

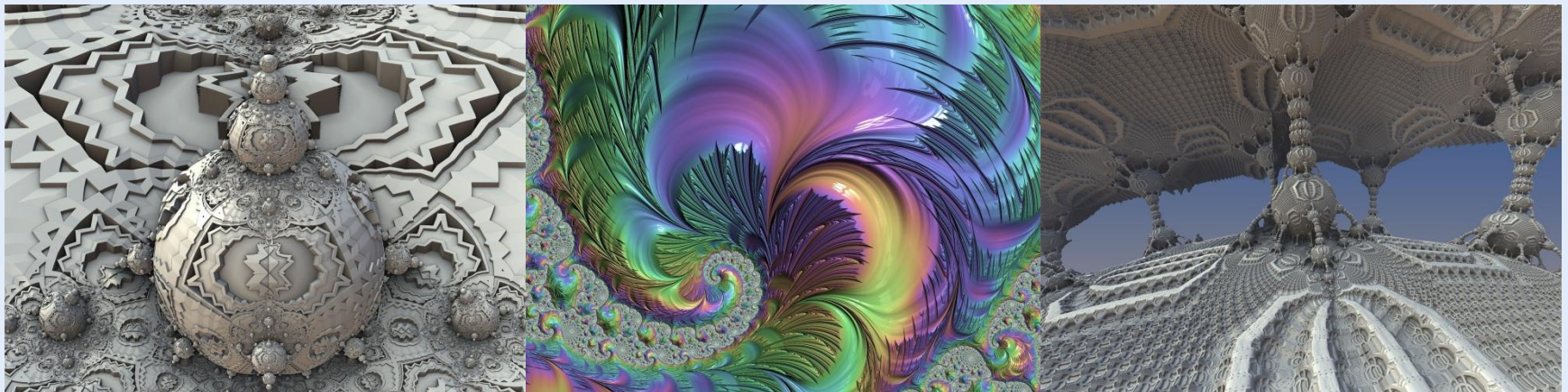
Πανελλήνιο Συνέδριο Scientix για την εκπαίδευση STEM  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
3-4/9/2018

Γεωμετρία Fractal: Εκπαιδευτική και τεχνολογική καινοτομία από τη  
σχολική αίθουσα έως την έρευνα για τον καρκίνο – Παράδειγμα εφαρμογής  
στον καρκίνο του μαστού

Εισηγητές: Μάϊπας Σωτήριος, Νόννη Αφροδίτη, Πολίτη Αικατερίνη, Sarlanis Helen,  
Καβαντζάς Νικόλαος  
Ιατρική Σχολή ΕΚΠΑ

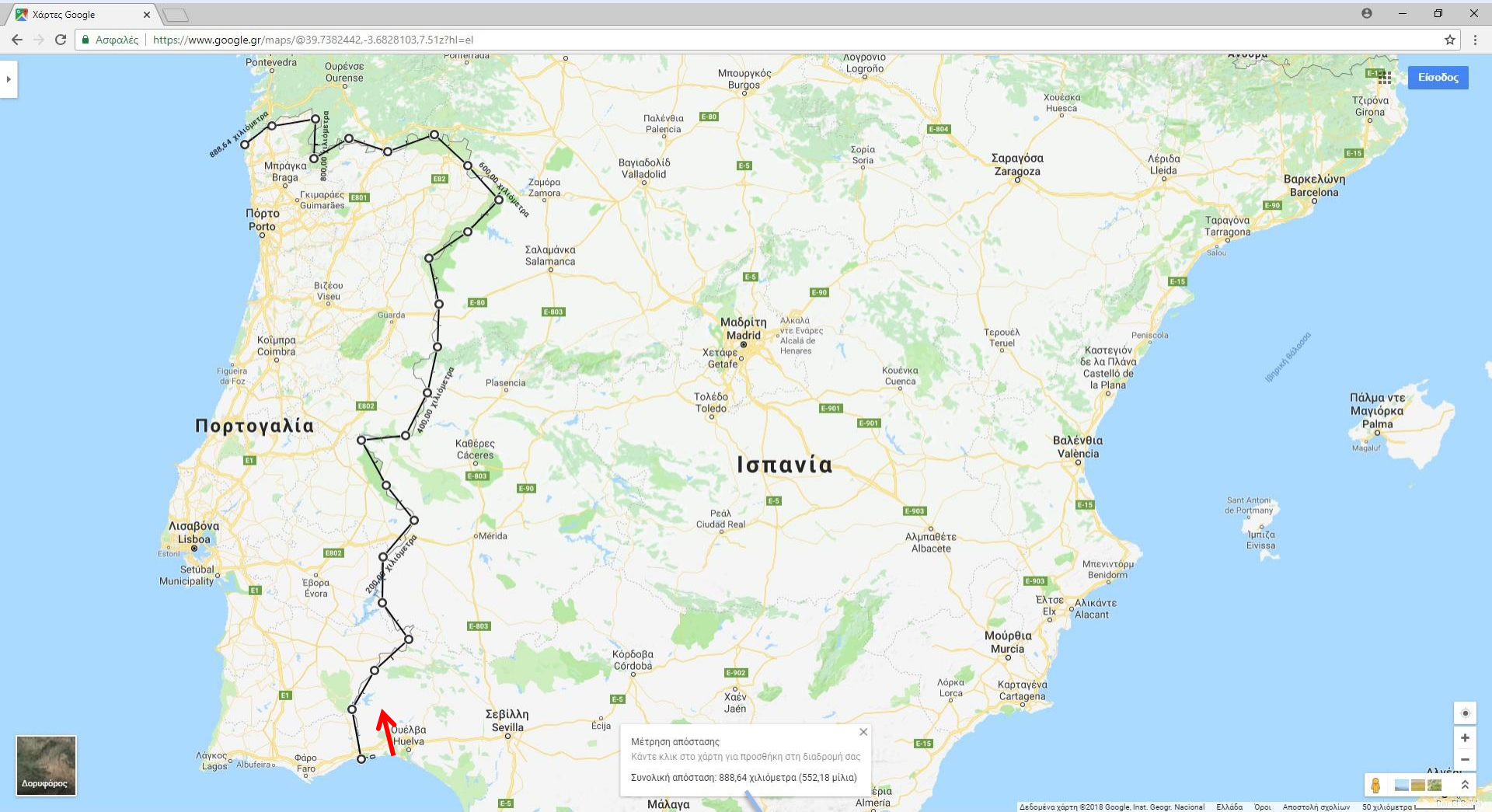
-----

Ομιλητής: Μάϊπας Σωτήριος, Φυσικός MSc, PhD Cd – [sotgmaip@onpodium.gr](mailto:sotgmaip@onpodium.gr)

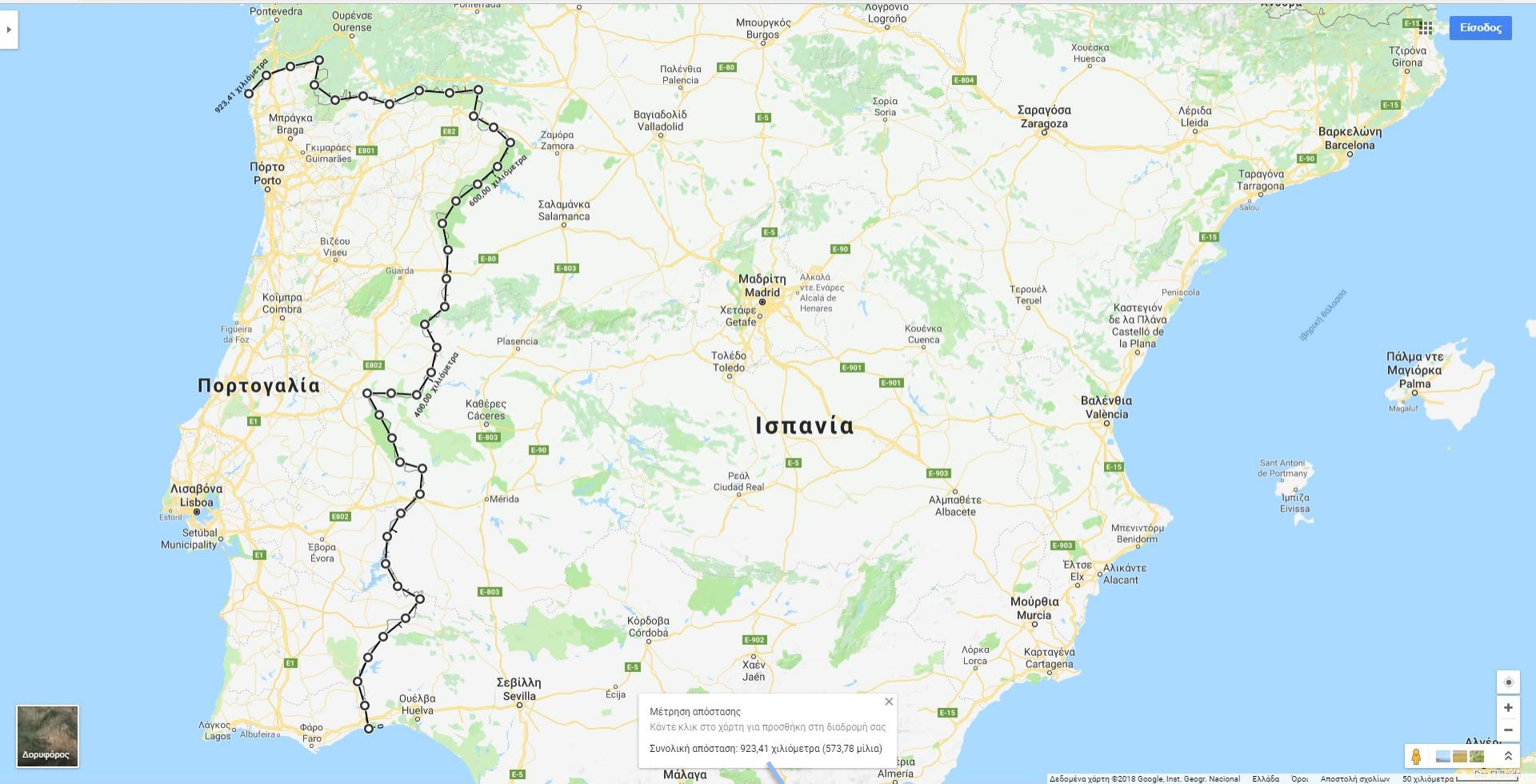


Δευτέρα 3/9/2018, Αίθουσα Τελετών Κτηρίου Διοίκησης

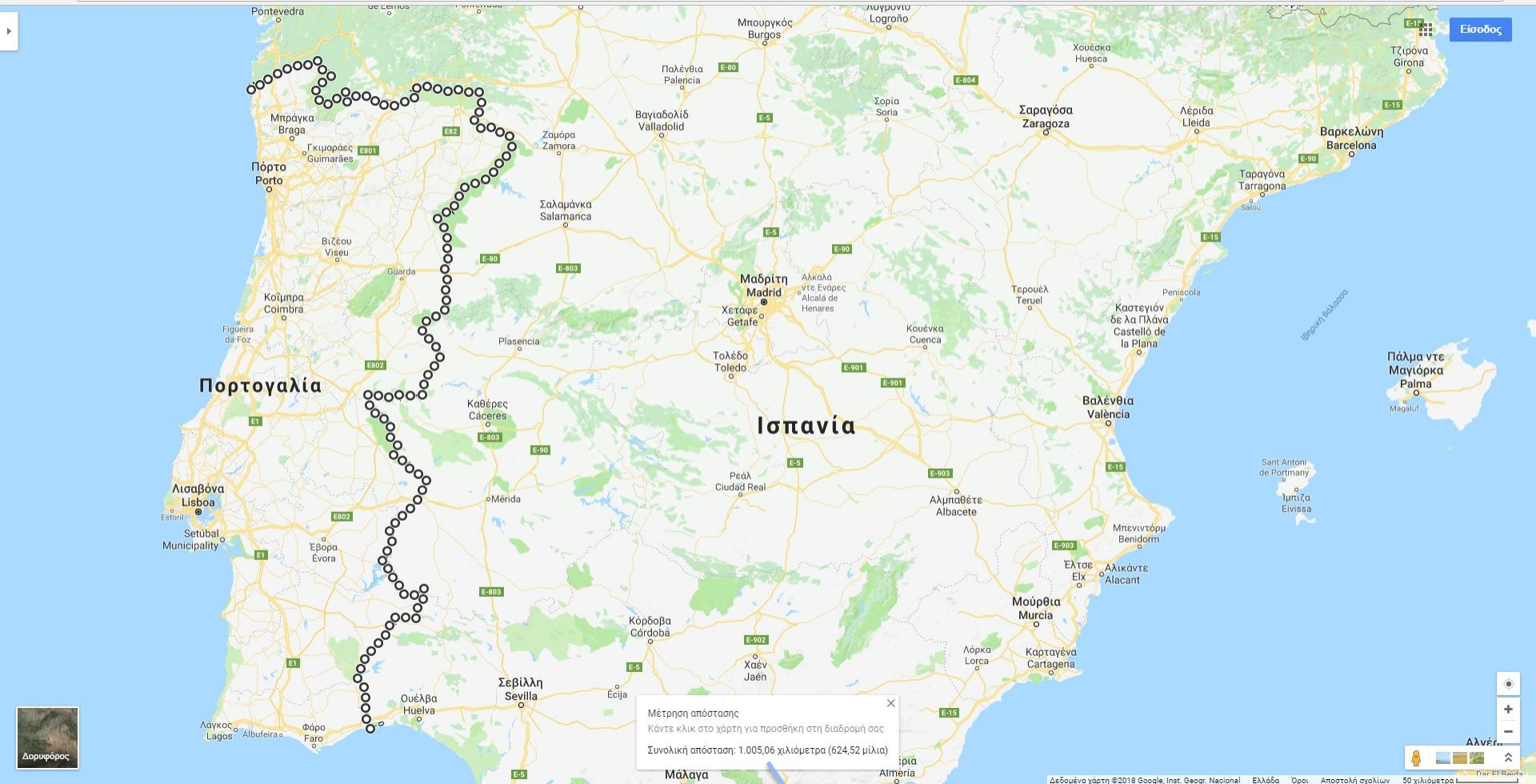
# Ας δούμε από πού ξεκίνησαν όλα



888,64 km

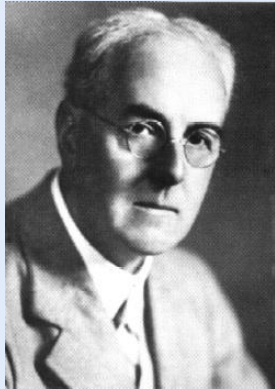


923,41 km



1005,06 km

## “Το παράδοξο των ακτογραμμών” ή “ το φαινόμενο Richardson”



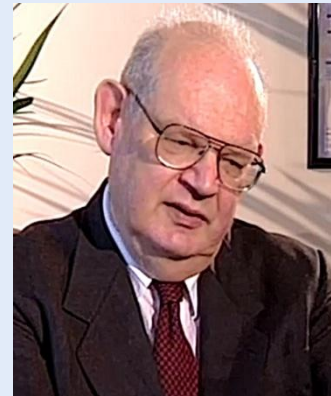
Lewis Fry Richardson  
(1881-1953)

Εξάρτηση από το μήκος του βήματος μέτρησης

Η συνοριακή γραμμή μεταξύ Ισπανίας και Πορτογαλίας είχε υπολογιστεί στα:

- 1214 km από τους Πορτογάλους
- 987 km από τους Ισπανούς

Mandelbrot, B. (1967). **How long is the coast of Britain?** Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156 (3775), 636-638.



Benoît B. Mandelbrot  
(1924-2010)

**How long is the coast of Greece?**



## Γεωμετρία και Διαστάσεις εν συντομία

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, η διάσταση είναι ένας από τους ακέραιους φυσικούς αριθμούς:

- α) 1 (για την ευθεία γραμμή)
- β) 2 (για την επιφάνεια) και
- γ) 3 (για τα στερεά)

**Η τοπολογική διάσταση ενός αντικειμένου:**

- α) είναι μικρότερη ή ίση με την ευκλείδεια διάσταση του περιβάλλοντος χώρου
- β) παίρνει ακέραιες τιμές και
- γ) είναι ίση με τη διάσταση του πιο απλού μαθηματικού αντικειμένου που χωρίζει σε δύο κομμάτια το υπό εξέταση αντικείμενο αυξημένη κατά 1, με το σημείο (αδιαίρετο) να έχει τοπολογική διάσταση 0.

**Επομένως:**

- Ένα σημείο έχει τοπολογική διάσταση 0
- Μια ευθεία που χωρίζεται στα δύο από ένα σημείο έχει τοπολογική διάσταση 1 ( $0+1=1$ )
- Ένα επίπεδο που χωρίζεται στα δύο από μία ευθεία έχει τοπολογική διάσταση 2 ( $1+1=2$ )
- Ένα στερεό που χωρίζεται στα δύο από ένα επίπεδο, 3 ( $2+1=3$ )

## Τι είναι ένα αντικείμενο fractal (κλασμοειδές);

Δεν υπάρχει κοινά αποδεκτός ορισμός

Ο συνηθέστερος ορισμός ορίζει ένα αντικείμενο ως “fractal” όταν αυτό:

- α) παρουσιάζει αυτοομοιότητα (ομοιότητα ενός τμήματος με το όλο, ανεξάρτητα από την κλίμακα μεγέθους) και
- β) έχει κλασματική διάσταση ομοιότητας μεγαλύτερη από την τοπολογική διάστασή του

## Τι είναι η κλασματική διάσταση;

*Μία από τις διαστάσεις fractal*

Ως «κλασματική διάσταση» ενός συσχετισμένα αυτοόμοιου συνόλου  $S$  ονομάζομαι ο λόγος

$$D = \frac{\log k}{\log M}$$

$k$  = το πλήθος των ισοδύναμων μερών στα οποία υποδιαιρείται το  $S$  και

$M$  = ο συντελεστής μεγέθυνσης (σταθερός παράγοντας) – κάθε ένα υποσύνολο μεγεθυνόμενο κατά  $M$  δίνει το σύνολο  $S$

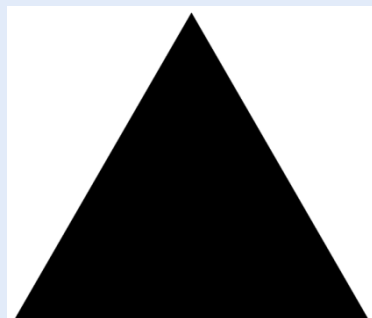
*Τιμές: μεταξύ 1 και 3*



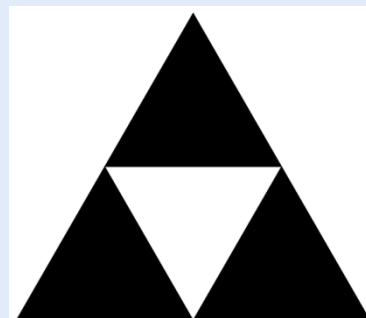
## Πώς φτιάχνουμε ένα απλό fractal;

Step 0: Initiator

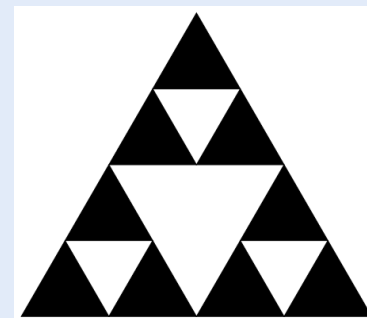
Step 1: Generator



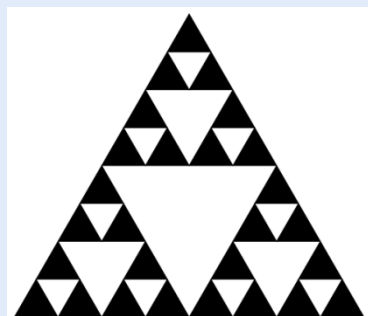
Step 0



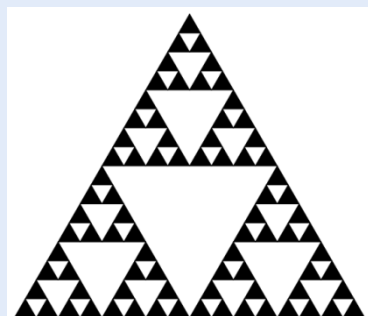
Step 1



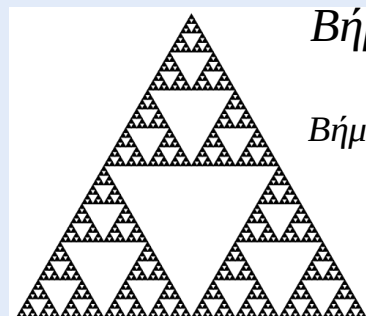
Step 2



Step 3



Step 4



Step ...

$$\text{Βήμα 1: } D = \frac{\log k}{\log M} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,584$$

$$\text{Βήμα 2: } D = \frac{\log k}{\log M} = \frac{\log 3^2}{\log 2^2} = \frac{2 \log 3}{2 \log 4} = 1,584$$

> 1 (τοπολογική διάσταση) -  
Γιατί 1 και όχι 2; Γιατί,  
αφαιρώντας συνεχώς τρίγωνα,  
θα μείνουμε με ένα σχήμα  
αποτελούμενο από γραμμές

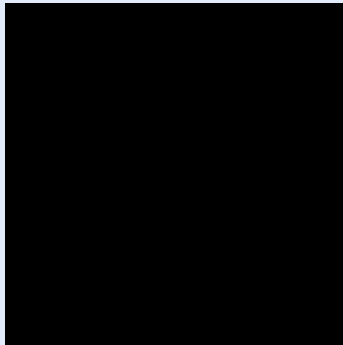
**Για το βήμα 1:** 3 υποσύνολα (3 τρίγωνα, το μεσαίο είναι κενό) με συντελεστή μεγέθυνσης 2 (κάθε πλευρά των νέων τριγώνων είναι η μισή του προηγούμενου (αρχικού) συνόλου)

**Για το βήμα 2:** 3<sup>2</sup> υποσύνολα (9 τρίγωνα) με συντελεστή μεγέθυνσης 2<sup>2</sup> (κάθε πλευρά των νέων τριγώνων είναι ίση με το ¼ της αρχικής πλευράς)

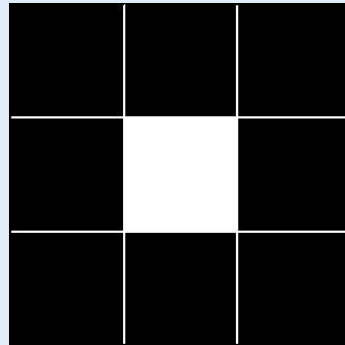


Wacław Sierpiński (1882-1969)

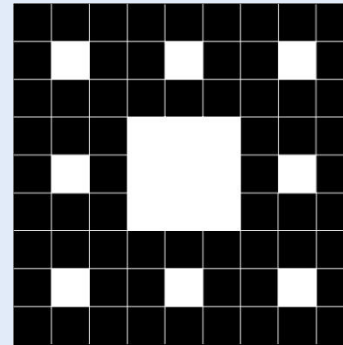
## Πώς φτιάχνουμε ένα απλό fractal;



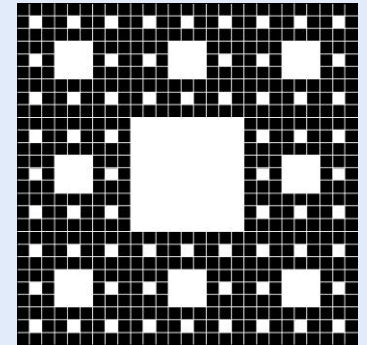
Step 0



Step 1



Step 2

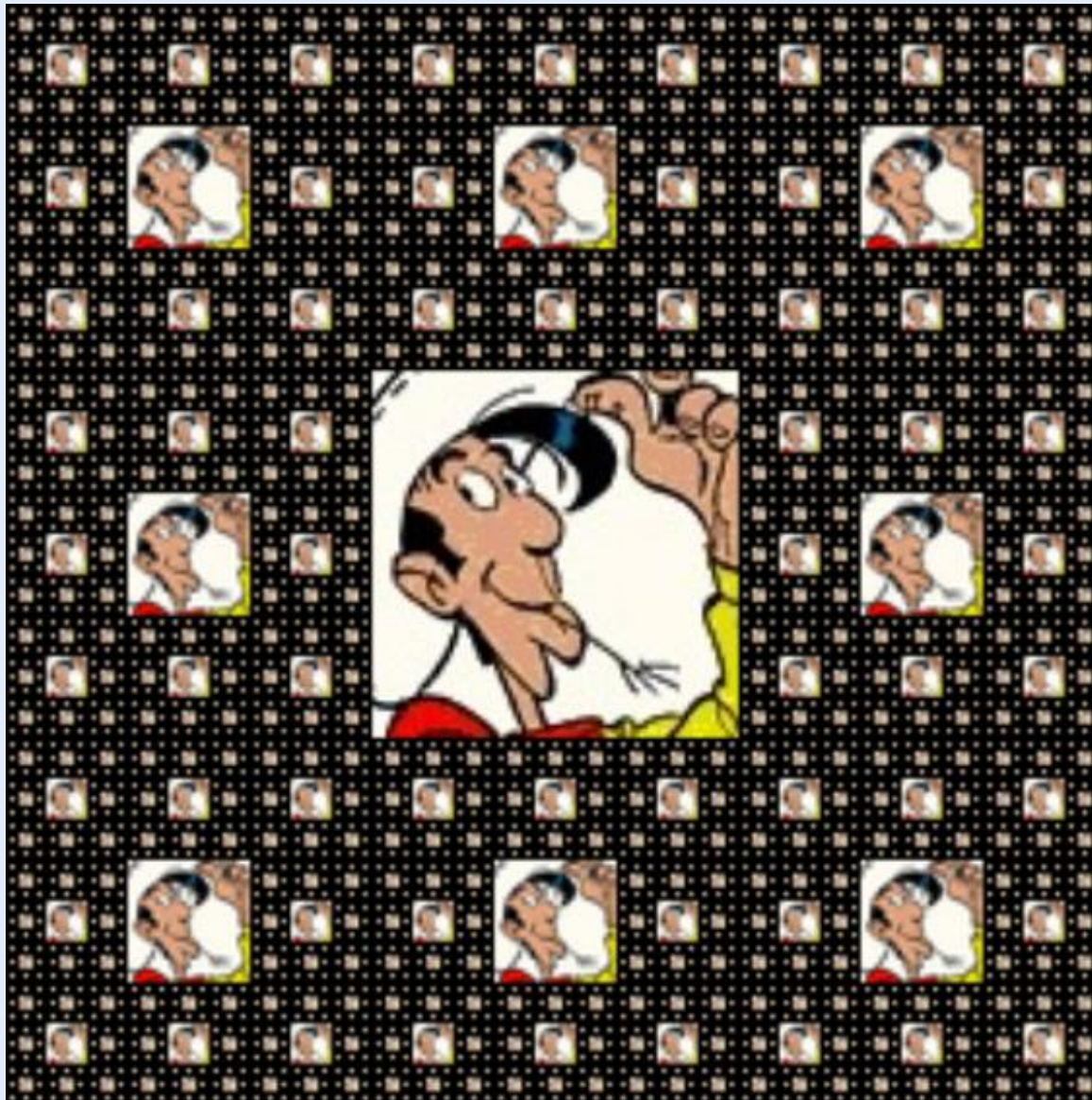


Step 3

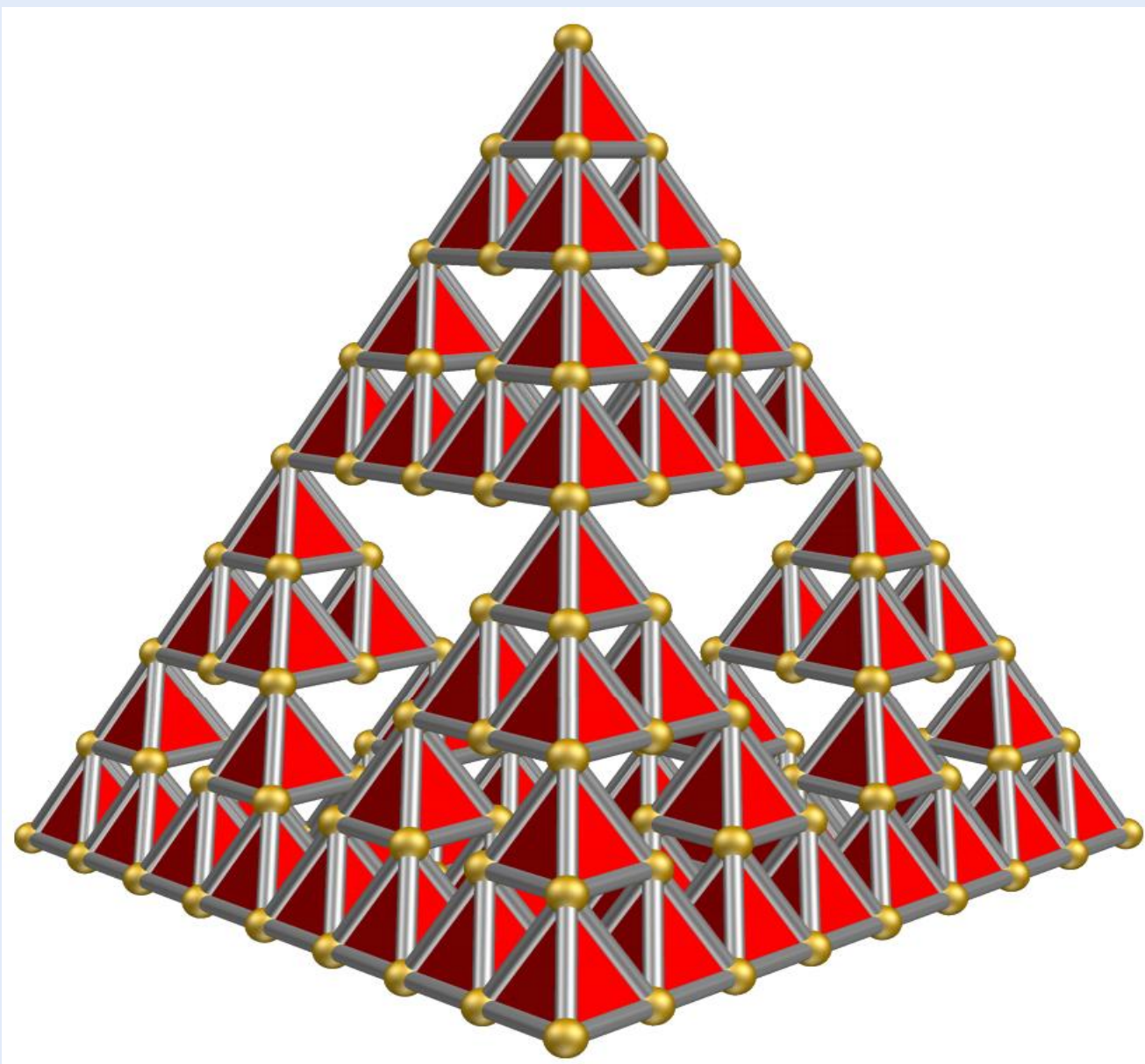
π.χ. στο Βήμα 1: 8 νέα τετράγωνα με πλευρά το 1/3 της αρχικής –  
δηλαδή, ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι ίσος με 3

$$D = \frac{\log k}{\log M} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,893$$

Και κάτι πιο ελκυστικό για τους μαθητές



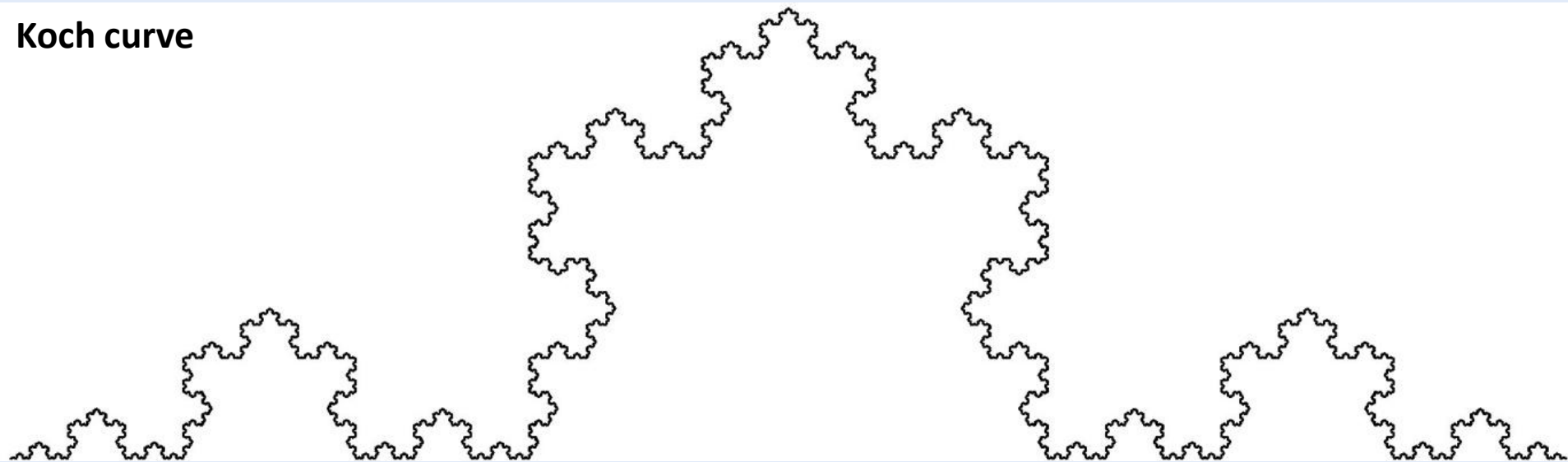
Και σε 3D



## Βασικές ιδιότητες ενός αντικειμένου fractal

- α) Αυτοομοιότητα (ομοιότητα ενός τμήματος με το όλο, ανεξάρτητα από την κλίμακα μεγέθους)
- β) Πολυπλοκότητα στη μορφή
- γ) Πεπερασμένο εμβαδόν, άπειρο μήκος

### Koch curve



*Τα ιδανικά fractals είναι μαθηματικά κατασκευάσματα και δεν υπάρχουν στη φύση, στην οποία η αυτοομοιότητα μπορεί να αποτελεί στατιστική ιδιότητα*

**Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα αντικείμενο fractal;**

Παρουσιάζει αυτοομοιότητα; ΝΑΙ

Παρουσιάζει πολυπλοκότητα στη μορφή; ΟΧΙ

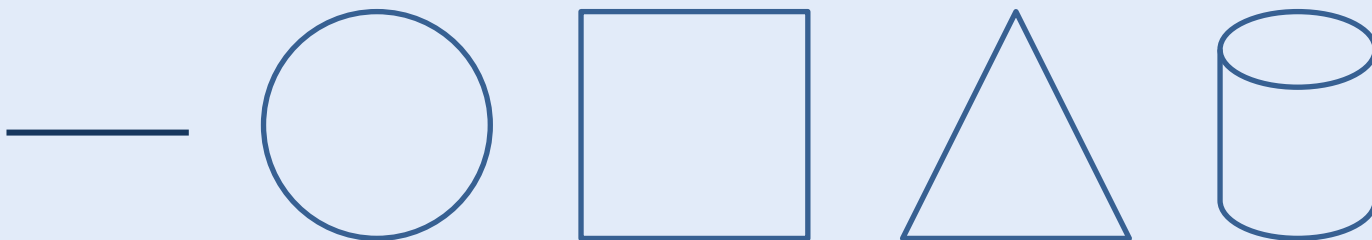
Επίσης: κλασματική διάσταση ομοιότητας = τοπολογική διάσταση

Άρα, ένα ευθύγραμμο τμήμα  
δεν είναι ένα φρακταλικό  
αντικείμενο

**Ή μήπως μπορεί να θεωρηθεί ως ένα φρακταλικό αντικείμενο που παρουσιάζει τη μικρότερη δυνατή πολυπλοκότητα, όπως κάθε σχήμα της κλασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας;**

**Μήπως, τελικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι ένας κλάδος της πραγματικής γεωμετρίας της φύσης, η οποία είναι η Γεωμετρία Fractal;**

**Στη φύση δεν συναντούμε τα απλά σχήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας**





# Μερικά από τα σχήματα που συναντούμε στη Φύση





Ο Πυθαγόρας γιορτάζει  
την Ανατολή του Ήλιου,  
Fyodor Bronnikov (1869)

**«Θα μάθεις, όσο τούτο είναι επιτρεπτό σ’  
έναν θνητό, ότι η Φύση είναι από κάθε  
άποψη όμοια προς τον εαυτό της»**

*Πυθαγόρας ο Σάμιος (570-495 π.Χ.), Ιεροί Λόγοι*

***Η Γεωμετρία Fractal είναι η παγκόσμια  
γλώσσα που περιγράφει την πολυπλοκότητα  
που συναντούμε στη Φύση***

## Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας Fractal

Η αυτοομοιότητα μπορεί να παρατηρείται είτε σε χωρική (π.χ. πνευμονικό δέντρο) είτε σε χρονική κλίμακα (π.χ. καρδιογράφημα)

Η διάσταση fractal είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που ποσοτικοποιεί την πολυπλοκότητα μίας δομής και μπορεί να υπολογιστεί τόσο σε φρακταλικά όσο και σε μη φρακταλικά αντικείμενα

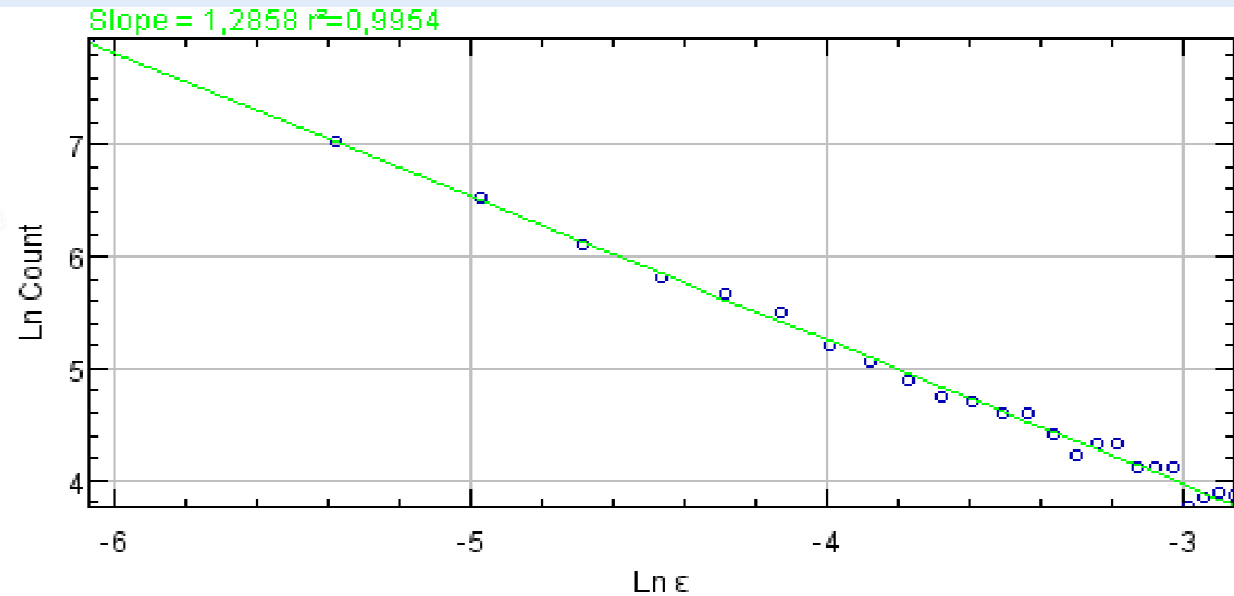
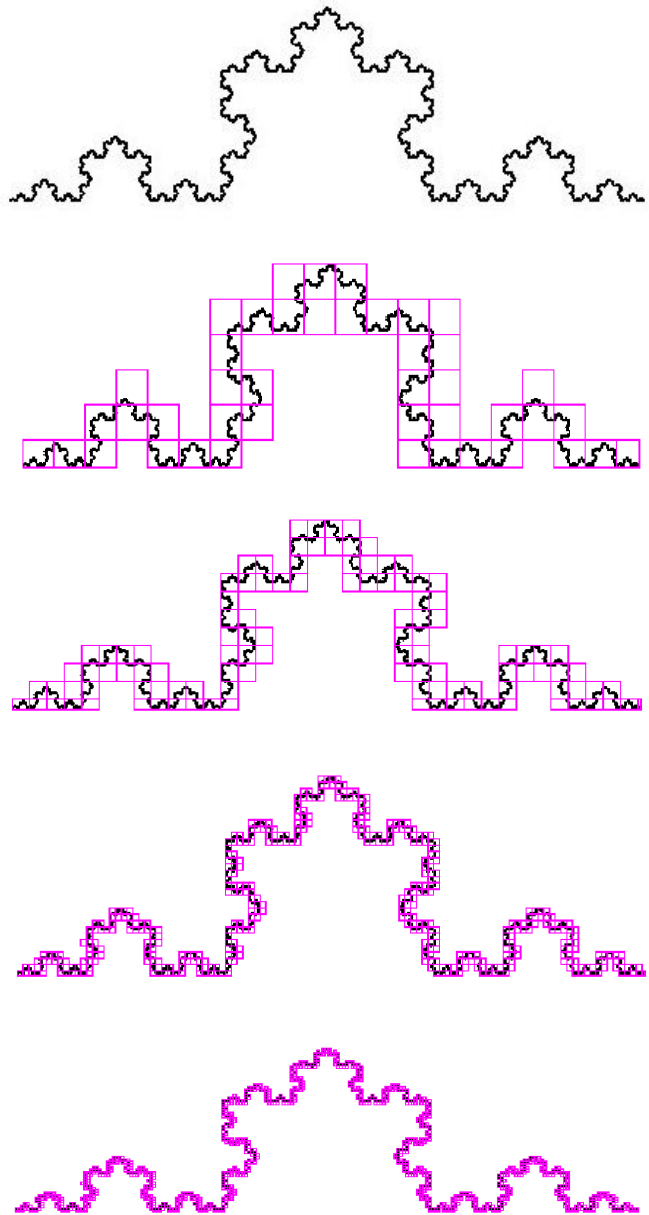
**Η διάσταση καταμέτρησης κιβωτίων (“box-counting dimension”) αποτελεί μία από τις διαστάσεις fractal**

Πρόκειται για την πιο δημοφιλή και την πιο εύκολα υπολογίσιμη διάσταση fractal

Οι τιμές της κυμαίνονται μεταξύ του 1 (χαμηλότερη δυνατή πολυπλοκότητα, π.χ. ευθεία γραμμή, άδειος κύκλος) και του 2 (π.χ. γεμάτος κύκλος, γεμάτο τετράγωνο)

*Σε ορισμένες περιπτώσεις, εάν η έρευνα το απαιτεί και εφόσον αυτό ορίζεται στα χαρακτηριστικά της μελέτης, μπορεί να προκύπτουν τιμές μεγαλύτερες του 2, αλλά αυτές δεν θα αφορούν τυπικές περιπτώσεις υπολογισμού της box-counting διάστασης (θα αφορούν π.χ. “composite box-counting fractal dimensions”)*

# Υπολογισμός της box-counting διάστασης



(-) Slope = box counting dimension

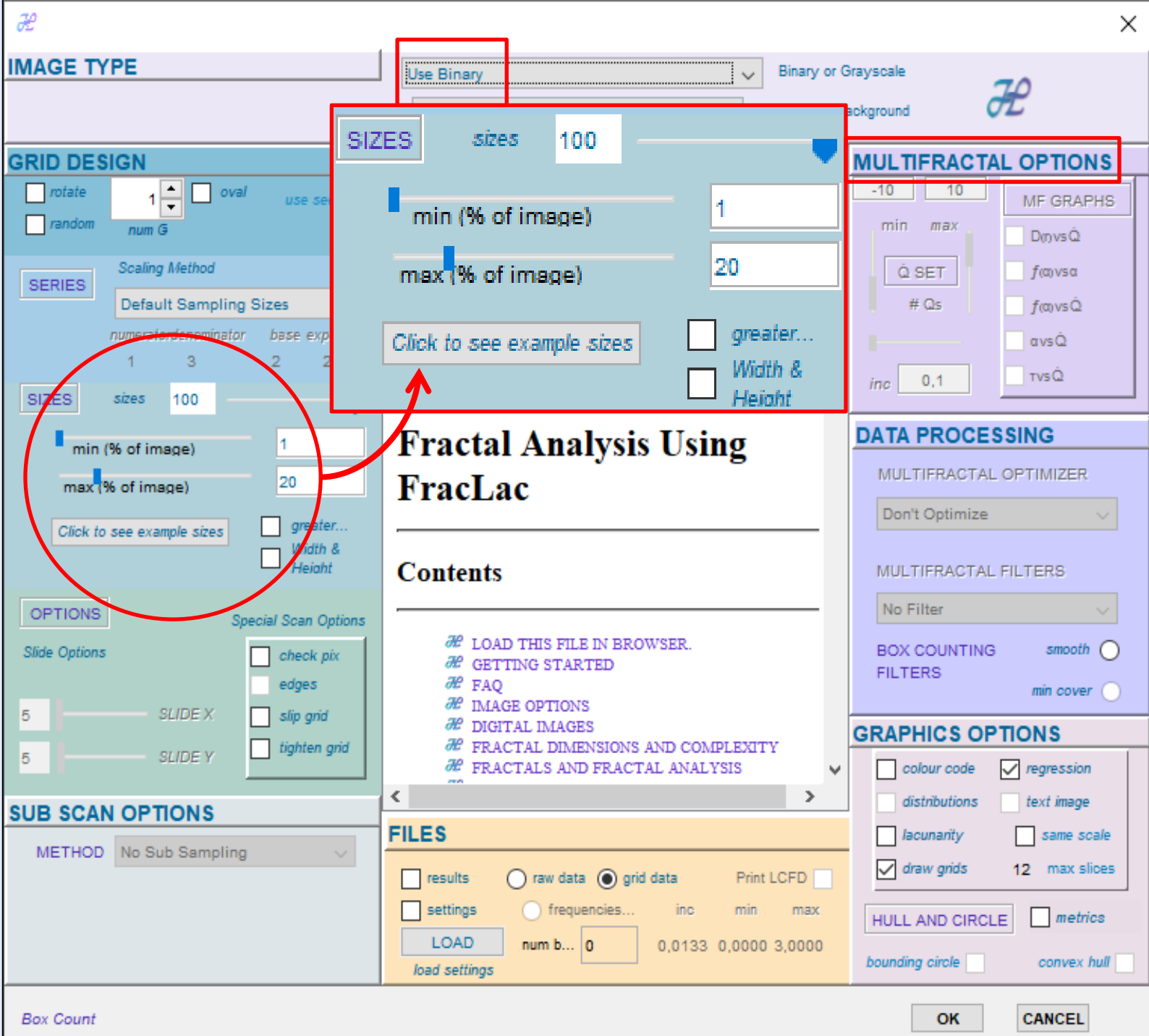
$r^2$ : “goodness of fit”, δείκτης της “quality of fractality”  
(Τα ιδανικά fractals έχουν  $r^2 = 1$ )



ImageJ, US National Institute of Health  
Δημιουργός: Rasband W.

Plug-in FRACLAC  
Δημιουργός: Karperien A.





## IMAGE TYPE

Use Binary

Binary or Grayscale

## GRID DESIGN

rotate

1

oval

random

num G

SERIES

Scaling Method

Default Sampling Sizes

SIZES

sizes 100

min (% of image)

1

max (% of image)

20

Click to see example sizes

greater...

Width & Height

OPTIONS

Special Scan Options

Slide Options

check pix

edges

slip grid

tighten grid

5

SLIDE X

5

SLIDE Y

## SUB SCAN OPTIONS

METHOD No Sub Sampling

## FILES

results

raw data

grid data

Print LCFD

settings

frequencies...

inc min max

LOAD

num b...

0

0,0133 0,0000 3,0000

load settings

## MULTIFRACTAL OPTIONS

-10

10

MF GRAPHS

min

max

Q SET

# Qs

inc

0,1

D<sub>0</sub> vs Q

f(Q) vs a

f(Q) vs Q

a vs Q

T vs Q

## DATA PROCESSING

MULTIFRACTAL OPTIMIZER

Don't Optimize

MULTIFRACTAL FILTERS

No Filter

BOX COUNTING

smooth

FILTERS

min cover

## GRAPHICS OPTIONS

colour code

regression

distributions

text image

lacunarity

same scale

draw grids

12 max slices

HULL AND CIRCLE

metrics

bounding circle

convex hull

Box Count

OK

CANCEL

# Fractal Analysis Using FracLac

## Contents

- LOAD THIS FILE IN BROWSER.
- GETTING STARTED
- FAQ
- IMAGE OPTIONS
- DIGITAL IMAGES
- FRACTAL DIMENSIONS AND COMPLEXITY
- FRACTALS AND FRACTAL ANALYSIS

## Εφαρμογές της Γεωμετρίας Fractal

Μαθηματικά

Φυσική

Χημεία

Βιολογία

Ιατρική

Γεωλογία

Μετεωρολογία

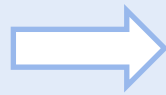
Αρχιτεκτονική

Μηχανική

Πληροφορική

Οικονομία

Βιομηχανία



Science  
Technology  
Engineering  
Mathematics

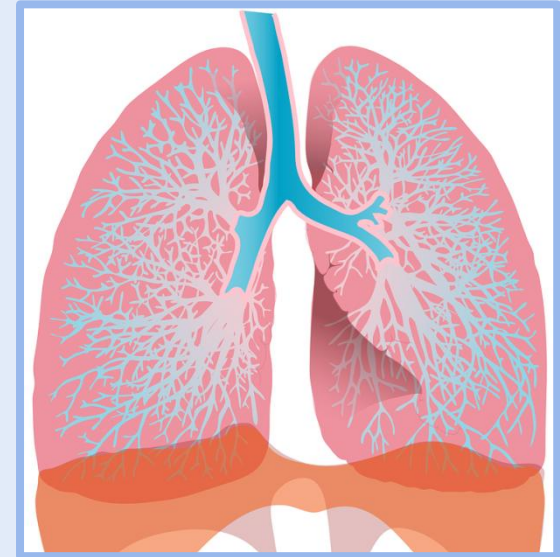


Science  
Technology  
Engineering  
Arts  
Mathematics

## Η ανάλυση fractal στη μελέτη των βιολογικών δομών

Έχουν ήδη πραγματοποιηθεί μελέτες που αφορούν, μεταξύ άλλων:

- Τους πνεύμονες και τη λειτουργία τους (*η φρακταλική δομή των πνευμόνων βελτιστοποιεί τη λειτουργία τους*)
- Την καρδιά και το κυκλοφορικό σύστημα
- Τον εγκέφαλο
- Το νευρικό σύστημα
- Τη στοματική κοιλότητα
- Το δέρμα
- Το πεπτικό και το ουροποιητικό σύστημα
- Το μυοσκελετικό σύστημα
- Τα μάτια και τη λειτουργία τους
- Το DNA, διάφορα κύτταρα και κυτταρικά οργανίδια
- Την καρκινογένεση και την αποτελεσματικότητα της αντικαρκινικής θεραπείας



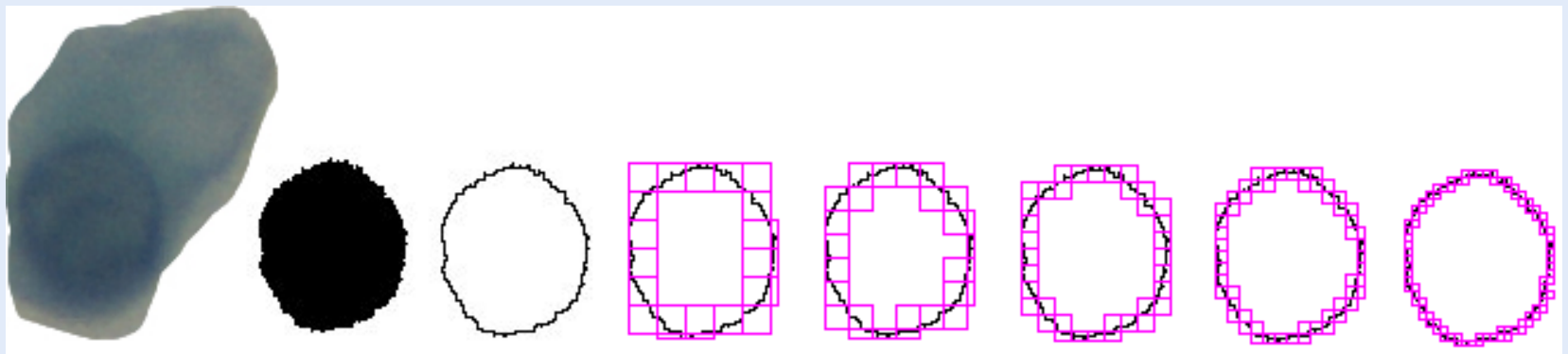
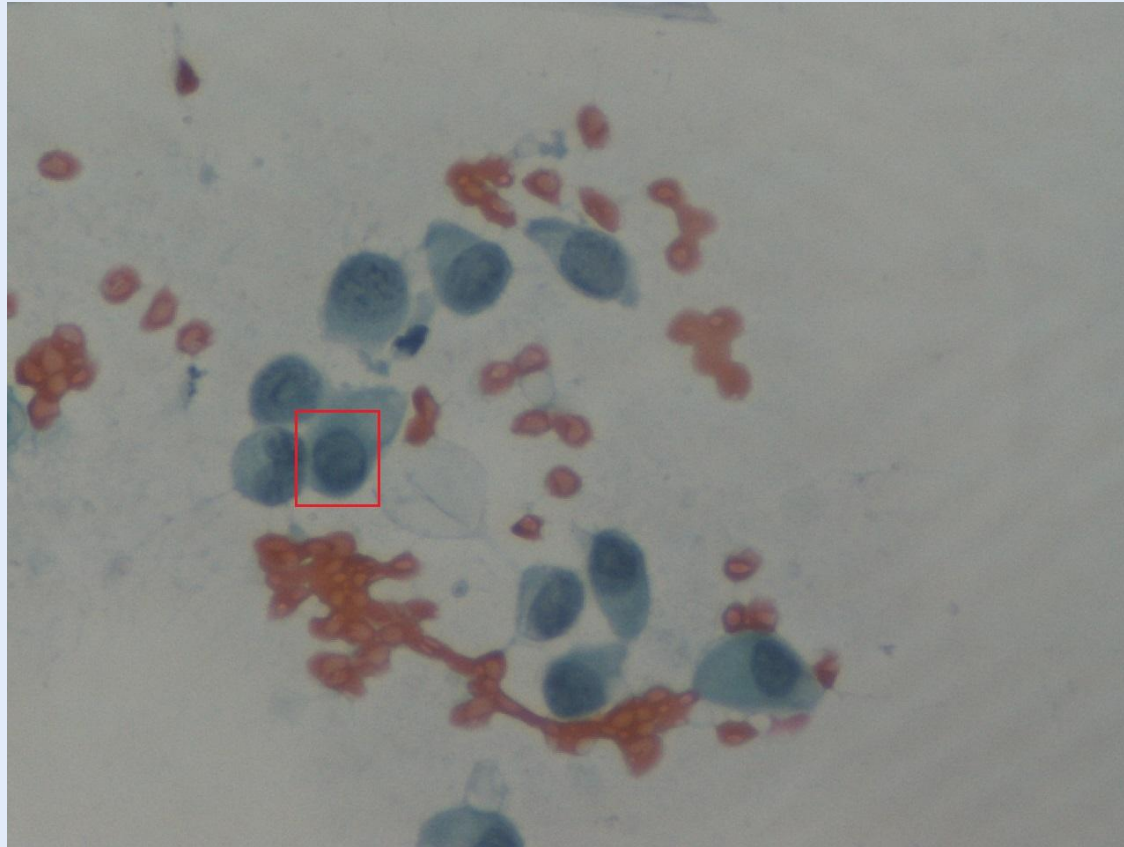


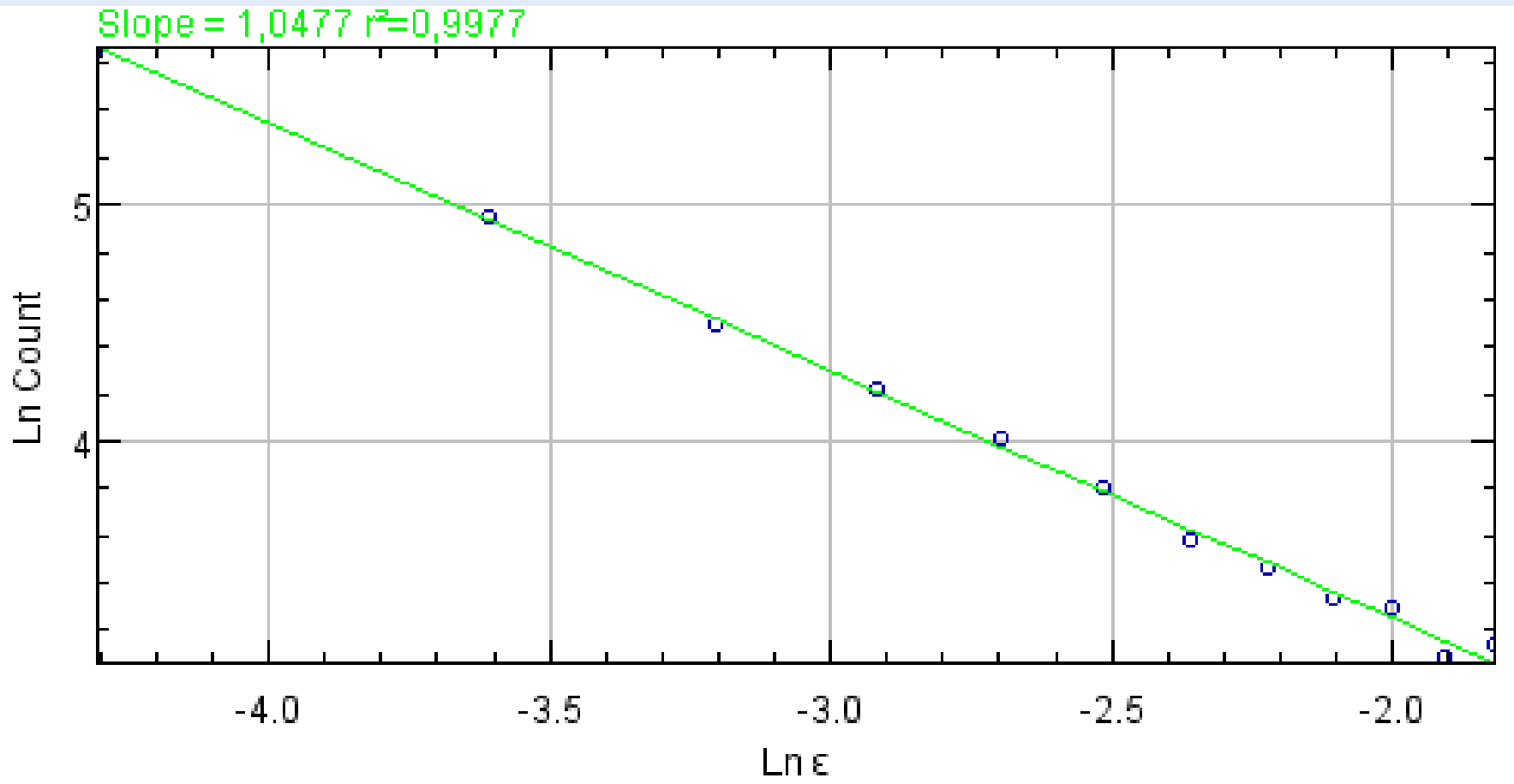
Τα βιολογικά συστήματα έχουν τη δική τους «αρχιτεκτονική»



Η ορθή γεωμετρική περιγραφή των βιολογικών δομών είναι ένα θέμα υψίστης σημασίας

## Παράδειγμα εφαρμογής στον καρκίνο του μαστού





## Συμπερασματικά...

Η Γεωμετρία Fractal έχει ένα ευρύτατο πεδίο εφαρμογής και, αξιοποιώντας τις νέες τεχνολογίες, μπορεί να προσφέρει σημαντικές ευκαιρίες στην Εκπαίδευση όλων των βαθμίδων, αλλά και στην Έρευνα.

Όσον αφορά στην περίπτωση του καρκίνου, η διάσταση fractal, η διαγνωστική αξία της οποίας αποτελεί αντικείμενο ερευνητικής αξιολόγησης, ενδέχεται να αποτελέσει ένα συμπληρωματικό, υποβοηθητικό εργαλείο στην προσπάθεια αντιμετώπισης του σημαντικού αυτού ιατρικού και κοινωνικού ζητήματος.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας Fractal πληροί τις επιταγές της εκπαίδευσης STEM και προσφέρει ένα ελκυστικό και καινοτόμο εκπαιδευτικό προϊόν, κατανοητό εφόσον προσαρμοστεί στο επίπεδο της μαθηματικής γνώσης των μαθητών και με εφαρμογές που μπορούν να φέρουν εις πέρας επιτυχώς οι ίδιοι οι μαθητές.

## Συμπερασματικά...

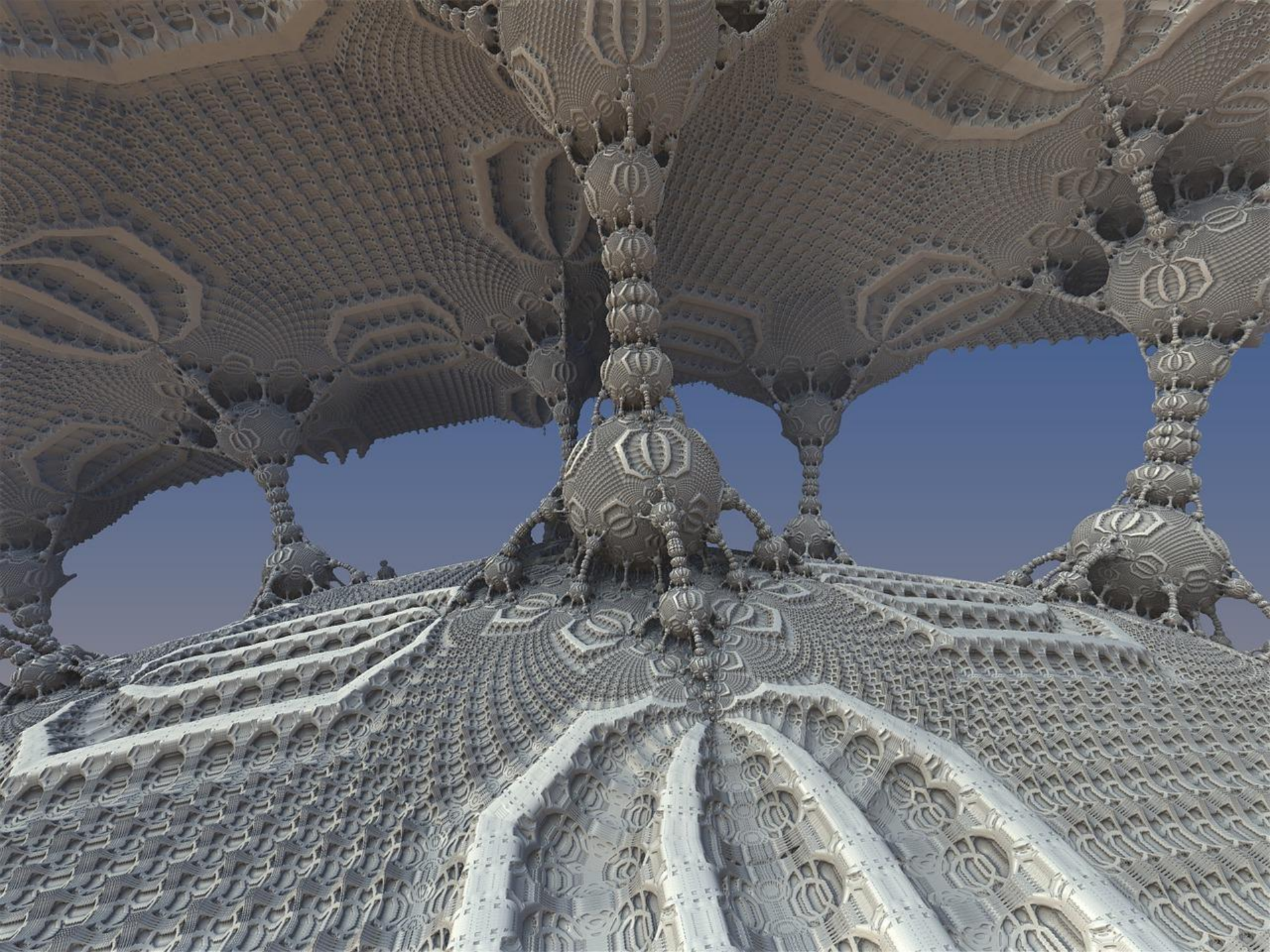
Η διδασκαλία της **Γεωμετρίας Fractal** μέσω των **καινοτόμων** και **διεπιστημονικών** οδών της **εκπαίδευσης STEM** προσφέρει ένα **ελκυστικό εκπαιδευτικό προϊόν** με πλήθος εφαρμογών και με

**προοπτικές που ξεκινούν από την ερμηνεία της φύσης και καταλήγουν στην ιατρική έρευνα**

Προτείνουμε την προσαρμογή των εννοιών της Γεωμετρίας Fractal στο μαθηματικό επίπεδο των μαθητών και την επακόλουθη αξιοποίησή της στο χώρο της σχολικής εκπαίδευσης, ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν με τη γεωμετρία αυτή που ήδη εφαρμόζεται ευρέως στη μελέτη και την περιγραφή της φύσης.

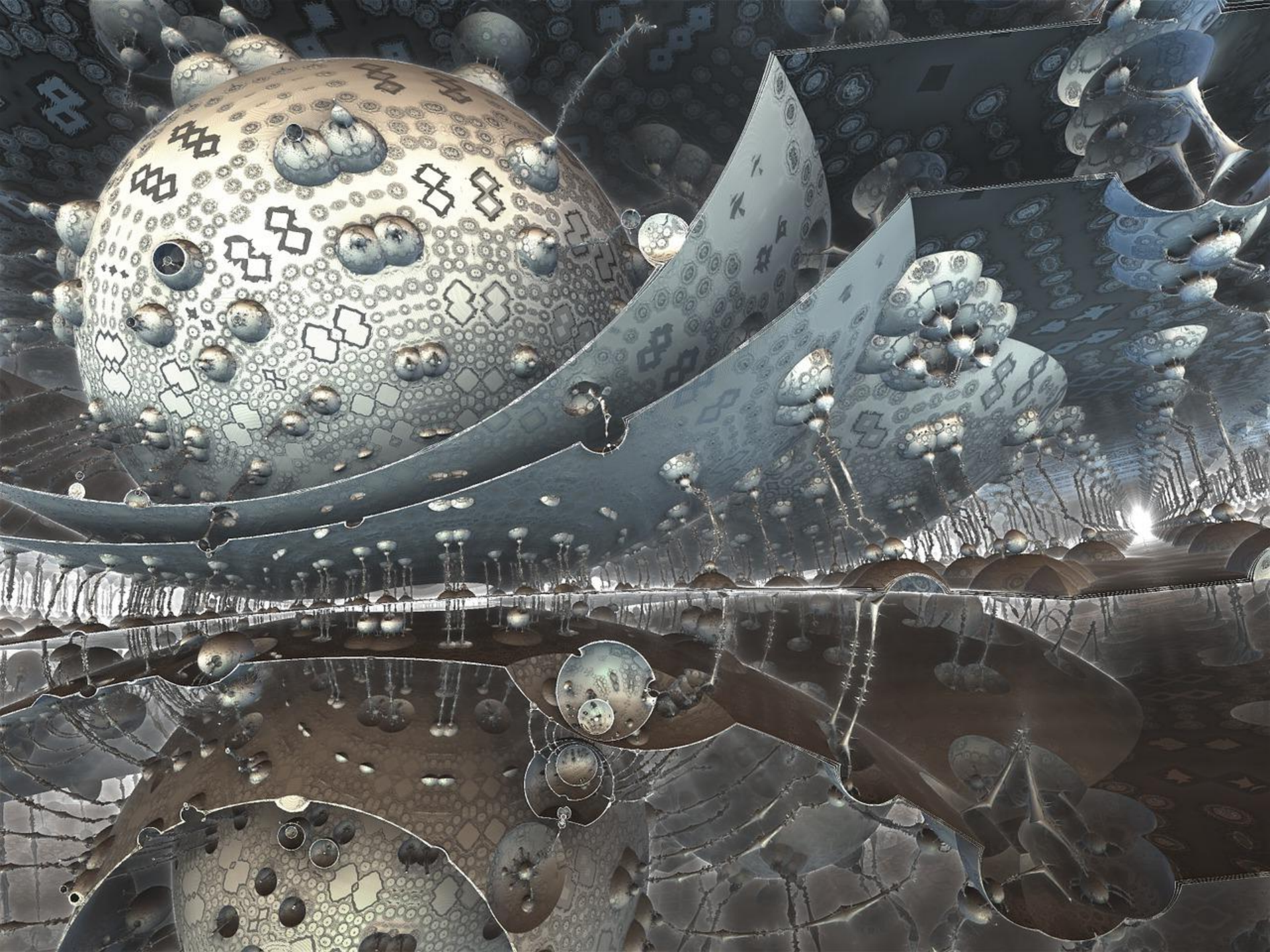
*Οι σύγχρονοι μαθητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τις φρακταλικές γεωμετρικές δομές απ' όσο ενδεχομένως πιστεύουμε*

Δημοφιλείς ταινίες, όπως τα “Star Wars”, αλλά και περιβάλλοντα που τα παιδιά συναντούν σε ηλεκτρονικά παιχνίδια περιέχουν φρακταλικές δομές









## Ενδεικτικές βιβλιογραφικές αναφορές

- D'Anselmi F, Valerio M, Cucina A, Galli L, Proietti S, Dinicola S, Pasqualato A, Manetti C, Ricci G, Bizzarri M. Metabolism and cell shape in cancer: A fractal analysis. *Int J Biochem Cell Biol* 2011;43:1052-1058.
- Di Ieva A (Ed.). *The Fractal Geometry of the Brain*. New York: Springer Science+Business Media, 2016.
- Karperien AL, Jelinek HF. Box-Counting Fractal Analysis: A Primer for the Clinician. In A. Di Ieva (Ed.) *The Fractal Geometry of the Brain*, New York: Springer Science+Business Media 2016;13-43.
- Karperien AL. *FracLac Advanced User's Manual*. Charles Sturt University (Australia), 2005.
- Klonowski W. Signal and Image Analysis: Using Chaos Theory and Fractal Geometry. *MGV* 2000;9(1/2):403-432.
- Mandelbrot BB. *The Fractal Geometry of Nature. Updated and Augmented*. New York: WH Freeman and Company, 1983.
- Smith TG Jr, Lange GD, Marks WB. Fractal methods and results in cellular morphology—dimensions, lacunarity and multifractals. *J Neurosci Meth* 1996;69(2):123-136.
- Tang S. Fractal Structure of Flocs, Computer Simulation of. In P. Somasundaran (Ed.) *Encyclopedia of Surface and Colloid Science, Vol. 4 (2nd ed.)*, Boca Raton: Taylor & Francis 2006;2635-2641.
- Thamrin C, Stern G, Frey U. Fractals for physicians. *Paediatr Respir Rev* 2010;11(2):123-131.
- Yinti SR, Srikant N, Boaz K, Lewis AJ, Ashokkumar PJ, Kapila SN. Nuclear Fractal Dimensions as a Tool for Prognostication of Oral Squamous Cell Carcinoma. *JCDR* 2015;9(11):EC21-EC25.
- Αραχωβίτης ΙΛ. *Εισαγωγή στη Χαοτική Δυναμική και στα Fractals (Κλασμοειδή)*. Αθήνα: Παπασωτηρίου, 2001.
- Βεργίδης ΘΚ. *ΦΡΑΚΤΑΛ: ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΝΤΑ ΠΟΥ ΕΡΜΗΝΕΥΟΥΝ ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ, 3η εκδ.* Καβάλα: Εκδόσεις ΞΥΡΑΦΙ, 2012.



**onpodium.gr**  
The art of sharing knowledge

**Σας  
ευχαριστώ  
για την  
προσοχή σας**