

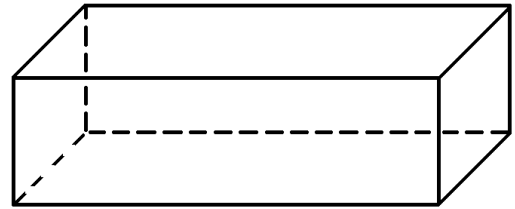
Technische Mechanik I

1. Statik

1.1. Grundlegende Voraussetzungen

1.1.1. Starrer Körper

Ein starrer Körper K besitzt immer ein Volumen V und eine Oberfläche O . Zudem ist der Abstand zweier beliebiger Punkte innerhalb des Körpers konstant.

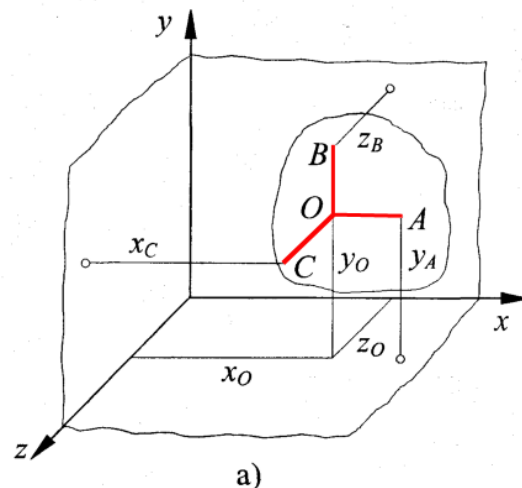


Freiheitsgrad F

= Anzahl der Bewegungsfreiheiten

Im rechten Bild:

- 3 Translationen in Richtung A; B; C
 - 3 Rotationen um diese 3 Achsen
- $F=6$



Gleichgewicht

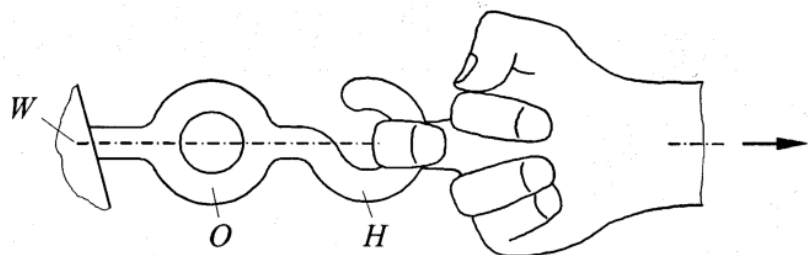
Ein Körper ist im Gleichgewicht wenn er unter Belastung aus der Ruhe heraus keine Translation und keine Rotation im erdfesten Bezugssystem durchführt.

→ Er bewegt sich nicht

1.1.2. Lasten

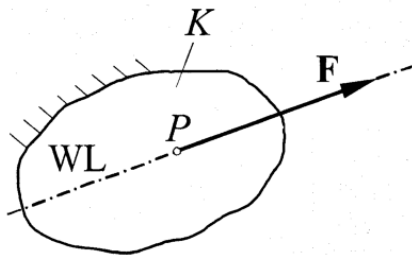
1) Einzelkraft

Die Empfindung der Kraft wird durch eine Einzelkraft idealisiert. Dabei ist ihr Angriffspunkt von Bedeutung

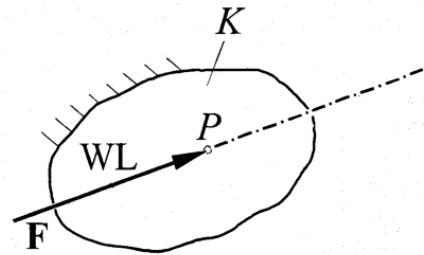


Eigenschaft der Einzelkraft ist der Vektor \vec{F} der Kraft

(WL – Wirkungslinie
P – Angriffspunkt)



a) Zugkraft



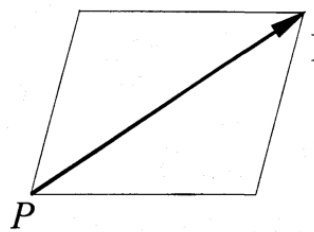
b) Schubkraft

Der Betrag von \vec{F} ist $|\vec{F}| = F$

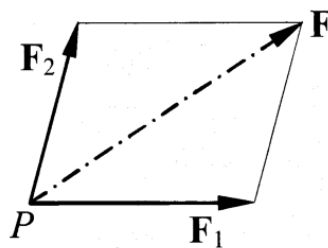
$$[F] = \text{N} = \frac{1 \text{ kg m}}{\text{s}^2}$$

Wirken auf einen Körper gleichzeitig mehrere Kräfte, so kann man durch Addition beider Kräfte eine resultierende Kraft ermitteln.

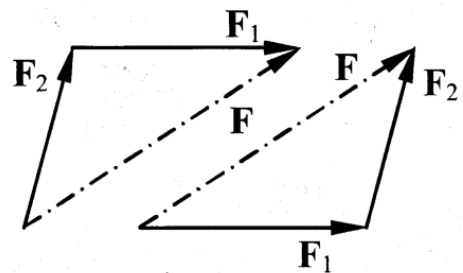
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



a)



b)



c)

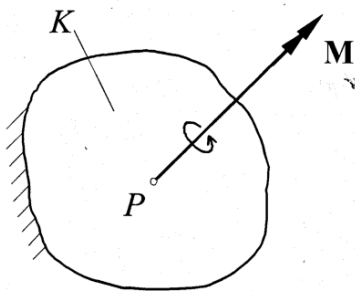
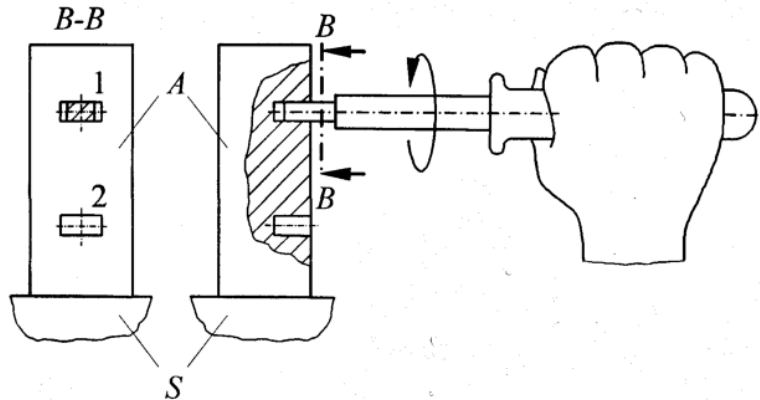
1.4

Für das Kräftegleichgewicht und Äquivalenzbetrachtungen ist \vec{F} zudem am gesamten starren Körper K auf der Wirkungslinie verschiebbar.

Des Weiteren treffen wir hier folgende Vereinbarung: "Einzelkraft" = Kraft

2) Einzelmoment

Ein Einzelmoment ist ein Vektor welcher einen Angriffspunkt besitzt und dem ein Drehsinn zugeordnet werden kann.



Angriff eines Einzelmomentes:

P – Angriffspunkt

M – Momente --> erste Pfeilspitze entspricht der Richtung
zweite Pfeilspitze zeigt eine Drehung um die Achse an

Der Betrag eines Momentes \vec{M} ist M und $[\vec{M}] = Nm$

Bei gleichzeitigem Angriff mehrerer Momente gilt – wie bei Kräften – die Addition zum Erhalt der Resultierenden.

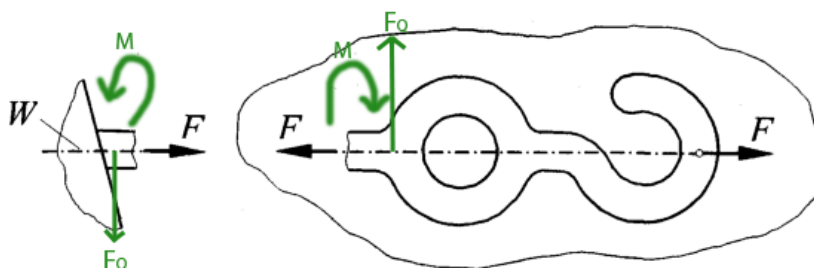
Für Gleichgewichts- und Äquivalenzbetrachtungen am gesamten starren Körper ist \vec{M} beliebig längs und parallel zu sich verschiebbar. (Achtung! gilt nicht bei der Schnittmengendarstellung)

1.1.3. Schnittprinzip

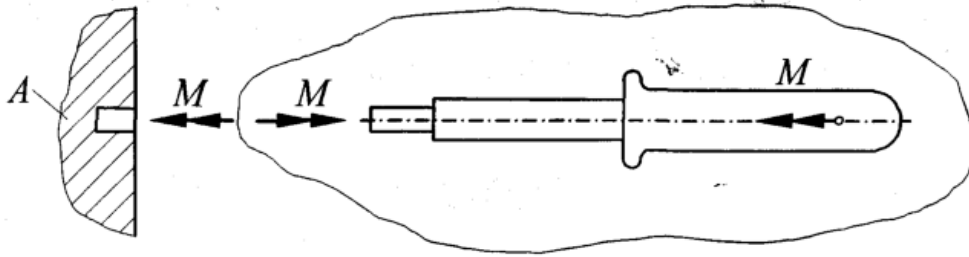
Bei der Definition des Körpers sind die Wechselwirkungen zwischen Körper und Umgebung festzustellen, die durch die Körperoberfläche hindurchtreten.

1. Bindungen zwischen Körper und Umgebung lösen (auch zwischen Körperteilen)
2. Ersatz der Bindungen durch dort übertragene Schnittlasten
3. In überschaubaren Situationen:

Reaktionen (Schnittlasten), die die Lager übertragen könnten, die aber wegen der Bilanz mit nicht eingepprägten Lasten verschwinden, können weggelassen werden. (hier grün)



1.7



1.1.4. Kartesische Bezugssysteme (für Vektoren)

Eine Kraft \vec{F} in der x, y Ebene kann in seine Komponenten zerlegt werden:

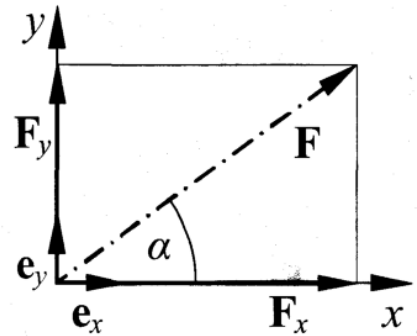
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = [\vec{F}_x] \vec{e}_x + [\vec{F}_y] \vec{e}_y$$

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = F_x / F_y$$

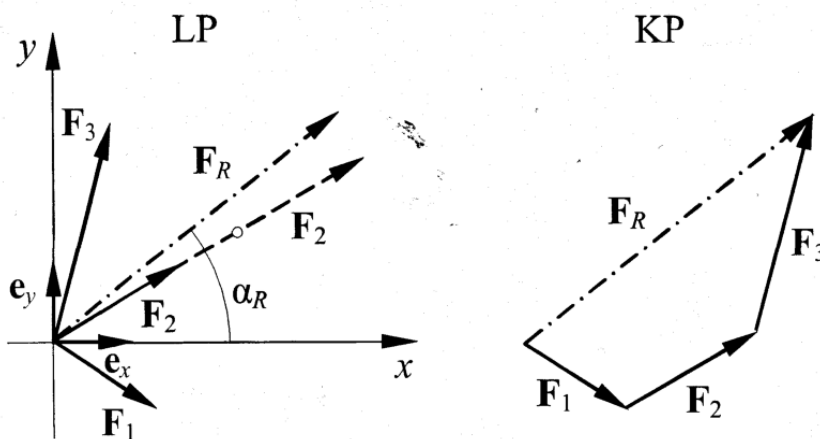
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



1.2. Kräfte und Momente in der ebenen Statik

1.2.1. Kräfte in der Ebene mit gemeinsamen Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien

--> D.h. ihre Wirkungslinien liegen in einer Ebene und besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt



2.1

LP – Lageplan

KP – Kräfteplan (Addition der Kraftvektoren)

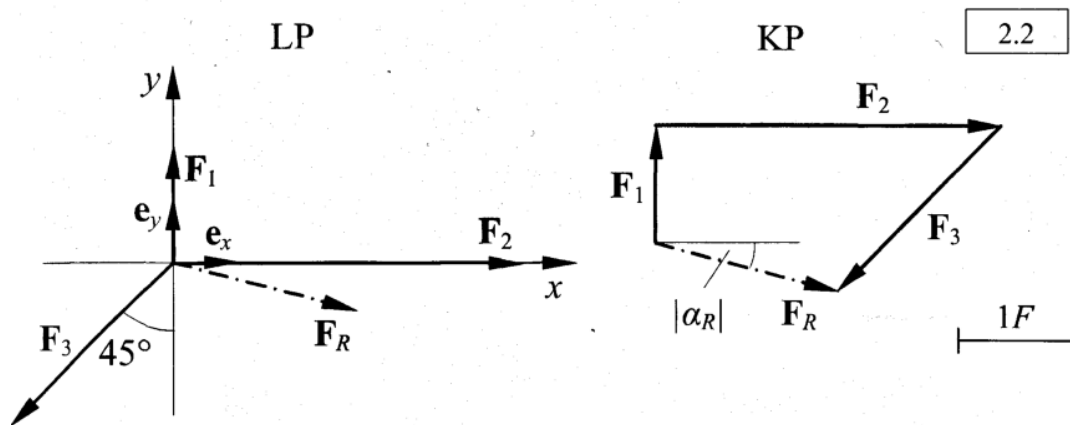
statische Äquivalenz

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^3 F_i = \vec{F}_{Rx} \vec{e}_x + \vec{F}_{Ry} \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$\vec{F}_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

Beispiel 1.2.1



gegeben: $F_1 = F$; $F_2 = 3F$; $F_3 = 2F$

gesucht: Betrag und Richtung von \vec{F}_R

$$\vec{F}_1 = 0 * \vec{e}_x + F * \vec{e}_y = F * \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_2 = 3F * \vec{e}_x + 0 * \vec{e}_y = 3F * \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_3 = 2F * (\sin -45) * \vec{e}_x + 2F * (-\cos -45) * \vec{e}_y = -\sqrt{2} F * \vec{e}_x - \sqrt{2} F * \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_{Rx} = 0 + 3F - \sqrt{2}F \quad \vec{F}_{Ry} = F + 0 - \sqrt{2}F$$

Berechnung des resultierenden Betrags: $|\vec{F}_R| = \sqrt{\vec{F}_{Rx}^2 + \vec{F}_{Ry}^2} \approx 1,64F$

und des resultierenden Winkels: $\alpha = \tan^{-1} \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \tan^{-1} \frac{-0,41F}{1,59F} = -14,5^\circ$

Gleichgewicht

Erfahrung: Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn die resultierende Kraft verschwindet.

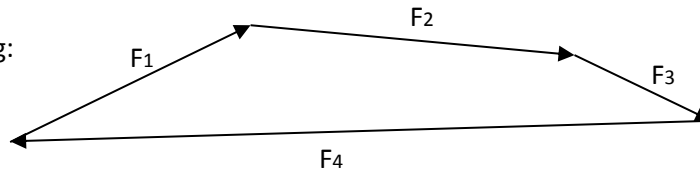
- 1) Gleichgewicht bei einer Kraft: Diese (eine) Kraft muss verschwinden
- 2) Gleichgewicht bei mehreren Kräften: Die Summe muss verschwinden

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

bzw.

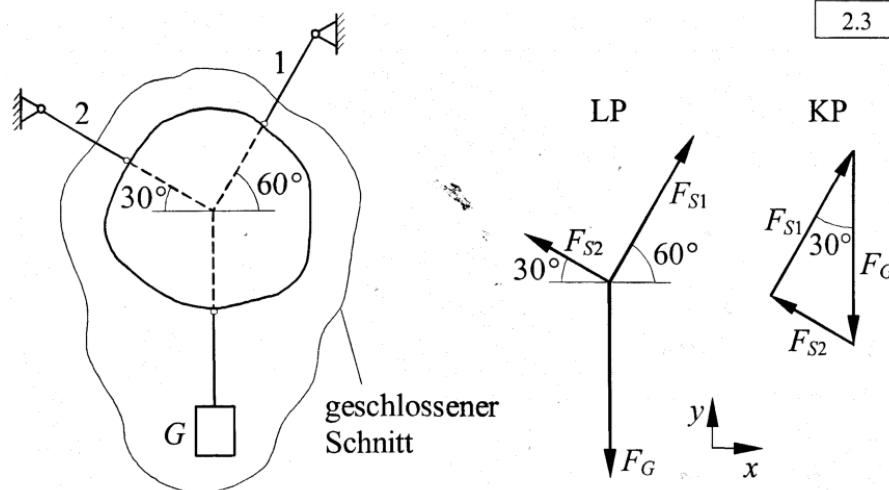
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

grafische Deutung:



→ Kräftebilanz ist geschlossen

Beispiel 1.2.1



Eine Masselose Scheibe wird durch ein Gewicht belastet.

gesucht: Kräfte die von den Seiten 1 bis 3 auf die Scheibe im Gleichgewicht einwirken

- Lösung:
- 1) Freischneiden
 - 2) G durch eine Einzelkraft ersetzen
 - 3) Seile durch Seilkräfte ersetzen = einfügen der Schnittreaktionen

Definition: Um einen Zug darzustellen muss die Pfeilrichtung vom Angriffspunkt weg zeigen.

Annahme: Der Körper ist in Ruhe: $\sum_i F_{ix} = 0$ und $\sum_i F_{iy} = 0$

$$1) \sum_i F_{ix} = 0 \rightarrow F_{s1} \cos 60 - F_{s2} \cos 30 = 0$$

$$2) \sum_i F_{iy} = 0 \rightarrow F_{s1} \sin 60 - F_{s2} \sin 30 - F_G = 0$$

$$1') \frac{1}{2} F_{s1} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{s2} = 0$$

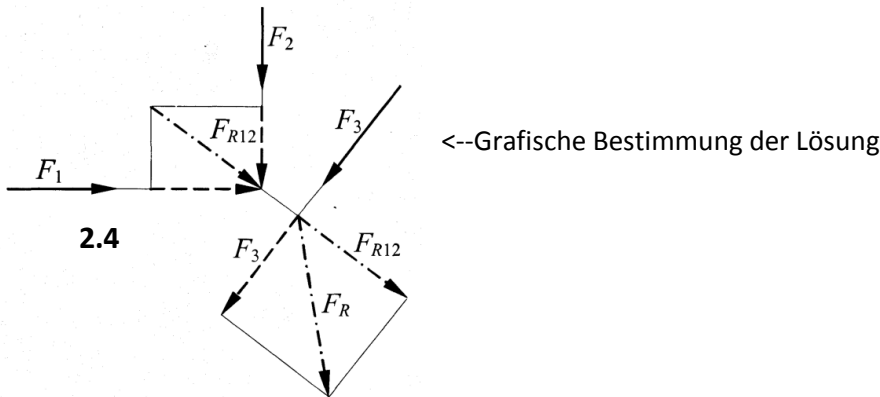
$$2') \frac{\sqrt{3}}{2} F_{s1} + \frac{1}{2} F_{s2} = 0$$

$$\frac{3}{2} F_{s2} + \frac{1}{2} F_{s2} = F_G \rightarrow F_{s2} = \frac{1}{2} F_G$$

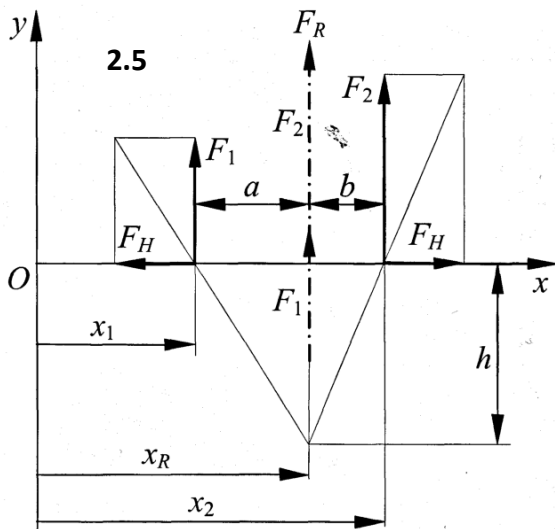
$$\frac{1}{2} F_{s1} + \frac{3}{2} F_{s1} = \sqrt{3} F_G \rightarrow F_{s1} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_G$$

1.2.2. Beliebige Kräfte in der Ebene und Momente senkrecht zur Ebene

1.2.2.1) Starre Körper mit 3 Kräften ohne gemeinsamen Schnittpunkt der Wirkungslinien



Sonderfall: 2 parallele Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2



Grafische Lösung:

- 1) Hinzufügen einer Hilfskraft \vec{F}_h
- 2) Bestimmen der Resultierenden von \vec{F}_h und \vec{F}_1 bzw. von \vec{F}_h und \vec{F}_2 und diese verlängern bis sie sich schneiden
- 3) Beide Kräfte auf der nun erhaltenen Wirklinie abtragen

Analytische Lösung:

$$\frac{h}{b} = \frac{F_2}{F_H}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{F_1}{F_H}$$

$$h * F_H = F_2 * b$$

$$h * F_H = F_1 * a$$

$$F_2 * b = F_1 * a$$

Hebelgesetz des Archimedes

Umrechnung: $b = x_2 - x_1 - a$

$$\begin{aligned} F_2 b &= F_2(x_2 - x_1 - a) = F_1 a \\ F_2(x_2 - x_1 - a) + F_1 x_1 &= F_1 a + F_1 x_1 \\ F_2 x_2 + F_2(-x_1 - a) + F_1 x_1 &= F_1(a + x_1) \\ F_1 x_1 + F_2 x_2 &= (F_1 + F_2)(a + x_1) \\ F_1 x_1 + F_2 x_2 &= F_R \quad x_R \end{aligned}$$

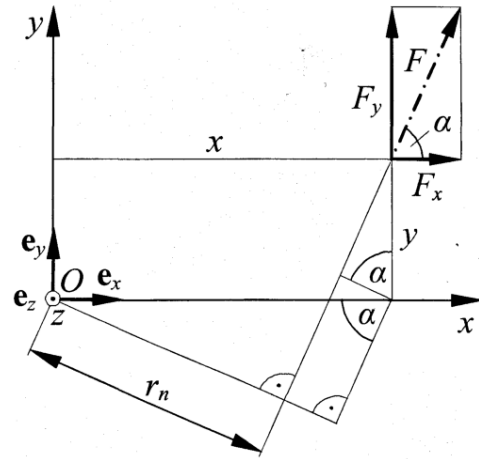
Bestimmung von x_R aus der Äquivalenz der Einzelmomente $\sum(F_i x_i)$ und des Momentes der resultierenden Kraft.

1.2.2.2) Momente senkrecht zur Ebene

Definition: Moment M_z senkrecht zur Ebene bzw. Moment der Kraft \vec{F} bezüglich dem Koordinatenursprung

$$\begin{aligned} M_z &= F * r_n \\ &= F(x - \sin \alpha) - F * y * \cos \alpha \\ &= F_y * x - F_x * y \end{aligned}$$

Es gilt die Rechthandregeln für den Orientierungssinn des Vektors.



Dieser Sachverhalt ist auch auf n beliebige Kräfte anwendbar:

- Errechnen der Komponenten der resultierenden Kraft

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

- Es herrscht Äquivalenz der Momente durch die Kräfte \vec{F} (durch die Kraft \vec{F}_r) bezüglich des selben Bezugspunktes

$$M_{Rz} = F_{Ry} * x_R - F_{Rx} * y_R$$

$$M_{Rz} = \sum_{i=1}^n (F_{iy} * x_i - F_{ix} * y_i)$$

Beispiel 1.2.3

gegeben:

- $F_1 = F$; $F_2 = 2\sqrt{2} F$; a

gesucht:

- Betrag und Wirklinie von F_R

$$F_R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^2 F_{iy}\right)^2}$$

$$F_R = \sqrt{(2F)^2 + (1F)^2}$$

$$M_{Rz} = \sum_{i=1}^n (F_{iy} * x_i - F_{ix} * y_i)$$

$$M_{Rz} = -F_1 a + (F_2 \sin 45) * 2a - (F_2 \cos 45) a = -Fa + 4Fa - 2Fa = Fa$$

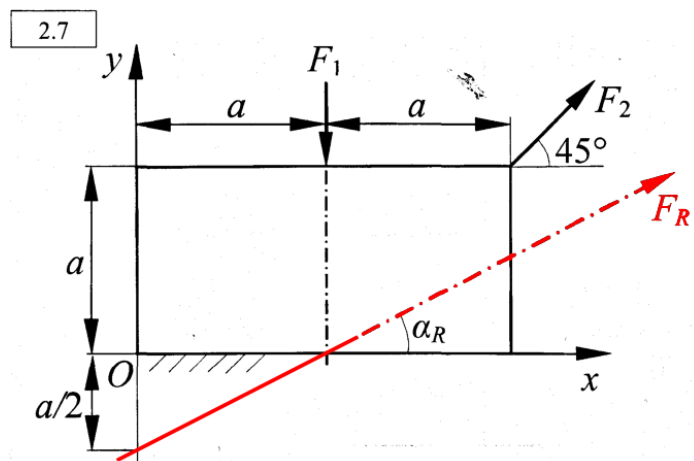
Gleichung der Wirklinie

$$y = -\frac{M_{Rz}}{F_{Rx}} + \left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) * x$$

$$y = -\frac{Fa}{2F} + \frac{F}{2F} * x = \underline{\underline{-\frac{a}{2} + \frac{x}{2}}}$$

$$(y = n + m * x)$$

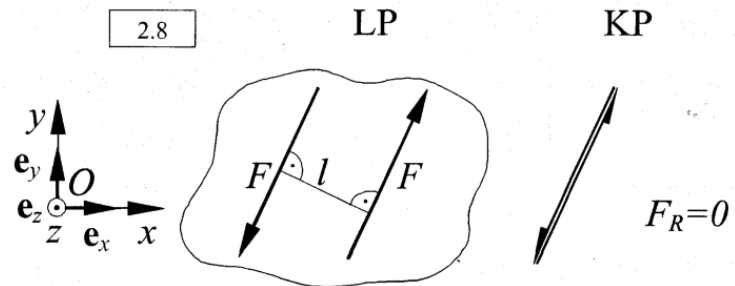
Winkel α_R der Wirklinie zur x-Achse: $\tan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{1}{2} \quad \alpha = 26,6^\circ$



Moment des Kräftepaars

Zwei entgegengesetzte, gleich große Kräfte mit endlichem Abstand.

Die Kräftebilanz ist erfüllt da $F_R = 0$



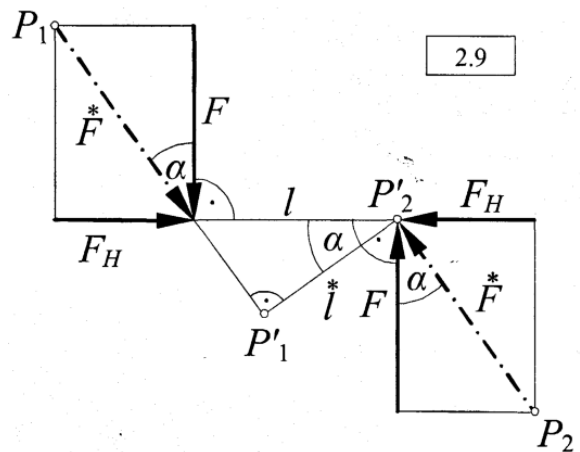
Durch den Abstand der beiden Kräfte ist jedoch das Momentgleichgewicht verletzt. (der Körper würde eine Drehbeschleunigung erfahren)

Definition Moment des Kräftepaars

$$M_{\text{Kräftepaar}} = F * l = F^* * l^*$$

$$[M_{KP}] = Nm$$

$$M_{KP} = F * l = \frac{F^*}{\cos \alpha} * l^* \cos \alpha = F^* * l^*$$

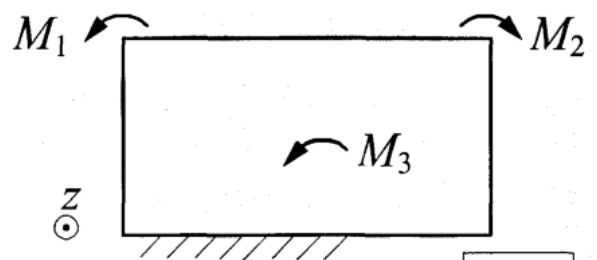


Beispiel 1.2.4

gegeben: $M_1 = M$; $M_2 = 2M$; $M_3 = 4M$

gesucht: M_z

$$\downarrow M_z = M_1 + M_3 - M_2 = M + 4M - 2M = \underline{3M}$$



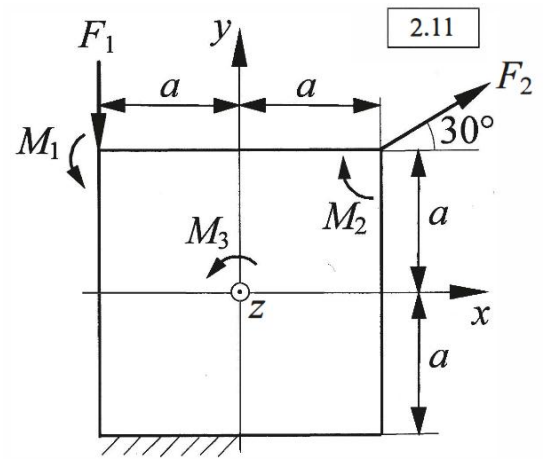
2.10

Beispiel 1.2.5

gegeben: $F_1 = F$; $F_2 = \frac{5}{4}F$ F, a
 $M_1 = M$; $M_2 = 2M$; $M_3 = 4M$ ($M = F * a$)

gesucht: Betrag und Wirkungslinie von F_R

Übernommen aus Abbildung 2.7: $F_R = 1,46F$; $M_{RZ} = Fa$

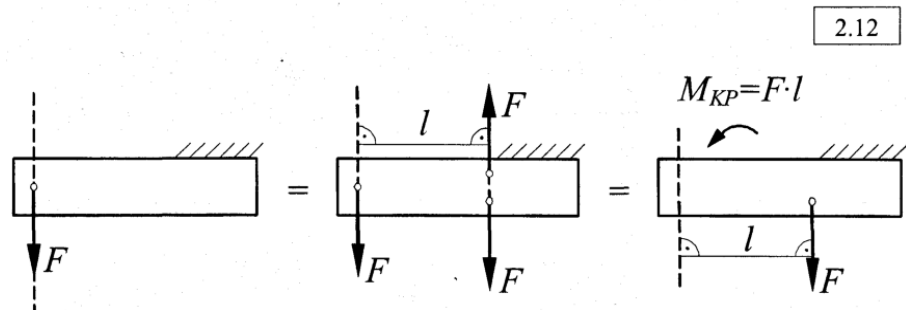


$$M_{GZ} = M_{RZ} + \sum_{k=1}^3 M_{Kz} = 0,542Fa + 1Fa = \underline{1,542Fa}$$

$$y = -\frac{M_{Gz}}{F_{Rx}} + \left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) * x = \underline{\underline{\frac{x}{2} - 0,771a}}$$

Der Anstieg bleibt konstant, jedoch existiert eine Parallelverschiebung der Wirklinie

Versatzmoment



Bei einer entsprechenden Parallelverschiebung der Wirklinie einer Einzelkraft am gesamten starren Körper ist der Versatzmoment zu berücksichtigen.

1.2.2.3) Gleichgewicht

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn Kräftebilanz und Momentenbilanz gleich 0 sind.

Gleichgewicht bei

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad M_{Rz} = \sum_{i=1}^n (F_{iy} * x_i - F_{ix} * y_i) + \sum_{i=1}^m M_z = 0$$

Grundgleichung der Statik

Momentenbilanz der Kräfte

Einzelmomente

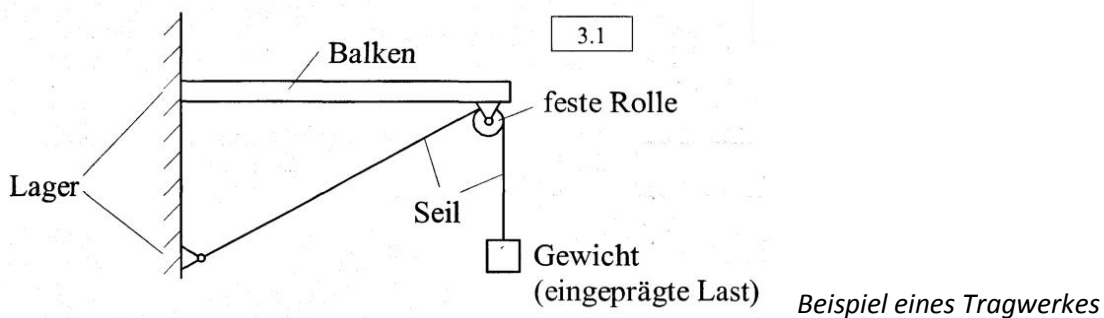
1.3 Ebene Tragwerke

Ein Tragwerk ist eine Konstruktion, ein Bauteil, ein Körper der eingeprägte Lasten aufnimmt und diese über Lager (Auflager) an die Umgebung weiter gibt.

In diesen Lagern werden Reaktionen geweckt, die auf das Tragwerk zurückwirken und das Gleichgewicht des Tragwerks sichern.

Realisierung für in der Ebene angeordnete Körper:

- Lasten sind:
- Kräfte in der Ebene
 - Momente senkrecht zur Ebene



Beispiel eines Tragwerkes

1.3.1. Bestandteile eines Tragwerkes

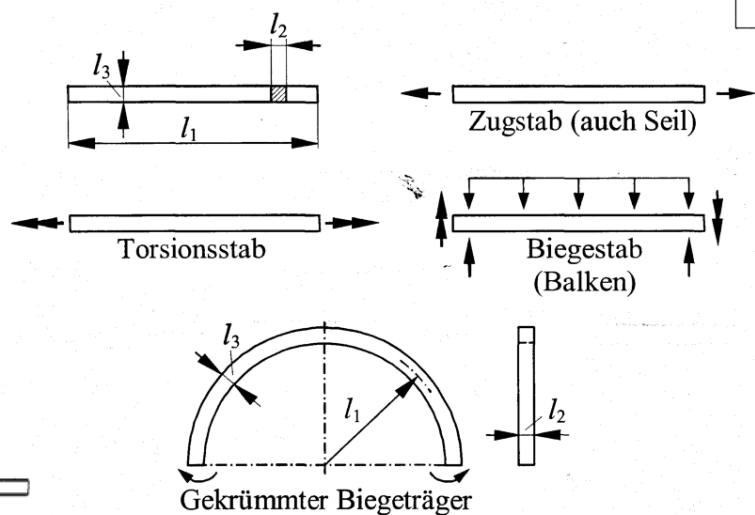
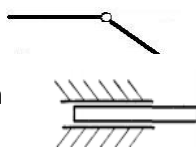
- Kräfte**
- a) längs --> Zugstab
 - b) quer --> Balken
 - c) einzeln, verteilt

- Momente**
- 1) Biegung --> Balken
 - 2) Torsion

Verbindungselemente

z.B. Gelenke

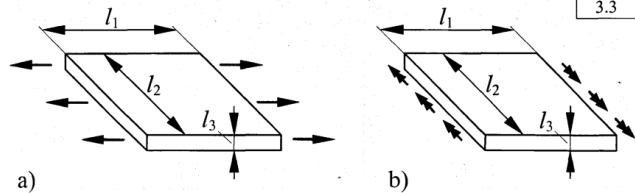
oder Führungen



Flächentragwerke

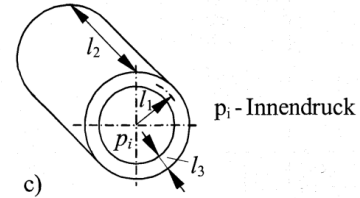
a) Scheibe

$l_3 \ll l_1, l_2$
Kräfte in der Ebene



b) Platte

$l_3 \ll l_1, l_2$
Kräfte senkrecht zur Ebene bzw.
Randmomente



c) Schale

gekrümmt, z.B. mit Innendruck

1.3.2. Lagerarten

3.4

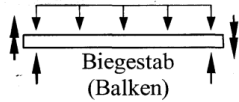
Bezeichnung	Symbol	Art und Anzahl der Lagerreaktionen	reduzierter Freiheitsgrad	Anmerkungen
Reibungsfreies gelenkiges Los- oder Rollenlager (einzählig)		F_B	$f=2$ 1 Verschiebung von B 1 Drehung um B	nur Kräfte auf der WL, Rest rutscht weg
Festlager (zweizählig)		F_{Bh} F_{Bv} auch	$f=1$ 1 Drehung um B	
Einspannung (dreizählig)		F_{Bh} M_B F_{Bv}	$f=0$	
Führung (zweizählig)		M_B F_B	$f=1$ 1 Verschiebung von B	Verschiebung Horizontal
Führung (zweizählig)		F_B M_B	$f=1$ 1 Verschiebung von B	Verschiebung Vertikal

1.3.3. Lasten

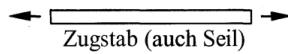
eingeprägte Lasten sind gegeben:

- Einzelkraft $[F] = N$
- Einzelmomente $[M] = Nm$
- Streckenlasten (verteilte Lasten bzw. Linienlasten oder Linienkraft)

- o quer --> Balken



- o längs --> Zugstab
- o sind ortsabhängig



$$\rightarrow [q] = \frac{N}{m}$$

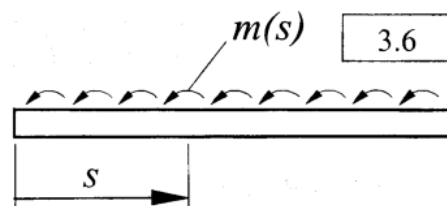
Linienmomentdichte beim Balken

$$\text{Linienmoment} \rightarrow [m] = \frac{Nm}{m}$$

$$\text{Linienkraft} \rightarrow [q] = \frac{N}{m}$$

$$\text{Flächenkraft} \rightarrow [q_A] = \frac{N}{m^2}$$

$$\text{Volumenkraft} \rightarrow [q_V] = \frac{N}{m^3}$$

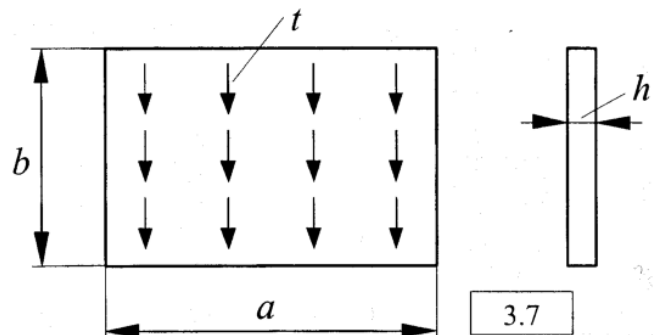


Tangentiale Flächenkraftdichte (aus Flächenlast)

Zuerst Volumenkraft aus Volumenkraftdichte (=Wichte) berechnen

$$\gamma = \rho * g$$

γ ... Wichte
 ρ ... Dichte
 g ... $9,81 \frac{m}{s^2}$



Flächenkraftdichte (tangente Flächenlast)

$$t = \gamma * h = \rho * g * h$$

$$[t] = [\rho] * [g] * [h]$$

$$= \frac{kg}{m^3} * \frac{m}{s^2} * m = \frac{N}{m^2}$$

1.3.4. Bestimmung der Lagerreaktionen

Lagerreaktionen sind Kräfte und Momente, je nachdem welche Arten ein Lager übertragen kann.

- Tragwerke freischneiden und Lagerreaktionen eintragen
- Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

$$\rightarrow F = 0; \uparrow F = 0; \downarrow M = 0$$

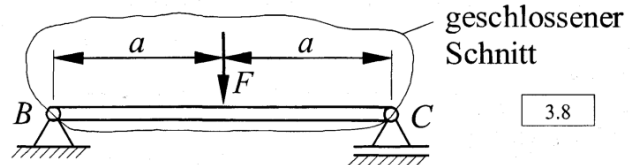
(Da die resultierende Kraft durch die ersten beiden Bedingungen gleich 0 ist, kann in der dritten Bedingung der Bezugspunkt für die Momentenbilanz frei gewählt werden.)

- Lagerreaktionen berechnen
- Kontrolle der Ergebnisse von a-c auf Richtigkeit oder zusätzliche Gleichungen

Beispiel 1.3.1

gegeben: gestützter Balken unter Einzelkraft

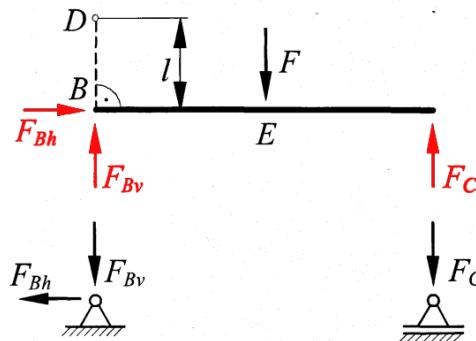
$$F, a$$



3.8

gesucht: Lagerreaktionen

- Freischneiden und Lagerreaktionen eintragen
- Gleichgewichtsbedingungen eintragen



- Lagerreaktionen berechnen

$$F_{Bh} = 0; F_C = \frac{F}{2}; F_{Bv} = \frac{F}{2}$$

- Ergebniskontrolle
Aus der Symmetrie folgt, dass $F_{Bh} = 0$ ist.

Anderen Momentebezugspunkt:

$$\downarrow C: F * a - F_{Bv} * 2a = 0 \rightarrow F_{Bv} = \frac{F}{2}$$

$$\downarrow D: F_{Bh} * l - F * a + F_C * 2a = 0 \quad \text{mit } 0 \leq l \text{ gilt } F_{Bh} = 0$$

$$\downarrow E: F_C * a - F_{Bv} * a = 0 \rightarrow F_{Bv} = F_C$$

Die Kontrollen zeigen, dass die Kräftebilanzen durch zusätzliche Momentenbilanzen ersetzbar sind. Diese dürfen jedoch nicht linear abhängig sein (Bezugspunkte auf einer Geraden).

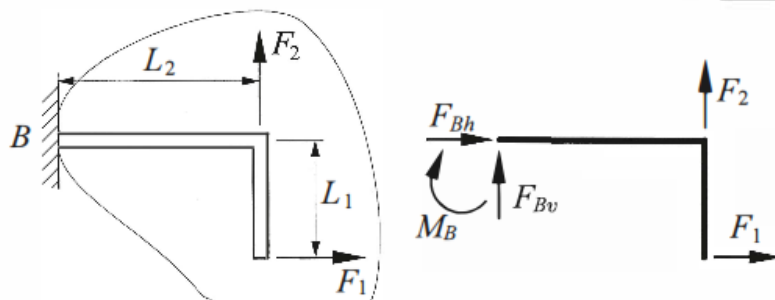
Beispiel 1.3.2

Gegeben:

$$F_1 = F; \quad F_2 = F$$

$$L_1 = a; \quad L_2 = \frac{3a}{2}; \quad F, a$$

Gesucht: Lagerreaktionen



$$\rightarrow: F_{Bh} + F_1 = 0 \quad \Rightarrow F_{Bh} = -F_1 = -F$$

$$\uparrow: F_{Bv} + F_2 = 0 \quad \Rightarrow F_{Bv} = -F_2 = -F$$

$$\downarrow B: F_1 L_1 + F_2 L_2 - M_B = 0$$

$$M_B = F_1 L_1 + F_2 L_2 = \underline{\underline{\frac{5}{2} F a}}$$

Kontrolle (mit Punkt D)

$$\downarrow D: M_B + F_{Bv} * L_2 - F_1 L_1 = 0 \quad \rightarrow \frac{5}{2} F a - \frac{3}{2} F a - F a = 0$$

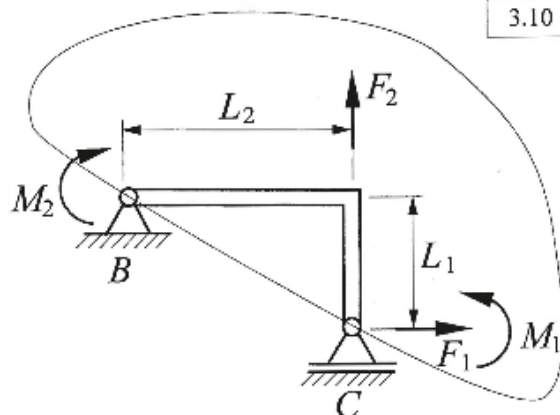
Beispiel 1.3.3

Gegeben:

$$F_1 = F; \quad F_2 = F; \quad L_1 = a; \quad L_2 = \frac{3}{2} a$$

$$M_1 = F a; \quad M_2 = 3 F a$$

Gesucht: Lagerreaktionen



$$\downarrow B: -M_2 + F_2 L_2 + F_1 L_1 + F_{Cv} L_2 + M_1 = 0$$

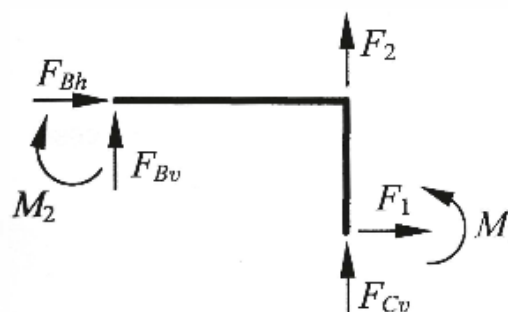
$$\rightarrow F_{Cv} = \frac{1}{F_{Cv}} (M_2 - F_2 L_2 - F_1 L_1 - M_1) = \underline{\underline{-\frac{F}{3}}}$$

$$\uparrow: F_{Bv} + F_2 + F_{Cv} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Bv} = -F_2 - F_{Cv} = \underline{\underline{-\frac{2}{3} F}}$$

$$\rightarrow: F_{Bh} + F_1 = 0$$

$$\Rightarrow F_{Bh} = -F_1 = \underline{\underline{-F}}$$



Kontrolle:

$$\downarrow C: M_1 - M_2 - F_{Bv} L_2 - F_{Bh} L_1 = 0$$

$$F a - 3 F a + \frac{2}{3} F * \frac{3}{2} a + F a = 0$$

$$\underline{\underline{0 = 0}}$$

Beispiel 1.3.4

Gegeben:

$$F_1 = 4F; \quad F_2 = 2F; \quad \beta = 45^\circ; \quad \gamma = 60^\circ$$

$$M_1 = \sqrt{3}Fa; \quad F, a$$

Gesucht: Lagerreaktionen

$$\uparrow C: F_{Bv}2a - F_1a + M_1 - F_2 \sin \gamma a = 0$$

$$F_{Bv} = \frac{1}{2a} (F_1a - M_1 + F_2 \sin \gamma a)$$

$$F_{Bv} = \frac{1}{2a} \left(4Fa - \sqrt{3}Fa + 2F \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) = \underline{\underline{2F}}$$

$$\uparrow B: F_1a + M_1 - F_c \sin \beta 2a - F_2 \cos \gamma 2a - F_2 \sin \gamma a = 0$$

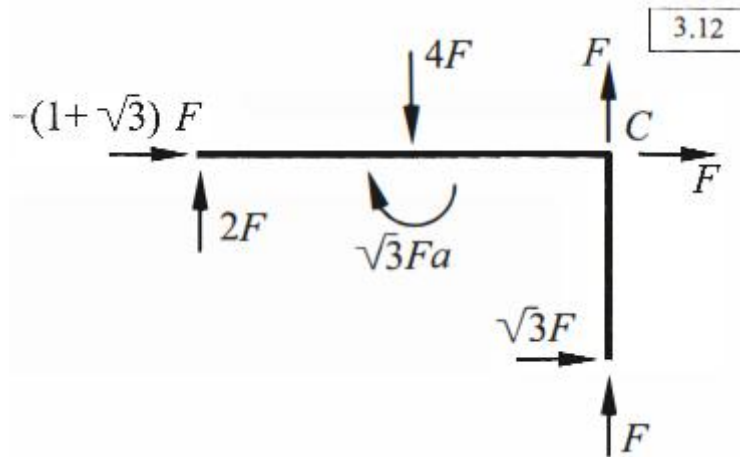
$$F_c = \frac{1}{2a \sin \beta} (4Fa + \sqrt{3}Fa + 2F \cos \gamma 2a - 2F \sin \gamma a)$$

$$F_c = \underline{\underline{\sqrt{2}F}}$$

$$\rightarrow F_{Bh} + F_2 \cos \beta + F_2 \sin \gamma = 0$$

$$F_{Bh} = \underline{\underline{-(1 + \sqrt{3})F}}$$

Eingezeichnete Lösung:

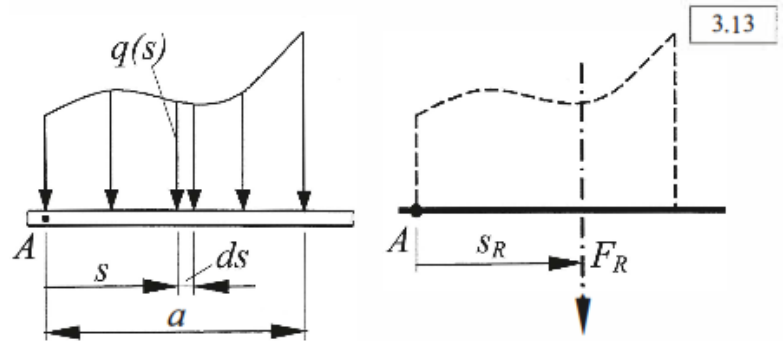


1.3.5. Streckenlasten (hier nur Kräfte)

Definition: Streckenlasten sind quer zum Balken angreifende Lasten.

Ziel: Zusammenfassung der verteilten Streckenlast zu einer äquivalenten resultierenden Kraft.

Die Maßnahme in Abbildung 3.13 ist erlaubt für ein Gleichgewicht am gesamten Körper (nicht für Schnittreaktionen im Körper).



Größe der resultierenden Kraft

$$F_R = \int_0^a q(s) ds$$

Problem: wo liegt nun die Wirklinie von F_R ?

$$F_R * s_r = \int_a^0 q(s) * s ds \rightarrow s_r = \frac{1}{F_R} \int_a^0 q(s) * s ds$$

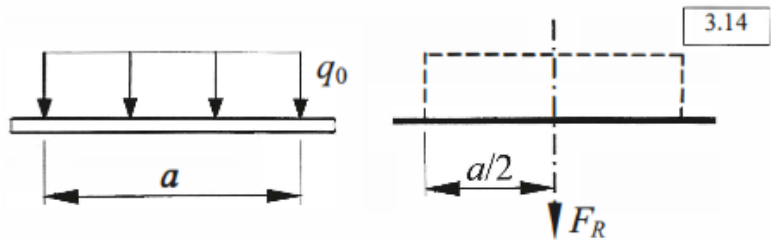
Sonderfälle:

1) Konstante Streckenlast q

$$F_R = q_0 a$$

$$s_r = \frac{1}{F_R} \int_a^0 q(s) * s ds$$

$$s_r = \frac{q_0 a^2}{q_0 2a} = \underline{a/2}$$



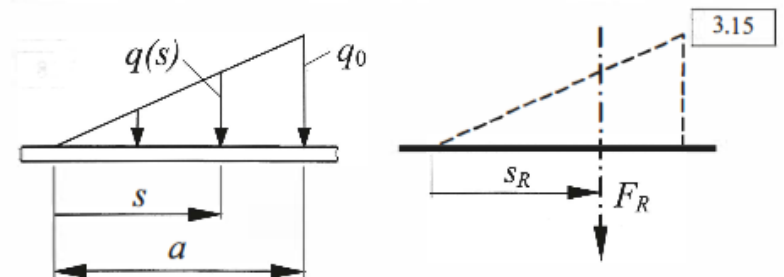
➔ Die Wirklinie liegt auf der Symmetrielinie.

2) Linear verteilte Streckenlast

Gegeben:

$$q(s) = q_0 * \frac{s}{a}$$

$$F_R = \int_0^a q(s) ds = q_0 \frac{a}{2}$$



Wo liegt die Wirklinie?

$$s_r = \frac{1}{F_R} \int_a^0 q(s) * s ds = \frac{2}{q_0 a} \int \frac{q_0}{a} s^2 ds = \underline{\underline{2/3 a}}$$

Beispiel 1.3.5

Gegeben: q_0 ; q_1 ; a

Gesucht: Lagerreaktionen

$$\rightarrow: F_{Bh} = 0$$

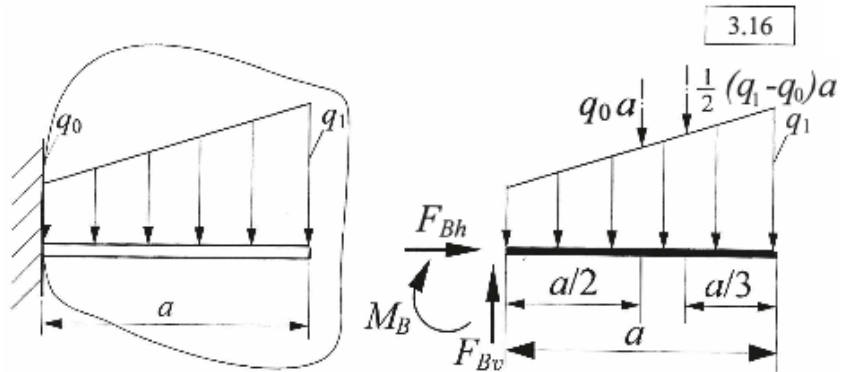
$$\uparrow: F_{Bv} - q_0 a - \frac{1}{2}(q_1 - q_0)a = 0$$

Konstante lineare Ergänzung

$$\Rightarrow F_{Bv} = \frac{1}{2}(q_0 + q_1)a$$

$$\uparrow B: M_B + q_0 a \frac{a}{2} + \frac{1}{2}(q_1 - q_0)a \frac{2}{3}a = 0$$

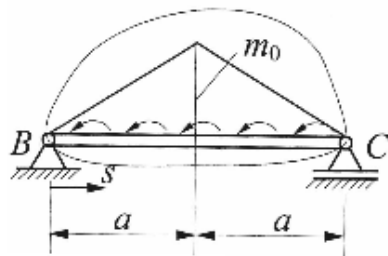
$$M_B = \left(-\frac{q_0}{2} + \frac{q_0}{3} - \frac{q_1}{3}\right)a^2 = \underline{\underline{-\frac{(q_0 + 2q_1)}{6}a^2}}$$



Weiteres Beispiel

Gegeben: m_0 ; a

Gesucht: Lagerreaktionen



$$M_R = m_0 \frac{a}{2} + \frac{1}{2}m_0 a = m_0 a$$

$$\rightarrow: F_{Bh} = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: F_{Bv} + F_C = 0 \quad (2)$$

$$\uparrow B: -M_R - F_C 2a = 0 \quad (3) \quad \rightarrow \quad F_C = -\frac{M_R}{2a} = -\frac{m_0}{2} \quad (3')$$

$$(3') \text{ mit } (2): F_{Bv} 2a - M_R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Bv} = \frac{M_R}{2a} = \frac{m_0}{2}$$

1.4 Schnittreaktionen des Balkens in der ebenen Statik

Lagerreaktion = Wechselwirkung zwischen Körper und Umgebung

Schnittreaktion = Wechselwirkung zwischen Körperteilen

1.4.1. Definition der Schnittreaktion

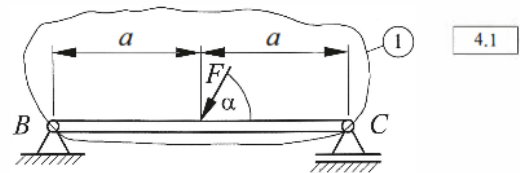
Schritt (1): Gleichgewichtsbetrachtung des gesamten Balkens (↑: ... →: ... ↓ B: ...)

Schritt (2): An der Schnittstelle mit eingeführter Koordinate s gibt es in der ebenen Statik des Balkens 3 Schnittreaktionen:

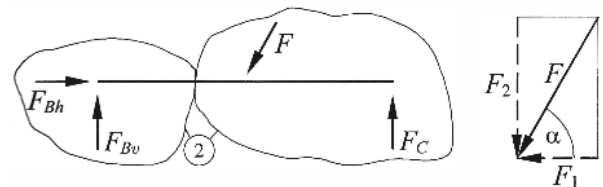
$F_L(s)$: Längskraft (in Balkenrichtung)

$F_Q(s)$: Querkraft (quer zur Balkenrichtung)

$M_B(s)$: Biegemoment (senkrecht zur Ebene)



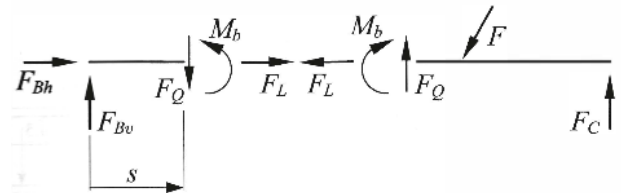
Schnitt ①: Gesamtbalken



Schnitt ②: Teile des Balkens

Die Schnittreaktionen ergeben sich aus dem Gleichgewicht am linken und am rechten Körper.

Jedoch ist der Gültigkeitsbereich der Koordinate s durch ihre Unstetigkeit in Geometrie und Belastung eingeschränkt.



Bereichseinteilung für verschiedene Koordinaten KS

1.4.2. Berechnung der Schnittreaktion

Rechnung anhand obiger Abbildung (4.1)

Zerlegung von F in $F_1 = F \cos \alpha$ und $F_2 = F \sin \alpha$

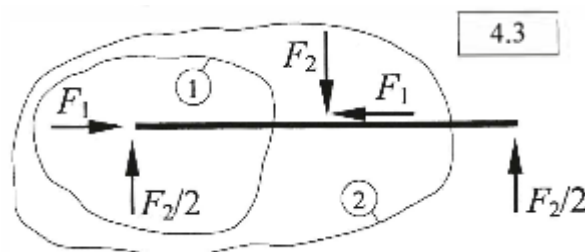
Gleichgewicht am gesamten Balken (1)

$$\rightarrow: F_{Bh} - F_1 = 0 \rightarrow F_{Bh} = F_1 = \underline{\underline{F \sin \alpha}}$$

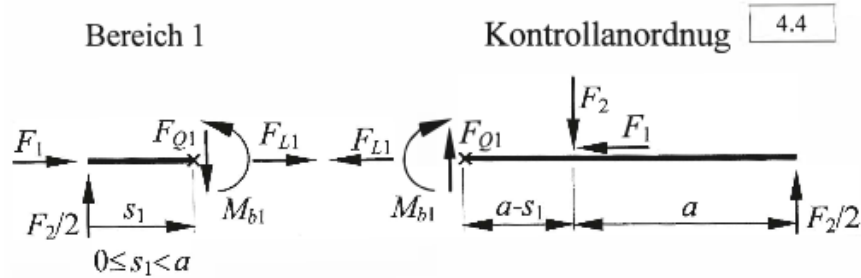
$$\downarrow B: F_C 2a - F_2 a \rightarrow F_C = \frac{F_2}{2} = \underline{\underline{\frac{F}{2} \sin \alpha}}$$

$$\downarrow C: -F_{Bv} 2a + F_2 a = 0 \rightarrow F_{Bv} = \frac{F_2}{2} = \underline{\underline{\frac{F \sin \alpha}{2}}}$$

Lösungen in die Grafik eingetragen:

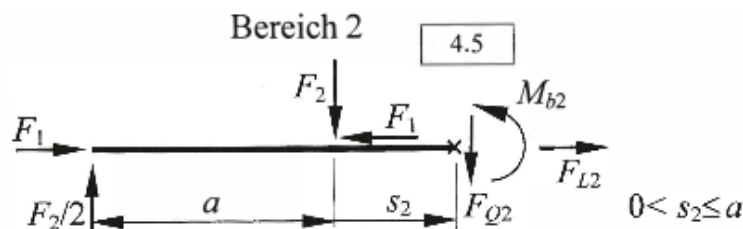


Zur Ermittlung der Schnittreaktionen muss nun erst einmal der Körper zerschnitten werden.



$$\begin{aligned} \rightarrow: F_1 + F_{L1} &= 0 \rightarrow F_{L1} = -F_1 \\ \uparrow: \frac{F_2}{2} - F_{Q1} &= 0 \rightarrow F_{Q1} = \frac{1}{2} F_2 \\ \downarrow X: M_{B1} - \frac{F_2}{2} s_1 &= 0 \rightarrow M_{B1} = \frac{F_2}{2} s_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow: F_{L1} - F_1 &= 0 \rightarrow \underline{F_{L1} = -F_1} \\ \uparrow: F_{Q1} - F_2 + \frac{F_2}{2} &= 0 \rightarrow \underline{F_{Q1} = \frac{F_2}{2}} \\ \downarrow X: -M_{B1} - F_2(a - s_1) + \frac{F_2}{2}(2a - s_1) &= 0 \\ \underline{M_{B1} = \frac{F_2}{2} s_1} \end{aligned}$$



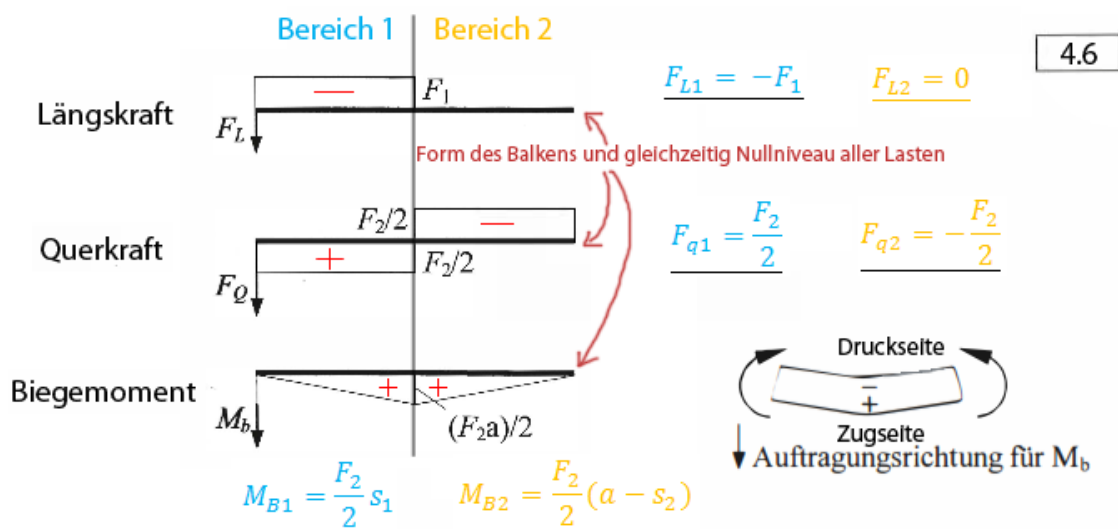
Schnitt setzt nun weiter rechts an

$$\begin{aligned} \rightarrow: F_1 - F_1 + F_{L2} &= 0 \rightarrow \underline{F_{L2} = 0} \\ \uparrow: \frac{F_2}{2} - f_2 - F_{Q2} &= 0 \rightarrow \underline{F_{Q2} = -\frac{F_2}{2}} \\ \downarrow X: M_{B2} + F_2 s_2 - \frac{F_2}{2}(a + s_2) &= 0 \rightarrow \underline{M_{B2} = \frac{F_2}{2}(a - s_2)} \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

- 1) Freischneiden des gesamten Balkens und Berechnen der Lagerreaktionen
- 2) Einteilung in Bereiche
- 3) Freischneiden der Balkenteile und Wahl von zweckmäßigen Koordinaten
- 4) Berechnung der Schnittreaktionen sowie deren grafische Darstellung
- 5) Kontrolle der Ergebnisse

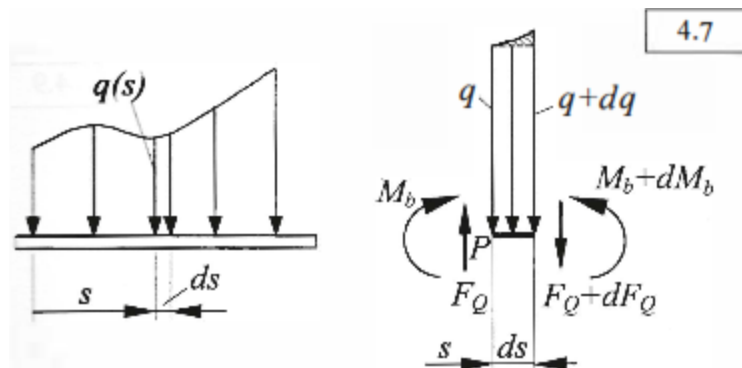
Grafische Darstellung der Lösung der Schnittreaktionen:



1.4.3. Beziehungen zwischen Streckenlast, Querkraft und Biegemoment

Herausschneiden eines Streifens ds aus dem Balken.

Problem: Wie errechnet man nun die differentiellen Additive dM_B ; dF_Q ; dq ?



$\uparrow F_Q - F_Q - dF_Q - qds \dots \dots = 0$ entspricht Differentialen höherer Ordnung

$$\frac{dF_Q}{ds} = -q(s)$$

$\downarrow P: -M_B + M_B + dM_B - (F_Q + dF_Q)ds - qds * \frac{ds}{2} = 0$ Hebel

$$\frac{dM_B}{ds} = F_Q + \left(dF_Q + q \frac{ds}{2} \right) \text{ entfällt}$$

$$\frac{dM_B}{ds} = F_Q \quad \text{---} \rightarrow \quad \frac{d^2 M_B}{ds^2} = \frac{dF_Q}{ds} = -q(s)$$

$$\frac{d^2 M_B}{ds^2} = -q(s)$$

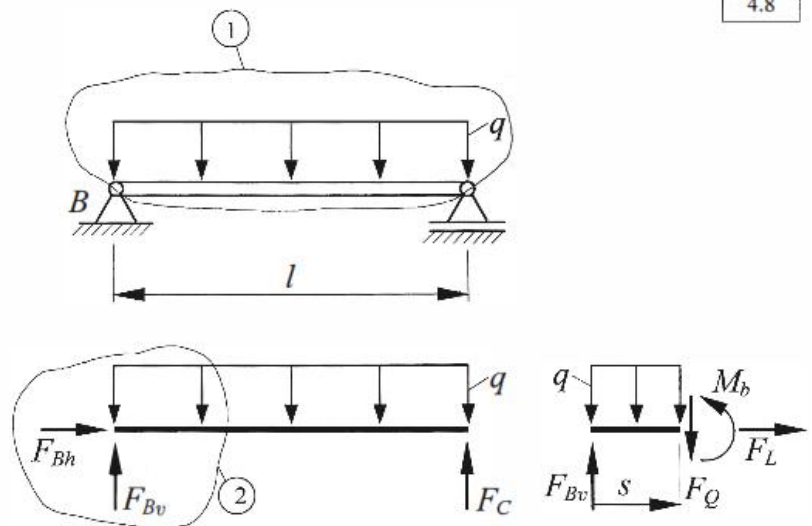
1.4.4. Beispiele

4.8

Beispiel 1.4.1

Gegben: $Q; l$

Gesucht: Schnittreaktionen



Lagerreaktionen

$$\rightarrow \underline{F_{Bh} = 0}$$

$$\uparrow: F_{Bv} - ql + F_C = 0$$

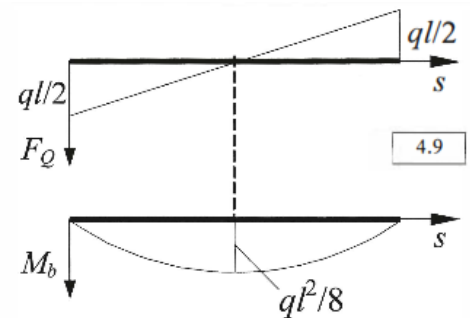
$$\downarrow B: F_C l - ql \left(\frac{l}{2}\right) = 0 \rightarrow \underline{F_C = \frac{ql}{2}} \rightarrow \underline{F_{Bv} = \frac{ql}{2}}$$

Schnittreaktionen (Bereich 2)

$$\rightarrow: F_L + F_{Bh} = 0 \rightarrow \underline{F_L = 0}$$

$$\uparrow: F_{Bv} - F_Q = 0 \rightarrow \underline{F_Q = \frac{ql}{2} - qs}$$

$$\downarrow X: M_B - F_{Bv}s + qs \left(\frac{s}{2}\right) = 0 \rightarrow \underline{M_B = \frac{Q}{2}(ls - s^2)}$$



4.9

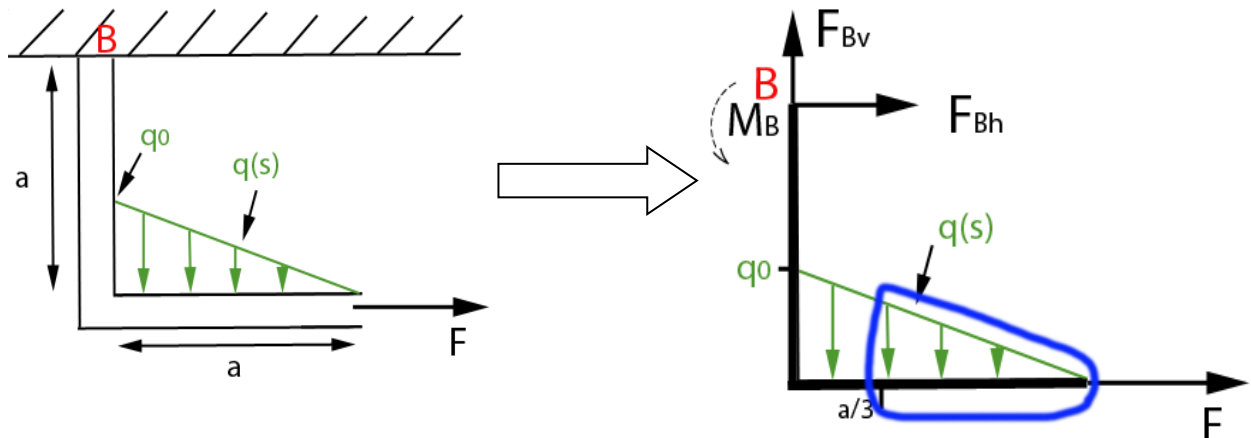
Das Biegemoment wird durch eine quadratische Funktion beschrieben: Wo liegt deren Maximum?

$$M'_B = \frac{\partial M_B}{\partial s} = \frac{q}{s} (l - 2s) = 0$$

$$s = \frac{l}{2} \rightarrow M_{Bmax} = M_B \left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8}$$

$$\text{eingesetzt in } F_Q = \frac{ql}{2} - qs \rightarrow F_Q = 0$$

Beispiel 1.4.2



Gegeben: F, a, q_0 $F = q_0 a$

Gesucht: Schnittreaktionen

Lagerreaktionen:

$$\rightarrow: F_{Bh} + F = 0 \rightarrow \underline{F_{Bh} = -F}$$

$$\uparrow F_{Bv} - q_0 \frac{a}{2} = 0 \rightarrow \underline{F_{Bv} = \frac{q_0 a}{2} = \frac{F}{2}}$$

$$\downarrow B: M_B + Fa - q_0 \frac{a}{2} * \frac{a}{3} = 0 \rightarrow \underline{M_B = -\frac{5}{6} Fa}$$

Hebel der Linienkraft

Schnittreaktionen:

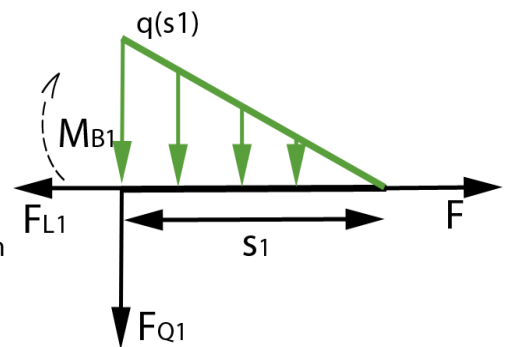
$$\leftarrow: F_{L1} - F = 0 \rightarrow \underline{F_{L1} = F}$$

$$\downarrow: F_{Q1} + q(s_1) \frac{s_1}{2} = 0 \quad \text{/Achtung! } q(s_1) \text{ ist nicht } q_0 \text{ wegen der reduzierten Höhe!}$$

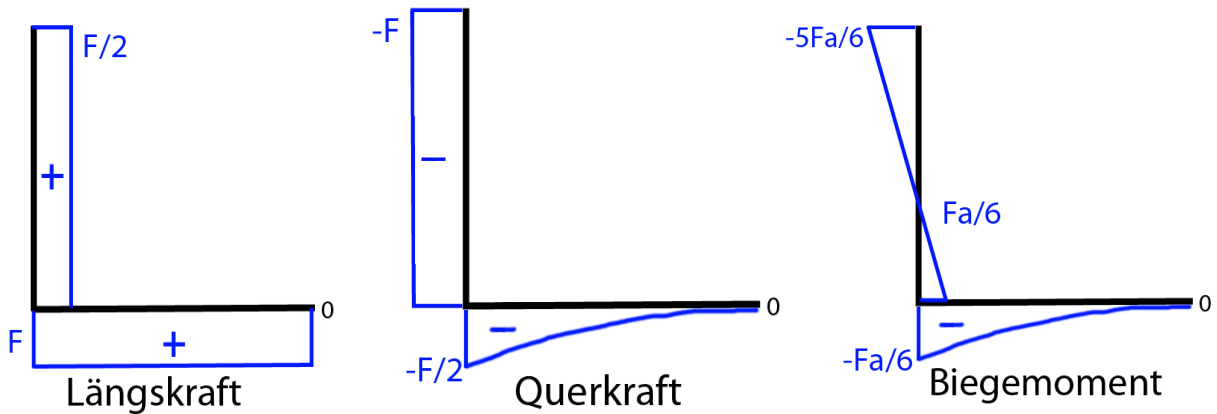
$$0 = F_{Q1} + q \frac{s_1 s_1}{a 2} \quad q(s_1) = q_0 \frac{s}{a}$$

$$F_{Q1} = -\frac{q_0}{a} * \frac{s_1^2}{2} = \underline{\underline{\frac{F s_1^2}{2a^2}}}$$

$$\downarrow X: -M_{B1} - q(s_1) * \frac{s_1}{2} * \frac{s_1}{3} = 0 \rightarrow \underline{\underline{M_{B1} = -q_0 * \frac{s_1^3}{6a} = -\frac{F}{6a^2} * s_1^3}}$$



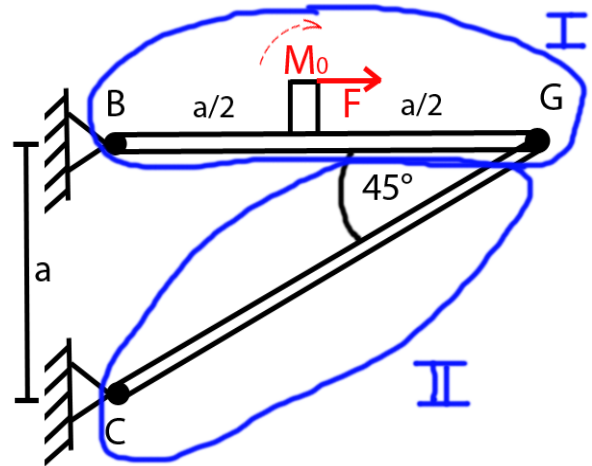
Grafische Darstellung der Lösung:



1.5 Beispiel zu zusammenhängenden Tragwerken

Gegeben: $F, a, M_0, M_1 = Fa$

Gesucht: Lagerreaktionen, Stabreaktionen



Lagerreaktionen (Schritt II)

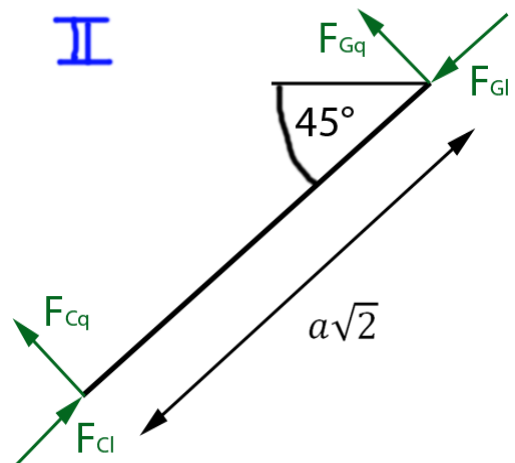
$$\downarrow C: -F_{Gq} * a\sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \underline{F_{Gq} = 0}$$

$$\downarrow G: -F_{Cq} * a\sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \underline{F_{Cq} = 0}$$

Folgerung:

Der Stab ist beidseitig gelenkig gelagert, ohne Lasten zwischen den Gelenken:

Als Schnittreaktion und Längskraft (Stabkraft)



Lagerreaktionen (Schnitt I)

$$\downarrow B: -M_0 - F \frac{a}{2} + F_{Gl} \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0$$

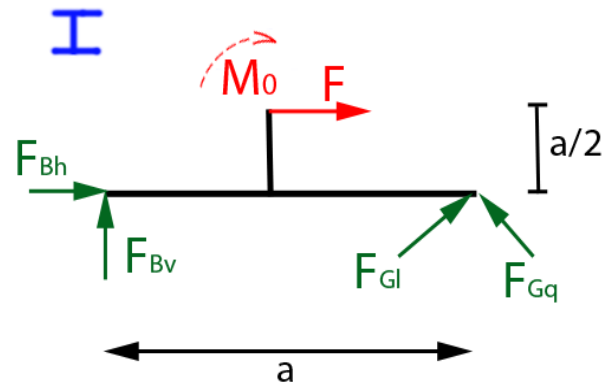
$$\Rightarrow F_{Gl} = \frac{3}{2} F \sqrt{2}$$

$$\uparrow: F_{Bv} + F_{Gl} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

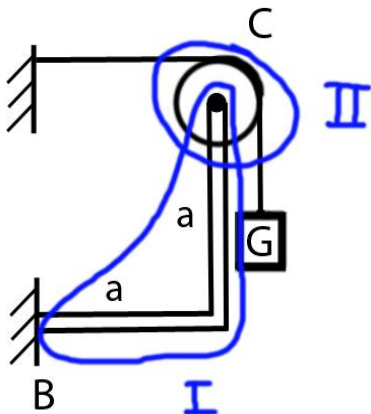
$$\Rightarrow F_{Bv} = -\frac{3}{2} F$$

$$\rightarrow F_{Bh} + F - F_{Gl} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow F_{Bh} = -\frac{5}{2} F$$

Aus Symmetriegründen gilt für Bereich 2: $F_{Gl} = F_{Cl} = \frac{3}{2} F \sqrt{2}$



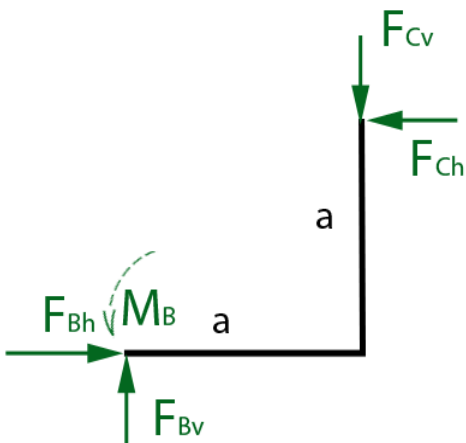
Weiteres Beispiel



Gegeben: F_G, a

Gesucht: Biegemomentenverlauf

Annahme: Die Rolle ist reibungslos gelagert.



$$\rightarrow: F_{Bh} = F_{Ch} = F$$

$$\uparrow: F_{Bv} = F_{Cv} = F$$

$$\downarrow B: M_B + F_{Ch}a - F_{Cv}a = 0$$

$$\underline{M_B = 0}$$

$$\downarrow C: F_1 r - F_G r = 0$$

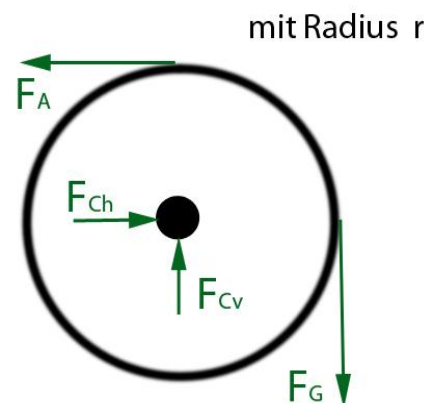
$$\underline{F_1 = F_G = F}$$

$$\rightarrow: F_{Ch} - F_1 = 0$$

$$\underline{F_{Ch} = F_1 = F}$$

$$\uparrow: F_{Cv} - F_G = 0$$

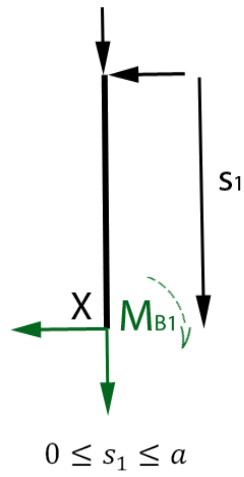
$$\underline{F_{Cv} = F_G = F}$$



Momentenverlauf

$$\downarrow X: -M_{B1} + F s_1 = 0$$

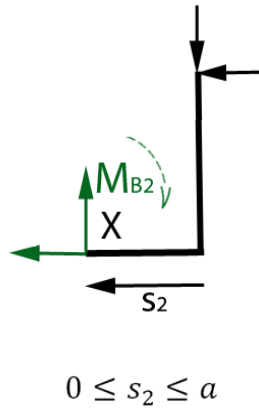
$$M_{B1} = F s_1$$



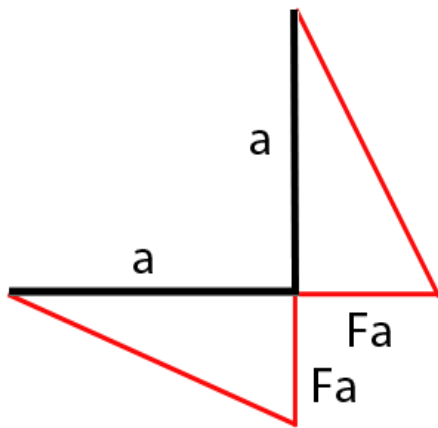
$$\downarrow X: -M_{B2} + F a - F s_2 = 0$$

$$M_{B2} = F a - F s_2$$

$$= F(a - s_2)$$

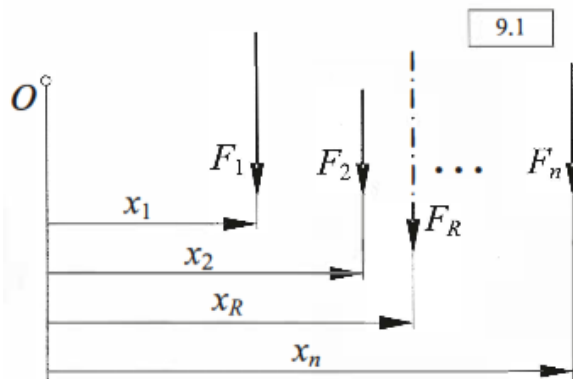


Biegemomentenverlauf:



Biegemoment

1.6 Schwerpunkt



9.1

Eindimensionale Problematik mit n parallelen Kräften.

Gesucht: resultierende Kraft und deren Angriffspunkt.

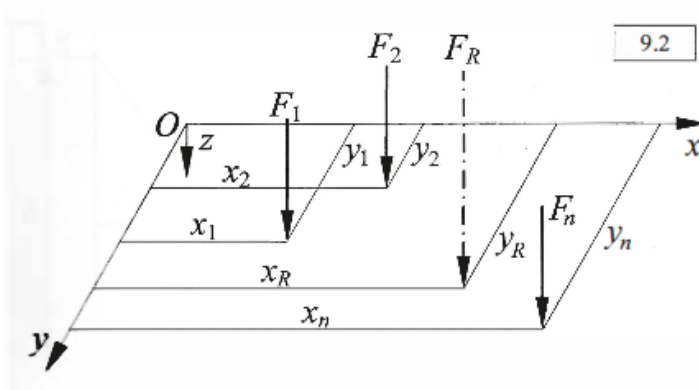
Lösung:

$$F_R = \sum_{i=1}^n F_i$$

$$F_R x_r = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

Das resultierende Moment bezüglich 0 muss gleich dem erzeugten Moment der n Kräfte sein!

$$x_r = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{F_R} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

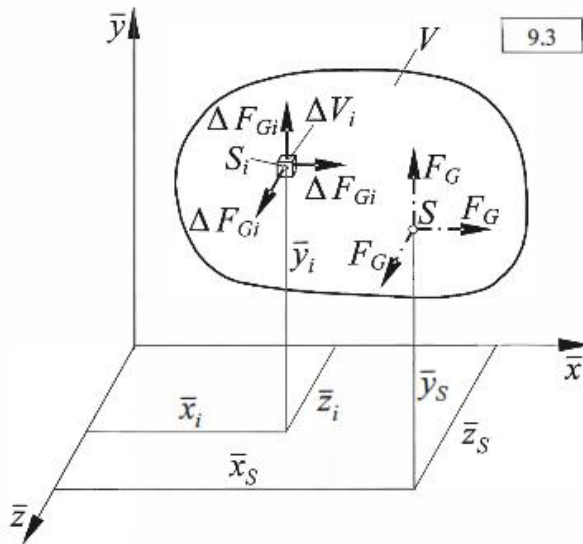


9.2

$$F_R y_r = \sum F_i y_i$$

$$y_r = \frac{\sum F_i y_i}{F_i}$$

1.6.1 Körperschwerpunkt



9.3

Zerlegung des orientierten Körpers in Elemente.

$$\Delta F_{Gi} = g * \Delta m_i = g * \rho_i * \Delta V_i$$

g...Erdbeschleunigung

ρ_i ... Massendichte

→Jeweils parallel zur x, y, z Achse gedacht

$$F_G = \sum \rho F_{Gi}$$

$$\bar{x}_s = \frac{\sum x_i * \Delta F_G}{F_G} = \frac{g * \sum \rho_i * x_i * \Delta V_i}{g * \sum \rho_i * \Delta V_i} = \frac{\sum \rho_i * x_i * \Delta V_i}{\sum \rho_i * \Delta V_i} \Rightarrow (1)$$

$$m = \rho_i * \Delta V_i = \sum m_i \Rightarrow \bar{x}_s = \frac{\sum \bar{x}_i * \Delta m_i}{m}$$

Gleichung (1) analog für \bar{y}_s :

$$\bar{y}_s = \frac{\sum y_i \Delta m_i}{m}$$

Aus der Mathematik wissen wir: $\sum \dots \Delta V = \int dV$

Daraus folgt für die Masse: $m = \int_V \rho dV$

$$\bar{x}_s = \frac{1}{m} * \int_V \rho * \bar{x} dV$$

$$\bar{y}_s = \frac{1}{m} * \int_V \rho * \bar{y} dV$$

$$\bar{z}_s = \frac{1}{m} * \int_V \rho * \bar{z} dV$$

Koordinaten des Schwerpunktes bzw
Massenmittelpunktes des Körpers.

Für eine konstante Dichte des Körpers gilt:

$$\bar{x}_s = \frac{1}{V} * \int_V \bar{x} dV$$

$$\bar{y}_s = \frac{1}{V} * \int_V \bar{y} dV$$

$$\bar{z}_s = \frac{1}{V} * \int_V \bar{z} dV$$

Koordinaten des Volumenschwerpunkte

1.6.2 Flächenschwerpunkt

Fläche $A = \sum_i \Delta A_i \rightarrow A = \int_A dA$

Koordinaten des Flächenschwerpunktes:

$$\bar{x}_s = \frac{1}{A} \sum_i x_i * \Delta A_i$$

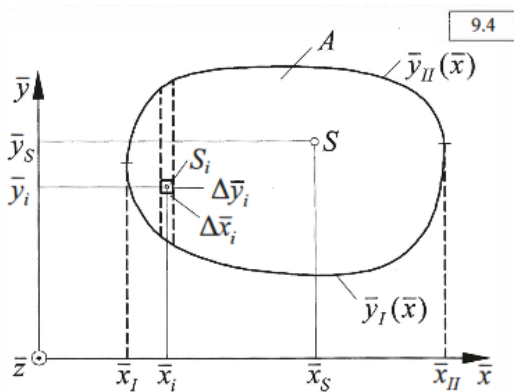
$$\bar{y}_s = \frac{1}{A} \sum_i y_i * \Delta A_i$$

$$\bar{x}_s = \frac{1}{A} \int_A \bar{x} * dA$$

$$\bar{y}_s = \frac{1}{A} \int_A \bar{y} * dA$$

Statisches Moment erster Ordnung

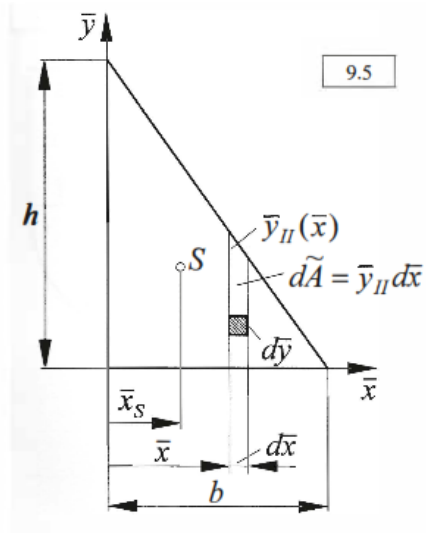
(verschwindet definitionsgemäß bezüglich der Achsen durch den Schwerpunkt)



Flächenintegral

$$\int f(\bar{x}, \bar{y}) dA = \int_{x_I}^{x_{II}} \int_{y_I}^{y_{II}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} d\bar{x}$$

Beispiel a)



a) Feste Höhe h:

$$h(\bar{x}) = h - h \frac{\bar{x}}{b} \Rightarrow y_{II}(x)$$

$$A = \frac{h * b}{2}$$

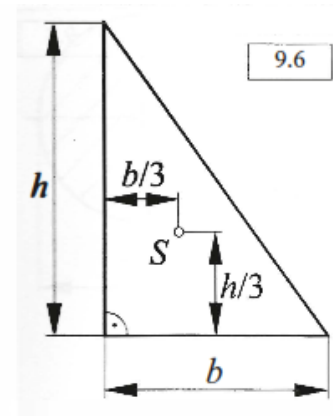
$$x_s A = \int_0^b \int_0^{y_{II}(x)} x \, dy \, dx = \int_0^b x \left(h - \frac{h}{b} x \right) dx$$

$$x_s \frac{hb}{2} = \frac{b^2 h}{2} - \frac{h}{b} * \frac{b^3}{3} = \frac{hb^2}{6}$$

$$x_s = \frac{b}{3}$$

Aus Symmetriegründen folgt für y_s

$$y_s = \frac{h}{3}$$



Beispiel b)

→ Schwerpunktlagen von Halb- und Viertelkreis

Aus einem Tabellenbuch erhält man: $y_s = \frac{4R}{3 * \pi}$

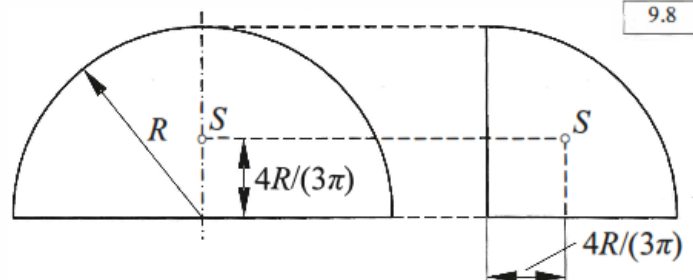
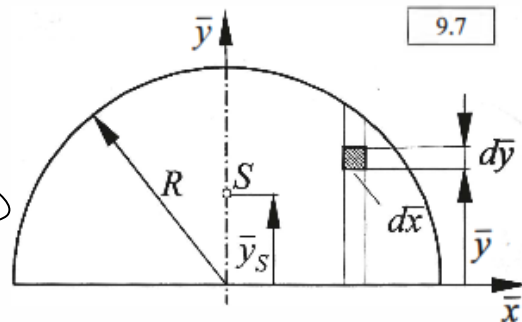
Zudem gilt: $x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$y_s * A = 2 \int_0^R \int_0^y y \, dy \, dx = 2 \int_0^R \frac{y^2}{2} dx$$

$$= \int_0^R (R^2 - x^2) dx = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$y_s = \frac{y_s A_s}{A} = \frac{2R^3 * 2}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$



Beispiel c)

→ Zusammengesetzte Fläche

Gegeben: Teilflächenschwerpunkte

Gesucht: Gesamtschwerpunkt

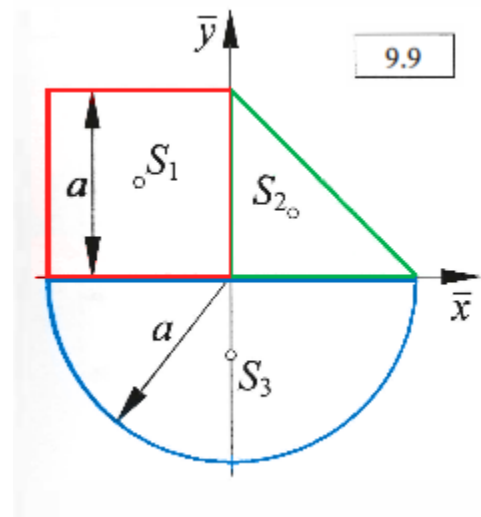
$$A = \sum_i A_i = a^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\Pi}{2} \right) = \frac{a^2}{2} (3 + \Pi)$$

$$x_s A_s = \sum x_i A_i = -\frac{a}{2} a^2 + \frac{a}{3} \frac{a^2}{2} + 0 = -\frac{1}{3} a^3$$

$$x_s = \frac{x_s A_s}{A} = \frac{-a^3 * 2}{3a^2(3 + \Pi)}$$

$$y_s A_s = \sum y_i A_i = \frac{1}{2} a a^2 + \frac{a}{3} \frac{a^2}{2} - \frac{4a}{3\Pi} \frac{\Pi a^2}{2} = 0$$

$$y_s = \underline{0}$$



Beispiel d)

Negativ, da in der Fläche des großen Kreises

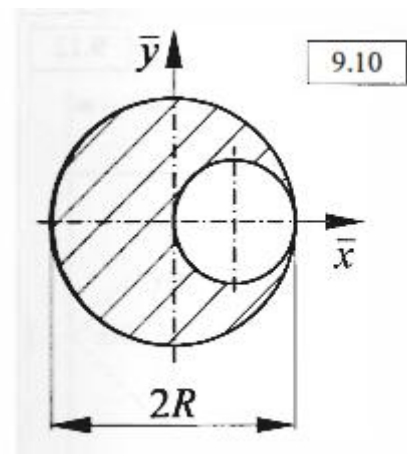
Gegeben: R

$$A = \sum A_i = \Pi R^2 - \Pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3\Pi}{4} R^2$$

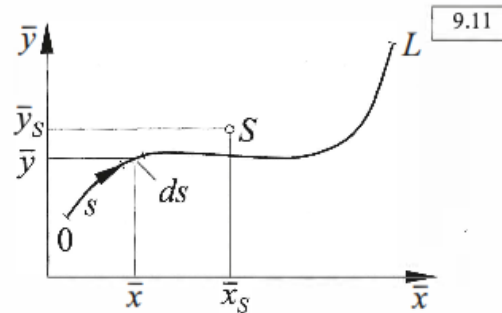
$$x_s A = 0 * \Pi R^2 + \frac{R}{2} \left(-\Pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right) = -\frac{\Pi R^3}{8}$$

$$x_s = \frac{x_s A_s}{A} = -\frac{4\Pi R^3}{8 * 3 * \Pi R^2} = -\frac{R}{6}$$

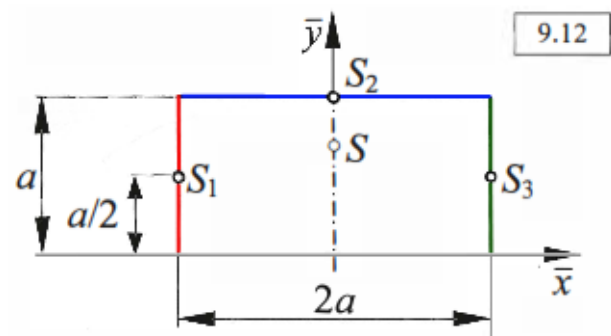
$y_s = 0$ → aus Symmetrie



1.6.3 Linienschwerpunkt



$$\bar{x}_S = \frac{1}{L} * \int_s x ds \quad \bar{y}_S = \frac{1}{L} * \int_s y ds \quad \bar{z}_S = \frac{1}{L} * \int_s z ds$$



Der Schwerpunkt kann auch außerhalb der Kurve liegen.

Beispiel

Gegeben: Zeichnung 9.12

Gesucht: Gesamtschwerpunkt der Anordnung

Lösung: $\bar{x}_S = 0$ aus Symmetriegründen

$$l_s * \bar{y}_S = 4a * \bar{y}_S = a * \frac{a}{2} + 2a * a + a * \frac{a}{2}$$

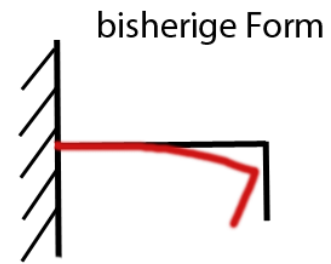
$$\bar{y}_S = \frac{3a^2}{4a} = \underline{\underline{\frac{3}{4}a}}$$

Beispiel für die in Zeichnung 9.12 gezeigte Anordnung:

Die Stanzkraft muss im Schwerpunkt des Linienzugs angreifen, damit das Stanzwerkzeug nicht verkantet.

2. Festigkeitslehre

- Körper sind nun verformbar
- Kräfte- und Momentenbilanzen bleiben erhalten
- Verformungen in diesen Bilanzen werden näherungsweise vernachlässigt



tatsächliche Form

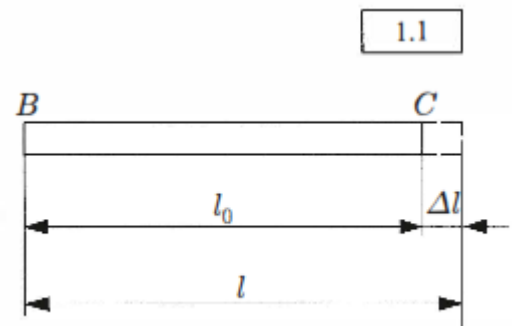
Äquivalenzbetrachtungen sind nur lokal erlaubt!

2.1. Zug, Druck, Schub

2.1.1. Verschiebung, Dehnung, Gleitung

Die Dehnung wird im Folgenden immer als homogen (d.h. an allen Punkten gleich) angenommen.

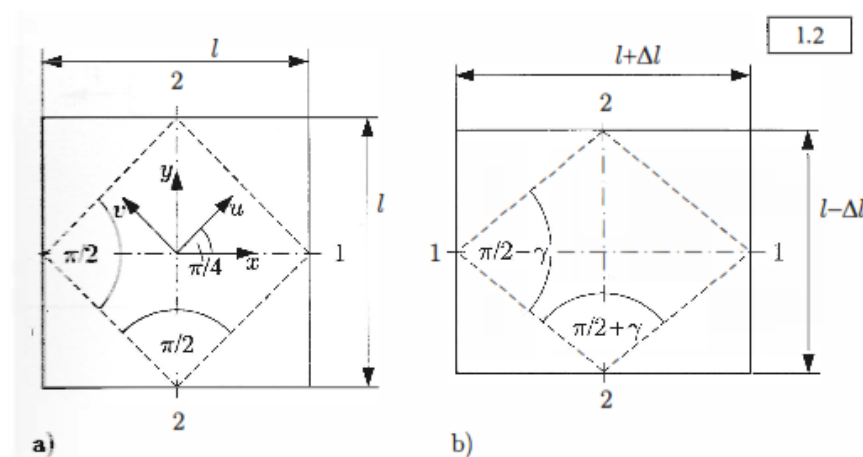
Die Verlängerung Δl ist die Verschiebung des Querschnitts C relativ zu B.



ein gedehnter Stab

Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad ; [\varepsilon] = 1$$



- a) noch ein Quadrat
- b) nun eine Raute

Gleitung

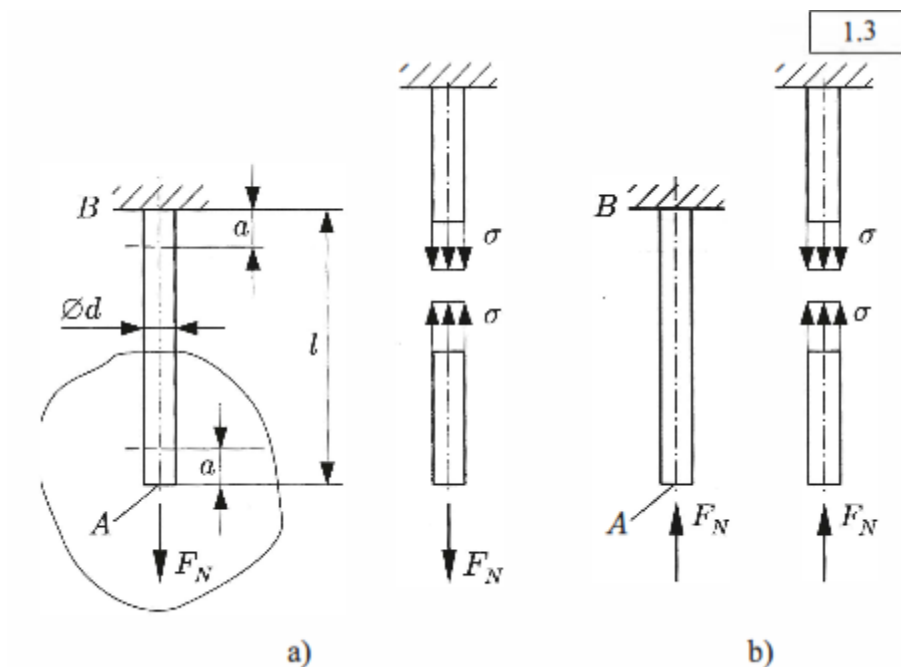
→ ist die Abweichung vom rechten Winkel

Gleitung γ enthält Dehnung in x- und Stauchungen in y- Richtung

ε ; γ sind Verzerrungen

Für Tragwerke sind $|\varepsilon|$; $|\gamma|$ kleiner als 1%

2.1.2. Spannung



a) An einem Stab (mit vernachlässigbarer Gewichtskraft) wird mit einer Normalkraft gezogen.

Außerhalb der Abklinglänge a der Störung gibt es eine konstante Verteilung der Flächenkraft.

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \text{ (Zug)} \quad [\sigma] = \frac{N}{m^2} = 1Pa$$

Es gilt das Prinzip St. Venant (1797 – 1886):

Die Wirkung des Unterschieds statisch äquivalenter Lasten auf A klingt mit a ab.

es gilt: Abklinglänge \approx Querschnitt ($a \approx d$)

statisch äquivalente Lasten: gleiche resultierende Kraft und gleiches resultierendes Moment

$$b) \sigma = -\frac{F_n}{A} \text{ (Druck)}$$

a und b sind Normalspannungen

Schubspannungen und Scherspannungen

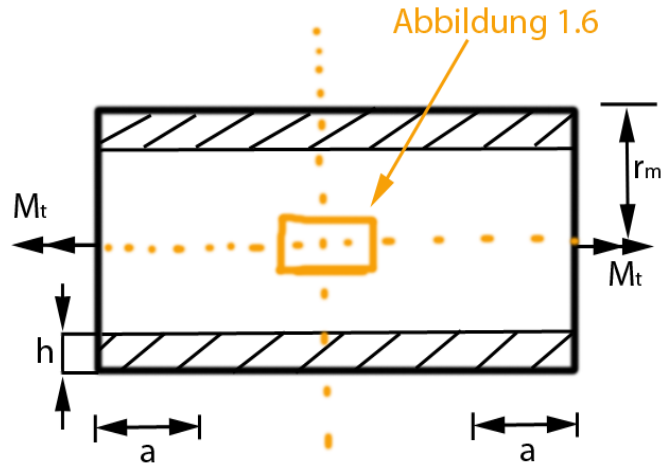
$$\downarrow M: 2\pi r_m h * \tau * r_m - M_t = 0$$

Fläche Schub Hebel

Resultierendes Moment der gleichmäßigen Schubspannungsverteilung

$$\sim > \tau = \frac{M_t}{2\pi r_m^2 h} \quad [\tau] = \frac{Nm}{m^2 m}$$

$$[\tau] = [\sigma] = \frac{N}{m^2}$$



Flächenelement Im Allgemeinen

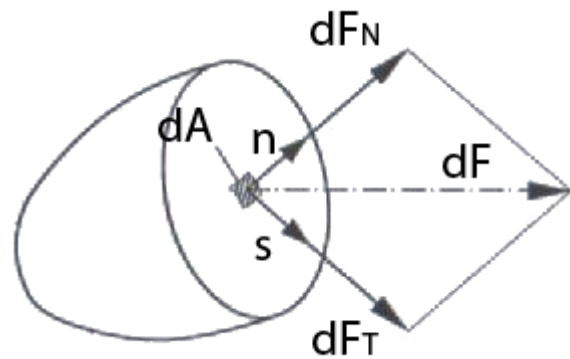
„Spannungsvektor“ = Flächenkraft

Normalspannung:

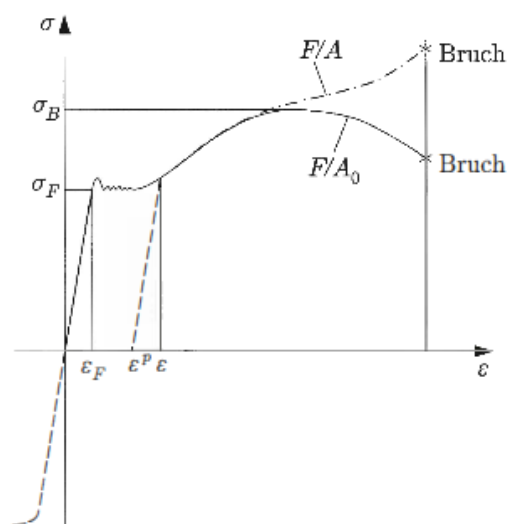
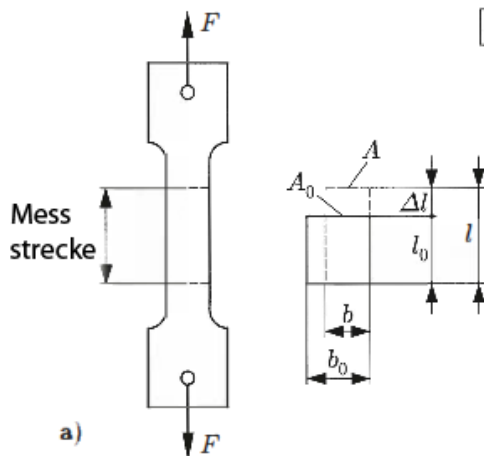
$$\sigma = \frac{dF_N}{dA}$$

Tangentialspannung (auch Schub- /Schersp.)

$$\tau = \frac{dF_T}{dA}$$



2.1.3 Elastisches Modul



A0... Ausgangsfläche
A... sich ergebende Fläche

Zugstab: Wirklinie fällt mit Stabachse zusammen (Homogenität des Materials vorausgesetzt!)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad / \Delta l = l - l_0 \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

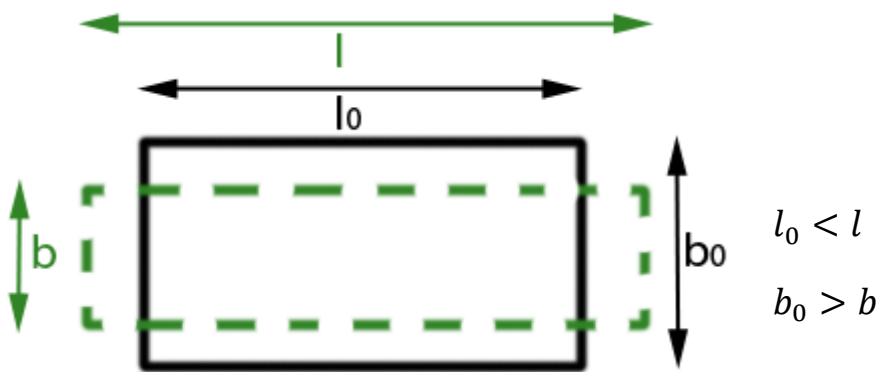
Im elastischen Bereich, also wo $|\sigma| \leq \sigma_F$ (die Fließgrenze), gilt das Hooke'sche Gesetz

$$\boxed{\sigma = E * \varepsilon}$$

σ ... Spannung
 ε ... Dehnung
 E ... Elastizitätsmodul

Material	Elastizitätsmodul
Stahl	210 G Pa
Aluminium	70 G Pa
Kupfer	120 G Pa

Ergänzung



Querdehnung: $\varepsilon_q = \frac{b-b_0}{b_0} = -\nu \varepsilon$

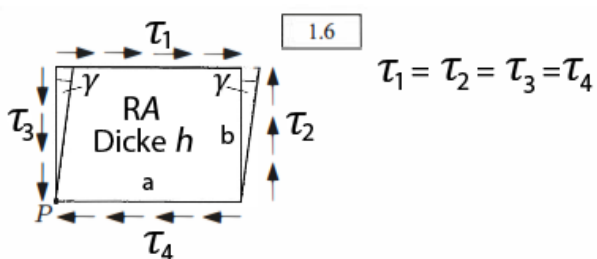
ν ... Querdrehzahl (Materialkonstante)(Ny)

Stahl	$\nu=0,3$
Gummi	$\nu=0,5$

Schubmodul G

Bei einem isotropen Material (richtungsunabhängig) gilt:

$$E = 2(1 + \nu) * G$$



$$\begin{aligned} \rightarrow: \tau_1 * ah - \tau_4 * ah &= 0 \\ \uparrow: \tau_2 * bh - \tau_3 * bh &= 0 \\ \downarrow P: \tau_2 * bh * a - \tau_1 * ah * b &= 0 \end{aligned}$$

Fläche Hebel

$$\boxed{\tau = G * \gamma} \quad \gamma \text{ ... Gleitung}$$

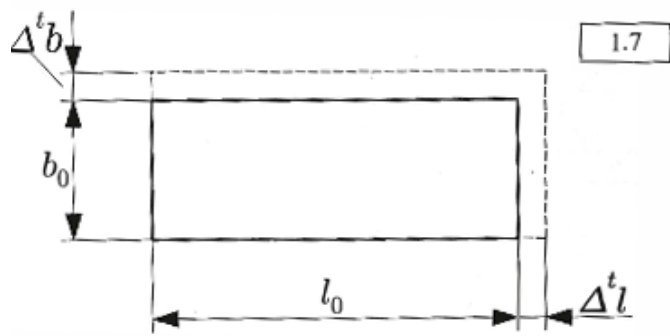
2.1.4 Wärmedehnung

Die Temperaturdifferenz ΔT verursacht eine Längenänderung Δl und Δb

Im isotropen Material gilt:

$$\Delta l = \alpha \Delta T * l_0$$

$$\Delta b = \alpha \Delta T * b_0$$



$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta b}{b_0}$$

und $\alpha \Delta T = \varepsilon$

α ... Ausdehnungskoeffizient

ε ... thermische Dehnung (keine Schubverzerrung)

Material	α
Stahl	$11 * 10^{-6} \frac{1}{K}$
Aluminium	$24 * 10^{-6} \frac{1}{K}$
Kupfer	$17 * 10^{-6} \frac{1}{K}$

Für T=200K von 0°C aus gemessen

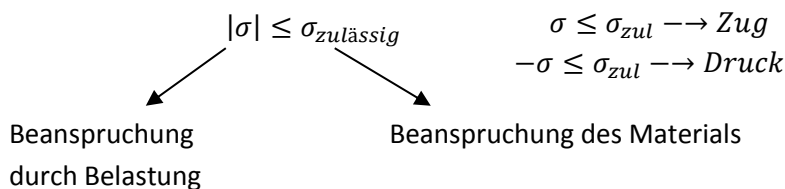
Gesamtdehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta^e l + \Delta^t l}{l_0} = \underbrace{\frac{\Delta^e l}{l_0}}_{\varepsilon^e} + \underbrace{\frac{\Delta^t l}{l_0}}_{\varepsilon^t}$$

(nur kinematisch) $= \frac{\sigma}{E} \alpha \Delta T$

2.1.5 Dimensionierung bei einfachen Beanspruchungen

1) Nach zulässiger Spannung



$$\sigma_{zul} = \left\{ \frac{\sigma_{Fließ}}{Sicherheits_{Fließ}} ; \frac{\sigma_{Bruch}}{Sicherheits_{Bruch}} \right\}$$

Für zähe Materialien unter statischer Belastung

Die Sicherheit wird dabei immer mit einem Wert größer 1 angenommen.

2) Nach zulässiger Dehnung

$$|\varepsilon| \leq \varepsilon_{zul}$$

(auch für inelastisches Materialverhalten)

3) Nach zulässiger Dehnung

- Lasten und Verformungen

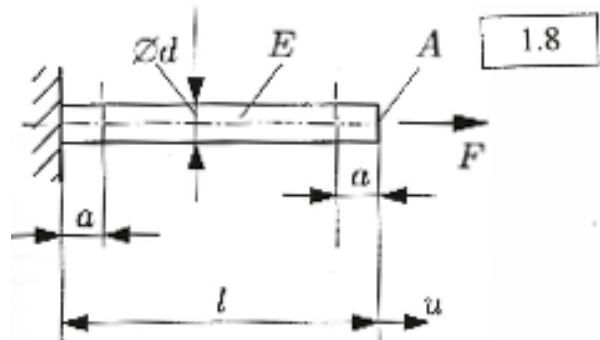
2.1.6 Beispiele

Beispiel 1) Zugstab

Gegeben: l, A, E, F

Gesucht: Verschiebung des Kraftangriffspunktes

Annahme: $l \gg \sqrt{A}$



1) $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

2) $\sigma = E * \varepsilon$ (Hooke)

3) $\sigma = \frac{F}{A}$

1), 2), 3): $\Delta l = \varepsilon * l = \frac{\sigma}{E} * l$

→ $\Delta l = \frac{F * l}{E * A}$

Beispiel 2)

Gegeben: F, A_1, A_2, l_1, l_2, E

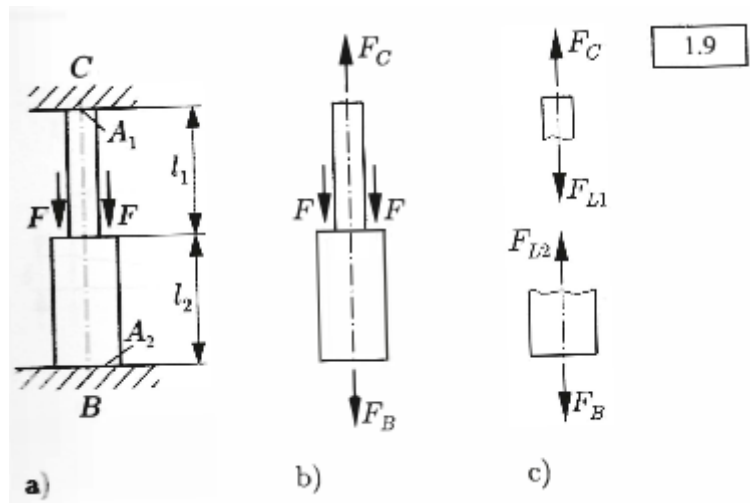
Gesucht: Lagerreaktionen

Gleichgewicht in der Mitte:

→: $0 = 0$

↑: $0 = F_C - F_b - 2F$ (*)

↓: $0 = 0$



→ Eine Gleichung, 2 Unbekannte.

→ System ist einfach statisch unbestimmt (Suchen zusätzlicher Gleichungen!)

$$F_C = F_{L1} \quad ; \quad F_B = F_{L2} \quad ; \quad \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F_1 l_1}{EA_1} + \frac{F_2 l_2}{EA_2} = 0 (**)$$

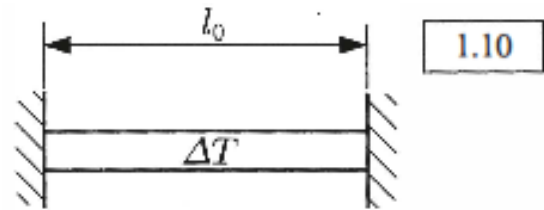
Aus (*) und (**) folgt nach Elimination:

Kontrolle für den Sonderfall

$$A = A_1 = A_2 \text{ und } l_1 = l_2 = l$$

- 38 - => $F_C = F \quad ; \quad F_B = -F$

$$F_C = \frac{2F}{1 + \frac{A_2 l_1}{A_1 l_2}} \quad ; \quad F_B = F_C - 2F$$



Beispiel 3)

Gegeben: $\Delta T = 50K$; $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2} \quad ; \quad \sigma_{zul} = 150 \frac{N}{mm^2}$$

Gesucht: a) σ

b) ΔT_{max} sodass $|\sigma| \leq \sigma_{zul}$

$$a) \quad \varepsilon = \varepsilon^{mech} + \varepsilon^{therm} \quad / \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \Delta l = 0 \doteq l * \varepsilon = 0 \quad ==> \varepsilon = 0$$

$$= \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\sigma = -E \alpha \Delta T$$

$$= -2,1 \cdot 10^5 MPa * 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K} * 50K = \underline{-126MPa}$$

b) Grenzfall: $|\sigma| = \sigma_{zul}$

$$\Delta T_{max} = \frac{\sigma_{zul}}{E \alpha} = \frac{150MPa}{2,1 \cdot 10^5 MPa * 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}} = \underline{60K}$$

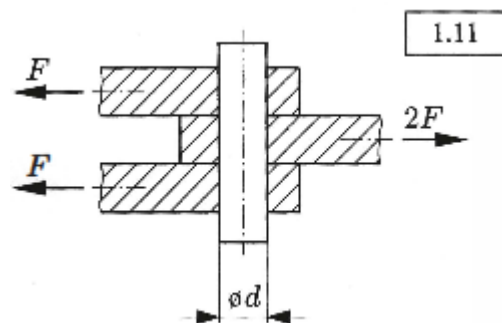
Beispiel 4)

Gegeben: $F = 10^4 N$

$$\tau_{zul} = 100 \frac{N}{mm^2}$$

Gesucht:

Durchmesser des Bolzens damit dieser nicht abgeschert wird.



Platten welche von einem Bolzen gehalten werden

Annahme:

Schubspannung wird über den Querschnitt homogen verteilt

→ bestimmen der über den Querschnitt gemittelten Schubspannung

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} \leq \tau_{zul} \quad d \geq \sqrt{\frac{4 F}{\pi \tau_{zul}}} \geq 11,3mm$$

Da 11,3mm jedoch kein Nennmaß ist nimmt man das nächst größere

→ $d = 12mm$

Beispiel 5)

Gegeben:

$$A_i = A = 1 \text{ cm}^2$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$F = 1,2 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Gesucht:

a) Stabspannungen

$$\uparrow: 0 = F_{S1} + F_{S2} + F_{Bv} - F$$

$$\rightarrow: 0 = F_{Bh}$$

$$\downarrow D: F_{S1} 2a - F_{Bv} a = 0$$

$$2F_{S1} + F_{Bv} = 0$$

3 Gleichungen, 4 Unbekannte: System ist einfach statisch unbestimmt.

Annahme: durch die angreifende Kraft F wird der rechte Stab verlängert und der linke verkürzt.

Verlängerung mit HOOKE

$$\Delta l_i = \frac{F_{Si} l}{E A}$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_{S2} l}{E A} \quad ; \quad \Delta l_1 = \frac{F_{S1} l}{E A}$$

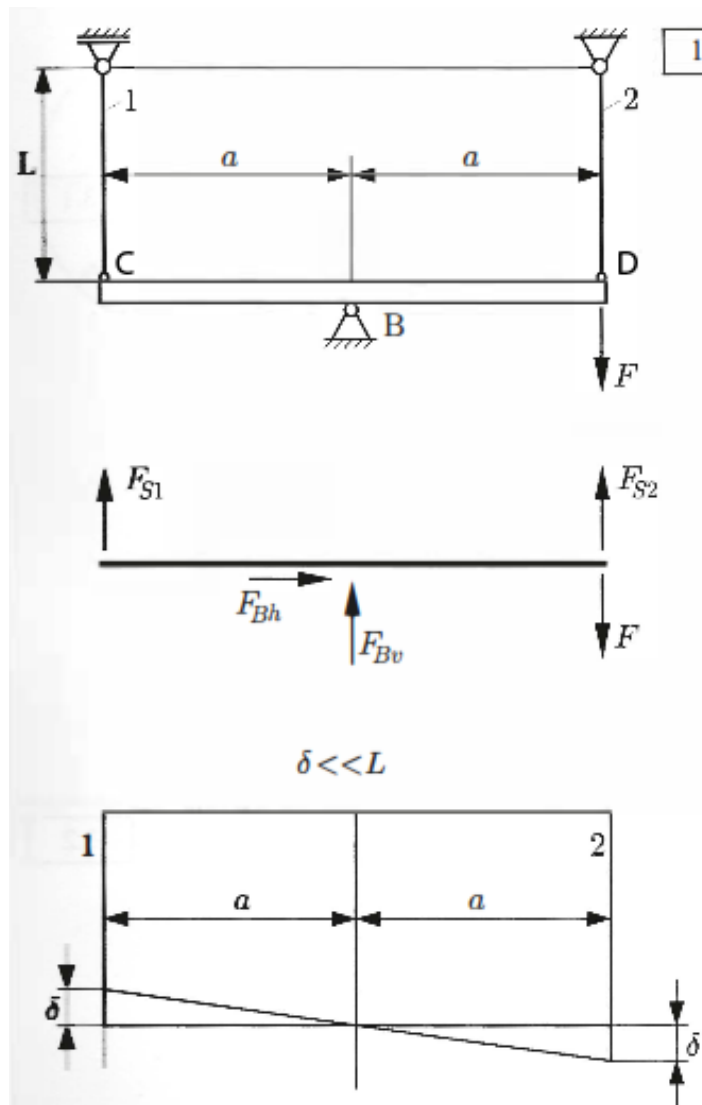
$$\Delta l_1 = -\Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$$

$$\frac{F_{S1} l}{E A} + \frac{F_{S2} l}{E A} = 0$$

$F_{S1} + F_{S2} = 0$ Vierte Gleichung Gefunden!

$$F_{Bv} = F \quad F_{S1} = -\frac{F_{Bv}}{2} = -\frac{F}{2} \quad F_{S2} = -F_{S1} = \frac{F}{2}$$

i	$F_i (10^3 \text{ N})$	$\sigma \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)$	$\Delta l \text{ (mm)}$
1	-6	-60	-0,3
2	6	60	0,3



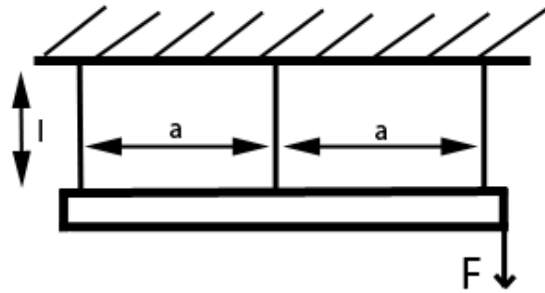
Beispiel 6)

Gegeben: $A_i = A_1 = A_2 = A_3 = 1 \text{ cm}^2$

$$E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$F = 1,2 \cdot 10^4 \text{ N}$$



Gesucht: a) Stabspannungen

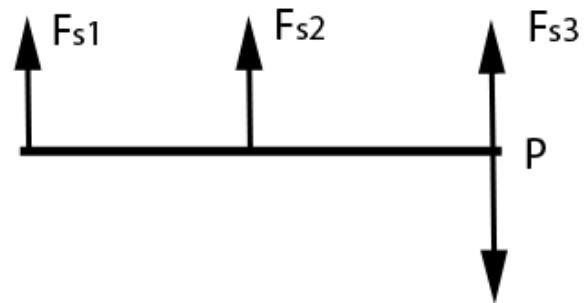
b) $|\Delta l_i| < \Delta l_{zul} = 1 \text{ mm}$

Lösung:

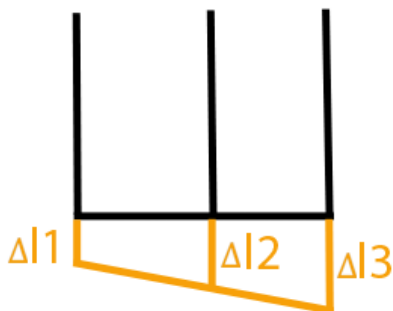
$$1^*) \uparrow: 0 = F_{s1} + F_{s2} + F_{s3} - F$$

$$\rightarrow: 0 = 0$$

$$2^*) \downarrow P: -F_{s1}2a - F_{s2}a = 0$$



⇒ 2 Gleichungen, 3 Unbekannte: System einfach statisch unbestimmt.



Kinematik:

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a}$$

Verlängerung mit HOOKE:

$$\Delta l_i = \frac{s_i l}{E A}$$

$$1^*) \uparrow: F_{s1} + F_{s2} + F_{s3} = F$$

$$2^*) \downarrow P: 2F_{s1} + F_{s2} = 0$$

$$F_{s3} - F_{s1} = 2(F_{s2} - F_{s1})$$

$$3^*) \Rightarrow F_{s1} - 2F_{s2} + F_{s3} = 0$$

$$\underline{F_{s1} = -\frac{F}{6} \quad F_{s2} = \frac{F}{3} \quad F_{s3} = \frac{5F}{6}}$$

b)

i	$F_{si}(10^3 N)$	$\sigma_i \left(\frac{N}{mm^2} \right)$	$\Delta l \left(\frac{1}{mm} \right)$
1	-2	-20	-0,1
2	4	40	0,2
3	10	100	0,5
$\Delta l_i < 1mm = \Delta l_{zul}$			

2.2. Torsion von Stäben mit Kreisquerschnitt

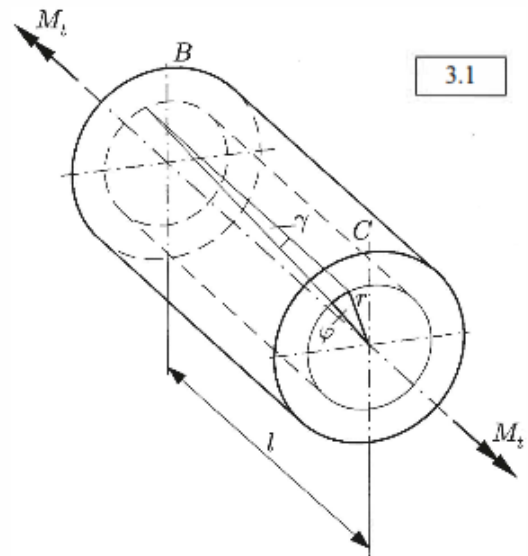
Kinematische Annahmen:

- Querschnitte bleiben eben (Schnittfläche bleibt eine Ebene) und unverzerrt
- $|\gamma| \ll 1$ γ ... Schubverzerrung

$$\gamma(r) * l = \varphi * r$$

HOOKE (Werkstoffgesetz)

$$\tau = G * \gamma = G * \underbrace{\frac{\varphi}{l}}_{\text{Ist konstant}} * r = K * r$$

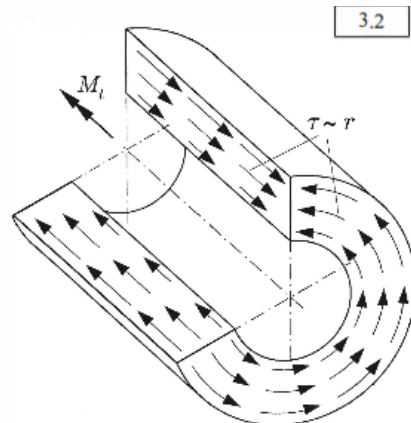


3.1

Drehwinkel des Querschnittes C relativ zu B

Schubspannungen

- Verlaufen tangential zum Rand
- Maximaler Schub am äußeren Wellenrad



3.2

Statik

Resultierendes Moment der Flächenkraftverteilung $\tau(r)$ im Querschnitt:

$$M_f = \int_A \tau * r \, dA$$

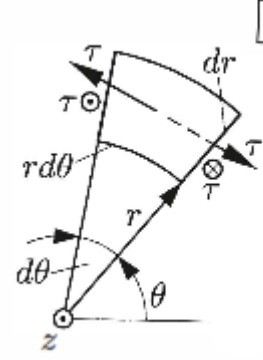
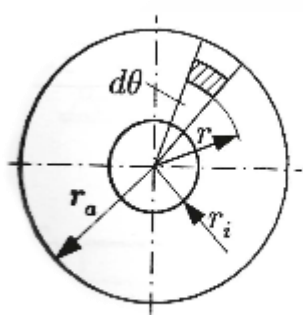
Beispielrechnung für dA

$$dA = r * d\vartheta * dr$$

$$M_t = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \tau * r * d\vartheta * dr * r$$

Elementare Fläche dA
↓
Elementare Kraft * Weg = Moment

$$= K * \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} r^3 d\vartheta * dr$$



3.3

Ergebnis für den Kreisring

$$M_t = K \frac{\pi}{2} * (r_a^4 - r_i^4) = K * I_p$$

I_p ... polares Flächenträgheitsmoment
 → hier speziell für den Kreisquerschnitt:

$$I_p = \frac{\pi}{2} (r_a^4 - r_i^4)$$

$$K = \frac{M_t}{I_p} \quad \tau = K * r \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_t}{I_p} * r$$

I_t ... Torsionsträgheitsmoment
 → beim Kreisquerschnitt: $I_p = I_t$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} * r_{max} = \frac{M_t}{\left(\frac{I_p}{r_{max}}\right)} = \frac{M_t}{W_t}$$

W_t ... Widerstandsmoment gegenüber Torsion

Vollquerschnitt ($r_i = 0$ und $r_{max} = r_a = a$)

$$W_t = \frac{I_p}{r_{max}} = \frac{\pi}{2} * a^3$$

Drehwinkel:

$$K = \frac{G * \varphi}{l} = \frac{M_t}{I_p} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{M_t}{G * I_p} * l$$

Analogie zum Stab: Verformung durch Verlängerung wird ersetzt durch Verformung durch Drehung.

$$\Delta l = \frac{F}{E * A} * l \quad \text{-----} \rightarrow \quad \varphi = \frac{M_t}{G * I_p} * l$$

$G * I_p$ = Torsionssteifigkeit

$\frac{\varphi}{l}$ = Drillung, Verwindung

In der Formelsammlung: ϑ

$\vartheta = \frac{\varphi}{l}$ ist ein Spezialfall wenn M_t, φ_P, G über die Länge der Welle konstant sind. sonst gilt: $\varphi = \frac{d\varphi}{dz}$

Beispiel: abgesetzte Welle

Gegeben:

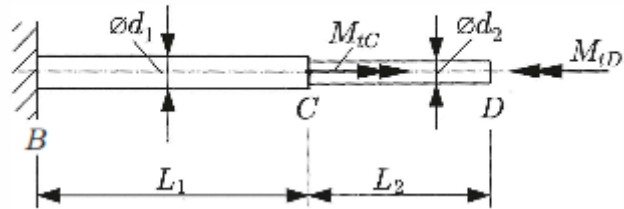
$L_1 = L_2 = 100\text{mm}$

$d_1 = 12\text{mm} ; d_2 = 8\text{mm}$

$M_{tD} = 5\text{Nm} ; M_{tC} = 25\text{Nm}$

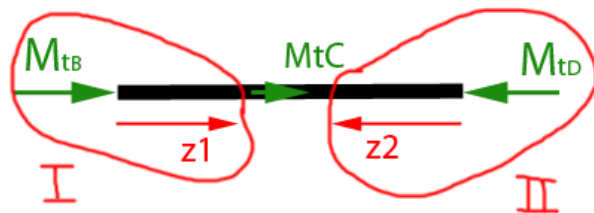
$G = 0,83 \cdot 10^5 \text{MPa}$

3.4



Gesucht:

- a) Maximale Schubspannung
- b) Verdrehwinkel bei D bezüglich C



Lösung zu 1)

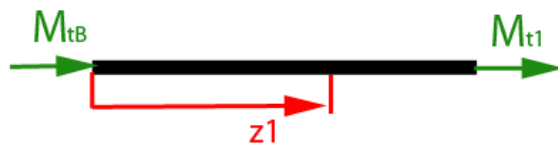
Lagermomente: GGW

$$\uparrow C: 0 = M_{tB} + M_{tC} - M_{tD} \rightarrow M_{tB} = M_{tD} - M_{tC} = \underline{-20\text{Nm}}$$

Torsionsmomenteverlauf:

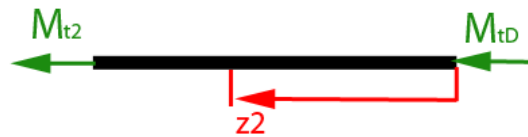
$$\uparrow X: 0 = M_{tB} + M_{t1}$$

$$M_{t1} = -M_{tB} = \underline{20\text{Nm}}$$

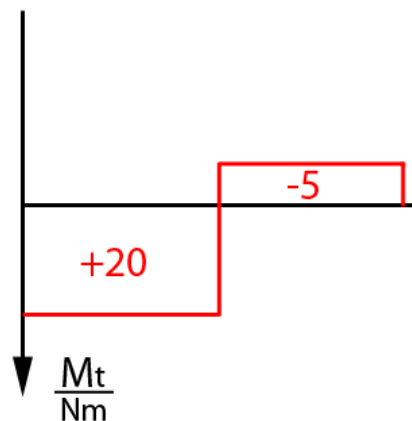


$$\uparrow X: 0 = -M_{t2} - M_{tD}$$

$$M_{t2} = -M_{tD} = \underline{-5\text{Nm}}$$



$$\tau_{max} = \frac{|M_{ti}|}{W_{bi}} \quad \text{mit } W_{bi} = \frac{\pi}{16} d_i^3$$



$$\tau_{max} = \max(\tau_{max1}; \tau_{max2}) = \max\left(58,95 \frac{N}{mm^2}, 49,74 \frac{N}{mm^2}\right) = \underline{\underline{58,95 \frac{N}{mm^2}}}$$

Lösung zu 2)

$$\vartheta = \frac{M_{ti}}{G * I_{ti}} = \frac{d\varphi}{dz} \quad \Rightarrow \quad \int_{\varphi_{0i}}^{\varphi_i} d\varphi = \frac{M_{ti}}{G * I_{ti}} * \int_0^{l_i} dz$$

φ_{0i} ...Startverdrillung
 M_{ti}, G, I_{ti} sind konstant über z

$$\varphi_i - \varphi_{0i} = \frac{M_t}{G * I_{ti}} * l_i$$

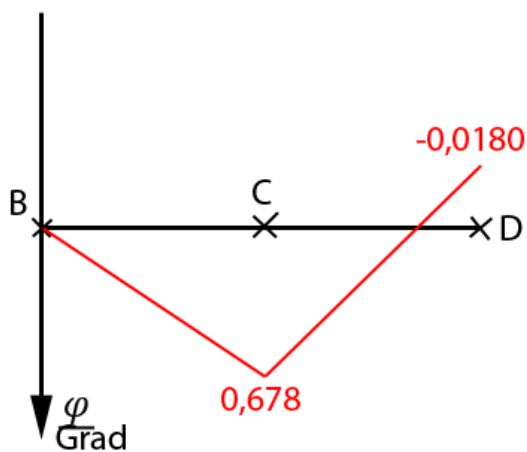
$$\Rightarrow \varphi_i = \frac{M_{ti} * l_i}{G * I_{ti}} + \varphi_{0i} \quad \text{mit } I_{ti} = \frac{\Pi}{32} * d_i^4$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 = \frac{M_{t2} * l_2}{G * I_{t2}} + \varphi_{02}$$

Der „Startwert“ φ_{02} ist die Zwangsbedingung

$$\varphi_{02} = \varphi_c = \varphi_1 = \frac{M_{t1} * l_1}{G * I_{t1}} + \varphi_{01} = \underline{0,678^\circ} \quad (\varphi_{01} = 0 \rightarrow \text{Festeinspannung})$$

$$\varphi_D = -0,858^\circ + 0,678^\circ = \underline{\underline{-0,180^\circ}}$$



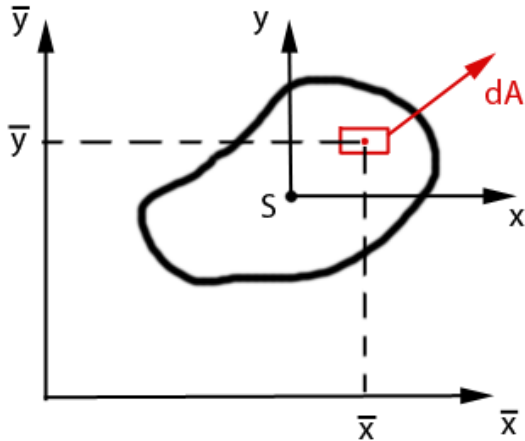
$$\Rightarrow \varphi_{DC} = 0,858^\circ$$

2.3 Gerade Biegung

2.3.1 Flächenmomente zweiter Ordnung

Flächenmomente zweiter Ordnung sind mathematisch definierte Querschnittsgrößen für die Berechnung von Beanspruchungen, Spannungen und Drehungen und Verformungen an Balken.

2.3.1.1. Definition der Flächenmomente zweiter Ordnung



\bar{x}, \bar{y} : beliebige Koordinatensysteme

x, y Koordinatensystem des Schwerpunktes

Es gilt: $x \parallel \bar{x}$ sowie $y \parallel \bar{y}$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_A \bar{y}^2 \quad \left| \quad I_{\bar{x}\bar{y}} = - \int_A \bar{x} * \bar{y} dA \quad \left| \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_A \bar{x}^2 dA$$

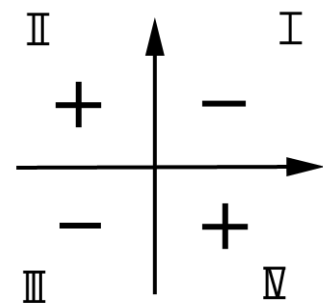
$I_{\bar{x}\bar{x}}$ und $I_{\bar{y}\bar{y}}$... axiale Trägheitsmomente
 $I_{\bar{x}\bar{y}}$... Derivations- bzw Zentrifugalmoment
 Dimension: *Länge*⁴

Vorzeichenbetrachtung: $dA, x^{-2}, y^{-2}, x^2, y^2 > 0$

Axiale Flächenträgheitsmomente: $I_{xx}, I_{yy}, I_{\bar{x}\bar{x}}, I_{\bar{y}\bar{y}} > 0$

Derivationsmoment:

$Signum(I_{\bar{x}\bar{x}})$ bzw $Signum(I_{xy})$ bestimmt sich
 $Signum(-\bar{x} \bar{y})$ bzw $Signum(-x y)$



2.3.1.2 Berechnung der Flächenmomente 2. Ordnung

Rechteck

Axiale Trägheitsmomente:

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_A \bar{y}^2 dA = \int_0^h \int_0^b \bar{y}^2 d\bar{x} d\bar{y}$$

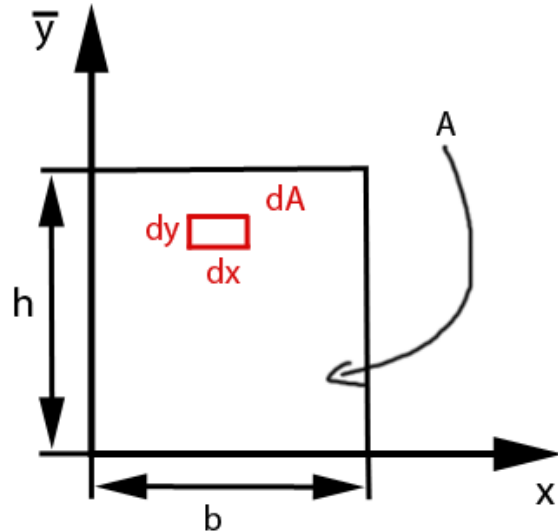
$$= \int_0^h \bar{y}^2 * b d\bar{y} = \frac{b * h^3}{3}$$

Analog $I_{\bar{y}\bar{y}}$:

$$\int_A \bar{x}^2 dA = \dots = \frac{h * b^3}{3}$$

Deviationsmoment:

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_A \bar{x} \bar{y} dA = - \int_0^h \int_0^b \bar{x} \bar{y} d\bar{x} d\bar{y} = - \int_0^h \bar{y} d\bar{y} * - \int_0^b \bar{x} d\bar{x} = - \frac{b^2 * h^2}{4}$$



Axiale Flächenträgheitsmomente (bezüglich des Schwerpunktes)

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy$$

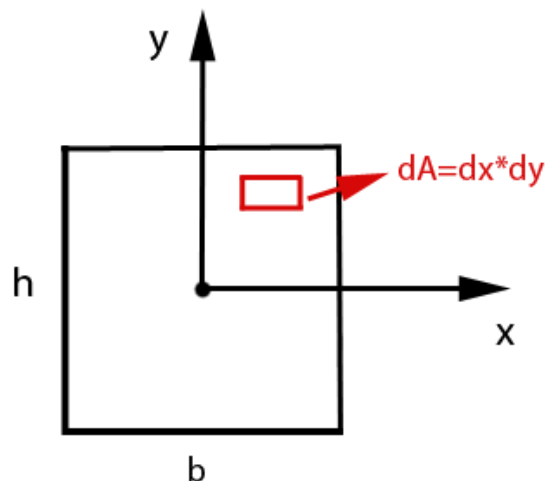
$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b y^2 dy = \frac{h^3 b}{12}$$

Analog:

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA = \dots = \frac{h b^3}{12}$$

Deviationsmoment:

$$I_{xy} = - \int_A xy dA = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} xy dx dy = 0$$



Es gilt: $I_{xy} = 0$ falls eine Koordinatensystemachse gleichzeitig eine Symmetrielinie (-ebene) des Querschnitts ist. (Formelsammlung Seite 6)

2.3.1.3 Satz von Steiner

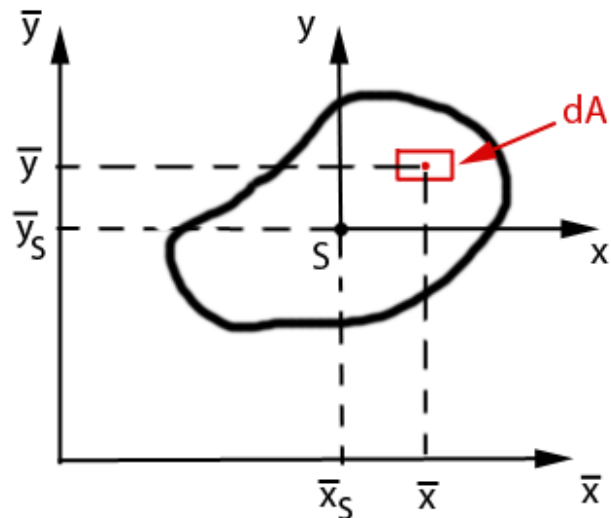
Ziel: Umrechnung von $I_{\bar{x}\bar{y}} \leftrightarrow I_{kl}$

\bar{x}, \bar{y} ... beliebige Koordinaten

x, y ... Koordinaten mit Ursprung im
Schwerpunkt des Körpers, parallel
zu x, y

\bar{x}_s, \bar{y}_s ... Koordinaten des Schwerpunktes
im \bar{x}, \bar{y} -System

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{x}_s + x \\ \bar{y} &= \bar{y}_s + y\end{aligned}$$



Umrechnung von $I_{\bar{x}\bar{y}}$

$$\begin{aligned}I_{\bar{x}\bar{x}} &= \int_A \bar{y}^2 dA = \int_A (\bar{y}_s + y)^2 dA = \int_A (\bar{y}_s^2 + 2\bar{y}_s y + y^2) dA \\ &= \underbrace{\bar{y}_s^2 \int_A dA}_{=A} + \underbrace{2\bar{y}_s \int_A y dA}_{=0 \text{ da SP-Ko}} + \underbrace{\int_A y^2 dA}_{=I_{xx}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + (\bar{y}_s^2 * A)} \quad \text{bzw: } \boxed{I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - (\bar{y}_s^2 * A)}$$

$$\text{Analog: } \Rightarrow \boxed{I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + (\bar{x}_s^2 * A)} \quad \text{bzw: } \boxed{I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - (\bar{x}_s^2 * A)}$$

Beachte: $\bar{x}_s^2, \bar{y}_s^2, A > 0$

→ Axiale Flächenträgheitsmomente bezüglich der Schwerpunktsachsen sind am kleinsten.

Deviationsmoment

$$\begin{aligned}I_{\bar{x}\bar{y}} &= - \int_A \bar{x} \bar{y} dA = - \int_A (\bar{y}_s + y) * (\bar{x}_s + x) dA = - \int_A (\bar{x}_s \bar{y}_s + \bar{x}_s y + x \bar{y}_s + xy) dA \\ &= - \bar{x}_s \bar{y}_s \underbrace{\int_A dA}_{=A} - \bar{x}_s \underbrace{\int_A y dA}_{=0 \text{ da SP-Ko}} - \bar{y}_s \underbrace{\int_A x dA}_{=0 \text{ da SP-Ko}} - \underbrace{\int_A xy dA}_{=I_{xy}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} - (\bar{x}_s * \bar{y}_s * A)} \quad \text{bzw: } \boxed{I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + (\bar{x}_s * \bar{y}_s * A)}$$

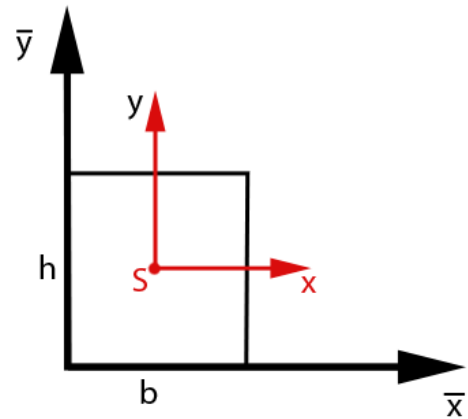
Beispiel

bekannt ist bereits:

$$I_{xx} = \frac{b * h^3}{12}$$

$$\bar{y}_s = \frac{h}{2} ; \quad \bar{x}_s = \frac{b}{2} ; \quad A = bh ; \quad I_{xy} = 0$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_s^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 * bh = \underline{\underline{\frac{bh^3}{3}}}$$



Analog:

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + \bar{x}_s^2 A = \underline{\underline{\frac{hb^3}{3}}}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} - \bar{x}_s \bar{y}_s A = 0 - \frac{b}{2} \frac{h}{2} (bh) = \underline{\underline{-\frac{b^2 h^2}{4}}}$$

2.3.1.4 Zusammengesetzte Flächen

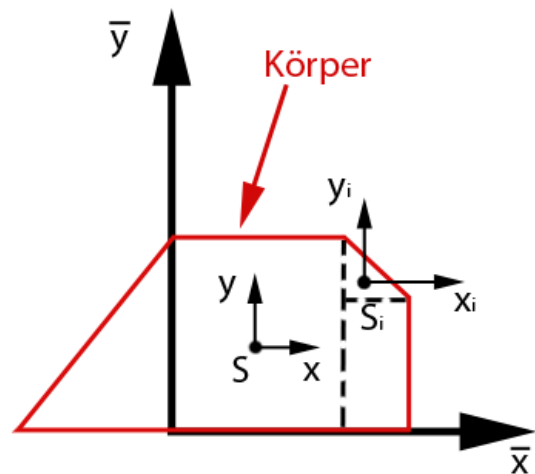
Es seien die I_{kl} der Einzelflächen bekannt.

Es gilt:

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \sum_i (I_{xxi} + \bar{y}_s^2 A_i)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \sum_i (I_{yyi} + \bar{x}_s^2 A_i)$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \sum_i (I_{xyi} - \bar{y}_s \bar{x}_s A_i)$$



Beispiel

Gesucht: I_{xx}

- 1) Schwerpunkt ($x=0$ aus Symmetrie)

$$y_s A_s = \frac{7}{2} a(3a^2) + \frac{3}{2} a(3a^2) = \frac{30}{2} a^3$$

$$y_s = \frac{\frac{30}{2} a^3}{6a^2} = \underline{\underline{\frac{5}{2} a}}$$

- 2) Flächenmomente 2. Ordnung (Bezugspunkt)

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{3a(4a)^3}{3} - 2 \frac{a(3a)^3}{3}$$

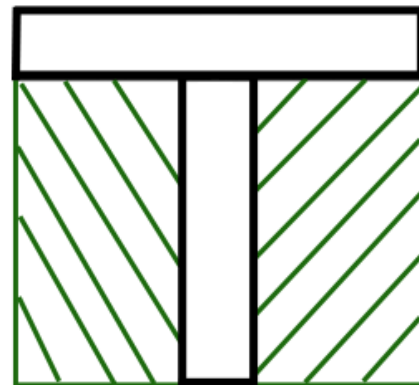
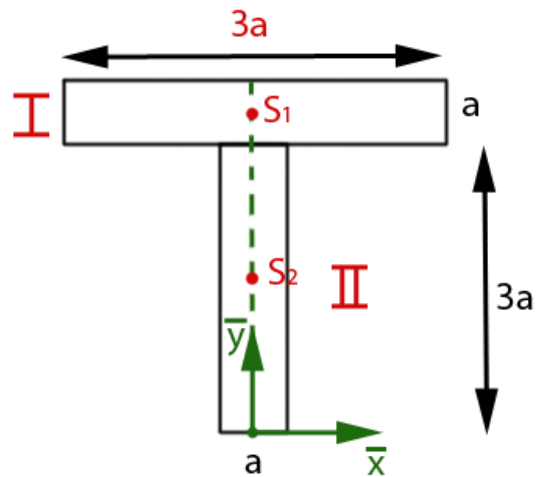
$$I_{\bar{x}\bar{x}} = 64a^4 - 18a^4 = \underline{\underline{46a^4}}$$

- 3) Flächenmomente 2. Ordnung (Schwerpunkt)

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_s^2 A_s = 46a^4 - \left(\frac{5}{2} a\right)^2 * 6a^2 = \underline{\underline{\frac{17}{2} a^4}}$$

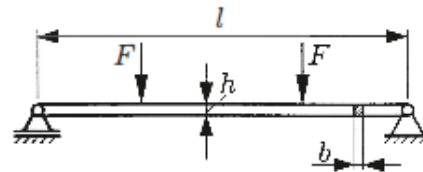
- 4) Deviationsmoment

$$I_{xy} = 0 \quad \text{da } \bar{x} \parallel x \text{ und } \bar{y} \parallel y$$



2.3.2 Biegespannungen prismatischer Balken

2.3.2.1 Voraussetzungen



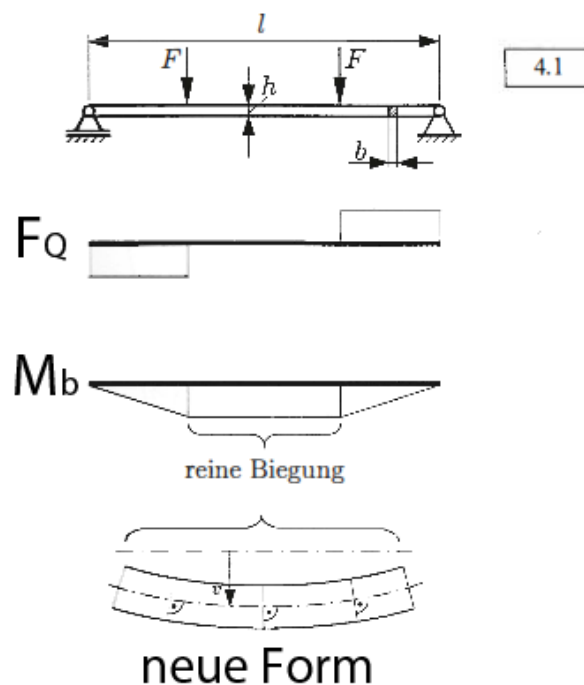
- 1) Balken: Querschnitt (Breite, Höhe) \ll Länge
($b, h \ll l$)
- 2) Reine Biegung: Querkrafteinfluss = 0 (oder vernachlässigbar)
- 3) Durchbiegung: \ll Balkenlänge
- 4) Die Querschnitte bleiben eben und senkrecht zur Tangente an gekrümmter Balkenachse
- 5) Das HOOKE-Gesetz für den einachsigen Spannungszustand

2.3.2.2 Spannungen bei gerader Biegung

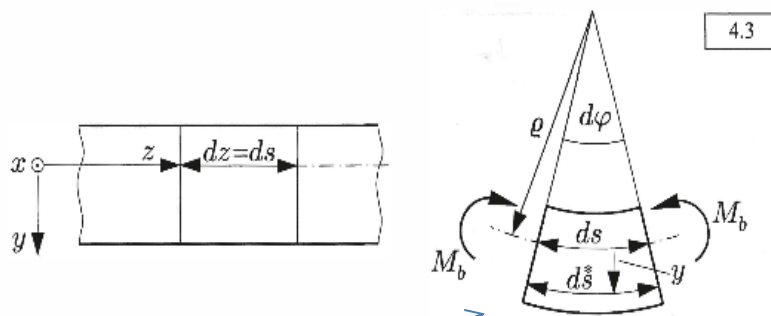
Definition der geraden Biegung: Biegemoment \parallel Hauptachse

- ➔ Symmetrieachsen des Querschnitts sind Hauptachsen
- ➔ Die beiden Hauptachsen stehen senkrecht auf einander

- 1) Kinematik der Verformung (Geometrie)



Genauere Betrachtung der neuen Form des Balkens:



y in Richtung der Zugseite!

ds... ungedehnte Länge

ds-hat... gedehnte Länge

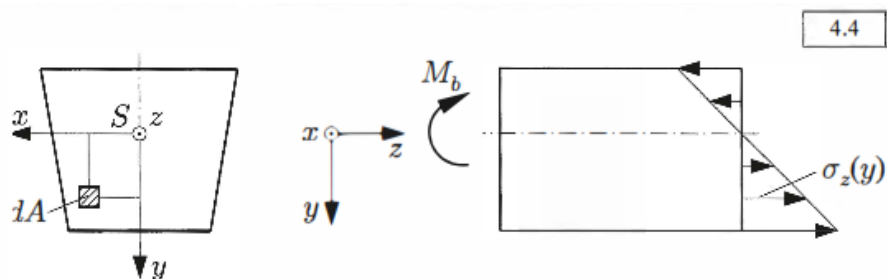
1) Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{d\hat{s} - ds}{ds} = \frac{(\rho + y)d\varphi * \rho * d\varphi}{\rho * d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

2) HOOKE

$$\sigma_2 = E\varepsilon = E * \frac{y}{\rho}$$

3) Statik



Gleichgewicht:

z-Richtung:

$$0 = \int \sigma_z dA = \int \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int y dA = 0$$

➔ Ist erfüllt falls y vom Schwerpunkt aus zählt (soll hier gelten)

Momentengleichgewicht:

$$\downarrow \odot x: 0 = -M_b + \int y \sigma_z dA$$

$$M_b = \frac{E}{\rho} * \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} * I_{xx} = \frac{\sigma_z}{y} * I_{xx}$$

Mit: $\sigma_z = \frac{E * y}{\rho}$

$$\sigma_z = \frac{M_b}{I_{xx}} * y$$

$$M_b = \frac{E I_{xx}}{\rho}$$

E * I_{xx} ... Biegesteifigkeit

$$|\sigma_z|_{max} = \frac{|M_b|}{I_{xx}} * |y|_{max} \quad \text{Mit: } W_b = \frac{I_{xx}}{|y|_{max}} \rightarrow \text{Widerstandsmoment für Biegung}$$

$$|\sigma_z|_{max} = \frac{|M_b|}{W_b}$$

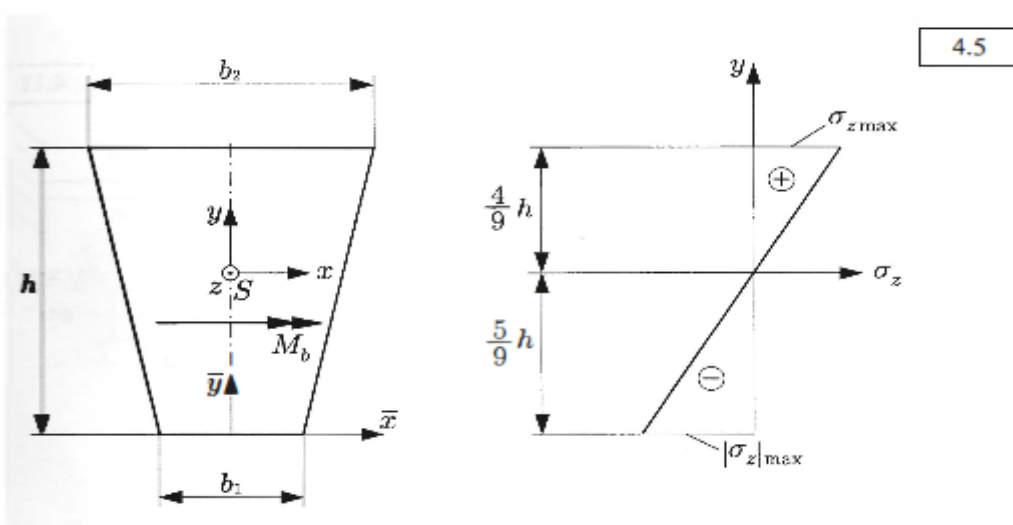
Erfüllung der Voraussetzungen gerader Biegung

$$\uparrow_y : 0 = \int x \sigma_z dA = \frac{F}{\rho} \int_A xy dA$$

$$= -I_{xy}$$

Wenn $I_{xy} = 0$ muss x oder y eine Hauptachse sein (einfache Symmetrie)

Beispiel



Gegeben: $b_1 = a$; $b_2 = 2a$; $h = 2a$; $M_b > 0$

Gesucht: 1) Spannungsverteilung

2) $|\sigma_z|_{max}$

Lösung: $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = 3a^2$

Schwerpunkt:

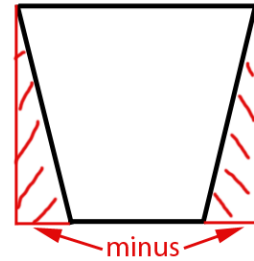
$$\bar{y}_s = \frac{1}{A} \left(\underbrace{b_2 h}_{\text{Rechteck}} * \frac{h}{2} - \underbrace{2 \frac{1}{2} \left(\frac{b_2 - b_1}{2} \right) h}_{\text{Dreiecke}} * \frac{h}{3} \right) = \frac{1}{A} \left(2a * 2a * a - \frac{a}{2} * 2a * \frac{2a}{3} \right) = \frac{10}{9} a^3$$

Abstand y_{si}

Berechnung von I_{xx} :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{b_2 h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 * A_{\text{Viereck}} - 2 * \frac{b_2 - b_1}{2} * \frac{h^3}{12} = \frac{14}{3} a^4$$

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - y_s^2 A = \frac{14}{3} a^4 - \left(\frac{10}{9} a\right)^2 * 3a^2 = \underline{\underline{\frac{26}{27} a^4}}$$



$$\sigma_z = \frac{M_b}{I_{xx}} * y \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{max} = h - \bar{y}_s = \frac{8}{9} a \\ y_{min} = 0 - \bar{y}_s = -\frac{10}{9} a \end{array} \right.$$

$$\sigma_z(y_{max}) = \frac{12}{13} * \frac{M_b}{a^3}$$

$$\sigma_z(y_{min}) = -\frac{15}{13} * \frac{M_b}{a^3}$$



$$|\sigma_z|_{max} = \underline{\underline{\frac{15}{13} * \frac{M_b}{a^3}}}$$

Anderer Weg:

$$W_b = \frac{I_{xx}}{|y_{max}|} = \frac{\left(\frac{26}{27} * a^4\right)}{\left(\frac{10}{9} * a\right)} = \frac{13}{15} a^3$$

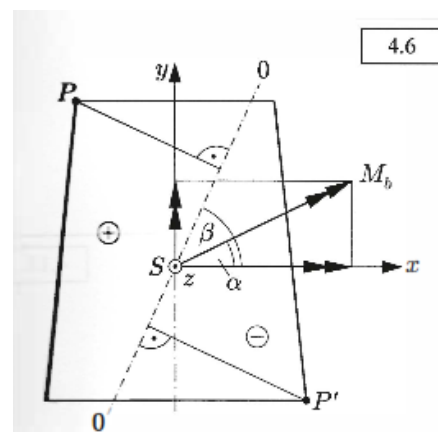
$$|\sigma_z|_{max} = \frac{|M_b|}{W_b} = \underline{\underline{\frac{15}{13} * \frac{M_b}{a^3}}}$$

2.3.2.3 Spannungen bei schiefer Biegung

- ➔ M_b ist nicht parallel zu den Hauptachsen
- ➔ Alle weiteren Hauptachsen sind bekannt

$$\sigma_z = \underbrace{\frac{M_{bx}}{I_{xx}} * y - \frac{M_{by}}{I_{yy}} * x}$$

Überlagerung ist erlaubt, da alle beteiligten Gleichungen linear sind!



$$\sigma_{z1} = \frac{M_{bx}}{I_{xx}} * y \quad ; \quad \sigma_{z2} = -\frac{M_{by}}{I_{yy}} * x$$

- Frage: wann ist $|\sigma_z|$ maximal?

➔ Suche nach der Spannungsnulllinie $\sigma_z(x, y) = 0$

1) Projektion von M_b auf x,y

$$\frac{\cos(\alpha)}{I_{xx}} * y - \frac{\sin(\alpha)}{I_{yy}} * x = 0$$

$$y = \left(\tan(\alpha) * \frac{I_{xx}}{I_{yy}} \right) * x = x * \tan(\beta)$$

➔ Maximale Spannung kann in den Punkten **P** und **P'** auftreten (aus der Zeichnung)

2.3.2.4 Spannungen bei Biegung (M_b) und Zug (F_L) bzw. Druck

$$\sigma_z = \frac{M_b}{I_{xx}} * y + \frac{F_L}{A}$$

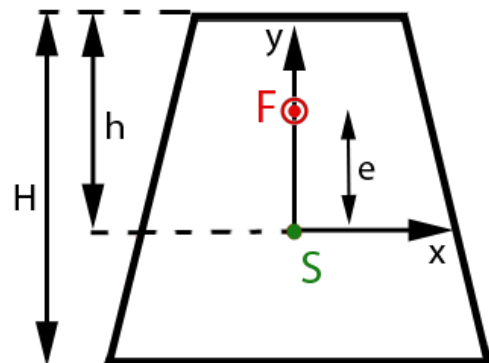
$$F_L = F \quad ; \quad M_b = F * e$$

$$|\sigma_z|_{max} = ?$$

Spannungsnulllinie:

$$\sigma_z = 0 = \frac{F}{A} + \frac{F * e}{I_{xx}} * y_0$$

$$y_0 = -\frac{I_{xx}}{A * e}$$

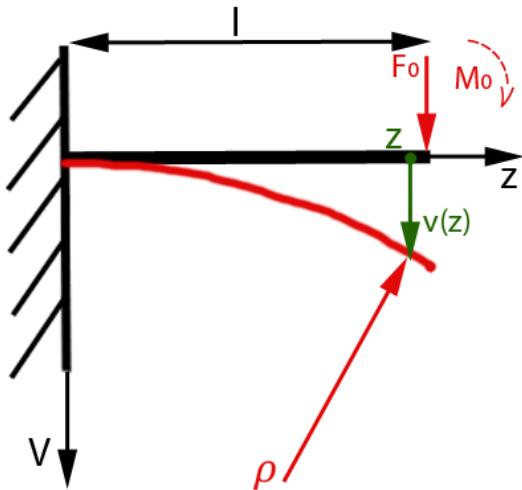


Spezieller Lastfall

$$|\sigma_z|_{max} = \begin{cases} \text{Bei } y = h \\ \text{Bei } y = -(H - h) \text{ (nicht relevant da kleiner null)} \end{cases}$$

$$|\sigma_z|_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_b}{I_{xx}} * h$$

2.3.3 Biegeverformungen



ρ ... Krümmungsradius

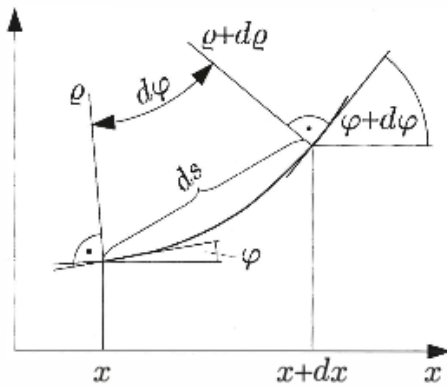
V ... Durchbiegung

Es gilt: $|v(z)| \ll l$

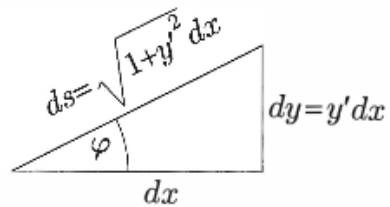
Sowie: $\rho = v'(z)$ weil $|v'(z)| \ll l$

Für gerade Biegung ($M_b \parallel HA$) gilt:

$$M_b = \frac{E \cdot I_{xx}}{\rho}$$



4.11



Gekrümmte Geometrie

Annahmen aus Abbildung 4.11 rechts:

$$dy = y' dx \implies y' = \frac{dy}{dx}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \cdot \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\varphi) \implies \varphi = \arctan(y')$$

Es gilt:

$$\rho * d\varphi = ds \implies \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} * \frac{dx}{ds}$$

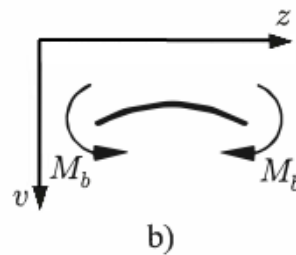
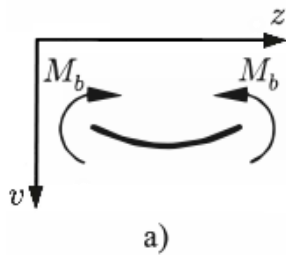
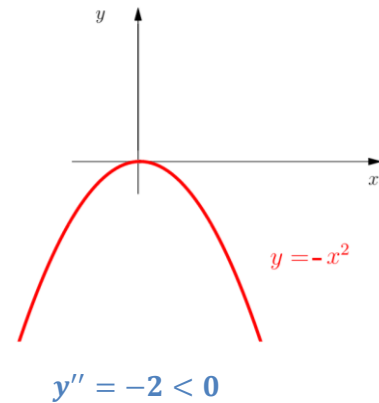
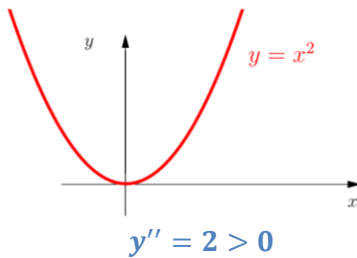
$$\frac{1}{\rho} = \underbrace{\frac{y''}{1+y'^2}} * \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ableitung von arctan

Vereinfachung infolge Durchbiegung \ll Balkenlänge:

$$|y'| \ll 1 \implies \frac{1}{\rho} = y''$$

Vorzeichen der Krümmung



4.12

Vorzeichen der Balkenkrümmung

$$\frac{1}{\rho} = v'' = -\frac{M_b}{E I_{xx}}$$

$$\frac{1}{\rho} = +v'' = \frac{M_b}{E I_{xx}}$$

(Bei Verwendung der Beziehungen aus der Formelsammlung diese Beziehung verwenden.)

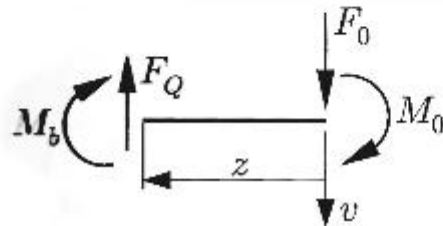
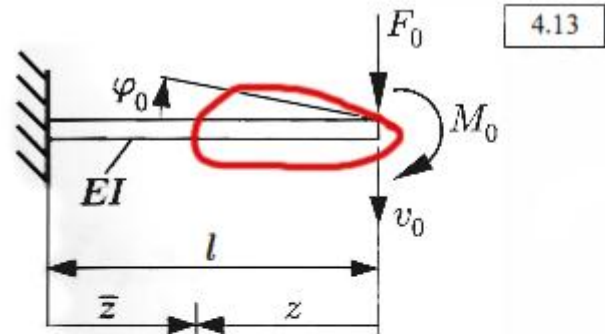
- ➔ Die differentielle Gleichung der elastischen Linie in linearisierter Form
- ➔ Lösen der Differentialgleichung 2. Ordnung durch zweimaliges Integrieren der bekannten rechten Seite
 - Es treten 2 Randbedingungen auf! (Integrationskonstanten)
 - Diese müssen gegeben sein

2.3.3.1 Beispiele

Beispiel 1)

Gegeben: $F_0; M_0; l; E * I$

Gesucht: v, v_0, φ_0



Lösung:

$$\begin{aligned} \downarrow X: 0 &= -M_b - F_0 z - M_0 \\ M_b &= -M_0 - F_0 z & / z = l - \bar{z} \\ M_b &= -M_0 - F_0(l - \bar{z}) = -EI * v''(\bar{z}) \end{aligned}$$

$$v'' = \frac{1}{EI} * (M_0 + F_0 z) = \frac{1}{EI} * (M_0 + F_0 l - F_0 \bar{z})$$

$$v' = \frac{1}{EI} * \left(M_0 \bar{z} + F_0 l \bar{z} - \frac{F_0 \bar{z}^2}{2} + c_1 \right)$$

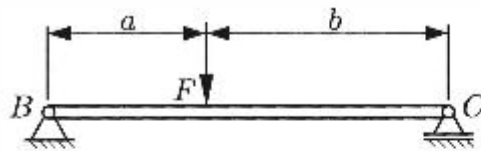
$$v = \frac{1}{EI} \left(M_0 \frac{\bar{z}^2}{2} + F_0 l \frac{\bar{z}^2}{2} - \frac{F_0 \bar{z}^3}{6} + c_1 \bar{z} + c_2 \right)$$

Randbedingungen: $v(\bar{z} = 0) = v(z = l) = 0$
 $v'(\bar{z} = 0) = v'(z = l) = 0$ (Da Festeinspannung) $c_1, c_2 = 0$

$$v_0 = v(\bar{z} = l) = \frac{1}{EI} \left(M_0 \frac{l^2}{2} + F_0 \frac{l^3}{3} \right)$$

$$\varphi_0 = v'(\bar{z} = l) = \frac{1}{EI} \left(M_0 l + F_0 \frac{l^2}{2} \right)$$

Beispiel 2)

Gegeben: a, b, EI, F Gesucht: v_F

Lösung:

$$M_{b1} = -F_B z_1 = -EI v_1''$$

$$v_1'' = -\frac{F_B}{EI} z_1$$

$$v_1' = -\frac{F_B}{EI} \left(\frac{z_1^2}{2} + c_1 \right)$$

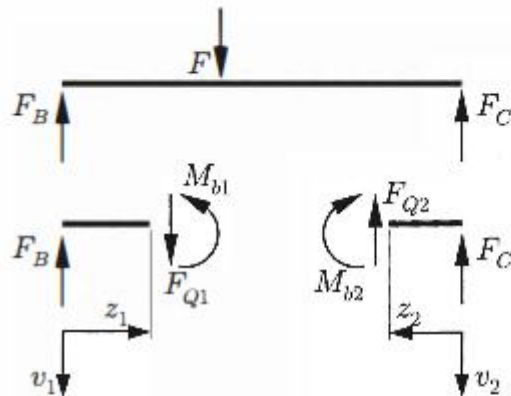
$$v_1 = -\frac{F_B}{EI} \left(\frac{z_1^3}{6} + c_1 z_1 + c_2 \right)$$

$$M_{b2} = F_C z_2 = -EI v_2''$$

$$v_2'' = -\frac{F_C}{EI} z_2$$

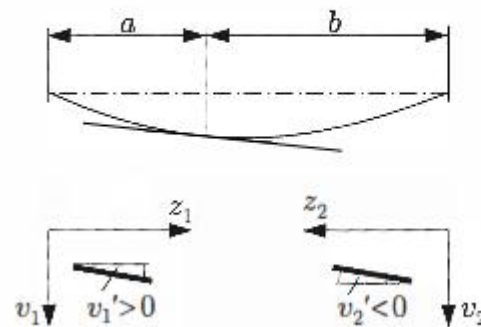
$$v_2' = -\frac{F_C}{EI} \left(\frac{z_2^2}{2} + c_3 \right)$$

$$v_2 = -\frac{F_C}{EI} \left(\frac{z_2^3}{6} + c_3 z_2 + c_4 \right)$$



$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$0 \leq z_2 \leq b$$



Randbedingungen:

$$v_1(z_1 = 0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$v_2(z_2 = 0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

Übergangsbedingungen:

$$I \quad v_1(z_1 = a) = v_2(z_2 = b)$$

$$II \quad v_1'(z_1 = a) = -v_2'(z_2 = b)$$

Lagerkräfte:

$$F_B = \frac{F * b}{a + b} \quad F_C = \frac{F * a}{a + b}$$

$$I: \quad -\frac{F_b}{EI} \left(\frac{a^3}{6} + c_1 a \right) = -\frac{F_c}{EI} \left(\frac{b^3}{6} + c_3 b \right)$$

$$\frac{F * b}{a + b} \left(\frac{a^3}{6} + c_1 a \right) = \frac{F * a}{a + b} \left(\frac{b^3}{6} + c_3 b \right)$$

$$II: \quad -\frac{F * b}{a + b} \left(\frac{a^2}{2} + c_1 \right) = \frac{F * a}{a + b} \left(\frac{b^2}{2} + c_3 \right)$$

$$\implies c_1 = -\frac{1}{a + b} \left[\frac{ab^2}{3} + \frac{a^3}{6} + \frac{ba^2}{2} \right]$$

$$\implies c_3 = -\frac{1}{a + b} \left[\frac{a^2 b}{3} + \frac{b^3}{6} + \frac{b^2 a}{2} \right]$$

$$v_F = v_1(z_1 = a) = v_2(z_2 = b)$$

Für den Sonderfall: $a = b$

$$c_1 = c_3 = -\frac{a^3}{2} \quad / \quad a = \frac{l}{2}$$

$$v_F = v_1(z_1 = a) = \dots = \frac{Fa^3}{6EI}$$

$$a = \frac{l}{2} \implies \underline{\underline{v_F = \frac{Fl^3}{48EI}}}$$

Beispiel 3)

Gegeben: q, EI, l

Gesucht: Lagerkräfte

Lösung:

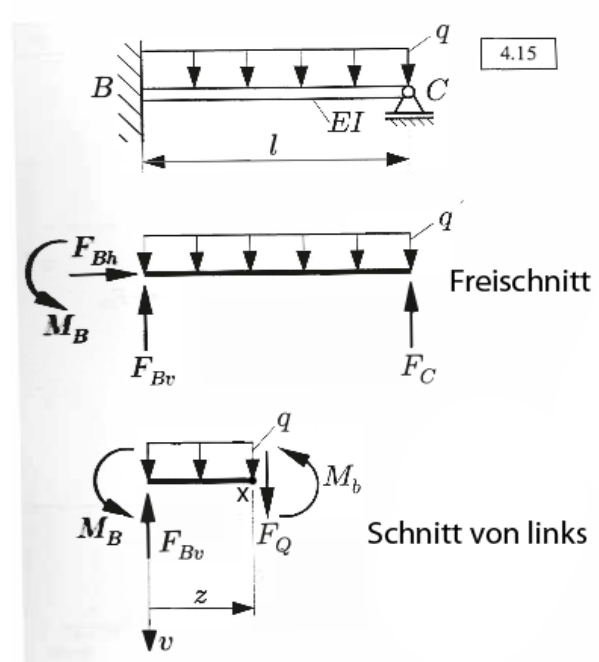
$$\rightarrow: 0 = F_{Bh}$$

$$\uparrow: 0 = F_{Bv} + F_C - ql \quad (1)$$

$$\downarrow C: 0 = M_b - F_{Bv}l + ql\left(\frac{l}{2}\right) \quad (2)$$

→ 2 Gleichungen für 3 Unbekannte

→ System ist einfach statisch unbestimmt!



Suchen zusätzlicher Verformungsbedingungen notwendig:

$$\downarrow X: 0 = M_b + M_b + qz * \left(\frac{z}{2}\right) - F_{Bv} * (z)$$

$$M_b = F_{Bv}z - \frac{qz^2}{2} - M_B = v''EI$$

$$-EI v' = F_{Bv} \frac{z^2}{2} - M_B z - \frac{qz^3}{6} + c_1$$

$$-EI v = F_{Bv} \frac{z^3}{6} - M_B \frac{z^2}{2} - \frac{qz^4}{24} + c_1 z + c_2$$

Randbedingungen:

$$v(0) = 0 \quad (\text{Durchbiegung bei der Einspannung}=0)$$

$$\implies \underline{c_2 = 0}$$

$$v'(0) = 0 \quad (\text{Winkel bei der Einspannung}=0)$$

$$\implies \underline{c_1 = 0}$$

Weitere Verformungsbedingung:

Das Loslager in C kann vertikale Kräfte aufnehmen, daher ist hier die Durchbiegung des Stabes 0.

$$v(l) = 0$$

$$F_{Bv} \frac{l^3}{6} - M_B \frac{l^2}{2} - \frac{ql^4}{24} = 0$$

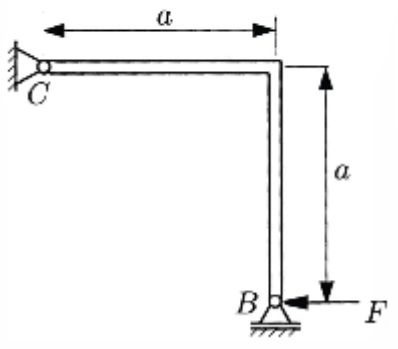
$$F_{Bv} \frac{l}{3} - M_B - \frac{ql^2}{12} = 0 \quad (3)$$

Fertige Lösung:

$$F_C = \frac{3}{8}ql \quad ; \quad F_{Bv} = \frac{5}{8}ql \quad ; \quad M_B = \frac{ql^2}{8}$$

4.16

Beispiel 4)



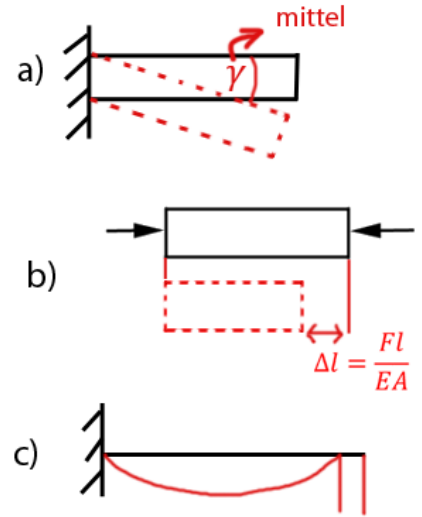
Gegeben: a, F, EI

Gesucht: v_B

Voraussetzungen:

- a) Querkraftschubverformung,
- b) Längskraftverschiebung sowie
- c) Längsverschiebung in Folge einer Drehung um eine Balkenachse

wird wie bisher vernachlässigt.

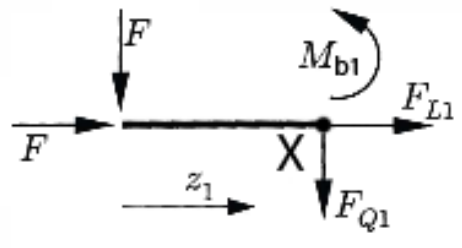


Lagerreaktionen:

Da nur eine Kraft F angreift, folgt aus der Gleichgewichtsbetrachtung dass alle Lagerreaktionen den Betrag F übernehmen.

Schnittreaktionen:

Schnitt 1

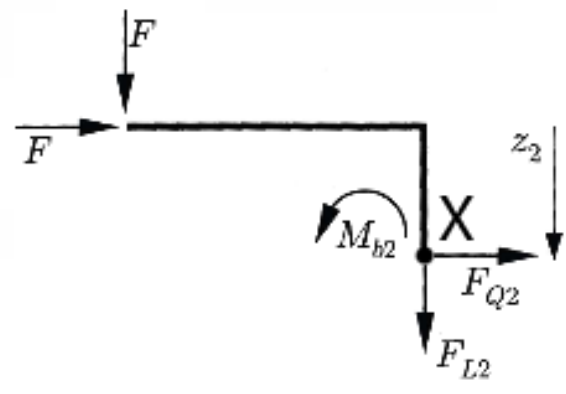


$$EI v_1'' = -M_{b1} = F * z_1$$

$$EI v_1' = \frac{F z_1^2}{2} + c_1$$

$$EI v_1 = \frac{F z_1^3}{6} + c_1 z_1 + c_2$$

Schnitt 2



$$EI v_2'' = -M_{b2} = Fa - F z_2$$

$$EI v_2' = Fa z_2 - \frac{F z_2^2}{2} + c_3$$

$$EI v_2 = Fa \frac{z_2}{2} - F \frac{z_2^3}{6} + c_3 z_2 + c_4$$

Randbedingungen:

$$1) v_1(z_1 = 0) = 0 \implies \underline{c_2 = 0}$$

$$2) v_2(z_2 = 0) = 0 \implies \underline{c_4 = 0}$$

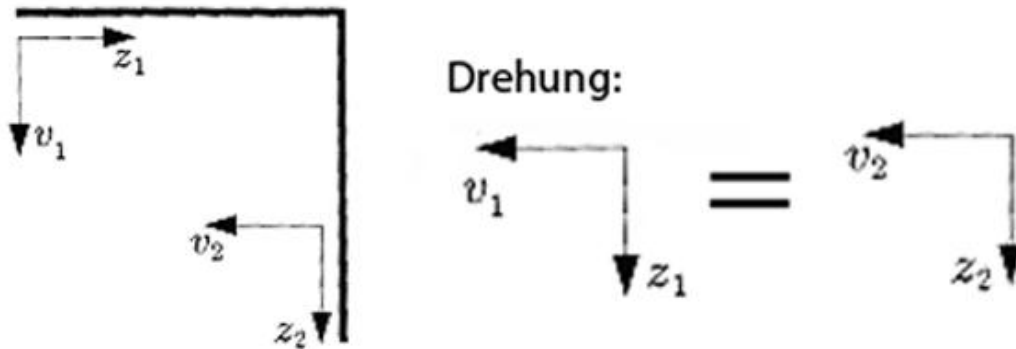
$$3) v_1(z_1 = a) = 0$$

$$\frac{Fa^3}{6} + c_1 a + c_2 (= 0) = 0 \implies \underline{c_1 = -\frac{Fa^2}{6}}$$

Übergangsbedingung:

Geht ein Koordinatensystem (mit z, v) durch Drehung in einander über, so ist das Verhältnis **positiv**.

Muss zusätzlich noch eine Spiegelung angewandt werden, so ist das Verhältnis negativ.



Da eine Drehung genügt gilt:

$$v_1'(z_1 = a) = + v_2'(z_2 = 0)$$

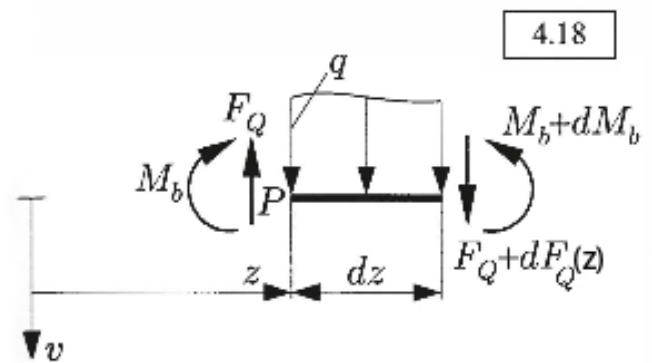
$$\frac{1}{EI} \left(\frac{Fa^2}{2} + c_1 \right) = \frac{1}{EI} (0 + c_3) \quad \text{mit } c_1 = -\frac{Fa^2}{2}$$

$$\underline{c_3 = \frac{Fa^2}{3}}$$

Lösung:

$$v_B = v_F = v_2(a) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fa^3}{2} - \frac{Fa^3}{6} + \frac{Fa^3}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{2Fa^3}{3EI}}}$$

2.3.3.2 Differentialgleichungen 4. Ordnung



$$\uparrow: 0 = F_Q - (F_Q + dF_Q(z)) - q(z)$$

$$\frac{dF_Q}{dz} = F'_Q = -q$$

$$\downarrow P: 0 = -M_b + (M_b + dM_b) - (F_Q + F_Q(z)) * (dz)$$

$$\frac{dM_b}{dz} = M'_b = F_Q$$

$$M_b = -EI v''$$

$$M'_b = F_Q = -(EI v'')$$

$$M''_b = F'_Q = -q = -(EI v'')''$$

$$\boxed{q = (EI v'')''} = EI v^{IV} \quad (\text{da } EI = \text{konst})$$

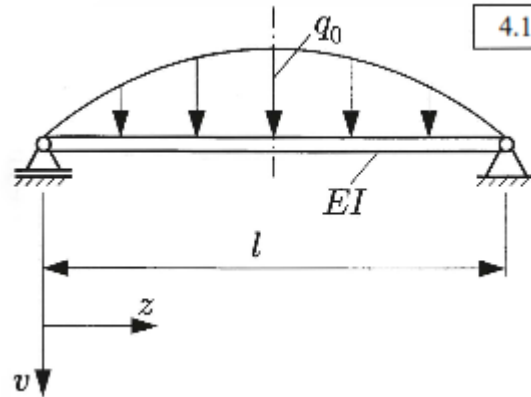
→ Differentialgleichung vierter Ordnung

Gegeben:

$$l, EI, q(z) = q_0 \sin\left(\Pi * \frac{z}{l}\right)$$

Gesucht:

$$v_{max} = v\left(z = \frac{l}{2}\right) \text{ (aus Symmetrie)}$$



$$EI v^{IV} = q_0 \sin\left(\Pi * \frac{z}{l}\right)$$

$$EI v''' = -q_0 \frac{l}{\Pi} \cos\left(\Pi * \frac{z}{l}\right) + c_1$$

$$EI v'' = -q_0 \left(\frac{l}{\Pi}\right)^2 \sin\left(\Pi * \frac{z}{l}\right) + c_1 z_1 + c_2$$

$$EI v' = q_0 \left(\frac{l}{\Pi}\right)^3 \cos\left(\Pi * \frac{z}{l}\right) + \frac{c_1 z_1^2}{2} + c_2 z_1 + c_3$$

$$EI v = q_0 \left(\frac{l}{\Pi}\right)^4 \sin\left(\Pi * \frac{z}{l}\right) + \frac{c_1 z_1^3}{6} + \frac{c_2 z_1^2}{2} + c_3 z_1 + c_4$$

Randbedingungen:

$$v(0) = 0 \implies \underline{c_4 = 0}$$

$$v(l) = 0 \implies v''(0) = 0 \implies \underline{c_2 = 0}$$

$$M_b(0) = 0 \implies v''(l) = 0 \implies \underline{c_1 = 0}$$

$$M_b(l) = 0 \implies \underline{c_3 = 0}$$

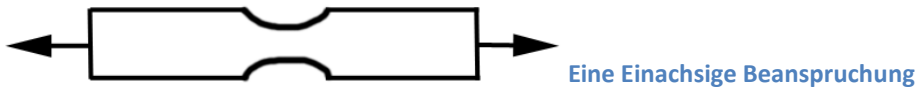
$$\boxed{v = \frac{1}{EI} q_0 \frac{l^4}{\pi^4} \sin\left(\Pi * \frac{z}{l}\right)}$$

$$v_{max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EI} q_0 \frac{l^4}{\Pi^4} * 1 = \underline{\underline{\frac{q_0 l^4}{EI \Pi^4}}}$$

2.4 Festigkeitshypothesen

2.4.1 Probleme bei der Festigkeitsbewertung

- a) Beanspruchungen: Spannung sowie Verzerrung (beides auch mehrachsig)
- b) Beanspruchbarkeit: wird meist aus Zugversuch ermittelt

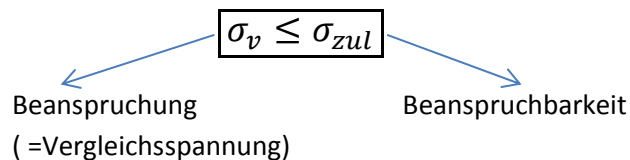


Wie wird nun ein Vergleich von a) und b) vorgenommen?

→ Es ist eine Hypothese notwendig, welche abhängt von:

- Materialeigenschaften
- Art des Versagens
- Lastregime (über Zeit)
- Temperatur
- Weitere Einflüsse

Im Falle der Spannung:



2.4.2 Beispiele für Festigkeitshypothesen

Voraussetzung: Isotropie des Materials

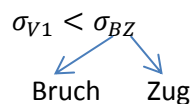
1) Hypothese der maximalen Hauptspannung

→ Hauptspannungen seien $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

- Vergleichsspannungen: $\sigma_{V1} = \begin{cases} \sigma_1 & \text{für } \sigma_1 > 0 \\ -\sigma_3 & \text{für } \sigma_3 < 0 \end{cases}$

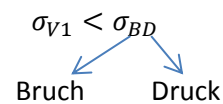
Für $\sigma_1 > 0$:

σ_{V1} mit Zugfestigkeit σ_{BZ} vergleichen



Für $\sigma_3 < 0$:

σ_{V1} mit Druckfestigkeit σ_{BD} vergleichen



→ Hypothese zur Vermeidung von Sprödbrüchen

2) Hypothese der maximalen Schubspannung

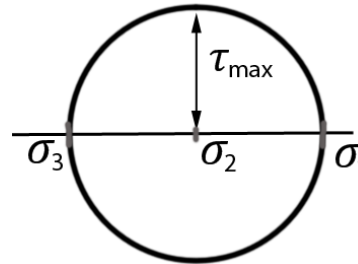
$$\frac{\sigma_{V2}}{2} = \tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

für $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_{V2} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{TRESCA}$$

Für den Fließbruch isotroper Metalle:

$$\text{z. B. } \sigma_{V2} < \sigma_F$$

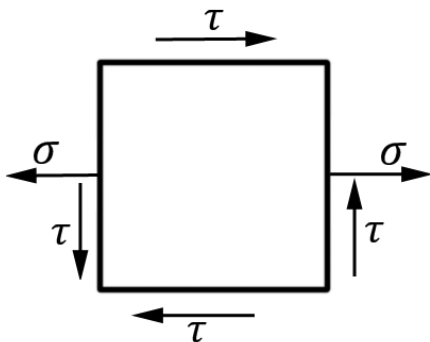


3) Hypothese der spezifischen elastischen Gestaltsänderungsenergie

$$U_G = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]$$

$$U_g = \frac{2}{12} \frac{\sigma_{V3}^2}{G}$$

$\sigma_{V3} < \sigma_F$ für den Fließbruch isotroper Metalle



$$\tau = \tau_{xy}$$

$$\sigma = \sigma_{xy}$$

Aus Hypothese 3 folgt:

$$\sigma_{V3}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_x^2 + G \tau_{xy}^2) = \frac{1}{2}(2\sigma + 6\tau)$$

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Für Vermeidung plastischen Fließens bei σ_F bei isotropem Material.

Zulässige Spannung:

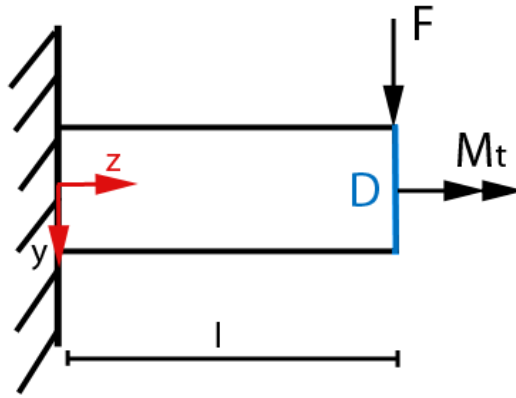
$$S_F \dots \text{Sicherheitsfaktor gegen Fließen (} S_F > 1 \text{)}$$

$$\sigma_{Zul} = \frac{\sigma_F}{S_F}$$

Beispiel

Gegeben: F, M_t, l, σ_{zul}

Gesucht: Dicke D



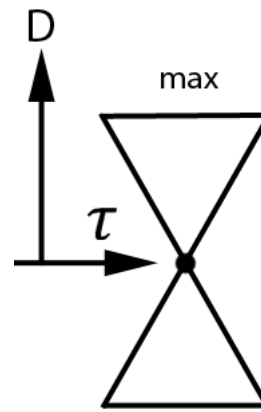
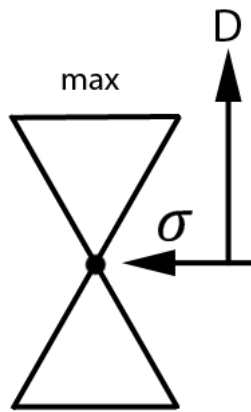
Lösung:

σ_{vmax} befindet sich dort, wo M_b und M_t maximal sind.

→ σ_{vmax} befindet sich im Einspannquerschnitt

$$\sigma_b = \frac{M_b}{I_{xx}} * |-y|$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{I_p} * r$$



max

max

$$\sigma_{max} = \frac{|M_b|_{max}}{W_b}$$

$r = \frac{D}{2}$ am gesamten Kreisumfang

$$\tau_{tmax} = \frac{M_{tmax}}{W_t}$$

$$M_{bmax} = F * l$$

$$M_{tmax} = M_t$$

$$W_b = \frac{I_{xx}}{\frac{D}{2}} = \frac{\Pi * \left(\frac{D}{2}\right)^4}{4 * \frac{D}{2}} = \frac{\Pi D^3}{32}$$

$$W_t = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\Pi * \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2 * \frac{D}{2}} = \frac{\Pi D^3}{16}$$

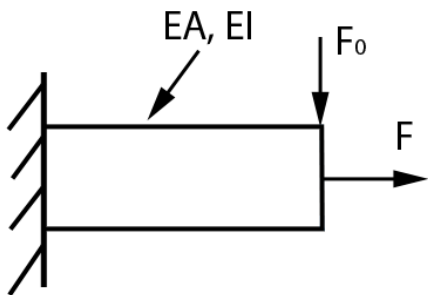
$$\sigma_{vmax} = \sqrt{\sigma_{bmax}^2 + 3\tau_{tmax}^2} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sqrt{\left(\frac{32Fl}{\Pi D^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16M_t}{\Pi D^3}\right)^2} \leq \sigma_{zul} \quad \rightarrow \quad \underline{D \geq \sqrt[6]{\left(\frac{32Fl}{\Pi \sigma_{zul}}\right)^2 + 3\left(\frac{16M_t}{\Pi \sigma_{zul}}\right)^2}}$$

2.5 Stabknickung

Bisher wurde das Gleichgewicht nur an unverformten Anordnungen (also Körpern ohne Ausgangskonfiguration) untersucht. Daraus folgte ein linearer Zusammenhang zwischen Last und Verformung.

Beispiel:

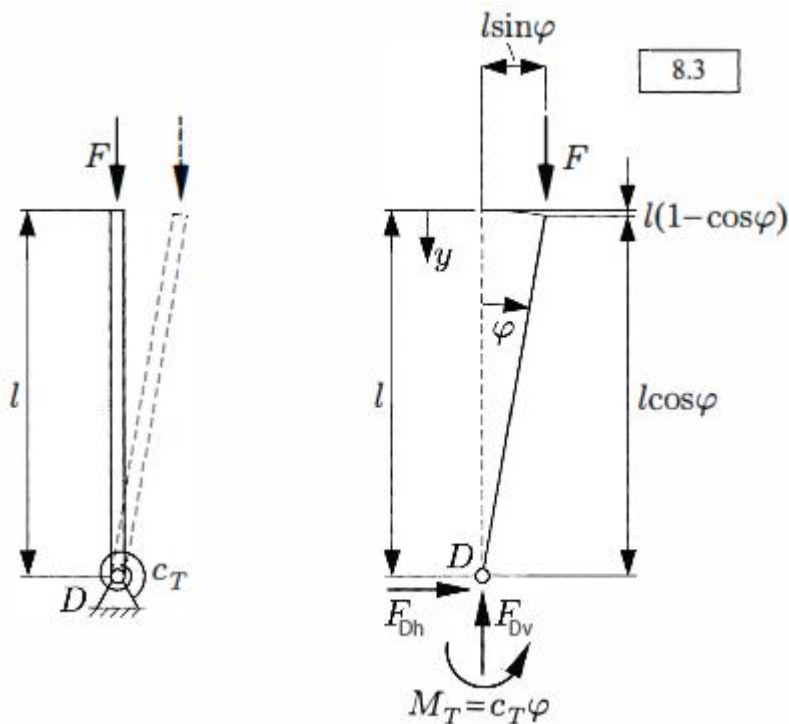


$$\rightarrow: V_F = \frac{Fl}{EA} \rightarrow V_F \sim F$$

$$\downarrow: V_{F_0} = \frac{F_0 l^3}{3EI} \rightarrow V_{F_0} \sim F_0$$

Jetzt werden bereits vorliegende Verformungen in der Gleichgewichtsbetrachtung berücksichtigt. Daraus folgt ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Last und Verformung.

2.5.1 Diskrete Anordnungen



Elastisch eingespannter Stab unter Einfluss einer richtungstreuen Kraft

Gleichgewicht:

$$\rightarrow: 0 = F_{DH}$$

$$\downarrow: 0 = F_{Dv} - F \quad \rightarrow \quad F_{Dv} = F$$

$$\downarrow D: 0 = M_T - F * l * \sin(\varphi) \quad (1)$$

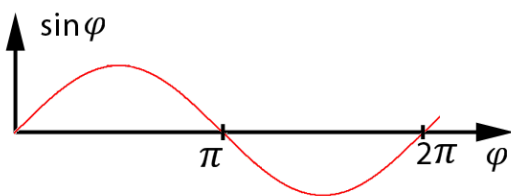
$$0 = c_T * \varphi - F * l * \sin(\varphi) \quad (1')$$

Nichtlinearität

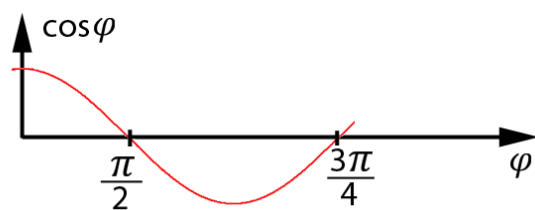
$$\text{aus (1')}: \varphi - \frac{F * l}{c_T} * \sin(\varphi) = 0 \quad (1'')$$

$$\rightarrow \frac{F * l}{c_T} = \frac{\varphi}{\sin(\varphi)} \quad \rightarrow \quad F \text{ ist nicht proportional der Verformung!}$$

Diskussion für $|\varphi| \ll 1$



$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \quad (*)$$



$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$$

(*) eingesetzt in (1''):

$$0 = \varphi - \frac{F * l}{c_T} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \right)$$

$$0 = \varphi \left[1 - \frac{F * l}{c_T} * \left(1 - \frac{\varphi^2}{6} \right) \right]$$

Lösungen:

$$a) \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{F * l}{c_T} \text{ beliebig}$$

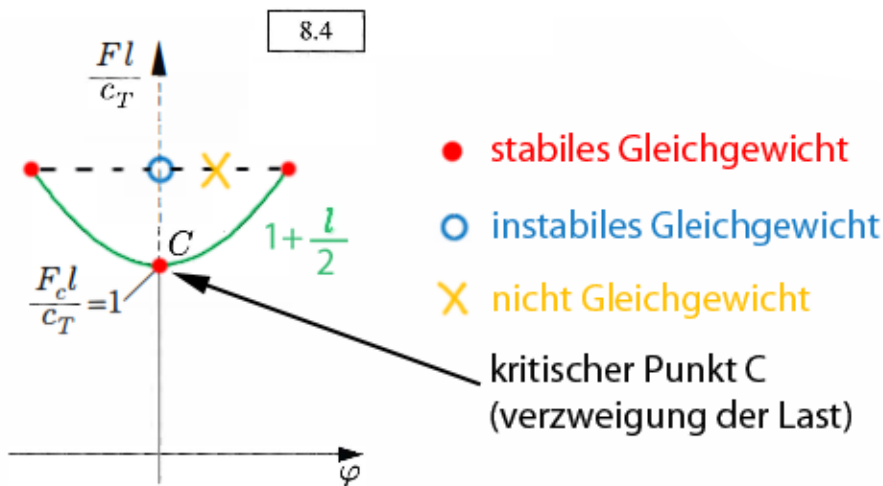
$$b) \varphi \neq 0 \quad \rightarrow \quad [\dots] = 0$$

$$\frac{F * l}{c_T} = \frac{1}{1 - \frac{l^2}{6}} = 1 + \frac{\varphi^2}{6} \quad (2)$$

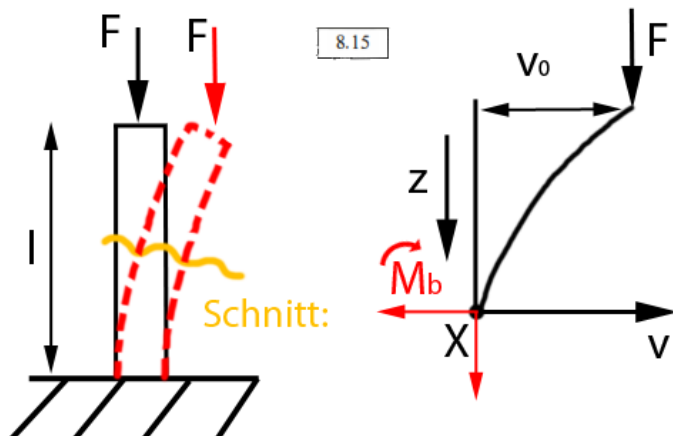
$$v_F = l(1 - \cos(\varphi)) = l \left(1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) = l * \frac{\varphi^2}{2} \quad (3)$$

(2) mit (3):

$$\frac{F * l}{c_T} = 1 + \frac{\varphi^2}{6} = 1 + \frac{v_F}{3l} \quad \text{mit } v_F = l * \frac{\varphi^2}{2}$$

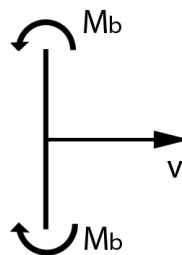


2.5.1 Der elastische Stab



$$\downarrow X: 0 = -M_b - F(v_0 - v) = 0$$

$$M_b = F * v - F * v_0 = -EI v''$$



$$v'' + \frac{F}{EI} * v - \frac{F}{EI} * v_0 = 0$$

$$v'' + \frac{F}{EI} * v = \frac{F}{EI} * v_0 \quad \rightarrow \quad \underline{v'' + \alpha^2 * v = \alpha^2 * v_0}$$

↳ Gewöhnliche (lineare) inhomogene Differentialgleichung

Lösungsansatz der DGL:

$$v = A * \cos(\alpha * z) + B * \sin(\alpha * z) + v_0$$

$$v' = -A * \alpha * \sin(\alpha * z) + B * \alpha * \cos(\alpha * z)$$

$$v'' = -A * \alpha^2 * \cos(\alpha * z) - B * \alpha^2 * \sin(\alpha * z)$$

$$\begin{aligned} v'' + \alpha^2 v &= v''_h + v''_p + \alpha^2 v_h + \alpha^2 v_p \\ &= (-\alpha^2 + \alpha^2) * (A * \cos(\alpha * z) + B * \sin(\alpha * z)) + \alpha^2 v_0 = \underline{\alpha^2 v_0} \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$v(z=l) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = A * \cos(\alpha * l) + B * \sin(\alpha * l) + v_0 \quad (1)$$

$$v(z=0) = v_0 \quad \rightarrow \quad A + v_0 \text{ soll sein: } v_0 \rightarrow A = 0 \quad (2)$$

$$v'(z=l) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -A * \alpha * \sin(\alpha * l) + B * \alpha * \cos(\alpha * l) \quad (3)$$

(3) mit (2): $(B * \alpha) * \cos(\alpha * l) = 0$

1: da $B \neq 0$ gilt $\alpha = 0$

$$2: \cos(\alpha * l) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_c * l = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{3\pi}{2} \quad (\alpha_c = \alpha_{\text{kritisch}})$$

$$\alpha^2 * l^2 = \frac{F_c}{EI} * l^2 \quad \text{mit } \alpha_c^2 = \frac{F_c}{EI}$$

$$\alpha^2 * l^2 = \frac{F_c}{EI} * l^2 = \text{mit (1)} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\rightarrow \underline{F_{c1} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}}$$

Der kritische Lastwert heißt auch Eigenwert oder Knickform (-mode).

Aus (1) mit Einsetzen des Eigenwertes folgt:

$$B * \sin(\alpha_c * l) + v_0 = 0 \quad \rightarrow \quad B = -v_0$$

$$v(z) = v_0(1 - \sin(\alpha_c * z)) = v_0 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2l} * z\right) \right)$$