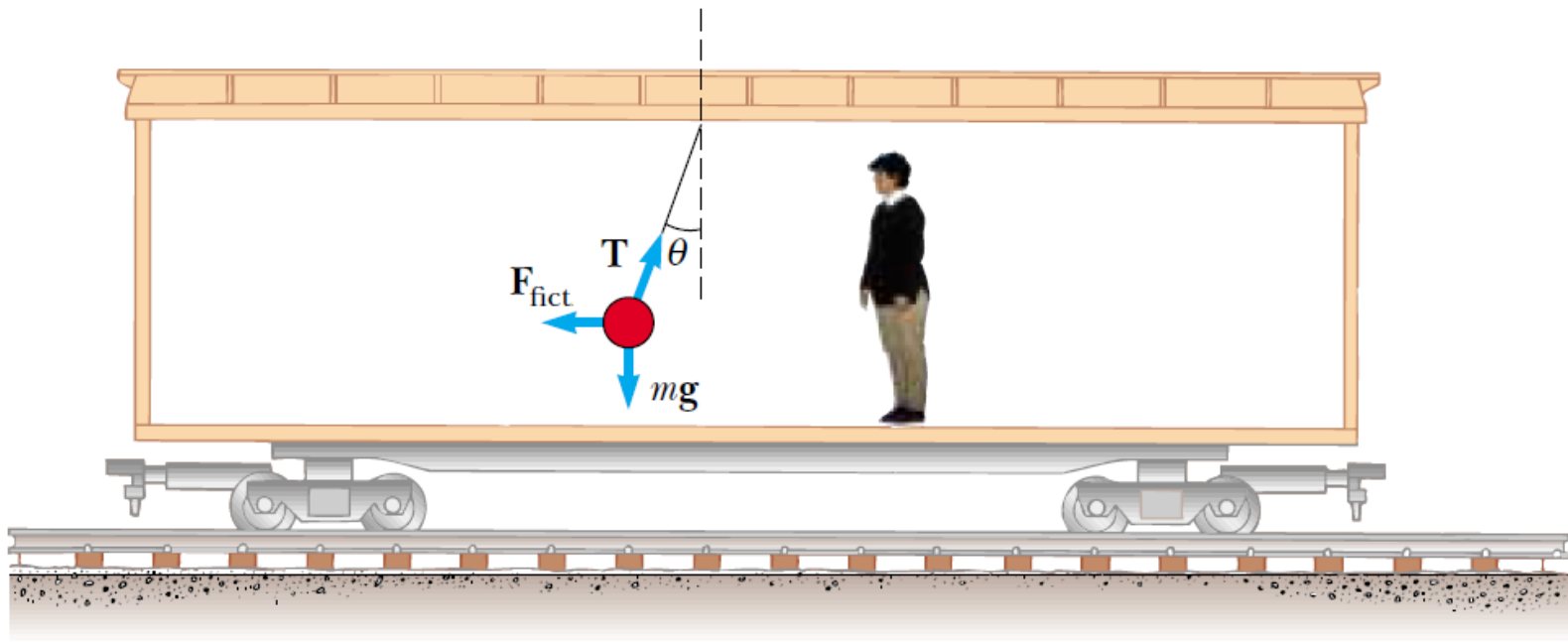


SRI: “El péndulo tiene una aceleración (la misma que el vagón) ya que hay un desbalance en las fuerzas que actúan sobre él”

2. Pseudofuerzas. Fuerza de inercia

Un péndulo colocado en un vagón acelerado

$$\begin{aligned}\sum F'_x &= T \sin \theta - F_{fict} = 0 \\ \sum F'_y &= T \cos \theta - mg = 0\end{aligned}$$

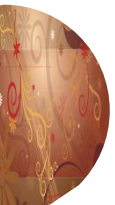


SRNI: “El péndulo no tiene una aceleración pero presenta un ángulo de inclinación con respecto a la vertical, producto de una «fuerza» horizontal que actúa sobre él en dirección opuesta al movimiento”

2. Pseudofuerzas. Fuerza de inercia.

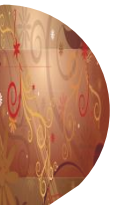
Ejemplos.

- 1.- Un pequeño contenedor de agua se coloca en el plato de un horno de microondas, a una distancia de 12.0cm del centro del plato, el cual rota uniformemente completando una revolución cada 7.25s. ¿Qué ángulo forma la superficie del agua con la horizontal?



2. Pseudofuerzas. Fuerza de inercia. Ejemplos.

2.- Una plomada no cuelga exactamente a lo largo de la línea que va al centro de rotación terrestre. ¿Qué tanto se desvía la plomada de una línea radial en un punto ubicado a 35.0° de latitud Norte? Asuma que la tierra es esférica y con un radio de 6370km.



3. Sistemas de referencia rotacionales

Si ahora consideramos dos sistemas de coordenadas x, y, z y x^*, y^*, z^* con origen común, cuyos ejes giran mutuamente, tal como se muestra en el diagrama.

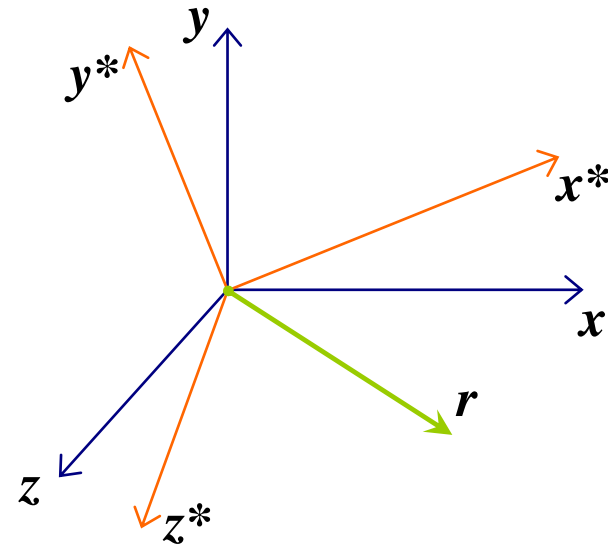
El vector de posición se puede escribir como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

para el sistema S, y

$$\mathbf{r} = x^*\mathbf{i}^* + y^*\mathbf{j}^* + z^*\mathbf{k}^*$$

para el sistema S*.



Ahora tenemos que la posición puede representarse por un mismo vector \mathbf{r} con distintas componentes, según los diferentes ejes.

3. Sistemas de referencia rotacionales

A partir de las anteriores expresiones para r en ambos sistemas, podemos calcular las componentes multiplicando por los vectores unitarios correspondientes, es decir

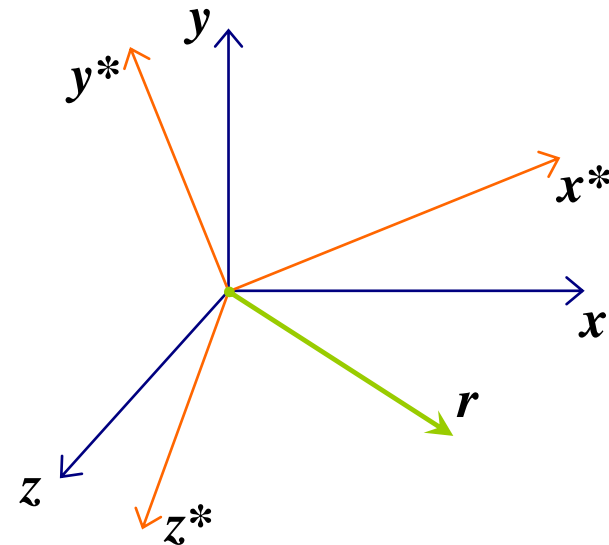
$$x = \vec{r} \cdot \hat{i} = (x^* \hat{i}^* + y^* \hat{j}^* + z^* \hat{k}^*) \cdot \hat{i}$$

$$x = x^* (\hat{i}^* \cdot \hat{i}) + y^* (\hat{j}^* \cdot \hat{i}) + z^* (\hat{k}^* \cdot \hat{i})$$

y de manera similar, obtenemos

$$y = x^* (\hat{i}^* \cdot \hat{j}) + y^* (\hat{j}^* \cdot \hat{j}) + z^* (\hat{k}^* \cdot \hat{j})$$

$$z = x^* (\hat{i}^* \cdot \hat{k}) + y^* (\hat{j}^* \cdot \hat{k}) + z^* (\hat{k}^* \cdot \hat{k})$$



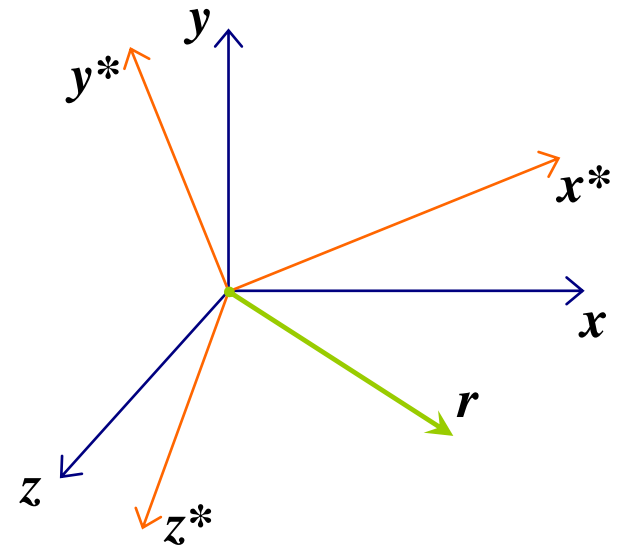
Los productos escalares que aparecen en las expresiones anteriores son los cosenos de los ángulos formados por los ejes correspondientes.

3. Sistemas de referencia rotacionales

Con base en lo anterior, podemos calcular la derivada temporal de cualquier vector r , a partir de sus componentes en el sistema que rota S^* , de la siguiente manera.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx^*}{dt} \hat{i}^* + \frac{dy^*}{dt} \hat{j}^* + \frac{dz^*}{dt} \hat{k}^* + x^* \frac{d\hat{i}^*}{dt} + y^* \frac{d\hat{j}^*}{dt} + z^* \frac{d\hat{k}^*}{dt}$$

Del mismo modo se puede obtener una expresión análoga para la derivada en el sistema que rota como función de sus componentes en el sistema fijo.



$$\vec{r} = x^* \hat{i}^* + y^* \hat{j}^* + z^* \hat{k}^*$$

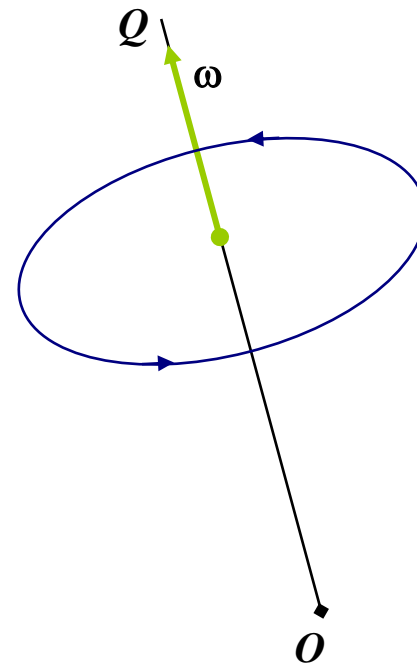
$$\frac{d^* \vec{r}}{dt} = \frac{d^* x}{dt} \hat{i} + \frac{d^* y}{dt} \hat{j} + \frac{d^* z}{dt} \hat{k} + x \frac{d^* \hat{i}}{dt} + y \frac{d^* \hat{j}}{dt} + z \frac{d^* \hat{k}}{dt}$$

4. El efecto Coriolis.

Si ahora consideramos que el sistema S^* gira alrededor de un eje OQ con una rapidez angular ω , tal como se muestra.

Se define el vector velocidad angular ω como un vector de módulo ω , dirección OQ y sentido el de avance de un tornillo dextrógiro que gira con el sistema S^* .

Con estas características del sistema que rota, veamos cómo se reescriben las ecuaciones obtenidas anteriormente para las derivadas temporales.



4. El efecto Coriolis.

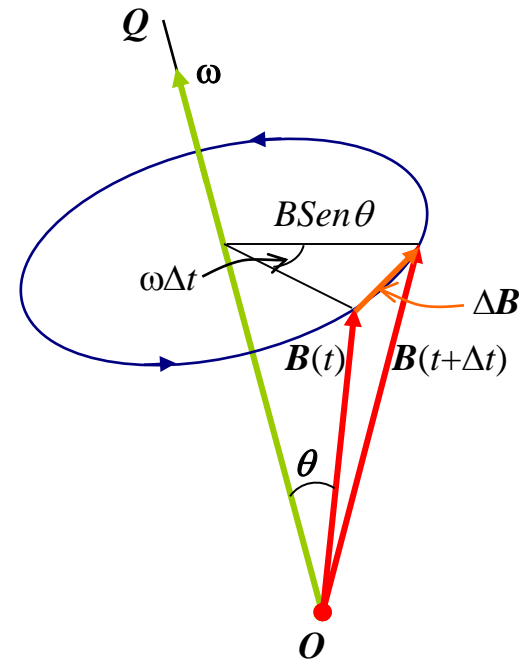
Dado un vector \vec{B} en reposo en el sistema S^* , tenemos que su derivada $d^*\vec{B}/dt$ es cero, sin embargo su derivada $d\vec{B}/dt$ no lo es, la pregunta es ¿cuánto vale?

La respuesta es

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B}$$

Por definición la derivada $d\vec{B}/dt$ es

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{B}(t + \Delta t) - \vec{B}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{B}(t)}{\Delta t}$$



Utilizando el esquema anexo, vemos que la dirección corresponde a la del producto $\vec{\omega} \times \vec{B}$, mientras que su magnitud está dada por el producto $(B \text{ Sen } \theta)(\omega \Delta t)$, que de nuevo corresponde a la del producto $\vec{\omega} \times \vec{B}$.

4. El efecto Coriolis.

Lo anterior permite escribir a derivada temporal de un vector arbitrario A , dada por la ecuación

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x^*}{dt} \hat{i}^* + \frac{dA_y^*}{dt} \hat{j}^* + \frac{dA_z^*}{dt} \hat{k}^* + A_x^* \frac{d\hat{i}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{j}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{k}^*}{dt}$$

como

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x^*}{dt} \hat{i}^* + \frac{dA_y^*}{dt} \hat{j}^* + \frac{dA_z^*}{dt} \hat{k}^* + A_x^* \vec{\omega} \times \hat{i}^* + A_y^* \vec{\omega} \times \hat{j}^* + A_z^* \vec{\omega} \times \hat{k}^*$$

Los primeros tres términos corresponden a la derivada temporal del vector A^* en el sistema S^* , mientras que los últimos tres se pueden escribir como $\vec{\omega} \times A$, por lo que podemos escribir la muy importante relación

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d^* \vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

4. El efecto Coriolis.

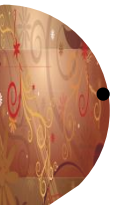
Esta expresión la podemos aplicar al vector posición $r(t)$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

y aplicándola por segunda vez, se tiene

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2}\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

- El primer término corresponde a la aceleración respecto al sistema S^* ;
- el segundo se denomina *aceleración centrípeta* (cuyo módulo es $\omega^2 r \sin\theta$);
- el tercer término sólo aparece cuando r se mueve en el sistema S^* y se denomina *aceleración de Coriolis*; y
- finalmente, el cuarto término sólo aparece cuando el sistema rota con una rapidez angular variable.



4. El efecto Coriolis.

Ahora bien, considerando que la Segunda Ley de Newton es válida en el sistema fijo S, podemos escribir

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} + m \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = F_T$$

que para el sistema S* se convierte en

$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = F_T - \boxed{m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} - \boxed{2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}} - \boxed{m \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}$$

En este caso,

- el segundo término se denomina **fuerza centrífuga**;
- el tercer término sólo aparece cuando r se mueve en el sistema S* y se denomina **fuerza de Coriolis**; y
- finalmente, el cuarto término no tiene nombre y sólo aparece en el caso de rotación no uniforme.

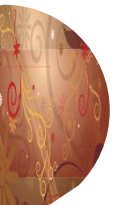
En mecánica clásica estas tres fuerzas se denominan **ficticias** por no estar asociadas con una interacción.

5. Ecuaciones de movimiento en la tierra

A continuación consideraremos el movimiento de un cuerpo de masa m cercano a la superficie terrestre.

En este caso tenemos que establecer una serie de consideraciones:

- el sistema S^* corresponde a un sistema de referencia fijo respecto a la tierra
- la rapidez angular del sistema S^* , en este caso ω , es uniforme
- la fuerza F_T es la suma de la fuerza gravitatoria ($mg = mGM_T/r_T^2$) y todas las demás fuerzas NO gravitatorias (F_{NG})



5. Ecuaciones de movimiento en la tierra

La Segunda Ley de Newton, en este caso, se escribe como

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{NG} + m \vec{g}$$

así que en el sistema (S*) fijo a la tierra podemos escribir

$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{NG} + m \vec{g} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

o

$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{NG} + m \vec{g}_e - 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

donde hemos introducido un “geopotencial” gravitatorio, tal que la aceleración gravitatoria efectiva en cualquier punto de la superficie terrestre está dado por

$$\vec{g}_e = \vec{g}(\vec{r}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

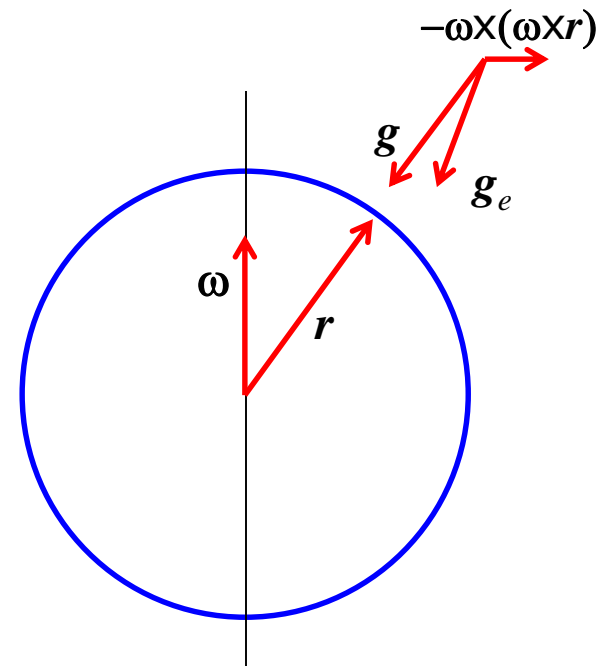


5. Ecuaciones de movimiento en la tierra

Con esto, podemos afirmar que la fuerza gravitacional que medimos experimentalmente sobre un cuerpo de masa m en reposo sobre la superficie terrestre corresponde en realidad a mg_e .

En parte, esto explica el “achataamiento” de la tierra en los polos.

El grado de “achataamiento” es el preciso para que la superficie sea perpendicular en cada punto a g_e .



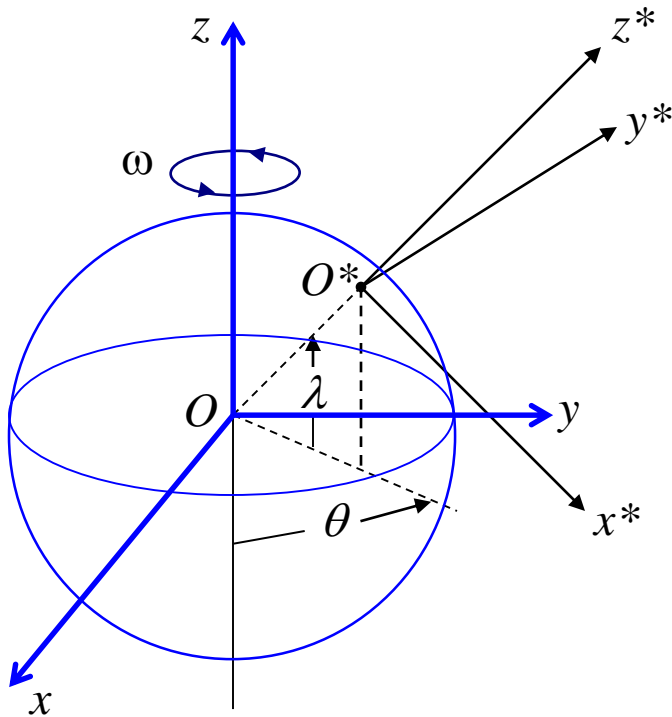
6. El péndulo de Foucault



El funcionamiento del péndulo de Foucault se basa en el hecho de que el punto de suspensión (excepto en los polos) sufre una aceleración debida al movimiento de rotación de la tierra (a través de la fuerza de Coriolis presente en todo movimiento sobre la superficie terrestre).

Para estudiar su movimiento es necesario escoger un sistema de coordenadas apropiado y fijo en la superficie terrestre.

6. El péndulo de Foucault



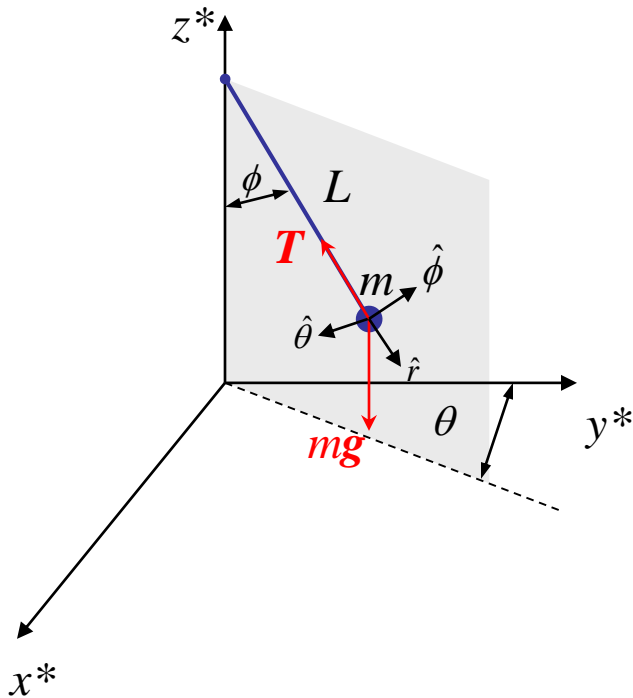
Considerando que la tierra rota con una rapidez angular constante ω respecto a un sistema inercial, podemos escoger en un punto O^* con latitud λ y longitud ϕ , el origen de un sistema de coordenadas (S^*) tal como se muestra en el esquema.

Como podemos advertir, el sistema rota con rapidez ω alrededor del eje terrestre, lo que implica que el radio de la rotación es

$$R_0 = R_T \text{Cos} \lambda$$

Para un observador parado en el punto O^* , el eje x^* apunta al Sur, el eje y^* al Este y el eje z^* hacia arriba.

6. El péndulo de Foucault



Consideremos ahora el movimiento de un péndulo de masa m y longitud L en el sistema que rota.

Su ecuación de movimiento es

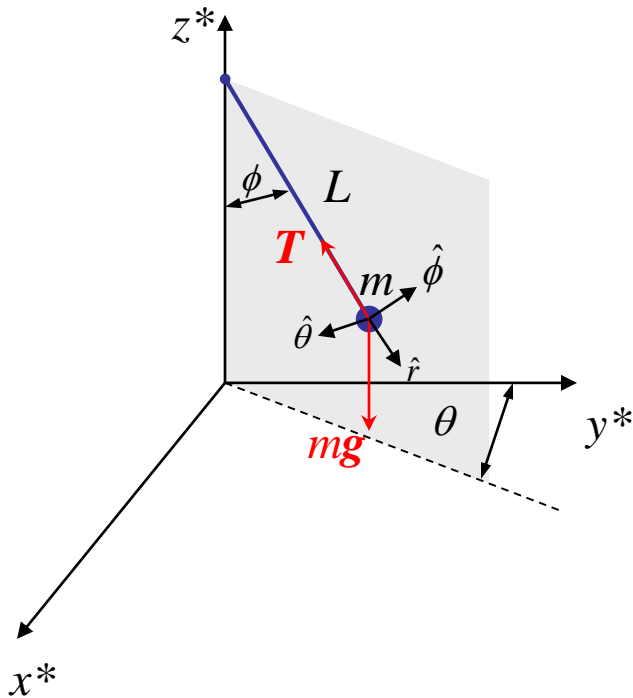
$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m \vec{g}_e - 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

Del esquema, la posición de la lenteja se puede escribir

$$\vec{r} = L \left[\text{Sen} \phi \left(\text{Sen} \theta \hat{i} + \text{Cos} \theta \hat{j} \right) - \text{Cos} \phi \hat{k} \right]$$

Es importante notar que los vectores T y mg definen el plano sombreado.

6. El péndulo de Foucault



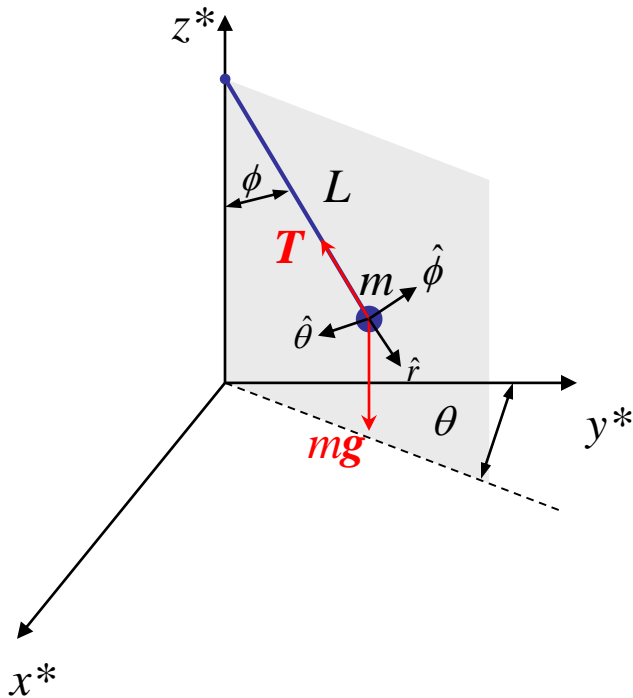
Usando coordenadas esféricas, vemos que los vectores unitarios para r y ϕ se ubican sobre el plano sombreado, mientras que el correspondiente a θ es perpendicular, por lo tanto la ecuación de movimiento perpendicular es

$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} \cdot \hat{\theta} = -2m \left(\vec{\omega} \times \frac{d^{*} \vec{r}}{dt} \right) \cdot \hat{\theta}$$

que utilizando la expresión para r puede escribirse, después de calcular el producto vectorial de ω y la derivada temporal, como

$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} \cdot \hat{\theta} = 2Lm\omega \frac{d^{*} \phi}{dt} (\text{Sen} \lambda \text{Cos} \phi + \text{Cos} \lambda \text{Sen} \phi \text{Sen} \theta)$$

6. El péndulo de Foucault



Por otro lado, si calculamos directamente la segunda derivada, encontramos que su componente perpendicular es

$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} \cdot \hat{\theta} = Lm \left(\frac{d^{*2} \theta}{dt^2} \text{Sen} \phi + 2 \frac{d^* \theta}{dt} \frac{d^* \phi}{dt} \text{Cos} \phi \right)$$

Usando aproximaciones pequeñas, las expresiones anteriores nos llevan a concluir que el plano de oscilación del péndulo efectúa una rotación con una frecuencia angular dada por

$$\frac{d^* \theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega (\text{Sen} \lambda)$$

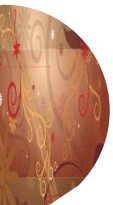
6. El péndulo de Foucault

Con base en lo anterior, es usual (y práctico), describir el movimiento de precesión del péndulo utilizando las coordenadas cartesianas x, y, z , que se escriben como

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x}{dt^2} &= T_x + 2m\omega \text{Sen} \lambda \frac{dy}{dt} \\m \frac{d^2 y}{dt^2} &= T_y - 2m\omega \left(\text{Sen} \lambda \frac{dx}{dt} + \text{Cos} \lambda \frac{dz}{dt} \right) \\m \frac{d^2 z}{dt^2} &= T_z - mg + 2m\omega \text{Cos} \lambda \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

considerando que $L \gg 0$ podemos tomar

$$T_x \approx \frac{-xT}{L} \quad T_y \approx \frac{-yT}{L}$$



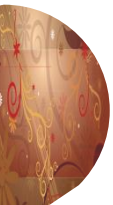
6. El péndulo de Foucault

Con lo anterior, y considerando que $dz/dt \sim 0$, tenemos finalmente

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega_0^2 x + 2\omega \text{Sen} \lambda \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\omega_0^2 y - 2\omega \text{Sen} \lambda \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &\approx 0\end{aligned}$$

donde hemos definido

$$\omega_0^2 = \frac{T}{mL} \approx \frac{g}{L}$$

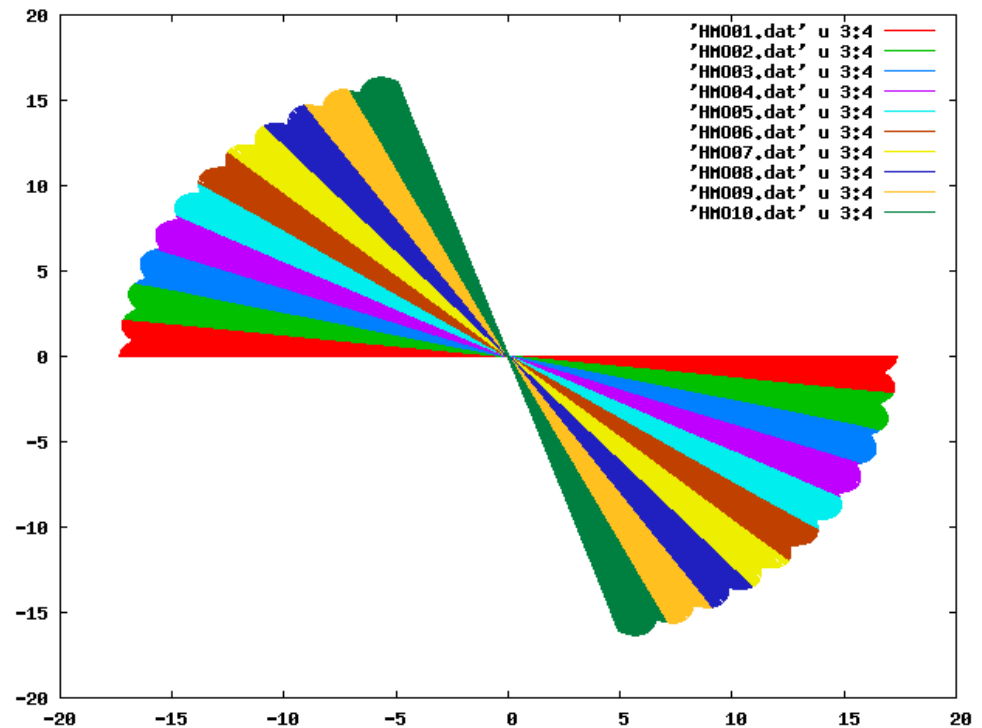


6. El péndulo de Foucault. Resultados



Hermosillo (Latitud = 29.10°N)

($\theta_p \sim -73^{\circ}$ » 49 horas)

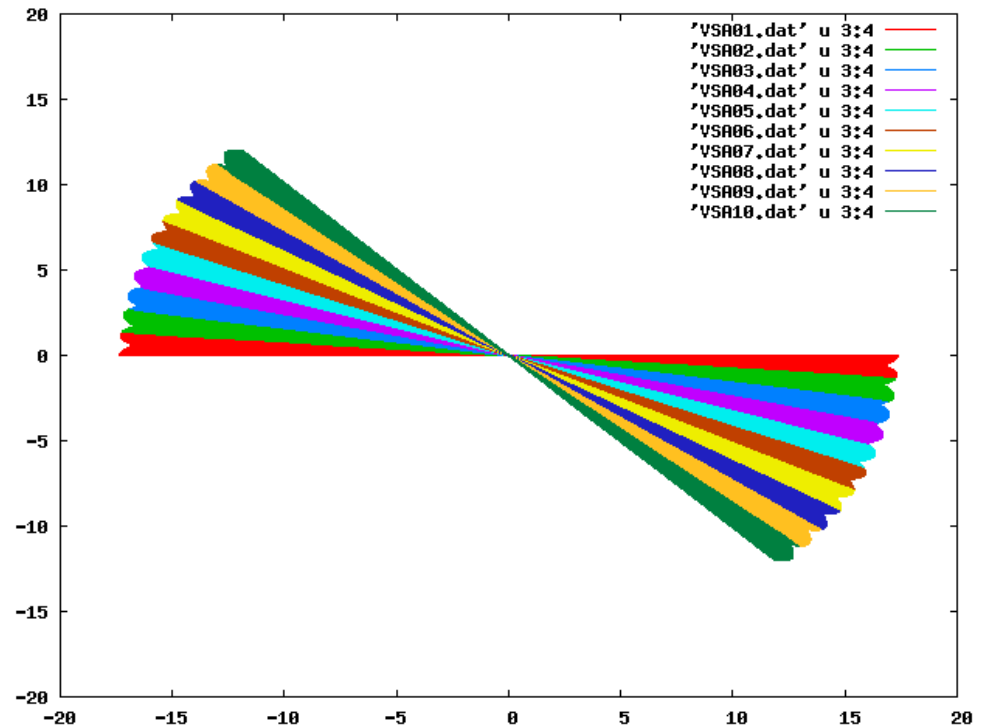


6. El péndulo de Foucault. Resultados



Villahermosa (Latitud = 17.59°N)

($\theta_p \sim -45^{\circ} \gg 79$ horas)

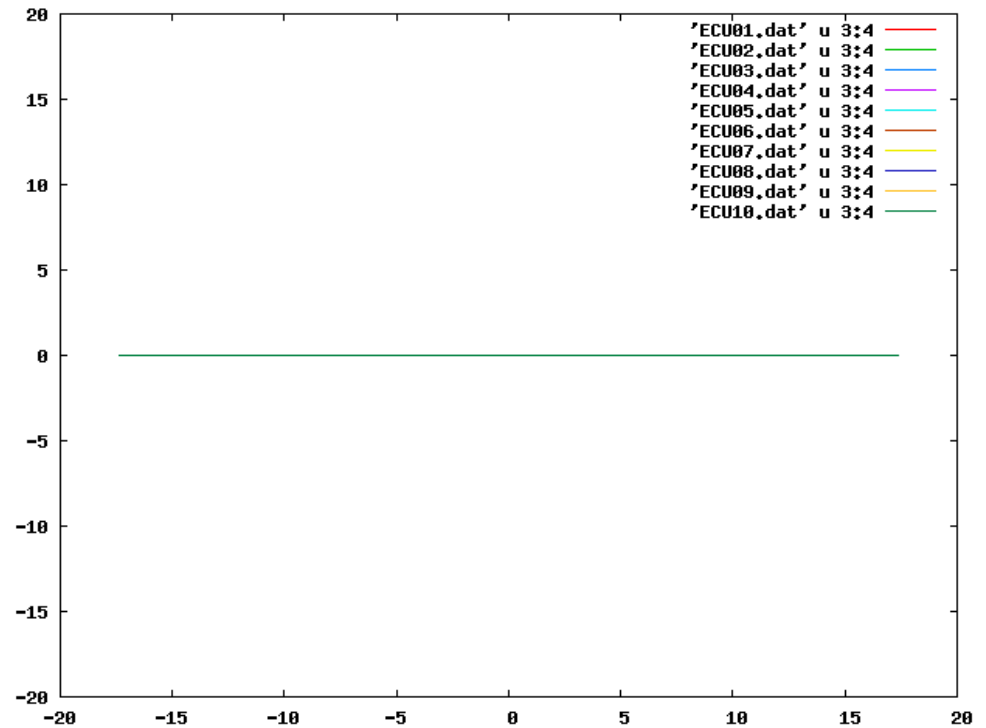


6. El péndulo de Foucault. Resultados



Ecuador (Latitud = 0.00°)

($\theta_P=0^{\circ} \gg \infty$ horas)

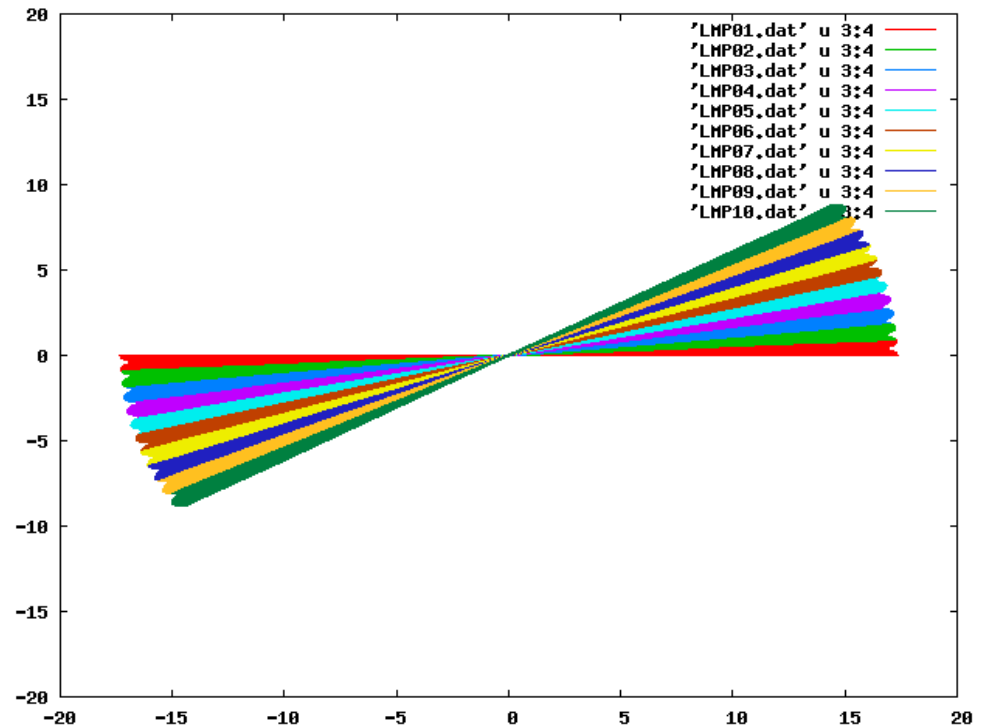


6. El péndulo de Foucault. Resultados



Lima, Perú (Latitud = 12.10°S)

($\theta_P \sim 32^{\circ} \gg 113$ horas)

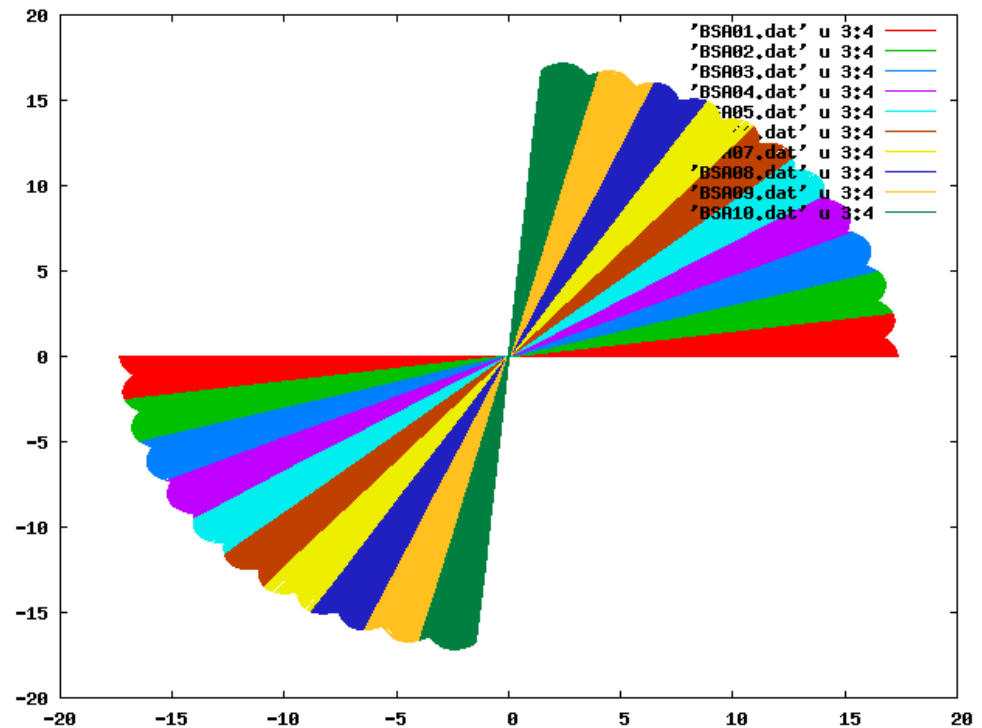


6. El péndulo de Foucault. Resultados



Buenos Aires (Latitud = 34.57°S)

($\theta_p \sim 85^{\circ} \gg 42$ horas)





Universidad de Sonora
Departamento de Física



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

© 2019