

El valor de J en las ecuaciones 2.1a y 2.1b debe reflejar el valor de todas las juntas en el mecanismo. Es decir, las semijuntas cuentan como $1/2$ debido a que sólo eliminan una GDL . Esto es menos confuso si se utiliza la modificación de **Kutzbach** para la ecuación de Gruebler en esta forma:

$$M = 3(L - 1) - 2J_1 - J_2 \quad (2.1c)$$

donde: M = grados de libertad o movilidad
 L = número de eslabones
 J_1 = número de 1 GDL , juntas completas
 J_2 = número de 2 GDL , semijuntas

El valor de J_1 y J_2 en estas ecuaciones aún debe determinarse cuidadosamente para considerar todas las juntas completas, las semijuntas y las juntas múltiples en cualquier eslabonamiento. Las juntas múltiples cuentan en una unidad menos que el número de eslabones conectados en tal junta, y se agregan a la categoría de "completas" (J_1). Los GDL de un mecanismo propuesto pueden determinarse rápidamente a partir de esta expresión antes de invertir tiempo en un diseño más detallado. Es interesante observar que esta ecuación no aporta información acerca de tamaños o formas de eslabones, sino sólo su cantidad. En la figura 2-6a) se muestra un mecanismo con un GDL y sólo juntas completas en éste.

En la figura 2-6b) se presenta una estructura con cero GDL que contiene semijuntas y juntas múltiples. Observe la notación esquemática utilizada para mostrar el eslabón fijo. Dicho eslabón no necesita dibujarse en detalle, en tanto se indiquen todas las juntas fijadas. Considere también las juntas **múltiples** y **semijuntas** en las figuras 2-6a) y 2-6b). Como ejercicio determine los GDL en estos ejemplos con la ecuación de **Kutzbach**.

Grados de libertad en mecanismos espaciales

El enfoque usado para determinar la movilidad de un mecanismo en un plano puede extrapolarse fácilmente a tres dimensiones. Cada eslabón no conectado en el espacio tridimensional tiene seis GDL y cualquiera de los seis pares inferiores puede usarse para conectarlos, como pueden ser pares superiores con más libertad. Una junta de una libertad elimina cinco GDL , una junta de dos libertades elimina cuatro GDL , etcétera. Al fijar un eslabón se eliminan seis GDL . Esto conduce a la ecuación de movilidad de Kutzbach para eslabonamientos espaciales:

$$M = 6(L - 1) - 5J_1 - 4J_2 - 3J_3 - 2J_4 - J_5 \quad (2.2)$$

donde el subíndice se refiere al número de libertades de la junta. En este texto se limitará el estudio a mecanismos en 2-D.

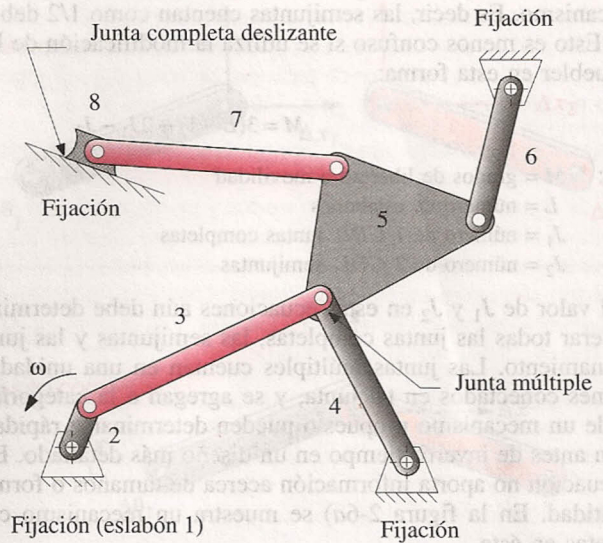
2.5 MECANISMOS Y ESTRUCTURAS

Los grados de libertad de un ensamblaje de eslabones predicen por completo su carácter. Hay sólo tres posibilidades. Si el GDL es positivo se tendrá un **mecanismo** y los eslabones tendrán movimiento relativo. Si el GDL es igual a cero, entonces se tendrá una **estructura** y no será posible ningún movimiento. Si el GDL es negativo, entonces se tendrá una **estructura precargada**, lo que significa que no será posible ningún movi-

Nota:
No hay semijuntas
de rodamiento-
deslizamiento
en este
eslabonamiento

$$L = 8, \quad J = 10$$

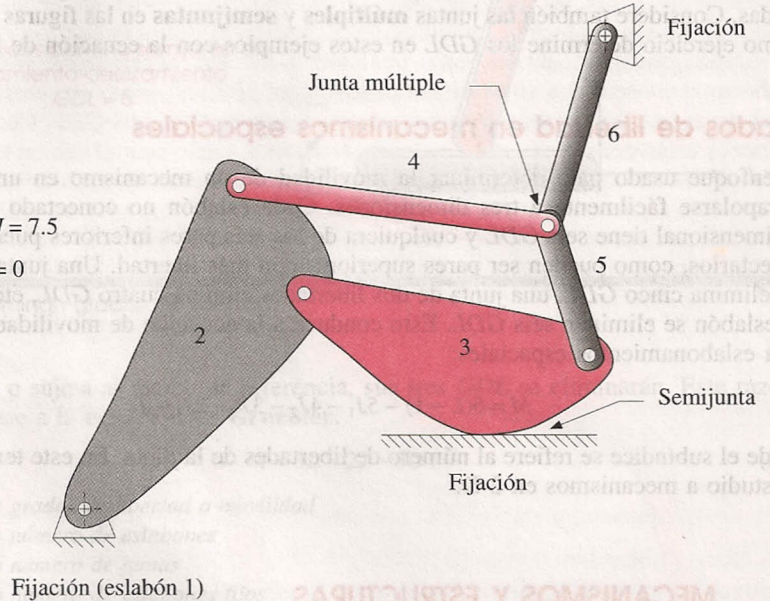
$$GDL = 1$$



a) Eslabonamiento con juntas completas y múltiples

$$L = 6, \quad J = 7.5$$

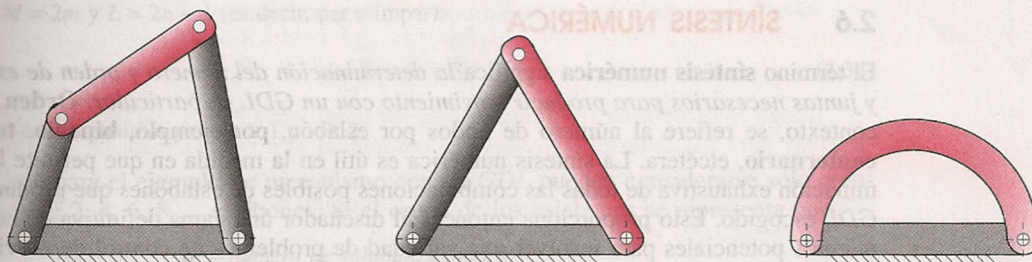
$$GDL = 0$$



b) Eslabonamiento con juntas completas, seminuevas y juntas múltiples

FIGURA 2-6

Eslabonamientos que contienen juntas de diversos tipos



a) Es un mecanismo, $GDL = +1$

b) Es una estructura, $GDL = 0$

c) Es una estructura precargada, $GDL = -1$

FIGURA 2-7

Mecanismos, estructuras y estructuras precargadas

miento y algunos esfuerzos también pueden estar presentes en el momento del ensamblaje. En la figura 2-7 se muestran ejemplos de estos tres casos. Un eslabón está fijo en cada caso.

En la figura 2-7a) se presentan cuatro eslabones conectados por cuatro juntas completas, lo cual, a partir de la ecuación de Gruebler, da un GDL . Se moverá y sólo se necesita una entrada para producir resultados predecibles.

En la figura 2-7b) se muestran tres eslabones conectados por tres juntas completas. Tiene cero GDL y es, por tanto, una **estructura**. Observe que si las longitudes de los eslabones permiten la conexión,* los tres pasadores se pueden insertar en sus respectivos pares de agujeros de eslabón (nodos) sin forzar la estructura, ya que puede hallarse siempre una posición que permita el ensamblaje.

En la figura 2-7c) se presentan dos eslabones conectados por dos juntas completas. Tiene un GDL de -1 , lo cual los convierte en una **estructura precargada**. Con el fin de insertar los dos pasadores sin someter a esfuerzo los eslabones, la distancia al centro de los agujeros en ambos eslabones debe ser exactamente la misma. En la práctica es imposible realizar dos partes exactamente iguales. Habrá siempre algún error de manufactura, aunque sea muy pequeño. Por tanto, quizá deba forzarse el segundo pasador a su lugar y originar con ello algún esfuerzo en los eslabones. La estructura estará, entonces, precargada. Probablemente ya se encontró en una situación similar en un curso de mecánica aplicada, en la forma de una viga hiperestática, aquella en la que también se tienen demasiados apoyos o restricciones para las ecuaciones disponibles. Una viga estáticamente indeterminada o hiperestática también tiene un GDL negativo, en tanto que una viga simplemente apoyada o isostática tiene GDL igual a cero.

Las estructuras simples y las estructuras precargadas se utilizan por lo general en ingeniería. De hecho, la estructura real con GDL igual a cero es rara en la práctica de la ingeniería. La mayor parte de las construcciones, puentes y armazones de máquina son estructuras precargadas, debido al uso de juntas soldadas y remachadas en vez de juntas de pasador o articuladas. Incluso estructuras muy simples, como la silla en que está usted sentado, con frecuencia son precargadas. Puesto que el interés aquí es acerca de los mecanismos, nos concentraremos sólo en dispositivos con GDL positivo.

* Si la suma de las longitudes de cualesquiera dos eslabones es menor que la longitud de un tercer eslabón, entonces es imposible su interconexión.

TABLA 2-2 Mecanismos en un plano (1 GDL) con juntas de rotación y hasta 8 eslabones

Eslabones totales	Conjuntos de eslabones				
	Binario	Ternario	Cuaternario	Pentagonal	Hexagonal
4	4	0	0	0	0
6	4	2	0	0	0
6	5	0	1	0	0
8	7	0	0	0	1
8	4	4	0	0	0
8	5	2	1	0	0
8	6	0	2	0	0
8	6	1	0	1	0

Con esta peculiar configuración se puede ver que se movería, a pesar de la predicción contraria de Gruebler.

En la figura 2-8c) se muestra un mecanismo muy común que tampoco cumple con el criterio de Gruebler. Puede presuponerse que la junta entre las dos ruedas en contacto no permite deslizamiento, siempre que la fricción suficiente esté disponible. Si no ocurre efecto deslizante, entonces se trata de una junta con una libertad (o completa) que permite sólo movimiento angular relativo ($\Delta\theta$) entre las ruedas. Con esta hipótesis se tienen 3 eslabones y 3 juntas completas, a partir de lo que la ecuación de Gruebler pronostica $GDL = 0$. Sin embargo, en este eslabonamiento hay movimiento (en realidad $GDL = 1$), debido a que la distancia entre centros, o longitud del eslabón 1, es exactamente igual a la suma de los radios de las dos ruedas.

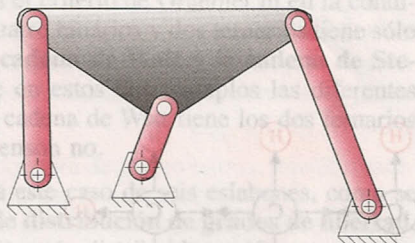
Hay otros ejemplos de paradojas que no cumplen el criterio de Gruebler debido a su geometría especial. El diseñador necesita estar alerta ante estas posibles incongruencias.

2.8 ISÓMEROS

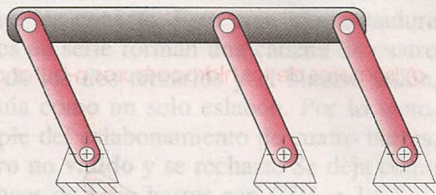
La palabra **isómero** viene del griego y significa *que tiene partes iguales*. En química los isómeros son compuestos que tienen el mismo número y tipo de átomos, pero que están unidos en forma diferente, por lo tanto, tienen distintas propiedades físicas. En la figura 2-9a) se muestran dos isómeros de hidrocarburo: n-butano e isobutano. Observe que cada uno tiene el mismo número de átomos de hidrógeno y de carbono (C_4H_{10}), pero están unidos de modo diferente y tienen propiedades distintas.

Los isómeros de eslabonamientos son análogos a estos compuestos químicos en el hecho de que los **eslabones** (como los átomos) tienen diversos **nodos** (electrones) disponibles para conectarse a otros nodos de eslabones. El eslabonamiento ensamblado es análogo al compuesto químico. De acuerdo con las conexiones particulares de los eslabones disponibles el ensamblaje tendrá diferentes propiedades cinemáticas o de movimien-

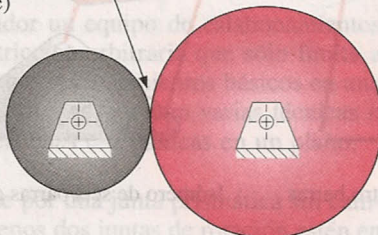
a) El quinteto E con $GDL = 0$
(de acuerdo con la ecuación de Gruebler)



b) El quinteto E con $GDL = 1$
(en desacuerdo con la ecuación de Gruebler debido a la geometría única)



Junta completa
(rodamiento puro
no deslizante)



c) Cilindros rodantes con $GDL = 1$
(en desacuerdo con la ecuación de Gruebler que predice $GDL = 0$)

FIGURA 2-8

Paradojas de Gruebler (eslabonamientos que no se comportan como predice la ecuación de Gruebler)

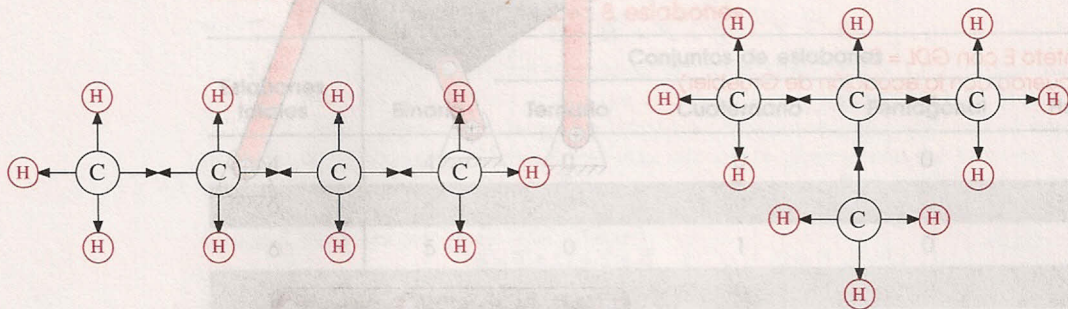
to. El número posible de isómeros para un conjunto dado de eslabones (como se ve en cualquier renglón de la tabla 2-2) está lejos de ser obvio. De hecho, el problema de predecir matemáticamente el número de isómeros para todas las combinaciones de eslabones está todavía por resolverse. Muchos investigadores han hecho un gran esfuerzo por resolver este problema con algún éxito reciente. Para mayor información véanse las referencias [3] a [7]. Dhararipragada^[6] presenta un excelente resumen histórico de las investigaciones en isómeros hasta 1994. La tabla 2-3 muestra el número válido de isómeros encontrado para mecanismos de un GDL con pares de rotación hasta con 12 eslabones.

En la figura 2-9b) se muestran todos los isómeros para los casos simples de un GDL , con cuatro y seis eslabones. Observe que sólo hay un isómero para el caso de cuatro eslabones. Un isómero es único si, y sólo si, son diferentes las interconexiones entre sus tipos de eslabones. Es decir, todos los eslabones binarios se consideran iguales, del mismo modo que todos los átomos de hidrógeno son iguales en la analogía con la química.

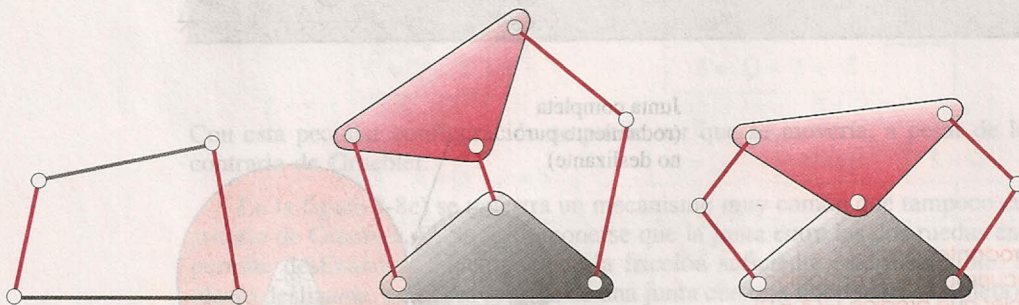
TABLA 2-3
Número de isómeros válidos

Eslabones	Isómeros válidos
4	1
6	2
8	16
10	230
12	6 856 o 6 862*

* No concuerda con algunos investigadores.



a) Isómeros de los hidrocarburos n-butano e isobutano



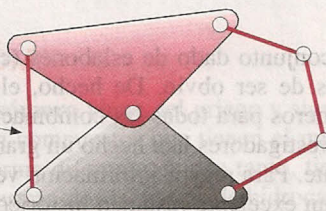
El único isómero de cuatro barras

Isómero de seis barras de Stephenson

Isómero de seis barras de Watt

b) Todos los isómeros válidos de los eslabonamientos de cuatro y seis barras

La subcadena estructural reduce tres eslabones a una armadura "tripleta delta" con GDL cero



Subcadena de cuatro barras que concentra el $GDL = 1$ del mecanismo

c) Un isómero de seis barras no válido que se reduce al eslabonamiento de cuatro barras más simple

FIGURA 2-9

Isómeros de cadenas cinemáticas

Las longitudes y formas de eslabón no aparecen en el criterio de Gruebler ni en la condición de isomerismo. El caso de seis eslabones de cuatro binarios y dos ternarios tiene sólo dos isómeros válidos. Éstos se conocen como la **cadena de Watt** y la **cadena de Stephenson** en honor de sus descubridores. Observe en estos dos ejemplos las diferentes interconexiones de los ternarios a los binarios. La cadena de Watt tiene los dos ternarios directamente conectados, pero la cadena de Stephenson no.

Hay también un tercer isómero potencial para este caso de seis eslabones, como se muestra en la figura 2-9c), pero falla en la prueba de **distribución de grados de libertad**, que requiere que los *GDL* globales (aquí $GDL = 1$) estén distribuidos uniformemente en todo el eslabonamiento y no concentrados en una subcadena. Considere que esta disposición (figura 2-9c)) tiene una **subcadena estructural** con $GDL = 0$ en la formación triangular de los dos ternarios y el binario único que los conecta. Esto crea una armadura llamada **tripleta delta**. Los tres binarios restantes en serie forman una cadena de cuatro barras ($GDL = 1$) con la subcadena estructural de los dos ternarios y el binario único, reducida efectivamente a una estructura que actúa como un solo eslabón. Por lo tanto, esta disposición se ha reducido al caso más simple del eslabonamiento de cuatro barras, a pesar de sus seis elementos. Éste es un **isómero no válido** y se rechaza. Se deja como ejercicio hallar los 16 isómeros válidos de los casos de ocho barras con $GDL = 1$.

2.9 TRANSFORMACIÓN DE ESLABONAMIENTOS

Las técnicas de síntesis descritas antes dan al diseñador un equipo de eslabonamientos básicos con *GDL* particular. Si ahora se relaja la restricción arbitraria que sólo limita a juntas completas de rotación, se puede transformar estos eslabonamientos básicos en una variedad más amplia de mecanismos, aun con mayor utilidad. Existen varias técnicas o reglas de transformación que pueden aplicarse a las cadenas cinemáticas en un plano.

- 1 Una junta completa de rotación puede remplazarse por una junta prismática sin cambio en los *GDL* del mecanismo, siempre que al menos dos juntas de rotación estén en un arreglo.*
- 2 Una junta completa puede remplazarse por una semijunta, pero esto aumentará en uno los *GDL*.
- 3 La eliminación de un eslabón reducirá en uno los *GDL*.
- 4 La combinación de los incisos 2 y 3 mantendrá sin cambio los *GDL* originales.
- 5 Un eslabón ternario o de orden superior puede ser parcialmente "contraído" a un eslabón de orden inferior por la coalición de nodos. Esto creará una junta múltiple pero no cambiará los *GDL* del mecanismo.
- 6 La contracción completa de un eslabón de orden superior equivale a su eliminación. Se creará una junta múltiple y los *GDL* se reducirán.

En la figura 2-10a) se muestra una manivela-balancín de cuatro barras transformada en una manivela-corredera también de cuatro barras, por la aplicación de la regla núm. 1. Es aún un eslabonamiento de cuatro barras. El eslabón 4 se ha convertido en una corredera. La ecuación de Gruebler no cambia en un *GDL* debido a que la corredera proporciona una junta completa contra el eslabón 1, como la junta de pasador que reemplaza. Observe que esta transformación desde un eslabón de salida de balancín hasta un eslabón de salida

* Si todas las juntas de revolución en un eslabonamiento de cuatro barras se remplazan por juntas prismáticas, el resultado será un ensamble con dos *GDL*. También, si tres revolutas en un ciclo de cuatro barras se remplazan con juntas prismáticas, la única junta de revoluta remanente no será capaz de girar; de hecho, bloquea los eslabones articulados como si fueran sólo uno. Esto reduce prácticamente el ensamble a un eslabonamiento de tres barras que deberá tener cero *GDL*. Sin embargo, una tripleta delta con tres juntas prismáticas tiene un *GDL* (otra paradoja de Gruebler).