A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

67

Dicembre
2013

Ufficio
dell’insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
67

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-86486-89-7

Bollettino dei docenti di matematica 67

Dicembre
2013

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

La redazione del Bollettino dei docenti di matematica finalmente può comunicare ai fedeli lettori due avvenimenti gioiosi. Il 19 febbraio 2013 l'Università di Cipro ha concesso a Bruno D'Amore un PhD Honoris Causa in Social Sciences and Education, per la sua attiva militanza nel mondo della ricerca scientifica in Didattica della Matematica e per i risultati internazionali da lui ottenuti. La cerimonia è avvenuta a Nicosia il giorno 15 ottobre 2013. Inoltre Silvia Sbaragli, dottoressa in Didattica della Matematica è stata promossa a professore associato dall'Università di Bologna. I due studiosi sono membri attivi del comitato scientifico della nostra rivista e questi successi ci fanno doppiamente piacere.

Il numero apre con la versione italiana del discorso di accettazione del dottorato Honoris Causa di Bruno D'Amore. La rubrica varia è completata da un articolo di una neo-laureata in Antropologia culturale all'Università di Bologna, Barbara Marotta, che ci introduce nel nuovo importante mondo dell'Etnomatematica.

La sezione dedicata alla matematica presenta due contributi molto particolari: Paolo Hägler ci mostra una sua applicazione della successione di Fibonacci e Stefano Ravasi del Liceo scientifico Galileo Galilei di Trieste ci intrattiene su un tema tipicamente liceale riguardante gli zeri di un polinomio.

La parte che concerne la didattica presenta tre proposte. Il primo articolo, scritto da un gruppetto di autori coordinati da Silvia Sbaragli, è uno studio comparato sul rendimento in matematica degli allievi di scuola media ticinesi e italiani (dell'Emilia Romagna); contiene risultati e considerazioni di grande interesse. Il secondo è una sintesi dell'ottimo lavoro di abilitazione di Larissa Bizzozero, insegnante alla scuola dell'infanzia di Rivera, uno studio sulle concezioni dei bambini in età prescolastica riguardanti il concetto di probabilità. Il terzo contributo è di Alberto Piatti, che inaugura una nuova rubrica, «Gocce di didattica» che ci auguriamo possa stimolare un dibattito costruttivo fra i lettori, come è nelle intenzioni del proponente.

La rubrica Giochi presenta il Quiz numero 50 di Aldo Frapolli. L'Autore conclude così la lunga serie di proposte che hanno impegnato seriamente alcuni fra i più brillanti lettori. Lo ringraziamo per il grande lavoro svolto e ci auguriamo di ritrovarlo con contributi di altro tipo. Segue una nuova proposta di Stefan Meyer, specialista nella didattica per allievi in difficoltà. Il suo gioco «Dado-differenza» può essere usato sia nelle classi delle elementari sia con allievi delle medie che hanno bisogno di irrobustire le capacità di calcolare mentalmente.

Il numero segnala un evento eccezionale, da non perdere: «Matematicando: a spasso con la Matematica per le strade di Locarno» che si svolgerà nei giorni 16 e 17 maggio, organizzata dal DFA, con anche la partecipazione della SMASI.

Si chiude con due recensioni. A proposito di questa sezione della nostra rivista va detto che sta suscitando molto interesse, anche fra gli editori. Ringrazio in particolare Bruno D'Amore per i contributi che ci invia regolarmente. Dello stesso autore è la presentazione del libro di Giorgio Israel e Ana Millán Gasca, Pensare in matematica, pubblicata sul numero 66, con omissione della firma.

I. Varia

1. Apprendere la matematica per usare il suo linguaggio in modo universale[1]

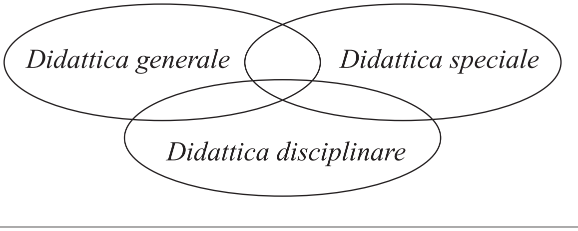
Bruno D'Amore

Mathematics is the only discipline whose contents are more or less the same in all the countries of the world in which it is taught, depending on the age of the students. Recently Unesco has published a long document outlining the mathematical knowledge that is necessary for future citizenship. We all tend to emphasize that Mathematics does not merely have practical applications, but that its extraordinary importance lies in the language that it is able to develop and that this is one of the principal objectives of its complex process of teaching / learning. We must enable future citizens to use mathematical language to interpret all natural phenomena and the disciplines that humanity is able to develop. Among these are the Arts and in particular Music and the Plastic Arts. By now for decades many art critics use mathematical language to interpret the phenomenon of artistic creation and to describe the work of artists who often are not even aware of the mathematics they are using. The descriptive and rational power of mathematical language here reveals all its extraordinary effectiveness. In this sense it is ever more important to study better and in more depth the Mathematics Education in order to understand the dynamics of «learning situations». Mathematics Education is an autonomous science that has assumed enormous importance in recent decades; the research continues to enrich its contents, thanks also to the contribution of other domains of human knowledge.

1.

Ancora oggi c'è chi confonde la Pedagogia con la Didattica. La Pedagogia può essere interpretata in tanti modi; molto condivisa è la possibilità di vederla come quello specifico aspetto della Filosofia che mette in evidenza fondamentale termini come etica, educazione, relazioni fra discente e docente, ruolo della scuola nella società eccetera. La Didattica pone l'accento su concetti come apprendimento, strumenti generali per la costruzione cognitiva, individuo e società nella formazione, relazione fra discente e Sapere e fra docente e Sapere eccetera.

Si può parlare oggi di almeno tre diverse specializzazioni del termine Didattica: una Didattica Generale che si occupa dei temi detti nella loro più vasta accezione problematica; una Didattica Speciale che si occupa di casi fuori dalla norma, casi dovuti sia a studenti particolari sia a situazioni di insegnamento-apprendimento particolari; una Didattica Disciplinare, che mette in evidenza le singole discipline per quanto riguarda il loro insegnamento-apprendimento.



1. Versione italiana del discorso di accettazione del PhD Honoris Causa in Social Sciences and Education attribuito dall'Università di Cipro.

I pedagogisti del XVIII e XIX secolo avevano già posto l'accento sul problema dell'apprendimento, ma senza distinguere le specificità delle discipline; oggi è chiaro a tutti che apprendere la Matematica è diverso dall'apprendere il nuoto o la Storia dell'Arte; la dimostrazione è palese: esistono studenti che sono in difficoltà *solo* in Matematica. Questa specificità degli apprendimenti, dovuta alla sempre più vasta conoscenza cognitiva delle singole materie, ha portato negli anni '80 a parlare di episteme di essi e dunque ad una Epistemologia dell'apprendimento specifico, per esempio della Matematica, proprio per sottolinearne le caratteristiche che lo distinguono da quello delle altre materie.

Esiste dunque oggi una teoria specifica che, all'interno delle Didattiche disciplinari (al plurale), punta l'attenzione sull'apprendimento specifico; nel nostro caso, esiste una Didattica della Matematica che, se ha in comune (per esempio) con la Didattica della Lingua certe caratteristiche che possono far pensare ad una matrice comune all'interno della Didattica Generale, rientra però negli interessi specifici della Matematica, assai più che non della Pedagogia. Sono in generale matematici, nel mondo, coloro che si occupano di Didattica della Matematica.

2.

La Matematica è l'unica disciplina insegnata in tutti i paesi del mondo e i cui contenuti sono più o meno gli stessi, più in dipendenza dell'età degli allievi che non delle diverse regioni geografiche o delle condizioni sociali. Recentemente l'Unesco ha pubblicato un lungo documento nel quale si delineano le conoscenze di matematica necessarie ai cittadini del futuro.[2] La lettura di questo documento è molto stimolante perché in esso si distingue fra conoscenze di base per il cittadino comune e conoscenze avanzate per poter fare un uso significativo della matematica in senso critico ed analitico, anche da un punto di vista professionale e non solo civico.

Così come si propone in quel documento, noi tutti tendiamo ad evidenziare che il ruolo della matematica non è solo applicativo, ma che un'importanza straordinaria sta nel linguaggio che la matematica è in grado di sviluppare ed esso è uno degli obiettivi principali del suo complesso processo di insegnamento–apprendimento.

Dobbiamo fare in modo che i futuri cittadini sappiano sfruttare il linguaggio della matematica per interpretare tutti i fenomeni della Natura e le discipline che l'essere umano è in grado di creare. Fra queste, le arti ed in particolar modo la musica e le arti plastiche. A questo dovere sociale un ricercatore di didattica della matematica può decidere di dedicare tutto il suo lavoro.

3.

Le mie ricerche in didattica della matematica sono cominciate assai presto, quando ancora ero un giovane matematico e mai avrei immaginato di abbandonare

2. Artigue M. (2011). Text in pdf version:
http://unesdoc.unesco.orgimages/0019/001917/191776f.pdf

la ricerca matematica pura per dedicarmi a quella applicata dell'insegnamento-apprendimento. Nell'anno 1971, due anni dopo la laurea in matematica, risposi all'appello di una rivista di didattica per esaminare alcune proposte didattiche fatte da alcuni ricercatori. Ma fu un evento sporadico.

5 anni dopo, tornai con decisione, frutto di una scelta personale, alla didattica della matematica, abbandonando la ricerca matematica pura.

In questo nuovo campo, mi sono dedicato allo studio delle interferenze fra i diversi tipi di linguaggi nell'azione scolastica, per esempio allo «scontro» fra un linguaggio formale ed uno naturale (everiday language) nella pratica scolastica.

Ho contrastato con ricerche opportune l'errata tendenza degli anni '80 a cercare di trasformare la risoluzione di un problema in un algoritmo, tendenza nata da un'interpretazione ingenua dei libri divulgativi di George Polya; ho fatto di più, ho mostrato che questo riduzionismo era impossibile ed ho cercato le cause linguistiche del fallimento degli studenti di fronte ai problemi, a non importa quale livello scolastico.

Ho esaminato a lungo l'ambiente di lavoro «laboratorio», luogo dell'imparare attraverso il fare, nel quale il problema si trasforma in necessità concreta, interpretando l'azione dell'allievo in termini di teoria delle situazioni e fornendo strumenti per l'analisi in positivo ed in negativo del fenomeno.

Ho studiato certi apprendimenti specifici, con Martha Isabel Fandiño Pinilla: lo zero, le relazioni fra area e perimetro delle figure bidimensionali, l'apprendimento dell'idea di infinito matematico, il che mi ha portato a essere Chief Organizer del Topic Group 14: *Infinite processes throughout the curriculum*, all'VIII ICME, Sevilla, 14-21 luglio 1996; in questa occasione, uno degli advisory panel fu Raymond Duval. Lo studio concernente gli ostacoli epistemologici e didattici che si frappongono al processo di apprendimento dell'infinito matematico sono sfociati in una ricerca, condotta con Gianfranco Arrigo, dal titolo significativo «Lo vedo, ma non ci credo» in omaggio a George Cantor, lavoro presentato al CERME 1 (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education) a Osnabruck, (D), nel 1999. Sul tema delle convinzioni degli insegnanti per quanto riguarda l'infinito matematico ho poi diretto la tesi di dottorato di Silvia Sbaragli condotta in Italia ma discussa in Slovacchia.

Ho dedicato molte energie a difendere la necessità dello studio dell'apprendimento della matematica da parte di studenti molto giovani, perfino della scuola dell'infanzia, perché esso ha caratteristiche assai specifiche che forniscono informazioni sugli apprendimenti «ingenui», cioè non formali, anche agli altri livelli scolastici.

Ho dedicato anni di ricerca e di sperimentazione all'azione didattica in aula attraverso la storia della matematica (con Francesco Speranza). Questo mi ha portato alla stesura di molti articoli sulla epistemologia della matematica, lavoro che prosegue anche oggi.

Nel 1986 ho creato un convegno nazionale (in realtà internazionale) che si svolge ininterrottamente da allora, ogni anno a novembre, e che raccoglie migliaia di partecipanti; vi hanno preso parte alcuni fra i più famosi ricercatori del mondo; nel 2013 siamo alla edizione numero 27; nello stesso anno 1986 fondai una rivista di didattica della matematica che ho diretto 24 anni e poi chiuso, essendomi trasferito a vivere dall'Italia alla Colombia; la rivista ha pubblicato ricerche dei maggiori specialisti mondiali ed ha raggiunto la classificazione internazionale B.

Ho voluto includere nelle mie ricerche elementi di Etnomatematica e analisi di termini specifici (per esempio il termine «competenza» con Martha Isabel Fandiño Pinilla e Juan Godino).

Sorprendente fu il risultato di un lunghissimo studio sulle dimostrazioni spontanee prodotte dagli studenti a livello di 9°-10° grado di studio; misi in evidenza il fatto che alcune delle dimostrazioni che gli insegnanti giudicavano non opportune, lo erano semplicemente perché la logica che le sosteneva non era quella aristotelica, ma la *nyaya* indiana, assai più concreta e dunque vicina ai bisogni degli studenti, i quali cercano di ancorare il proprio ragionamento non sempre alla deduzione logica (a sua volta basata sull'implicazione materiale, difficilissima da far propria) ma sull'esempio e sulla tesi considerata come ipotesi di partenza, tutti atteggiamenti tipici della *nyaya*.

Molto tempo ho dedicato alle difficoltà oggettive che gli studenti di qualsiasi livello incontrano nella costruzione cognitiva degli oggetti della matematica, cercando strumenti per interpretare gli errori e per descriverli e valutarli (per esempio i lavori sui TEP compiuti con Hermann Maier).

Ho partecipato a convegni internazionali sempre con seminari o conferenze, in Europa, America, Asia; sono felice di ricordare, in particolare, le numerose occasioni di lavoro con il collega ed amico Athanasios Gagatsis (commendatore della Repubblica italiana) prima a Thesaloniki e poi a Nicosia; condividiamo profondi interessi nel campo delle rappresentazioni e della semiotica. Ho sempre contrastato l'insana abitudine di considerare una nuova teoria emergente come la dichiarazione di morte delle teorie precedenti; a mio avviso, nonostante la presenza di teorie assai significative e profonde nate dopo (e alle quali ho collaborato, in particolare la EOS di Juan Godino), le teorie fondazionali restano alla base della Didattica della Matematica, prima fra tutte la teoria delle situazioni di Guy Brousseau, fondamento storico di base della nostra disciplina; così, ho sempre cercato di rivalutare le discipline fondazionali, mostrandone la reciproca coerenza, di più: la necessità, rispetto a problemi specifici di interpretazione delle situazioni d'aula, concetto che ho posto alla base della descrizione della mia ricerca che oggi conta 42 anni.

Mi sono dedicato allo studio delle convinzioni che hanno gli studenti sulla matematica e sul loro operare in matematica, capendo subito che bisognava porre alla base dell'interpretazione delle situazioni d'aula le convinzioni degli insegnanti, soggetto al quale ho dedicato anni di ricerca (con Martha Isabel Fandiño Pinilla), creando anche strumenti per la loro analisi; le convinzioni degli insegnanti determinano il lavoro matematico in aula e influenzano in modo massiccio le convinzioni che gli studenti costruiscono.

E infine, affascinato prima dagli studi di Raymond Duval e poi da quelli di Luis Radford, ho dedicato e sto dedicando tutte le mie energie alla multiforme presenza della semiotica nell'azione di insegnamento apprendimento della matematica; ho cercato nella storia dell'evoluzione della matematica esempi ed ispirazioni per la definizione dei vari oggetti della matematica, per analizzarli da un punto di vista prima epistemologico e poi didattico, cercando definizioni opportune di «oggetto matematico». In questa direzione ho a lungo studiato, con Martha Isabel Fandiño Pinilla, le variazioni di significato che gli studenti e gli insegnanti attribuiscono a diverse rappresentazioni semiotiche ottenute l'una dall'altra con trasformazioni di trattamento da loro stessi compiute. In questo campo specifico abbiamo pubblicato diversi articoli, partecipato a convegni internazionali e ho diretto due tesi internazionali di dottorato, una in Italia e una in Colombia, anche se il problema resta parzialmente aperto, secondo me.

A questo punto ero maturo per un salto nelle mie convinzioni filosofiche profonde, da un moderno ma ingenuo realismo ad un maturo pragmatismo nel quale oggi credo con tutto me stesso, anche a causa dell'aver posto teorie antropologiche alla base della mia descrizione dei fenomeni didattici.

4.

Fin dall'inizio ho amato molto dedicarmi alla divulgazione della matematica, pensando di rivolgermi a studenti e adulti che non apprezzano la matematica semplicemente perché, di fatto, non la conoscono; in questo campo, ho scritto un numero considerevole di libri, negli ultimi anni coadiuvato da Martha Isabel Fandiño Pinilla e da altri colleghi, ricevendo anche premi.

Fin dall'inizio dei miei studi sono stato affascinato dal linguaggio della matematica e da come esso possa essere inteso come base per tutti gli altri; spinto a ciò non solo da motivi dotti o colti, certo come sono della unitarietà della cultura umana, contrario al tentativo di spezzare il sapere in «due culture», ma anche dal fascino che su di me hanno sempre avuto la poesia e l'arte figurativa, fin da giovane studente.

E così ho dedicato molti studi alla presenza della matematica nelle opere di Dante Alighieri e soprattutto a quel gioiello monumentale di poesia universale che è la *Comedìa* (la *Divina Commedia*); grazie a questi studi ho pubblicato molti articoli, libri, ho preso parte con conferenze a convegni specifici. Dopo 700 anni dalla scrittura di questo monumento alla conoscenza umana, ho fornito indicazioni sull'interpretazione matematica di certi versi, rimasti sepolti a causa dell'ignoranza matematica dei critici e storici della letteratura; oggi alcune usuali interpretazioni di quei versi sono state modificate dagli stessi esperti dantisti che hanno accolto le mie interpretazioni. Ho usato questi risultati per ribadire l'infondatezza della divisione delle culture: Dante, nel Medioevo, riusciva a usare la (scarna) matematica dell'epoca per descrivere la Natura e i sentimenti umani, la teologia e la logica, per usare metafore, per raccontare in forma assai più profonda di quanto la pseudocultura matematica di certi letterati permetta oggi. Un motivo in più per conoscere e fare propria la matematica, anche da parte degli umanisti.

5.

Darò ora un paio di esempi di come la matematica possa aiutare a capire certi versi della Divina Commedia finora rimasti oscuri ai critici letterari che non amano la matematica.

Primo esempio

Consideriamo un riferimento aritmetico che si trova in Par. XXVIII 91-93:

«…
L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che `l numero loro
più che '1 doppiar delli scacchi s'immilla.
…»

Il grande numero a cui si fa riferimento è quello degli angeli che nascono, istante per istante, a testimoniare la gloria di Dio; questi non si contano raddoppiando ma a mille a mille.

Quanto è grande il numero di questi angeli? Ebbene, Dante afferma che il loro immillarsi supera *«il doppiar delli scacchi»*. È un evidente riferimento alla famosa leggenda di Sissa Nassir, l'inventore degli scacchi. Egli chiese, come ricompensa al suo entusiasta sovrano, qualche cosa di apparentemente assai modesto: presa la scacchiera 8 per 8, egli chiese per sé un chicco di riso sulla prima casella; il doppio, cioè 2, sulla seconda; il doppio ancora, cioè 4, sulla terza; il doppio ancora, cioè 8, sulla quarta; e così via, fino all'ultima casella, la sessantaquattresima, appunto. Con calcoli abbastanza agevoli oggi, specie con l'uso di un calcolatore, ma che risultano essere ardui assai con il sistema romano, si trova che il numero di chicchi dovuti a Sissa Nassir è il seguente: 18 446 744 073 709 551 615, quasi illeggibile. Con una scrittura più compatta, oggi si preferisce la notazione cosiddetta scientifica, $1{,}8447 \cdot 10^{19}$.

Per rendersi conto della enormità di questo numero, si può ricorrere al seguente espediente: immaginare di distribuire i chicchi di Sissa Nassir su tutta la superficie terrestre, la cui misura, espressa in base ai dati attuali (e non quelli dei tempi di Dante), compresi mari, oceani, deserti ghiacciai, montagne ecc., è di circa $5{,}0995 \cdot 10^{18}$ cm². Se distribuiamo i chicchi, troviamo 3,62 chicchi (diciamo pure, per arrotondare, 3 chicchi e mezzo) per ogni cm² di superficie terrestre. (Il che spiega perché il sovrano si sentì preso in giro e, anziché premiare Sissa Nassir, gli fece mozzare la testa, ottenendo, tra l'altro, un immenso risparmio).

Ma il numero degli angeli «più che» raddoppiare, come i chicchi sulla scacchiera, «s`immilla»; se si rifà lo stesso calcolo immillando (nella nostra interpretazione, cioè: 1 chicco sulla prima casella, 1000 sulla seconda, 1000000 sulla terza, 1000000000 sulla quarta, e così via) invece che raddoppiando, si trova un numero immenso, ma pur sempre finito: 10^{189} (tanto per avere un'idea, $2 \cdot 10^{170}$ angeli per cm^2 di terra… E c'è da rallegrarsi allora del fatto che gli angeli siano immateriali).

Al di là del tono un po' scherzoso che ho voluto dare alla storia, ci sono due elementi di grande interesse. Il primo è che Dante avrebbe potuto dire che gli angeli che nascono istante per istante a gloria di Dio sono infiniti; rispetto all'infinito, un numero immenso come 10^{189} è una goccia nell'acqua; ma la scelta di un numero grandissimo è assai più significativa dell'aggettivo «infinito»; sembra un paradosso, ma quel numero ti dà più da pensare che non la parola «infinito», spesso usata a sproposito.

Il secondo è che molti autori dichiarano che Dante non conosceva i numeri arabo-indiani che, nella sua epoca, già circolavano in Europa ma erano ancora dominio di pochi. Ma per avere una idea dell'immenso valore di quegli angeli, occorre far uso del sistema posizionale, mai si potrebbe arrivare a tanto con il sistema romano, non posizionale. Una banale ricerca nelle biblioteche fiorentine mostra che il secondo figlio maschio di Dante, Jacopo, era allievo di una delle tre scuole fisse di Firenze, la scuola di Santa Trinità, dove ebbe come maestro di *arismetrica* un matematico di certo prestigio, Paolo dell'Abaco, il quale doveva sì insegnare il sistema romano, obbligato dai superiori, ma che faceva cenno, ai suoi studenti più svegli, del nuovo sistema arabo del quale circolavano, proprio in Toscana, trattati. Oggi, la sicurezza che Dante non avesse idea del sistema aritmetico posizionale non è più così certa!

Secondo esempio

Uno dei più famosi passi matematici di Dante è certo costituito da questi versi in Par. XXXIII 133-138:

«…
Qual è il geomètra che tutto s'affige
Per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,

tal era io a quella vista nova;
veder volea come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;
…»

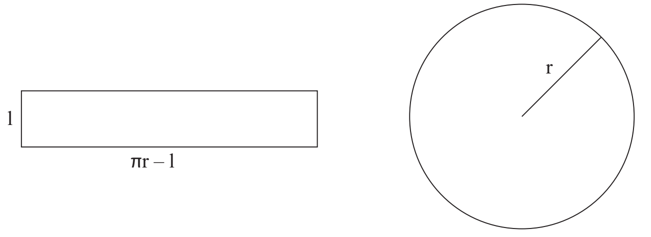
La «vista nova» va intesa qui come il contatto diretto fra Dante e Dio, attraverso la vista. La *Divina Commedia* sta per finire, sono gli ultimi versi. Il Poeta ha attraversato l'Inferno, il Purgatorio, Il Paradiso, fra poco il suo viaggio terminerà e tornerà sulla Terra; per concluderlo, gli spetta la grande fortuna del contatto visuale con Dio. Deve trovare una metafora che gli permetta di spiegare la grandezza di quel che gli sta succedendo, deve mettere in relazione la «vista nova» con qualcosa che renda l'idea … E gli viene in mente la geometria, ricorre a quel «misurar lo cerchio».

La metafora non è banale, ma è stata mal interpretata per secoli. In un testo critico fra i più diffusi si trova la seguente spiegazione: «come il geometra che si applica, concentrando tutte le sue facoltà mentali, all'*insolubile problema* della quadratura del circolo…» (corsivo mio), «tal ero io dinanzi a quella straordinaria visione, ché invano …».

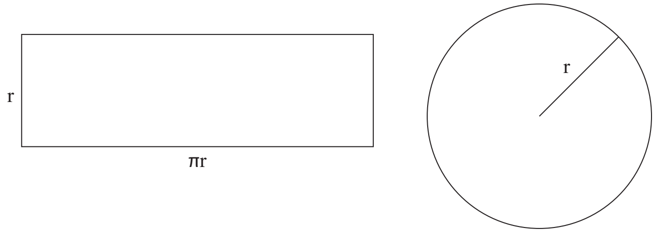
Che cos'è *esattamente* il problema della quadratura del cerchio? Si può esprimere in due modi almeno, tra loro equivalenti: data una circonferenza, trovare un quadrato o un rettangolo il cui perimetro abbia la stessa lunghezza della circonferenza; dato un cerchio, trovare un quadrato o un rettangolo la cui area abbia la stessa estensione del cerchio.

Questo problema è stato risolto molto brillantemente nell'antichità greca, per esempio da Dinosastro nel V sec. [ma non solo da lui]. Era una cosa ben nota, diffusa tra le persone colte, non solo tra i matematici, tra gli altri ben spiegata da Platone.

Da un punto di vista più modestamente scolastico, il lettore ricorderà d'aver appreso in IV o V elementare che una circonferenza di raggio r misura $2\pi r$; dunque, se si prende un rettangolo di lati 1 e $\pi r-1$, lunghezza della circonferenza e perimetro di quel rettangolo coincidono; così, l'area di un cerchio di raggio r è, come ben sa ogni bambino di 10 anni, πr^2; dunque, un rettangolo di lati πr ed r avrà area uguale a quella del cerchio.



perimetro del rettangolo: $2\pi r$ misura della circonferenza: $2\pi r$



area del rettangolo: πr^2 area del cerchio: πr^2

Ma allora, dove sta l'*impossibilità* del problema?

Dante ha fatto un sottinteso; è sempre stato ben noto che i matematici Greci privilegiavano le soluzioni «con riga e compasso» [è un modo di dire che nasconde qualche cosa di più preciso che non il mero riferimento ai due strumenti; sorvolerò qui sulle questioni tecniche: ci si può immaginare, in prima approssimazione, che si tratti *davvero* di servirsi di una riga (non graduata) e di un compasso].

La soluzione data da Dinostrato e quelle date dagli altri studiosi greci della quadratura del cerchio sono sì corrette, ma NON sono state ottenute con riga e compasso.

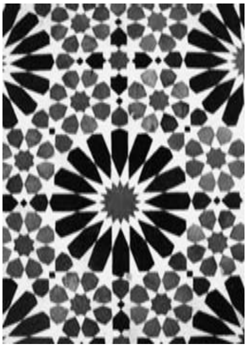
Inutilmente, e per secoli, dapprima i matematici greci e poi via via tutti gli altri, cercarono di quadrare il cerchio con questi strumenti, inutilmente: oggi sappiamo che ciò è impossibile (lo ha dimostrato Lindemann, ma solo nel 1882). I Greci devono averlo supposto, anche se in modo implicito: non può essere un caso se i tre problemi più amati e più studiati (i tre «problemi classici della geometria greca», citatissimi da Platone), tra i quali, appunto, quello qui in esame, erano perennemente presi ad esempio. I tre problemi cosiddetti dell'Ellade classica in oggetto sono: la quadratura del cerchio, appunto; la duplicazione del cubo; la trisezione dell'angolo generico.

Ora, però, il problema è: poiché Dante non dice esplicitamente «con riga e compasso», è da ritenere che anche lui cadesse nell'errore del Critico moderno, oppure che conoscesse la questione e ritenesse che i suoi lettori pure la conoscessero talmente bene che non valeva la pena di star lì a fare i pignoli?

Non avremo mai la risposta a questa domanda; ma la competenza geometrica di Dante che si può rilevare in molti altri punti della *Divina Commedia* e in altre opere, mi spinge quasi ad azzardare che siamo di fronte a un altro esempio di sconfitta attuale dell'unicità della cultura: in Dante le «due culture» convivevano; nei suoi lettori attuali, ahimè, spesso non solo non-matematici ma compiaciuti e ridicoli anti-matematici, non convivono affatto.

6.

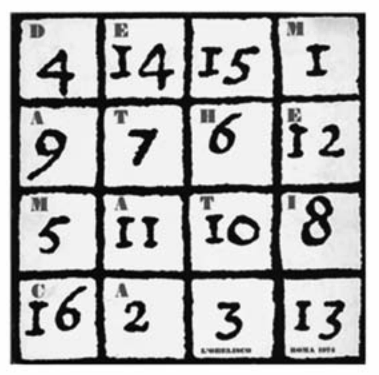
Così, ho dedicato parte della mia attività di studio e ricerca alle relazioni fra matematica e arte figurativa o, meglio, alle relazioni fra i loro linguaggi; non solo, com'è usuale e facile fare, cercando quegli autori e quelle opere che ben si prestano ad interpretazioni matematiche, le piastrelle decorative arabe, per esempio all'Alhambra di Granada, le opere del Rinascimento italiano e tedesco, l'opera di Maurits Escher o di Oscar Reutersvärd eccetera; no, troppo ovvio. La mia idea è stata ed è quella di considerare la storia dell'arte, di tutta l'arte, e di cercarne interpretazioni diverse da quelle tipiche della critica d'arte di stampo letterario, filosofico o psicologico, ma interpretazioni razionali, matematiche, formali.



Gli ampi risultati, documentati e testimoniati, mi hanno dato ragione. Entrato a far parte dell'Association Internationale des Critiques d'Art, presentato da Filiberto Menna, nel 1977, dunque a contatto con critici d'arte aperti e con artisti anche di altissimo livello, sono riuscito a imporre un modo di fare e scrivere critica d'arte, organizzare mostre internazionali nel filone che si chiama *Arte concettuale*, imponendo all'attenzione una linea, detta *Arte esatta*, accolta e seguita poi da artisti anche di grande nome. La dizione «Arte esatta» vuole richiamare, all'interno dell'arte, il fatto che la matematica, all'interno delle scienze, viene chiamata «scienza esatta», secondo la seguente «proporzione»:

arte esatta : arte = scienza esatta : scienza

Su questo tema ho scritto diverse centinaia fra libri e articoli; l'ultimo libro, scritto dopo 20 anni di studi e ricerche, sta finalmente per vedere la luce; ma la sua mole, 1000 pagine e 1000 immagini tutte a colori, causa oggettive difficoltà alla redazione.



Filiberto Menna e Bruno D'Amore, 1974, *De Mathematica*,
International Art Show, Roma, L'Obelisco.

Molti credono che lo studio delle prospettive impossibili sia nato a metà del secolo XIX, nulla di più falso. L'intelligenza dell'essere umano si manifesta in mille modi, uno dei quali è il gusto della contraddizione. Dopo aver cercato per migliaia di anni le regole ferree, matematiche, formali, perfette della rappresentazione prospettica, dopo averle trovate, ha voluto contraddirle per il puro gusto culturale e intellettuale della sfida. E così, inizia un'altra storia, alla rovescia, la storia di chi cerca di rappresentare nel piano, dunque nel quadro, prospettive impossibili che sorprendano chi le scopre e che divertano chi le analizza.

Nel 1754 viene pubblicato il libro dello studioso di disegno architettonico inglese John Joshua Kirby (1716-1774), dal titolo chilometrico (come si usava all'epoca): Dr. Brook Taylor's Method of Perspective Made Easy both in Theory and Practice, Being an attempt to make the art of perspective easy and familiar to adapt it intirely to the arts of design; and to make it an entertaining study to any gentleman who shall chuse so polite an amusement. Il libro è stampato da W. Craighton a Ipswich, Londra; quel che oggi si chiamerebbe l'editore furono i signori J. Swan, F. Noble e J. Noble. Il libro è assai curioso, per esempio nella numerazione delle pagine che non sempre è progressiva. Ma quel che lo rende degno di citazione è l'illustratore, il grande e già ricordato pittore, disegnatore e incisore inglese William Hogarth (1697-1764), autore di irriverenti stampe satiriche che, all'epoca, fecero impressione.

Ultra famosa e sempre citata è la figura che si trova nel frontespizio, dal titolo *Assurdità prospettiche*.

William Hogarth, Assurdità prospettiche, 1754

Rivediamone alcuni particolari.

È ovvio il gioco: vicino-lontano, davanti-dietro vengono scambiati, grazie anche ad un sottile gioco di proporzioni e di misure.

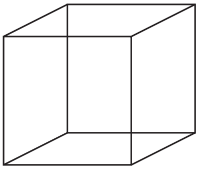
Credo però che, nell'ambito delle prospettive impossibili, gli artisti più citati al mondo siano e debbano essere l'olandese Maurits Cornelis Escher (1898-1972) e lo svedese Oscar Reutersvärd (1915-2002).

Quando si citano le prospettive e dunque i disegni impossibili, sempre si fa riferimento agli studi dei Penrose, padre (Lionel Sharples, psicologo, 1898-1972) e figlio (Roger, nato nel 1931, matematico e fisico, celeberrimo studioso dello spazio-tempo e dei buchi neri, narratore formidabile), e in particolare a un articolo pubblicato nel British Journal of Psychology nel 1958 (Penrose, Penrose, 1958) nel quale appare un celebre «triangolo» impossibile.

L.S. Penrose e R. Penrose, *Tribar*, 1958

Ma il primo disegno impossibile di Reutersvärd è del 1934, molto prima dunque del triangolo dei Penrose (1958).

Tra i famosi inganni ottici, uno dei primi ad essere proposti (1832) fu il cubo di Necker, dal nome del cristallografo svizzero Louis Albert Necker (1786-1861), presente nell'opera *Belvedere* di Escher.



M. C. Escher, *Belvedere*.

Nel bel libro di Jan Gullberg (1936-1998), *Mathematics, from the birth of numbers*, pubblicato nel 1997, nel capitolo dedicato alla geometria, si accenna (p. 374) a Geometrie Fantasmagoriche; a parte una rapida citazione al lavoro dei Penrose, tutto l'argomento è incentrato sul lavoro di Oscar Reutersvärd.

Voglio qui dire che una profonda amicizia anche familiare ed una salda collaborazione mi ha legato ad Oscar tutta la vita; e che mia moglie Martha ed io possiamo vantare a Bogotà una collezione di varie centinaia di sue opere tutte originali, tanto che le abbiamo prestate per un festival della matematica a Roma e per una rassegna di grande rilievo culturale a Reggio Emilia.

7.

Da decenni, vari critici d'arte usano il linguaggio matematico per interpretare il fenomeno della creazione artistica e per descrivere l'opera di artisti che, a volte, nemmeno si rendono conto della matematica che stanno usando nella loro opera.

La potenza descrittiva e razionale del linguaggio matematico rivela qui il suo straordinario potere. A parte dunque le motivazioni generali e le applicazioni concrete, anche in questa direzione è sempre più importante l'esigenza di studiare ogni giorno meglio e più a fondo la didattica della matematica per capire come si sviluppano le situazioni d'aula, l'apprendimento della matematica e dei suoi molteplici linguaggi, le sfumature semiotiche che permettono di rappresentare oggetti che non cadono sotto i sensi e che dunque possono essere comunicati e presi in esame solo grazie a rappresentazioni semiotiche in opportuni registri, sottoponendoli poi alle due diverse trasformazioni semiotiche: il trattamento e la conversione.

La didattica della matematica è una scienza autonoma che ha assunto in questi ultimi decenni un'importanza enorme; la ricerca scientifica specifica la rende sempre più ricca di risultati, grazie anche ai contributi di altri domini della conoscenza umana.

Infine

Voglio dedicare questo prestigioso riconoscimento a mia moglie Martha, compagna e complice, instancabile collaboratrice in ogni avventura, culturale e di vita, persona di una profondità umana ineguagliabile e di una capacità critica strabiliante.

Senza il suo appoggio, senza la sua fede in me, tutto questo non sarebbe potuto accadere. Oggi, e per sempre, qualsiasi riconoscimento dato a me, in realtà è dato ad entrambi[3].

3. Per un completo curriculum e bibliografia, si veda: www.dm.unibo.it/rsddm «chi siamo» «Bruno D'Amore».

2. Etnomatematica

Barbara Marotta[1]

This article aims at explaining what ethnomathematics is, namely a new discipline involving mathematical and anthropological areas. According to Ubiratan D'Ambrosio, one of the founders of the discipline, it is a research program aimed at explaining the mathematics used by identifiable cultural groups, in order to explain, know and understand the world around them.

1. Cos'è l'etnomatematica?

Da qualche decennio, l'etnomatematica si è inserita nel panorama della ricerca ed ha fortemente contribuito ad alimentare lo studio di tematiche riguardanti non solo l'ambito matematico, ma anche quello antropologico. Uno dei più importanti esponenti di questo ambito di ricerca è lo studioso Ubiratan D'Ambrosio che oltre ad aver coniato il termine stesso «etnomatematica», ha contribuito negli anni ad alimentare lo studio di queste tematiche in tutto il mondo. D'Ambrosio definisce l'etnomatematica come «*un programma di ricerca volto a spiegare la matematica praticata da gruppi culturali identificabili*»[2]. Il termine in questione si costituisce di un prefisso *etno* che fa riferimento al contesto culturale quindi racchiude in sé considerazioni su temi come il linguaggio, il gergo, i codici di comportamento, i miti e i simboli; la radice *matema*, non facile da comprendere, che si lega bene all'idea di spiegare, conoscere, capire; e infine *tica* che deriva da *téchne* termine greco con il quale venivano indicate sia le belle arti sia quelle tecniche.

In sostanza si può affermate che *«l'etnomatematica è un programma rivolto a identificare le tecniche, le competenze e le pratiche utilizzate da distinti gruppi culturali nel loro tentativo di spiegare, conoscere e capire il mondo che li circonda[3]»*. È chiaro, quindi, come l'etnomatematica si inserisca in un contesto etnografico. Il passo successivo è la ricerca di una fondazione teorica, di un sostrato concettuale sul quale queste tecniche, competenze e pratiche possano appoggiarsi. Un contributo fondamentale viene offerto dall'analisi storica ed è per questo che l'etnomatematica e la storia delle scienze appaiono come aree molto prossime in questo programma. Tra queste tecniche, competenze e pratiche troviamo quelle che utilizzano processi di conteggio, di misura e di classificazione, di ordinamento e di inferenza, che furono identificate e riunite da

1. Neolaureata in Antropologia culturale all'Università di Bologna.
2. Ubiratan D'Ambrosio, Etnomatematica, Bologna, Pitagora, 2002a, p. 7
3. Ibidem p. 5

Pitagora nella disciplina che chiamò matematica. Un tale tentativo di classificare modi di approcciarsi alla realtà, alla natura, è tipicamente greco e così la matematica, come la concepiamo nei nostri sistemi scolastici, deriva dal pensiero greco. Altri sistemi culturali sviluppano tecniche, competenze e pratiche diverse per destreggiarsi nella realtà, per controllare i fenomeni naturali e persino per creare una teoria di queste tecniche, competenze e pratiche. Come dire che gruppi culturalmente differenti, come un gruppo di adolescenti di una comunità indios e giovani operai di una cittadina industrializzata, spiegano lo stesso fenomeno della pioggia in maniera assolutamente diversa, perfino quantificando in diverso modo. Allo stesso modo, proponendo un problema come il controllo di un sistema elettrico di elevata potenza a ingegneri e matematici, l'approccio anche in questo caso sarà fortemente diverso. Queste differenze vanno al di là del mero utilizzo di tecniche, competenze e pratiche diverse, ma riflettono posizioni concettuali e punti di vista cognitivi distinti. D'altro canto, secondo D'Ambrosio, il prefisso «etno» può essere riferito ad ogni tipo di gruppo umano (società nazionali, comunità professionali, tradizioni religiose, categorie sociali e così via). In questo senso l'etnomatematica ci riguarda tutti, perché studia gli aspetti logici e matematici delle strategie che, nella vita di tutti i giorni, applichiamo per risolvere i problemi che ci si pongono innanzi. Tali strategie contengono tanta matematica espressa in diverse forme di ragionamento, della quale spesso non ci accorgiamo, perché annidata in comportamenti che ci sembrano naturali e che sono codificati nelle nostre forme culturali.

Ad esempio una casalinga che fa la pasta da quando era bambina potrebbe ignorare che nella sua attività si sta servendo in continuazione di proprietà che un matematico formalizzerebbe in concetti topologici e leggi fisiche, nonché chimiche. Ma è altresì probabile che di queste proprietà abbia una qualche consapevolezza (sebbene formalmente molto diversa da quella del matematico professionista) e che nella sua testa abbia creato dei modelli con i quali spiega la maniera in cui queste proprietà vengono applicate. Così una sarta, un tessitore di reti da pesca, un artigiano applicano leggi che un matematico tradurrebbe nel linguaggio algebrico, geometrico e della teoria dei giochi (Nicosia, 2006).

2. I diversi ambiti dell'etnomatematica

Intendere il prefisso «etno» in maniera così ampia ha portato alla creazione di due diversi filoni di ricerca che rientrano nel programma di etnomatematica. Il primo limita l'attenzione a piccole società, solitamente prive di espressione scritta, rifacendosi direttamente al campo dell'antropologia classica e dell'etnografia (Ascher, 1991). Studi che si sono concentrati in quest'ambito hanno messo in luce la raffinatezza e l'elevata complessità delle pratiche messe in atto da tali società, in profondo contrasto con il pregiudizio di semplicità e puerilità di cui sono a lungo state fatte oggetto. Il secondo invece, intende il prefisso «etno» nella maniera più ampia possibile, esso può essere riferito come abbiamo già visto a ogni tipo di gruppo umano sia esso culturale, sociale, professionale, ecc…: un gruppo di adolescenti di una comunità indios, un gruppo di giovani operai di una cittadina industrializzata, un gruppo di he, un gruppo di sarte, un gruppo di bambini di una certa età, di ingegneri o matematici (Carraher, 1988; Saxe, 1990; Schliemann e Nunes, 1990).

Le differenze tra culture creano quindi differenti concezioni matematiche, ma è altresì vero che la matematica di una cultura evolve nel tempo seguendo le evoluzioni della società di cui è espressione. Alla luce di ciò la storia delle discipline scientifiche riveste dunque un interesse nuovo. Ciò ha portato l'etnomatematica a intersecarsi con l'ambito storiografico e alla creazione di un terzo filone di ricerca in etnomatematica che si dedica alla ricostruzione della storia della matematica (Gerdes, 1991; Joseph, 1991; Zaslavski, 1973). Da un lato l'esame storico risulta necessario per riscrivere la storia delle matematiche ripulendola dall'ideologia eurocentrica che a lungo ha influenzato gli storici di questo campo. Non è più accettabile considerare il Medio Evo come un periodo buio e attribuire agli Arabi l'unico merito di aver ereditato la matematica greca e di averla tramandata ai posteri (Nicosia, 2006). Una rivalutazione della matematica antica di origine non greca consente di apprezzare le caratteristiche culturali di cui i diversi contributi sono rivestiti.

Dall'altra parte l'esame storico è utile per comprendere il significato della frattura tra matematica accademica (cioè quella insegnata a scuola) e matematica effettivamente praticata ogni giorno dall'uomo della strada nel suo lavoro quotidiano. Ogni gruppo socioculturale ha dunque la sua matematica che include grandi porzioni della matematica accademica, ma anche contenuti e procedimenti non-formali.

Borba, in virtù di queste ultime considerazioni, offre un'interpretazione estremistica del significato di etnomatematica: *«particolare complesso di convinzioni, procedure, problematiche e conoscenze matematiche espresse nel codice linguistico socialmente condiviso di un certo gruppo socioculturale»*[4]. Ogni gruppo ha quindi la sua etnomatematica e la matematica accademica non è altro che una particolare etnomatematica internazionale, ma condivisa in toto solo da una piccola percentuale della popolazione mondiale.

Affermare ciò vuol dire sostenere che la matematica è un sapere con forti implicazioni culturali. Questa visione confonde «l'universalità della verità» delle idee matematiche con le basi culturali di questa scienza. Le idee sono state decontestualizzate e rese astratte in modo che ovviamente possano essere applicate ovunque. In questo senso sono chiaramente universali. Ma non appena si comincia a mettere a fuoco i particolari di dichiarazioni come «i triangoli hanno angoli interni la cui somma è di 180°» oppure «un numero negativo moltiplicato per un numero negativo dà un positivo», proprio la credenza di questa universalità tende a sembrare una sfida. La somma degli angoli interni ad un triangolo è in tutto il mondo di 180°? Perché poi 180° e non diciamo 100° o 150°? Da dove deriva l'idea di un numero negativo? Scrittori autorevoli che si occupano di storia della matematica hanno dato risposte a questo tipo di domande e ricerche antropologiche e interculturali; sostengono l'idea che la matematica ha una storia culturale, ma anche che deriva da differenti storie culturali, ciò che può essere solo descritto come una matematica differente. Si può citare il lavoro di Zaslavsky (1973) che ha dimostrato nel suo libro, *Africa counts*, la gamma di idee matematiche che esistono nelle culture indigene africane. *Blacks in science* di Van Sertima (1986) è un'altra fonte africana come lo è Gerdes (1985). In altri continenti le ricerche di Lancy (1983), Lean (1986) e Bishop (1979) in Papua Guinea, Harris (1980) e Lewis (1976) nell'Australia

4. Marcelo C. Borba, Ethnomathematics and education, in For the learning mathematics, vol. 10, n. 1, 1990, pp. 40

aborigena e di Pinxten (1983) e Closs (1986) con gli amerindi, hanno inoltre aggiunto materiale a questo dibattito. La tesi quindi è questa: la matematica deve essere intesa come un tipo di sapere culturale, che tutte le culture generano, ma che non ha necessariamente bisogno di sembrare la stessa da una cultura a un'altra (A. J. Bishop, 2001).

Bishop per dimostrare la sua tesi utilizza come punto di partenza White che nel suo libro, *L'evoluzione della cultura* (1959), sostiene, come altri hanno fatto, che *«le funzioni della cultura sono di mettere in relazione l'uomo con il suo ambiente da un lato, e l'uomo con l'uomo, dall'altro»*. White, però, è andato oltre e ha diviso le componenti della cultura in quattro categorie: ideologica (credenze, simboli, filosofie), sociologica (costumi, istituzioni, regole e modelli di comportamento interpersonale), sentimentale (atteggiamenti, sentimenti riguardanti le persone, il comportamento) e tecnologica (produzione e utilizzo di utensili). Inoltre, pur mostrando che queste quattro componenti sono interconnesse, White sostiene con forza che *«il fattore tecnologico è quello basilare; tutti gli altri dipendono da questo. Inoltre, il fattore tecnologico determina, almeno in modo generale, la forma e il contenuto dei fattori sociale, filosofico e sentimentale»*[5]. La matematica, come un esempio di fenomeno culturale, ha un'importante componente tecnologica, per usare la terminologia di White. Ma lo schema di White ha offerto per di più, un'opportunità di esplorare l'azione ideologica, sentimentale e sociologica attraverso quella tecnologica.

La matematica in questo contesto è pertanto concepita come un prodotto culturale che si è sviluppato come risultato di varie attività. Dalle sue analisi Bishop ha rilevato sei attività fondamentali, che sostiene siano universali, perché sembrano essere effettuate da ogni gruppo culturale da lui studiato, e inoltre necessarie e sufficienti per lo sviluppo del sapere matematico. Sono: *contare*, *localizzare*, *misurare*, *progettare*, *giocare* e *spiegare*.

Contare	Fa riferimento all'uso di un modo sistematico di confrontare e ordinare fenomeni distinti. Può includere il conteggio, l'uso di oggetti, di stringhe da registrare, parole o nomi.
Localizzare	Cioè esplorare il proprio ambiente spaziale, concettualizzare e simbolizzare questo ambiente con modelli, diagrammi, disegni, parole o altri mezzi.
Misurare	Ossia quantificare la qualità al fine del confronto e dell'ordinamento, utilizzando oggetti o simboli come dispositivi di misurazione associati a unità.
Progettare	Inteso come creare una forma o un disegno per un oggetto o per qualsiasi parte del proprio ambiente spaziale. Può includere la fabbricazione di oggetti, come modello mentale, o la simbolizzazione di questi in un modo convenzionale.
Giocare	Fa riferimento a ideare e impegnarsi in giochi e passatempi con regole più o meno formalizzate alle quali tutti i giocatori debbono attenersi.
Spiegare	Si lega a trovare il modo di spiegare i fenomeni esistenti, siano essi naturali o di origine umana come ad esempio in campo religioso e sociale.

5. Leslie A. White, The evolution of culture, New York, McGraw-Hill, 1959, pp. 19

Da queste sei nozioni basilari, il sapere matematico «occidentale» può essere derivato; in questa struttura può inoltre essere collocata la prova che «altre matematiche» sono state generate da altre culture. A questo punto, sostiene Bishop, va riesaminata l'etichetta di «matematica occidentale» dal momento che le evidenze ci mostrano che culture molto diverse hanno contribuito a incapsulare il sapere in questa particolare etichetta. Dall'altra parte Bishop ammette qualcosa che potrebbe essere vista come una debolezza concettuale. Egli infatti, sostiene di non essere in possesso di una reale prospettiva che gli permetta di verificare se questa struttura universale sia adeguata per descrivere le idee matematiche di altri gruppi culturali. Lascia agli appartenenti a questi gruppi il compito di verificare ciò. Il limite di Bishop risiede in una sorta di culturo-centrismo, che è un rischio sempre presente in questo tipo di analisi. La sua speranza resta quella che, sebbene non riesca a tenere sotto controllo l'esame cross-culturale, riesca però a stimolare altri sviluppi analitici. Questo tipo di culturo-centrismo è ben spiegato da Lancy (1983) che ha proposto una teoria universale dello sviluppo cognitivo. Lancy mostra che il suo *stadio 1* corrisponde agli stadi senso-motorio e pre-operatorio di Piaget *«i risultati di questa fase sono comuni a tutti gli esseri umani»*[6]. Lo *stadio 2* è quello in cui inizia l'inculturazione: *«cosa accade alla cognizione durante lo stadio 2, poi, ha molto a che fare con la cultura e l'ambiente e meno con la genetica»*[7]. Questo è lo stadio in cui, secondo Bishop, diverse culture sviluppano matematiche diverse.

Tuttavia Lancy ha inserito nella sua teoria anche uno *stadio 3*, che riguarda il livello metacognitivo: *«Oltre a sviluppare strategie cognitive e linguistiche, gli individui acquisiscono 'teorie' del linguaggio e della cognizione»*[8]. Per Lancy, quindi, lo stadio delle operazioni formali di Piaget rappresenta la particolare teoria della conoscenza che il gruppo culturale occidentale ha messo in evidenza. Altri gruppi culturali possono dare e hanno dato importanza ad altre teorie della conoscenza.

L'ultima area di intesse in questa analisi focalizza la sua attenzione sui valori in didattica della matematica e ha portato alla creazione di un quarto filone di ricerca in etnomatematica, quello che si è interessato di studiare la relazione tra etnomatematica e didattica della matematica (D'Ambrosio, 2002; Gerdes, 1988; Pompeu, 1992). Non essendo vista come un prodotto culturale la matematica è stata per lungo tempo considerata priva di valori culturali propri. Ancora una volta ricerche antropologiche come quelle di Horton (1971), Leach (1973), Lewis (1976) e Pinxten (1983) ci hanno presentato un'abbondanza di evidenze con cui sfidare questa visione tradizionale. Inoltre, qualsiasi insegnante di matematica che lavora in situazioni di scambio culturale, presto diventa acutamente consapevole dell'influenza dei conflitti di valore presenti nell'esperienza di insegnamento della matematica dei bambini di cui è responsabile. Per di più si può sostenere che l'insegnamento della matematica non è un insegnamento a tutto tondo se non ha nulla da contribuire allo sviluppo dei valori. Probabilmente qui risiede la differenza tra l'addestramento matematico e la didattica della matematica. L'attuale insegnamento della matematica può essere inteso come un semplice addestramento matematico, nel senso che in generale non vi è alcuna attenzione esplicita ai valori. In tal modo i valori vengono assimilati dai discenti in maniera implicita e senza né con-

6. David F. Lancy, Cross-cultural studies in cognition and mathematics, New York, Academic Press, 1983, pp. 203
7. Ibidem pp. 205
8. Ibidem pp. 208

sapevolezza né scelta cosciente da parte degli insegnanti. Certamente una didattica della matematica, dall'altra parte, dovrebbe rendere i valori espliciti e palesi, al fine di sviluppare la consapevolezza e la capacità di scelta dello studente (Bishop, 2001).

3. I valori nell'insegnamento della matematica

Le tre componenti valoriali della cultura (sentimentale, ideologica e sociologica) di White, sembrano avere, secondo il parere di Bishop, coppie complementari di valori associate con la matematica, che danno luogo a determinati equilibri e tensioni. Se si considera la prima componente, quella sentimentale, possiamo vedere che tanta parte del potere della matematica nella nostra società, deriva dai sentimenti di sicurezza e *controllo* che offre. La matematica, attraverso la scienza e la tecnologia, ha dato alla cultura occidentale il senso di sicurezza nella conoscenza *«tanto che le persone possono diventare molto frustrate a seguito di calamità naturali o provocate dall'uomo, che essi pensano non debbano accadere!». «La valorizzazione da parte della matematica delle giuste risposte informa la società, che guarda ad esse (invano ovviamente) per le risposte giuste ai suoi problemi sociali. Dove c'è controllo e sicurezza le cose rimangono prevedibili»*[9]. Il valore complementare fa riferimento al *progresso*. Un metodo di soluzione di un problema matematico è in grado, per la natura astratta della matematica, di essere generalizzato ad altri problemi. L'ignoto può diventare noto. La conoscenza si può sviluppare. Il progresso può diventare la propria ricompensa e il cambiamento diventa inevitabile. L'*alternativismo* è fortemente sostenuto nella cultura occidentale e come per tutti i valori qui descritti, contiene in sé i semi della distruzione. Sono le interazioni e le tensioni tra questi valori di controllo e progresso che permettono alle culture di sopravvivere e di crescere.

Se questi sono i sentimenti gemelli azionati dalla tecnologia matematica, allora la principale ideologia associata alla matematica occidentale deve essere il *razionalismo*, sostiene Bishop. Se si stava cercando un solo identificabile valore, è di certo questo. Sono la logica, il razionalismo e la ragione che hanno garantito il primato della matematica nella cultura occidentale. È la logica che offre il criterio principale della conoscenza matematica.

Le lingue indo-europee sembrano avere un lessico più ricco per la logica; Gardner (1977) nei suoi testi (inglesi) ha usato più di ottocento connettivi logici. L'aumento della tecnologia fisica ha anche aiutato questo sviluppo, poiché la *causalità*, una delle radici di argomentazione razionale, sembra svilupparsi più facilmente grazie alla tecnologia fisica che attraverso la natura; le scale temporali dei processi naturali sono spesso troppo veloci o troppo lente. Tuttavia, vi è anche un'ideologia complementare che è chiaramente identificabile nella cultura occidentale ed è l'*oggettivismo*. La visione del mondo della cultura occidentale sembra essere dominata da oggetti materiali e tecnologie fisiche. Dove il razionalismo si occupa della relazione tra le idee, l'oggettivismo si occupa della genesi di queste idee. Una di queste vie matematiche ha guadagnato il suo potere attraverso l'attività di oggettivazione e astrazione della realtà. Attraverso i suoi

9. Alan J. Bishop, Mathematics education in its cultural context, in Educational studies in Mathematics, n. 19, Cambridge, Kluwer Academic Publishers, 1988, pp. 185

simboli (lettere, numeri, figure) la matematica ha insegnato alle persone a trattare entità astratte come se fossero oggetti.

Gli ultimi due valori complementari riguardano la componente sociologica di White, cioè la relazione tra le persone e il sapere matematico. Il primo Bishop lo chiama *apertura* e fa riferimento al fatto che le verità matematiche sono aperte a un esame da parte di tutti, a condizione, naturalmente, che si abbia la conoscenza necessaria per fare questo esame. La prova cresce dal desiderio per l'articolazione e la dimostrazione, così ben praticate dagli antichi Greci, e anche se i criteri di accettabilità della dimostrazione sono cambiati, il valore di opportunità di conoscenza è rimasto più forte che mai. Tuttavia vi è un valore sociologico complementare che Bishop chiama *mistero*. Nonostante l'apertura, c'è una qualità misteriosa riguardo alle idee matematiche. La base del mistero si trova di nuovo nella natura astratta della matematica. Le astrazioni prendono le distanze dal contesto e la conoscenza decontestualizzata è letteralmente priva di senso. Naturalmente le idee matematiche offrono il loro tipo di contesto, quindi è veramente possibile sviluppare significati all'interno della matematica.

Queste sono dunque le tre coppie di valori relative alla matematica occidentale (*controllo*-*progresso*, *razionalismo*-*oggettivismo*, *apertura*-*mistero*) che hanno contribuito a plasmare un particolare insieme di strutture simbolico-concettuali.

In definitiva, la visione della cultura di White (1959) e l'analisi di Bishop (2001) sulle sue caratteristiche, ci ha permesso di creare una concezione della matematica diversa da quella normalmente stabilita. È una concezione che consente di intendere la matematica come un fenomeno pan-culturale. Sembra che quella che è stata definita «matematica occidentale» debba essere riconosciuta come simile, tuttavia anche diversa dalla matematica sviluppata da altri gruppi culturali. Sembrano esserci differenze sia per ciò che riguarda la simbolizzazione, sia per ciò che riguarda i valori. Quanto siano grandi queste differenze dovrà essere valutato da analisi più approfondite delle prove antropologiche e degli studi cross-culturali disponibili.

4. Il dibattito sull'eurocentrismo matematico

Quel corpo di conoscenze, oggi così vasto e frammentato, che in tutto il mondo prende il nome di matematica è il prodotto di una storia che ha avuto inizio nella Grecia classica e che ha avuto uno sviluppo interculturale. La storia della matematica è stata a lungo influenzata da pregiudizi, che per secoli hanno negato l'esistenza di sviluppi indipendenti e paralleli della matematica. George Gheverghese Joseph (2000) decostruisce questi pregiudizi riuscendo a dimostrare che in paesi come Cina, India e America meridionale si sono sviluppati in un passato remoto sistemi matematici molto sofisticati e che, inoltre, proprio le loro conoscenze avrebbero influenzato la matematica dell'antica Grecia. Il suo assunto fondamentale è che: il sapere matematico è patrimonio comune di tutta l'umanità, e il suo progresso non può essere rivendicato in esclusiva da nessuna tradizione culturale.

Negli ultimi cinque secoli l'Europa e i Paesi occidentali hanno avuto un ruolo di primo piano negli avvenimenti mondiali. Tutto ciò si è riflettuto spesso nelle opere storiche scritte da autori europei, nelle quali se altri popoli compaiono è solo in una maniera fugace e solo quando l'Europa è passata nei loro paraggi (Joseph, 2000).

Le grandi navigazioni sintetizzano la conoscenza non accademica dell'Europa del quindicesimo secolo. Mentre gli universitari portoghesi partecipavano alle scoperte, nelle università e accademie degli altri paesi europei il risultato delle grandi navigazioni provocò una certa sorpresa nel modo di pensare del Rinascimento. La conoscenza matematica di quell'epoca, fondamentale per le scoperte, non può essere identificata come un corpo di conoscenze. Si trova dispersa in varie direzioni, in gruppi della società con distinti obiettivi (D'Ambrosio, 2001).

Nonostante i primi grandi viaggi e la possibilità di circumnavigare il globo terrestre siano state opere di Spagna e Portogallo (Cristoforo Colombo, 1492; Vasco da Gama, 1498; Pedro Álvares Cabral, 1500; Fernando de Magalhães, 1520) le altre nazioni europee riconobbero immediatamente le possibilità economiche e politiche dell'espansione. Una nuova visione del mondo fu incorporata nell'ambiente accademico europeo e ciò contribuì in maniera decisiva allo sviluppo della scienza moderna. In tutta l'Europa ci fu sorpresa e curiosità verso le nuove terre e i nuovi popoli. L'immaginario europeo fu stimolato dalle scoperte, soprattutto del continente americano, il Nuovo Mondo. Il Vecchio Mondo, Eurasia e Africa, era conosciuto grazie agli scambi economici che duravano da millenni, stando a quello che sostengono gli storici. La novità quindi si trovava nel Nuovo Mondo. Autori portoghesi e spagnoli furono responsabili, con le loro cronache, della produzione di un'importante letteratura che presentava una descrizione della natura, dei fenomeni e dei popoli incontrati. Vasti sono i rapporti sulle altre forme di pensare incontrate nelle terre visitate.

Il riconoscimento di altri modi di pensare come sistemi di conoscenza è però tardivo in Europa. Nel pieno apogeo del colonialismo le nazioni europee scoprono un grande interesse nel conoscere popoli e nuove terre del pianeta. Sorgono le grandi spedizioni scientifiche. Durante il XVIII e il XIX secolo si svolge inoltre la polemica «sull'inferiorità» dell'uomo, della fauna, della flora e della stessa geologia del Nuovo Mondo. La tesi della debolezza e impotenza del continente americano (e dei suoi abitanti) ebbe la sua prima enunciazione dottrinale verso la metà del Settecento, allorché il naturalista Buffon constatò e cercò di spiegare l'inferiorità biologica degli animali americani, mentre l'abate de Pauw estese tale condanna agli uomini, indigeni o immigrati.

Fra le grandi opere scientifiche quella che probabilmente ebbe maggiori ripercussioni fu quella di Alexander von Humboldt (1768-1859). Nel suo *Cosmos* (1858) sintetizzò la sua visione di un universo armonico. La sua è una piena adesione al razionalismo eurocentrico: *«è agli abitanti di una piccola sezione della zona temperata che il resto dell'umanità deve la prima rivelazione di una familiarità intima e razionale con le forze che governano il mondo fisico. Ed è dalla medesima zona che i germi della civiltà sono stati portati alle regioni tropicali»*[10]. Le parole di Humboldt impongono come caratteristica intrinseca del Nuovo Mondo una mancanza di civiltà e giustificano così una missione di civiltà dell'immigrante in virtù anche della maggiore conoscenza degli europei delle leggi della natura. Cosmos, quando venne pubblicato diventò un best-seller, ampiamente tradotto in Europa.

La disputa divampò fino agli inizi del secolo scorso. Subito dopo la fine della prima guerra mondiale, un filosofo tedesco, Oswald Spengler (1880-1936), sug-

10. Alexander von Humboldt, Cosmos. A sketch of the physical description of the universe, traduzione dal tedesco di E. C. Otté condotta sull'edizione del 1858, Baltimora, The Johns Hopkins University Press, 1997, pp. 36

gerì una filosofia della storia che cercava di intendere l'Occidente sotto un nuovo punto di vista, osservando la cultura come una totalità organica. Il libro *La decadenza dell'Occidente. Forma e realtà*, pubblicato nel 1918, fu seguito da un secondo volume, *La decadenza dell'Occidente. Prospettive della storia universale*, pubblicato nel 1922, e entrambi furono ritirati dalla circolazione nel 1933. Tuttavia aprirono nuove possibilità per cercare di capire il pensiero matematico.

Dice Spengler: *«Da questo deriva una circostanza decisiva che finora è sfuggita anche ai matematici. Se la Matematica fosse una semplice scienza, come l'Astronomia o la Mineralogia, sarebbe possibile definire il suo oggetto. Non esiste però una sola Matematica: ne esistono diverse.»*[11].

Spengler cerca di capire la matematica come una manifestazione culturale viva, arrivando ad affermare che le cattedrali gotiche e i templi dorici sono matematica pietrificata. Spengler come ammiratore di Goethe e nemico di Humboldt vede la matematica totalmente integrata nelle altre manifestazioni della cultura.

Il secolo scorso vede inoltre sorgere l'antropologia e molta attenzione è data alla comprensione dei modi secondo i quali altre culture pensano. Ma forse il primo riconoscimento esplicito di altri razionalismi è dovuto al rinomato algebrista giapponese Yasuo Akizuki, che nel 1960 disse:

«Così, io posso immaginare che possono esistere altre maniere di pensare, anche in matematica. Penso che non dobbiamo limitarci ad applicare direttamente i metodi che sono correttamente considerati i migliori in Europa e in America, ma dobbiamo studiare l'istruzione matematica che è propria dell'Asia»[12]. Il riconoscimento tardivo di altre maniere di pensare, pure in matematica, ha incoraggiato riflessioni più profonde sulla natura del pensiero matematico, dal punto di vista storico.

Dopo Akizuki altri autori cercarono di dimostrare l'infondatezza di quel punto di vista secondo il quale il sapere matematico è fondamentalmente un prodotto di origine europea. Lakatos (1976), tra tutti, ha sostenuto come la conoscenza viene costruita nel corso della storia nei diversi contesti culturali, secondo diverse modalità, tecniche e stili al fine di spiegare, capire interpretare e confrontarsi con la realtà. *«Un sistema di credenze non è più 'giusto' di un altro, nonostante alcuni sistemi abbiamo più 'potere' di altri. Qualsiasi sistema di credenze è libero di crescere e influenzare qualunque altro sistema; ma nessuno può vantare una sua superiorità»*[13]. Grazie all'opera di autori come Needham (1954), Dharampal (1971) e Van Sertima (1986) inoltre, si è riusciti a dimostrare che in diverse regioni del mondo ancor prima del loro incontro con l'Europa erano già presenti creatività scientifica e conquiste tecnologiche. Ogni società ha ritenuto necessario creare un corpo di conoscenze matematiche per soddisfare le proprie esigenze materiali. L'individuazione dei bisogni particolari di ciascuna società può variare a seconda del tempo e del luogo, ma è sbagliato sostenere che la capacità di fare scienza e produrre tecnologia sia prerogativa di un'unica cultura.

11. Oswald Spenger, Il tramonto dell'Occidente: lineamenti di una morfologia della storia mondiale, traduzione di Julius Evola, Milano, Longanesi, 1957, pp. 68
12. Yasuo Akizuki, Proposal to I.C.M.I. L'enseignement mathématique, vol. 5, n. 4, 1960, pp. 288
13. Irme Lakatos e Paul Feyerabend, Sull'orlo della scienza, pro e contro il metodo, a cura di M. Motterlini, Milano, Raffaello Cortina Editore, 1995, pp. 9

5. La storia della matematica in prospettiva etnomatematica

La maggior parte delle storie della matematica che esercitarono una profonda influenza su opere successive fu scritta alla fine del XIX secolo e l'inizio del XX secolo. In questo periodo presero forma due contrastanti concezioni che ebbero un impatto su questi studi storici, in particolare su quelli pubblicati in Gran Bretagna e Stati Uniti. Da una parte le scoperte sulla matematica antica di papiri in Egitto e tavolette d'argilla in Mesopotamia, riportarono indietro le origini dei documenti matematici scritti di almeno millecinquecento anni. Dall'altra parte invece, la dominazione europea sotto forma di controllo politico di vaste aree dell'Africa e dell'Asia, esercitò un'influenza decisamente più forte ed ostile.

Da questa dominazione, di nuovo, scaturì l'ideologia di una superiorità europea che permeò vasti settori dell'attività sociale ed economica, le cui tracce si ritrovano nelle storie della scienza che mettono in rilievo il ruolo insostituibile dell'Europa nel fornire nutrimento e vigore alle scoperte scientifiche. Il contributo delle popolazioni delle colonie fu quindi ignorato o minimizzato in base a una logica di conquista e dominazione. L'evoluzione della matematica pre-ellenica, soprattutto dell'Egitto e della Mesopotamia, ebbe lo stesso destino: venne cioè accantonata perché ritenuta di scarsa importanza per la storia della materia. Martin Bernal, nel suo libro *Atena nera* (1987) ha dimostrato che il rispetto della scienza e della civiltà egizia, condiviso in egual misura dagli antichi Greci e dagli europei nel Settecento, venne gradualmente eroso, fino a trasformarsi nel citato modello di eurocentrismo.

Le parole di Rouse Ball, un famoso storico della matematica vissuto a cavallo tra l'Ottocento e il Novecento, dimostrano la tenuta della concezione eurocentrica: *«La storia della matematica non può essere fatta risalire con certezza a nessuna scuola o periodo anteriore a quello della Grecia ionica»*[14].

La tesi di un predominio europeo in ambito matematico è però diventata nel tempo sempre meno attendibile. Gli stessi Greci riconobbero pienamente il debito intellettuale che avevano con gli Egizi. Erodoto (450 a.C. circa) e Proclo (400 d.C. circa) riportarono testimonianze sulle conoscenze acquisite grazie agli Egizi in campi come l'astronomia, la matematica e l'agrimensura.

L'Egitto è stato ritenuto la culla della matematica fino ad Aristotele (350 a.C.). Lo stesso maestro di Aristotele, Eudosso, studiò in Egitto prima di insegnare in Grecia. Da alcune fonti si evince che Talete (morto nel 546 a.C.), considerato il padre fondatore della matematica greca e Pitagora (500 a.C), uno dei più insigni matematici greci, viaggiarono molto in Egitto e Mesopotamia e attinsero proprio da queste zone parte delle loro conoscenze. Secondo altre testimonianze, inoltre, Pitagora si sarebbe spinto fino in India, il che potrebbe spiegare la forte connessione che si riscontra tra alcune filosofie indiane e quella pitagorica.

Un'altra prova che mette in discussione l'eurocentrismo in ambito matematico, ci viene fornita dallo sforzo congiunto di antropologi, traduttori ed interpreti che hanno portato alla luce testimonianze sull'alto livello della matematica elaborata in Egitto e Mesopotamia già all'inizio del II millennio a.C. Sia in Egitto che in Mesopotamia esi-

14. Walter W. Rouse Ball, A short account of the history of mathematics, New York, Macmillan, 1960, pp. 1

stevano sistemi numerici scritti molto evoluti sin dal III millennio a.C. Il carattere peculiare dei numeri egizi in caratteri geroglifici portò alla creazione di algoritmi per le operazioni aritmetiche di base. La caratteristica principale della matematica egizia può essere ricercata nella sua continuità, durata oltre tremila anni e culminata nell'intensa stagione della matematica alessandrina, pressappoco all'inizio dell'era cristiana. Di questo periodo possiamo citare alcuni nomi illustri come Archimede, Erone, Diofanto e Pappo.

Quella che crebbe in Mesopotamia tra le sponde di due fiumi, il Tigre e l'Eufrate, fu insieme a quella egizia, l'altra antica civiltà che diede il proprio contributo alla matematica. Qui l'attività matematica fu fiorente e raggiunse il suo culmine durante il Primo Impero Babilonese (1800-1600 a.C.) quando si assistette non solo all'introduzione di ulteriori perfezionamenti nel sistema numerico esistente, ma anche allo sviluppo di un'algebra più avanzata di quella in uso in Egitto.

È abbastanza sicuro che i Babilonesi avessero inventato un sistema numerico a valore posizionale sessagesimale (cioè in base 60), che conoscessero dei metodi per risolvere le equazioni di secondo grado[15] e che avessero capito la relazione che intercorre tra i lati di un triangolo rettangolo, oggi conosciuta come «teorema di Pitagora». In verità questo teorema fu enunciato e dimostrato in diverse forme in varie parti del mondo. Esistono ampie testimonianze del grande debito della Grecia nei confronti dell'Egitto e della Mesopotamia, soprattutto in campi come la matematica e l'astronomia.

Gli scambi culturali tra queste tre aree furono facilitati dalla rispettiva vicinanza geografica. Ciò che rimane più difficile da immaginare è uno scambio tra Grecia e India, data la loro grande lontananza. Ma la posizione geografica dell'India ha reso questo paese un luogo d'incontro per culture e popolazioni diverse. Ciò le ha permesso di rivestire un ruolo di grande importanza nella trasmissione e diffusione del pensiero. Questo scambio avveniva in due direzioni: da una parte le conoscenze e conquiste del pensiero indiano uscivano dai confini per influenzare altri pensieri e dall'altra, con la stessa facilità, le acquisizioni provenienti dall'esterno penetravano nella coscienza indiana. Testimonianze archeologiche evidenziano i contatti tra la Mesopotamia e la valle dell'Indo. Benché non esistano prove dirette di scambi matematici tra queste due aree culturali, alcuni sistemi per calcolare il giorno più lungo e quello più corto contenuti nel *Vedanga Jyotisa*, il più antico manoscritto di astronomia indiana giunto sino a noi, hanno strette parentele con i sistemi di calcolo astronomico usati in Mesopotamia.

Il VI secolo a.C. segnò l'avvento del grande Impero Persiano, confinante a ovest con la Grecia e a est con l'India, ciò che favorì contatti produttivi tra l'India e l'Occidente. In questo periodo fece la sua prima comparsa la parola *indoi*, utilizzata dai Greci per indicare gli Indiani e allusioni all'India iniziarono a comparire nella letteratura greca. È in questo contesto che è possibile situare quanto emergerebbe da alcune fonti storiche che sembrerebbero dimostrare come Pitagora si sia realmente avventurato in un paese così lontano come l'India alla ricerca di sapere.

È molto probabile che l'influenza dei Babilonesi sull'astronomia indiana sia proseguita durante il periodo ellenistico, quando l'astronomia e la matematica delle dinastie tolemaica e seleucidica divennero i punti di forza della scienza indiana; lo testimonia il corpus di opere di astronomia conosciuto come *Siddhanta*, raccolto in-

15. Metodi recuperati in Europa solo nel XVI secolo. I Greci però avevano metodi geometrici per risolverle.

torno all'inizio dell'era cristiana. Dopo la fine di Alessandria come centro culturale e la chiusura dell'Accademia di Platone, i Greci trovarono rifugio a Jund-i-Shapur.

Nella seconda metà del I millennio d.C. i contatti più importanti per l'evoluzione futura della matematica si verificarono tra India e mondo arabo. Per quanto riguarda l'influenza indiana, tramite gli Arabi, sul corso successivo dell'evoluzione della matematica, si possono identificare tre aree principali: la diffusione dei numeri indiani e di algoritmi loro associati, prima tra gli Arabi, poi in Europa; la diffusione della trigonometria indiana, specialmente dell'uso della funzione seno; la soluzione delle equazioni in generale e delle equazioni indeterminate in particolare. Il sapere che ebbe origine in India, in Cina e nel mondo ellenistico venne scoperto dagli studiosi arabi e poi tradotto, affinato, sintetizzato e accresciuto nei diversi centri di studio, a cominciare da Jund-i-Shapur in Persia nel VI secolo, per poi muoversi verso Baghdad, il Cairo, e arrivare a Toledo e Cordoba in Spagna, luoghi di partenza per l'espansione di questo sapere in Europa occidentale. Furono messe a disposizione degli studiosi numerose risorse grazie al benevolo patrocinio dei califfi: gli Abbasidi e gli Omayyadi.

Esistono prove, seppur molto frammentarie, di un contatto culturale incrociato tra India e Cina, prima della diffusione del buddhismo in Cina. A partire del I secolo d.C. circa, l'India divenne meta di pellegrinaggio dei Cinesi buddhisti, che aprirono la strada a scambi scientifici e culturali durati parecchi secoli. In un catalogo di opere scritto durante la dinastia Sui (VII secolo d.C.) compaiono traduzioni cinesi di studi matematici, astronomici e medici (Joseph, 2000). Alcuni documenti della dinastia Tang testimoniano che a partire dal 600 d.C. astronomi indiani furono assunti dal collegio degli astronomi di Changan per insegnare i principi dell'astronomia indiana. Inoltre, ci sono prove di una trasmissione diretta del sapere matematico tra Cina e mondo arabo, intorno all'inizio del II millennio d.C. I metodi numerici per risolvere le equazioni di grado elevato, come cubiche e quadratiche, che attrassero l'interesse dei matematici indiani del medioevo, soprattutto al-Kashi (1400 d.C.), possono essere stati influenzati da opere cinesi. Dall'altra parte, concetti trigonometrici introdotti nella matematica cinese intorno in questo periodo sembrano avere un'origine araba. Un' ipotesi formulata da alcuni studiosi (Boyer, 1990) riguarda la possibilità che la matematica praticata in India durante il Medioevo, in particolare nello stato del Kerala, possa aver avuto un notevole impatto sulla matematica europea del XVI e XVII secolo. Ma se questo non può essere dimostrato con prove certe, rimane il fatto che Madhava del Kerala ricavò, all'inizio del XV secolo, serie infinite per π per alcune funzioni trigonometriche, circa duecentocinquanta anni prima che matematici europei come Leibniz, Newton e Gregory arrivassero ai medesimi risultati con i loro studi sul calcolo infinitesimale.

Il periodo medievale vede anche un considerevole trasferimento di tecnologia e di prodotti cinesi in Europa, fatto esaurientemente studiato da Lach (1965) e Needham (1981). Durante il XV e il XVI secolo si assistette a un flusso verso l'Occidente di tecnologia proveniente dalla Cina e che comprendeva secondo un elenco fornito da Needham: la pompa a catena a pale quadrate, i motori per la metallurgia a energia idraulica, il carro a vela, il mulino a quattro ruote, la balestra, la tecnica di trivellazione profonda, le chiuse dei canali, la polvere da sparo, la bussola magnetica per la navigazione ecc…[16] Si suppone che con la tecnologia si trasferissero alcuni con-

16. Joseph Needham, Scienza e civiltà in Cina, Torino, Einaudi, 1981, pp. 240-241

cetti matematici, tra cui: diversi algoritmi per calcolare le radici quadrate e cubiche, il *teorema cinese del resto*, la soluzione di equazioni cubiche e di grado superiore tramite un metodo conosciuto come «metodo di Horner» e l'analisi indeterminata. Questa trasmissione dalla Cina non è stata necessariamente diretta, ma potrebbe essere avvenuta attraverso gli Arabi o l'India.

Per finire, non possiamo fare a meno di citare il contributo della civiltà maya alla storia della matematica. Durante la prima metà del I millennio, la civiltà maya dell'America centrale, nonostante il suo isolamento dal resto del mondo, raggiunse alte vette in molti campi come l'arte, la scultura, l'architettura, la matematica e l'astronomia. Nel campo della numerazione, i Maya si distinsero per due scoperte fondamentali: il principio del valore posizionale e la scoperta dello zero. Testimonianze attuali (M. Kline, 1999) indicano che nella storia della matematica il principio del valore posizionale venne scoperto quattro volte, in maniera indipendente l'una dall'altra. I Babilonesi operavano all'inizio del II millennio a.C. con un sistema numerico a valore posizionale in base sessagesimale. Attorno all'inizio dell'era cristiana i Cinesi utilizzavano principi posizionali nei loro calcoli numerici con le aste. Nel periodo compreso tra il III e il V secolo d.C. i matematici e gli astronomi indiani usavano un sistema di numerazione decimale a valore posizionale che sarebbe stato poi utilizzato in tutto il mondo. E per finire, i Maya avevano sviluppato un sistema numerico posizionale in base 20. Per ciò che riguarda lo zero, esistono due esempi del suo uso moderno in un sistema numerico: quello dei Maya e quello degli Indiani all'inizio dell'era cristiana. Ma la matematica non è l'unico campo in cui i Maya riescono a stupirci. Nel campo dell'astronomia con strumenti rudimentali intrapresero osservazioni astronomiche e idearono un calendario con una precisione che superò ogni qualsiasi cosa disponibile a quel tempo in Europa. Effettuarono stime esatte della durata dei movimenti solari, lunari e planetari, arrivarono a calcolare per esempio che il periodo sinodico di Venere (cioè il tempo che intercorre tra un'apparizione in un determinato punto del cielo e la successiva apparizione nel medesimo punto) fosse di 584 giorni, con un'approssimazione di 0,08 giorni. Essi calcolarono che la durata di un anno solare, espressa in termini odierni, è di 365,242 giorni. Questo rappresenta un risultato eccezionale se si pensa che oggi la stima accettata comunemente è di 365,242198 giorni. Uno stesso grado di esattezza fu da loro raggiunto nel calcolo del mese lunare medio: 29,5302 giorni. Con i mezzi tecnologici moderni e le nostre conoscenze la cifra che si è riusciti ad ottenere è di 29,53059 giorni. Ottennero tali scoperte senza disporre di alcun tipo di strumento ottico e senza conoscere il vetro.

6. Universalità della matematica

La matematica è sempre stata, a partire dai Greci, una disciplina fondamentale all'interno di tutti i sistemi educativi ed è la forma di pensiero che ha avuto maggiore successo in tutta l'area mediterranea. La matematica ci può apparire come manifestazione culturale incontrastata che si è impostata su altre. Nessuna religione, lingua, arte medica o culinaria si è diffusa così universalmente, la matematica, invece, si è universalizzata riuscendo a spodestare qualsiasi altro modo di quantificare, misurare, ordinare e inferire, finendo per imporsi come l'unica modalità di pensiero logico e razionale che caratterizza addirittura la nostra specie. Il recente passaggio da *homo sapiens* a *homo rationalis* ha sottolineato ulteriormente l'importanza del pensiero logico e razionale per la nostra specie. L'*homo rationalis* si caratterizza per la sua capacità di utilizzare la matematica. E a partire da Platone questo è stato uno degli elementi con cui selezionare la classe dirigente (D'Ambrosio, 2002).

Negli ultimi anni gli studiosi hanno posto molta enfasi sul riconoscimento dell'universalità di questa disciplina. Prima di affrontare, però il contenuto emerso dalle varie conferenze sull'argomento, è opportuno riflettere sulle considerazioni che si avevano relative all'insegnamento della matematica durante la Seconda Guerra Mondiale e nel periodo immediatamente successivo. Le aspirazioni politiche di tanti paesi erano quelle di un'educazione di massa, cioè uguale per tutti indipendentemente dalla classe sociale ed economica. Il cambiamento si verificò vent'anni dopo, quando ci si accorse che la politica adottata non aveva prodotto i risultati sperati. Le conferenze di didattica della matematica che si svolsero in questo periodo testimoniano il clima critico in cui la matematica si venne a trovare: esse puntavano molto sulle innovazioni curricolari, ma anche sugli obiettivi della didattica della matematica in direzione di riflessioni socioculturali e politiche.

Quest'ultimo aspetto rappresentò un momento di grande innovazione tanto che al Quinto Congresso Internazionale di Didattica della Matematica, tenutosi ad Adelaide, in Australia, nell'agosto del 1984, venne mostrata la tendenza definitiva verso le preoccupazioni socioculturali nelle discussioni sulla didattica della matematica. Temi come «matematica e società», «storia della matematica e della sua pedagogia», discussioni sugli scopi della didattica della matematica e soprattutto la comparsa della nuova area dell'etnomatematica, sono testimonianze del cambiamento qualitativo che si nota nelle tendenze della didattica della matematica e che videro l'attiva partecipazione di antropologi e sociologi. Questo cambiamento qualitativo ha portato alcuni studiosi, tra i quali D'ambrosio, a discutere sui valori di riferimento per la didattica della matematica, e le loro conclusioni hanno avuto implicazioni curricolari di grande importanza. La domanda che li ha accompagnati in tutta la loro riflessione è stata: «perché si insegna matematica nelle scuole con tale universalità ed intensità?». Con universalità si fa riferimento al fatto che la matematica è insegnata in tutti i paesi del mondo, mentre con intensità ci si riferisce al fatto che la matematica è insegnata in quasi tutti gli anni di scolarità indipendentemente dagli indirizzi scolastici, con un peso molto grande nella distribuzione dei corsi nelle scuole.

Per rispondere a questa domanda D'Ambrosio (2002a) fa riferimento a quattro valori che sono stati associati dalla letteratura più classica sul tema all'insegnamento della matematica e sono: *utilitaristico*, *culturale*, *formativo* ed *estetico.* Tra tutte le ragioni per le quali si studia matematica, la sua *utilità* è quella che ha riscosso nel tempo maggiore successo. Basterebbe forse ricordare quanto affermava Galileo *«(...) questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo) non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto»*[17].

17. Galileo Galilei, Le opere di Galileo Galilei, Firenze, Società editrice fiorentina, 1856, vol. 6, pp. 229

La celebre citazione di Galileo può essere riassunta nel fatto che non è pensabile avere una qualche comprensione del mondo fisico senza la conoscenza matematica. Oggi questo assunto è ritenuto scontato, ma dai tempi di Galileo a oggi, e questo invece è meno scontato, la matematica è diventata essenziale anche per la vita di tutti i giorni. Molto di quello che ci circonda, in opere e attività realizzate dall'uomo, quasi sempre si è avvalso in qualche misura della matematica. La matematica la incontriamo in ogni momento della giornata, un po' ovunque. Essa è alla base della tecnologia a cui dobbiamo tanto del nostro benessere e della nostra civiltà: è alla capacità di calcolare e prevedere il comportamento di sistemi complessi che si deve la stabilità di un ponte, la possibilità da parte di un aereo di raggiungere alla cieca il suo obiettivo o a un satellite di essere immesso nella sua orbita.

Il secondo valore, quello *culturale*, ha invece una vita più breve del primo e il suo pieno riconoscimento viene fatto risalire al momento in cui verso la metà del secolo scorso si inizia a parlare di matematica come prodotto culturale. La matematica contiene in sé profonde radici culturali e questo viene dimostrato dal fatto che ogni gruppo culturale ha le sue forme di matematizzazione.

Alle due ragioni sopra discusse, quella utilitaristica e quella culturale, si aggiungono altri valori che giustificano il mantenimento della matematica nelle scuole. Il primo, denominato *formativo*, fa riferimento al fatto che la matematica viene insegnata perché aiuta a pensare con chiarezza e a ragionare meglio. *«La matematica ha uno specifico ruolo nello sviluppo della capacità generale di operare e comunicare significati con linguaggi formalizzati e di utilizzare tali linguaggi per rappresentare e costruire modelli di relazioni fra oggetti ed eventi. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana, inoltre contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri»*[18], così si può leggere nelle Indicazioni per il curricolo del 2007. L'ultimo valore, non per importanza, viene definito *estetico* perché fa riferimento al fatto che la matematica viene insegnata per una sua bellezza intrinseca come costruzione logica, formale, eccetera. *«La matematica è come le altre arti, una creazione dell'animo umano, il suo scopo principale è la soddisfazione infinita che porta al suo creatore, e, seppur forse in misura inferiore, ai suoi 'ascoltatori', cioè a chi la impara. La soddisfazione deriva dalla contemplazione di un mondo di idee semplice, elegante, armonico, e dalla concatenazione logica delle deduzioni»*[19].

Le quattro ragioni sopra elencate, sono ciascuna ugualmente importanti, ma soprattutto negli ultimi cento anni si è verificato uno squilibrio che ha portato a considerare la prima, come la più importante. Ciò ha avuto ripercussioni notevoli. La predominanza di un aspetto utilitaristico della matematica è confermata dall'apparizione delle calcolatrici e dei computer, oramai divenuti oggetti di uso comune. D'altro canto, l'utilitarismo non bada alla nuova enfasi posta sulle applicazioni ai problemi reali del mondo, ne deriva quindi la necessità di assumere un approccio realistico che prenda una direzione diversa da quella fino ad ora seguita.

18. Ministero Pubblica Istruzione, Indicazioni per il curricolo, 2007, pp. 109
19. Luigi Corgnier, La sublime inutilità della matematica, http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/InutilitaMate/InutilitaMate.htm

Tipico è il caso del «*problem solving*», una metodologia che ha preso forza all'inizio degli anni '80 e che faceva riferimento a studenti che individualmente o in gruppo, affrontavano situazioni problematiche reali e cercavano soluzioni originali. Un insegnamento che sfrutta metodologie come questa sviluppa in ciascun discente autonomia di giudizio, pensiero creativo, consapevolezza delle proprie capacità, duttilità e flessibilità nella ricerca delle soluzioni. Nella pratica didattica però le situazioni reali alla quali si tenta di far riferimento, sono in realtà solo simulate, e benché ci si ponga come obiettivo quello di lavorare con situazioni «veramente reali», queste non riescono a entrare nelle aule, a meno che si cambi atteggiamento verso la disciplina matematica. I problemi vengono presentati in una forma già codificata che impedisce al ragazzo di mettere a frutto un ragionamento creativo, bensì necessitano per la loro risoluzione solo di una ripetizione di procedimenti già acquisiti. Vengono qui esplicitati due problemi con i quali la scuola deve fare al più presto i conti. Da una parte l'obsolescenza del curriculum matematico e delle prassi comunicative rispetto alla realtà esterna alla scuola. Dall'altra il problema della «scolarizzazione del sapere», per cui la matematica viene confinata a un'attività fittizia, che sottoutilizza le capacità degli allievi e impedisce loro una scelta consapevole dei saperi significativi, in quanto demanda al solo insegnante il compito di selezionarli per loro (D'Amore, 1999).

La tendenza utilitaristica nell'insegnamento della matematica è inoltre ben evidente nella costruzione dei programmi di questa materia per cui si tende generalmente a procedere dal semplice al complesso, interpretando i due termini in senso logico. Così a scuola nell'insegnamento della geometria è tipico partire dal punto, per passare poi alla retta, al piano poi ed arrivare al solido e allo spazio. Questa successione però contrasta con quello che avviene nella percezione umana per cui un bambino arriva prima a maneggiare i solidi e lo spazio e solo successivamente a concepire i punti, essendo questi entità astratte senza alcun riscontro nella realtà.

Le radici di questa tendenza risiedono nell'abitudine a seguire lo schema tracciato da Euclide nei suoi *Elementi*, considerati da sempre una della massime opere a scopo didattico. Il procedere dal semplice al complesso viene giustificato dal fatto che i primi elementi di apprendimento da parte di un neofita (un allievo che apprende una scienza per la prima volta) debbano coincidere con gli «elementi primi» nella costruzione di una scienza (D'Amore, 2000). Il metodo didattico è una ristrutturazione, una sistemazione, una messa in scena progressiva degli elementi delle scienze, del sapere degli scienziati (Kintzler, 1989). Secondo questa visione gli elementi primi dello scienziato debbono essere gli elementi primi dell'allievo e il discente ripercorre nel suo apprendimento la perfetta genesi delle idee di quella materia.

Si può ricondurre questo esito a quella che possiamo considerare come una vera e propria barriera epistemologica. Il curricolo di matematica risente di una forma troppo conservatrice poiché include argomenti che hanno raggiunto la loro forma finale, ossia teorie ormai arrivate allo stato di «normalità» per utilizzare un'espressione di Kuhn[20]. E inoltre le tendenze dominanti della filosofia della matematica tendono a occultare il fatto che la matematica sia intimamente legata alla realtà e alla sua perce-

20. Thomas Kuhn sostiene che la scienza attraversa ciclicamente delle fasi. Nella fase due o della «scienza normale» vengono definiti i principi di fondo che non vengono messi in discussione perché rappresentano in quel momento quelli che meglio descrivono la realtà presa in considerazione e quindi quelli più accettati dalla comunità scientifica.

zione individuale. L'epistemologia corrente e accettata nella pratica della didattica della matematica è aprioristica. L'approccio bachelardiano, che ha tentato di contestarla, non è stato accettato dalla didattica in generale e dalla didattica della matematica in particolare. Quando Bachelard afferma *«Lo stato logico è uno stato semplice, e persino semplicista»*[21] egli apre un nuovo cammino per un approccio incentrato sulla complessità psicoemozionale dell'allievo, invece che sulle tecniche trasmesse dal professore.

Il giusto approccio al *problem solving* richiede un impegno effettivo dei bambini in pratiche globali e combina processi formalizzati con programmi di allenamento con la creatività. La valutazione e il concetto di esame acquisiscono una nuova dimensione: la valutazione diviene più qualitativa che quantitativa. Una proposta in questo senso ci viene data da Umberto Eco e Thomas A. Sebeok che propongono l'assunzione di un atteggiamento da detective e di un ragionamento *abduttivo* nei processi di ragionamento. In generale, la discussione sulla risoluzione dei problemi si concentra sulle modalità di pensiero «induttivo-deduttive»; l'abduzione, invece, può essere considerata come una congettura sulla realtà, che deve essere valutata attraverso delle prove (Eco e Sebeok, 1983). Secondo il filosofo statunitense Charles Sanders Peirce l'abduzione sembra, insieme a induzione e deduzione, un modo speciale di pensare nel processo cognitivo. L'abduzione, per Peirce, è l'unica forma di ragionamento suscettibile di accrescere il nostro sapere, ovvero permette di ipotizzare nuove idee, di indovinare, di prevedere. In realtà tutt'e tre le inferenze (induzione, deduzione, abduzione) permettono un accrescimento della conoscenza, in ordine e misura differente, ma solo l'abduzione è totalmente dedicata a questo accrescimento. È altresì vero che l'abduzione è il modo inferenziale maggiormente soggetto a rischio di errore. L'abduzione, come l'induzione, non contiene in sé la sua validità logica e deve essere confermata per via empirica.

Questo sembra essere il miglior modo per lavorare con una situazione reale e si adatta bene ai processi della mente e del corpo. In sostanza ne deriva che il miglior modo di insegnare matematica è immergere i bambini in un ambiente in cui la sfida matematica sia naturalmente presente e in cui le situazioni siano «veramente reali». Facciamo riferimento a progetti di natura globale: come la costruzione di una capanna, la redazione della mappa di una città o la valutazione del consumo di acqua, attività nelle quali la risoluzione del problema viene di conseguenza e attraverso le quali assume un vero senso.

7. Il contributo educativo dell'etnomatematica

Il multiculturalismo è una delle componenti fondamentali della società e dell'educazione moderna. C'è una varietà di disomogenee situazioni linguistiche che rientrano sotto l'ombrello delle situazioni multiculturali. Tali situazioni includono classi in cui la lingua dell'istruzione è diversa dalla prima lingua degli studenti, come nel caso di studenti immigrati da poco nel paese ospitante. In alcuni paesi europei il nuovo afflusso di immigrati ha portato, nelle scuole, studenti che provengono da un certo numero di gruppi linguistici diversi, e convivono con studenti che parlano la lingua d'istruzione che è anche la loro prima lingua. In altri paesi come l'Australia vi è

21. Gaston Bachelard, Essai sur la connaissance approchée, Paris, J. Vrin, 1981, pp. 27

un continuo flusso di nuovi immigrati provenienti da diversi gruppi linguistici che si aggiungono alle vecchie famiglie di immigrati che parlano lingue diverse. Ad esempio alcune scuole hanno famiglie migranti di prima o seconda generazione provenienti da paesi dell'Europa meridionale che parlano greco, italiano, croato, eccetera e in casa sono affiancate da studenti provenienti dal Vietnam, dall'India e dalla Cambogia, ma la lingua di insegnamento per tutti è l'inglese (Wotley, 2001). Un ulteriore scenario di cui tenere conto è ciò che succede quando l'insegnamento della matematica avviene in una lingua che non è la prima lingua del docente o degli studenti. In Papua Nuova Guinea questo accade da sei anni: la lingua di insegnamento è l'inglese, ma gli studenti e gli insegnanti possono anche parlare linguaggi molto diversi nelle loro case. La stessa situazione si verifica nei Paesi Bassi, in Danimarca e in Svezia, dove alle scuole superiori e all'università gli studenti seguono lezioni in inglese. E ancora un'altra situazione si trova, ad esempio, nelle scuole in Malesia. Qui una nuova politica educativa vuole che le lezioni di matematica e scienze siano tenute in inglese, ma tutte le altre materie sono ancora insegnate nella lingua comune dei docenti e degli studenti, il baha malese. Come la comunicazione e l'apprendimento si realizzano quando le lingue parlate non sono condivise, come la fluidità del linguaggio d'insegnamento è legata alla padronanza della nozione più ampia del discorso matematico, come l'uso di un linguaggio particolare è legato a diversi modi di apprendimento, sono tutte domande che necessitano di un ulteriore approfondimento. Ma del tutto differenti sono i possibili contesti in cui tali questioni possono sorgere (Clarkson, 1992).

La serie presentata non esaurisce la vasta gamma di situazioni in cui diverse culture si incontrano. L'incontro con l'Altro può avvenire in ogni momento della nostra esistenza: viaggiando in treno e ascoltando la telefonata di qualcuno che parla rumeno, andando a cena in un ristorante indiano, trovandosi di fronte a una sinagoga, recandosi al pronto soccorso e trovandosi di fronte un medico egiziano e in molte altre situazioni. Sono tutti esempi di come l'Altro si trovi sempre accanto a noi con le proprie peculiarità religiose, culinarie, linguistiche o somatiche. Risulta quindi corretta e perfettamente calzante all'attuale quadro della società contemporanea l'espressione «traffico delle culture» utilizzata dall'antropologo svedese Ulf Hannerz. Egli parla di una trasnazionalità delle culture intesa come mobilità sia di persone sia di idee, accentuata ancor di più oggi dall'uso dei media elettronici, in particolare Internet che permette di entrare a far parte di comunità virtuali, di connettersi con chiunque e in qualsiasi parte del mondo, senza dover condividere necessariamente una dimensione spazio-temporale (Hannerz, 2001). Non possiamo far finta di dimenticare che le nuove generazioni vivranno inevitabilmente in un ambiente multiculturale e i loro rapporti saranno di tipo interculturale. A questo punto la domanda che dobbiamo porci come educatori è: come fare ad insegnare alle generazioni future il modo di costruire un mondo di pace e felicità dal quale escludere i malanni del presente?

Come educatori possiamo per esempio fornire ai bambini di oggi, che tra qualche decina di anni dovranno prendere delle decisioni, una visione critica del presente e gli strumenti intellettuali e materiali per fare una critica di questo genere. Viviamo in un periodo di grandi trasformazioni, mai avvenute con una tale intensità, in ambiti come le comunicazioni, l'economia, i sistemi di governo. In uno scenario del genere, l'educazione non può avere come obiettivo la mera trasmissione di contenuti obsoleti, inutili per la costruzione della società del futuro, ma deve offrire loro gli strumenti di comunicazione, di analisi e anche materiali affinché essi possano vivere, grazie a una buona capacità critica, in una società multiculturale e impregnata di tecnologia (D'Ambrosio, 2002a).

La matematica, più di ogni altra scienza, s'impone con una forte presenza in tutti i campi della conoscenza e in tutte le situazioni del mondo moderno e per questo Richard Noss (1998) ama definire il periodo storico che stiamo vivendo come «epoca fordista della matematica». La sua presenza sarà nel futuro ancora più intensificata di quanto non lo sia oggi e diventerà una componente degli strumenti comunicativi, analitici e materiali. Un'acquisizione dinamica della matematica da parte degli studenti è possibile solo attraverso una serie di esperienze ricche e necessariamente plurali. Per fare ciò il docente dovrà essere preparato secondo una dinamica diversa da quella sin ora seguita. Per usare le parole di Beatriz D'Ambrosio *«il futuro insegnante di matematica deve imparare nuove idee matematiche in modo alternativo»*[22].

Come insegnanti di matematica possiamo farci carico di questa nuova prospettiva educativa che invece di pensare all'interculturalità come uno spazio aggiuntivo del percorso educativo mira a ripensare in prospettiva interculturale il percorso educativo di base. L'insegnante di matematica che non capisce che esiste molto di più nella sua missione di educatore oltre che insegnare a fare operazioni, risolvere problemi ed equazioni del tutto artificiali, compie un grande errore e viene meno al suo compito.

L'etnomatematica propone di fare della matematica una cosa viva, cioè di lavorare con e su situazioni che siano reali nel tempo (ora) e nello spazio (qui), affinché si creino delle menti critiche sul qui e sull'ora. Per fare questo occorre tuffarsi nelle radici culturali e praticare dinamica culturale. Si sta riconoscendo in questo modo l'importanza delle diverse culture e tradizioni nella formazione della nuova civiltà transculturale e transdisciplinare e questo va soprattutto effettuato nell'ambito educativo. Compito dell'etnomatematica diventa un impegno continuo nel dialogo tra l'identità (mondiale) e l'alterità (locale), campo nel quale matematica e antropologia culturale s'intersecano.

8. Un punto di vista antropologico in didattica della matematica. Il contributo di Chevallard

Prima di affrontare nello specifico il contributo di Yves Chevallard alla didattica della matematica, è opportuno fare una premessa sull'inquadramento teorico in cui la sua teoria si inserisce. Per fare questo è opportuno rivolgere la nostra attenzione alla distinzione tra due categorie: le *teorie realiste* e le *teorie pragmatiche*, alle quali si è soliti far riferimento di fronte alla necessità di far luce sulla natura del *significato*. Solo chiarendo il modo in cui si concepisce il *significato*, acquisterà senso parlare di *costruzione del significato* e quindi di conoscenza matematica.

Nelle *teorie realiste* il significato è *«una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongono un realismo concettuale»*[23]. Come precisava Franz von Kut-

22. Beatriz D'Ambrosio, Formação de professores de matemática para o século XXI, O Grande Desafio, Pro-posições, vol. 4, n. 10, pp. 39
23. Bruno D'amore e Juan D. Godino, Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica, in *La matematica e la sua didattica*, 2006, n. 1, pp. 13

schera *«Secondo questa concezione il significato di un'espressione linguistica non dipende dal suo uso in situazioni concrete, bensì avviene che l'uso si regga sul significato, essendo possibile una divisione netta fra semantica e pragmatica»*[24]. Nella semantica realista si attribuiscono alle espressioni linguistiche funzioni puramente semantiche: così il significato di un nome proprio (come Bertrand Russell) è l'oggetto che tale nome proprio indica.

Se applichiamo i supposti ontologici della semantica realistica alla matematica, cioè il punto di vista che ci interessa in questa sede, se ne trae una visione platonica degli oggetti matematici: cioè in matematica nozioni, strutture eccetera hanno una reale esistenza che non dipende dall'essere umano, dal momento che appartengo a un dominio ideale. Conoscere dal punto di vista matematico significa «scoprire» enti e loro relazioni in tale dominio. Questo tipo di visione porta a un assolutismo della conoscenza matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non modificabili dall'esperienza umana, dato che sono a essa precedenti o, almeno, a essa estranee e da essa indipendenti. Posizioni di questo tipo, seppur con sfumature diverse, furono sostenute da Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel e furono invece profondamente criticate da Wittgenstein, da Lakatos e da Quine.

Nelle *teorie pragmatiche*, invece, le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano, ne deriva che ogni osservazione scientifica oggettiva è impossibile dal momento che l'unica analisi possibile è «personale» o «soggettiva», comunque circostanziata e non generalizzabile. L'unica operazione possibile è esaminare i diversi «usi»: l'insieme degli «usi» determina infatti il significato degli oggetti. Riconosciamo qui la posizione che Wittgenstein assume nelle Ricerche filosofiche (1974), quando sostiene che la significatività di una parola dipende dalla sua funzione in un «gioco linguistico», dato che in esso ha un modo di «uso» e un fine concreto per il quale essa è stata appunto usata: la parola, dunque, non ha di per sé un significato, e tuttavia può essere contestualmente significativa.

Trasponendo questa visione alla matematica, se ne trae che gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. In sostanza, gli oggetti matematici e i loro significati dipendono dai problemi che si affrontano in matematica e dai processi della loro risoluzione. Dipendono, in definitiva, dalle pratiche umane. Ritroviamo qui il *principio della prospettiva* presente nella *teoria del culturalismo* di Jerome Bruner (1998) che fa perno sul fatto che qualsiasi evento, qualunque sia il suo genere, è relativo alla prospettiva o al quadro di riferimento dei termini con cui viene interpretato.

Non ci sono limiti all'interpretazione multiprospettica: non esistono spiegazioni giuste e sbagliate, esistono solo visioni e idee diverse, ciascuna poggiante su presupposti e criteri di coerenza diversi. Nonostante la variabilità delle interpretazioni, nessuno è libero dalle influenze culturali: *«le interpretazioni del significato riflettono non solo le storie particolari degli individui, ma anche le forme canoniche in cui la cultura riconosce la realtà»*[25]. Secondo questa visione, compito della scuola è quello di fornire

24. Franz von Kutschera, Philosophy of language, Dordrecht, Boston, Reidel, 1975, pp. 34
25. Jerome Bruner, La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola, Milano, Feltrinelli, 1998, pp. 17

una certa visione del mondo sempre aggiornata ai tempi in cui è collocata. Ne consegue che la scuola deve seguire il costante mutamento della cultura.

La *teoria antropologica della didattica* (nel seguito TAD) di Chevallard si inserisce nel campo della pragmatica. Merito del punto di vista antropologico è quello di aver costretto i ricercatori a puntare l'attenzione sulle attività degli esseri umani che hanno a che fare con la matematica. La TAD si centra quasi esclusivamente sulla dimensione istituzionale della conoscenza matematica, come uno sviluppo del programma di ricerca iniziato con la didattica fondamentale. Il punto cruciale è che *«la TAD pone l'attività matematica, e dunque l'attività di studio in matematica, nell'insieme delle attività umane e delle istituzioni sociali»*[26]. Nella direzione pragmatica hanno rilievo le definizioni di Chevallard di *oggetto matematico*, *rapporto/relazione all'oggetto* e *persona*. Secondo Chevallard un *oggetto matematico* è «*un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli…), vale a dire, registro della scrittura»*[27]. In questa accezione, perde di importanza la nozione realista di *significato di un oggetto* (di conoscenza, in generale, matematico, in particolare) e assume rilievo invece la nozione di «rapport à l'objet», rapporto, relazione all'oggetto. In tutto ciò è centrale la «persona» (o l'istituzione come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto, e non l'oggetto di per sé: *«Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa)»*[28]. Questa posizione ha segnato una svolta interessante all'interno delle cornici teoriche nelle quali si situa ogni ricerca in didattica della matematica. Autori successivi hanno preso spunto dalle sue nozioni al fine di chiarirle e renderle operative. Tra questi, Sierpinska e Lerman (1996) hanno presentato una loro interpretazione della teoria antropologica di Chevallard che può essere considerata un ampliamento dell'epistemologia.

Nella tradizione, l'oggetto di studio dell'epistemologia è la produzione della conoscenza scientifica. L'antropologia della conoscenza si occupa, invece, dei meccanismi con sui si produce la conoscenza scientifica, delle pratiche legate al suo uso o applicazione. Tra queste rientrano il suo insegnamento e la sua trasposizione con particolare attenzione alle relazioni tra la produzione, l'uso e l'insegnamento della conoscenza scientifica, mettendo in luce la necessità che questa conoscenza si adatti, per poter funzionare in diversi tipi di istituzione (e la scuola è uno di essi).

Il punto di vista antropologico nasce dagli studi sulla «trasposizione didattica», penso che sia da qui che occorre partire per spiegare il suo contributo. Chevallard è colui che conia il termine trasposizione didattica attribuendogli il significato di *«lavoro che di un oggetto del sapere da insegnare fa un oggetto di insegnamento»*[29].

26. Yves Chevallard, L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, in Recherches en Didactique des Mathématiques, 1999, vol. 19, n. 2, pp. 222
27. Yves Chevallard, Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble, 1991, pp. 8
28. Yves Chevallard, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, in Recherches en Didactique des Mathématiques, 1992, vol. 12, n. 1, pp. 9
29. Yves Chevallard, La transposition didactique. Du savoir enseignant au savoir enseigné, Grenoble, La Penseé Sauvage, 1985, pp. 39

Per il disciplinarista ogni progetto sociale d'insegnamento e d'apprendimento si costituisce grazie alla designazione di contenuti di sapere come contenuti da insegnare. Tuttavia la trasposizione didattica non è solo un processo di «designazione», ovvero di scelta, ma di trasformazione. In questo processo i passaggi sono i seguenti: innanzitutto un contenuto del sapere viene scelto come oggetto da insegnare, ovvero viene considerato degno di essere inserito in un programma di insegnamento; questa designazione è stabilita in base alle esigenze sociali (cioè occorre ricercare delle buone trasposizioni dei saperi corrispondenti alle richieste didattiche della società). Il contenuto scelto come oggetto da insegnare subisce un insieme di trasformazioni adattative che lo fanno diventare oggetto di insegnamento. Concentrandoci sulle pratiche sociali, piuttosto che sulla conoscenza, Chevallard estese la sua teoria della trasposizione didattica alla dimensione dell'antropologia (Sierpinska e Lerman, 1996): ogni conoscenza è conoscenza di una istituzione. La scuola è un'istituzione, la ricerca professionista ne è un'altra, la famiglia un'altra. Chi si occupa di epistemologia dovrebbe quindi ricercare le fonti, i meccanismi di crescita e i modi di controllo della matematica in tutte le «nicchie ecologiche» nelle quali vive. Si tratta di una «visione situata» della matematica. E in questa prospettiva potremmo anche comprendere perché i ragazzini che non riescono a imparare la matematica a scuola, la usano benissimo invece nelle loro attività di strada.

Fin dai primi passi della creazione della trasposizione didattica viene messa in evidenza la differenza tra i contratti istituzionali presenti nella ricerca matematica (dei ricercatori professionisti) e quelli nella ricerca scolare. All'interno di tale distinzione ritroviamo le nozioni di *depersonalizzazione* e *decontestualizzazione* della conoscenza. Chi crea risultati matematici (i ricercatori), li depersonalizza e li decontestualizza per comunicarli ai colleghi; avviene un processo inverso, in un contesto efficace di apprendimento: colui che apprende deve raggiungere il risultato come se fosse proprio, seguendo un percorso personale per la sua comprensione e inserendolo nel contesto dei problemi sui quali sta lavorando in quel momento. La conoscenza deve quindi convertirsi in conoscenza personale.

Un'altra distinzione importante ottenuta attraverso la teoria della trasposizione didattica è quella tra la conoscenza come sapere da insegnare e la conoscenza come sapere del quale gli allievi devono essere resi responsabili.

L'affermazione del punto di vista antropologico contribuì, come di solito accade quando si affermano nuove posizioni teoriche, a far luce su altre, dando così la possibilità di analizzarle con prospettive diverse. Interessante risulta il rapporto con l'*interazionismo* (Sierpinska e Lerman, 1996). Entrambi vedono l'educazione da prospettive sociali e culturali, ma mentre gli interazionisti sono interessati a guardare l'insegnamento e l'apprendimento a un livello micro (da dentro l'aula) e attribuiscono un ruolo importante ai contributi individuali di insegnanti e studenti, per Chevallard l'interesse principale sono i sistemi didattici a un livello macro: la noosfera[30], l'interfaccia tra le scuole e la società nel suo insieme, dove si concepiscono l'organizzazione, i contenuti ed il funzionamento del processo cognitivo.

Le posizioni teoriche delineate dalla ricerca in ambito antropologico, presentano però un limite che è stato messo ben in evidenza da Bruno D'Amore e Juan D.

30. Chevallard chiama noosfera l'insieme dei luoghi e delle istanze in cui avvengono gli scambi fra il sistema di insegnamento e il suo ambiente. Si compone di gruppi di individui come: i matematici, le commissioni ministeriali, i genitori, i direttori scolastici, eccetera.

Godino (2006). Tale limite viene definito dai due autori come accanimento epistemologico anti «psicologico», volendosi riferire al fatto che la prospettiva antropologica non dà per nulla spazio a spiegazioni a carattere cognitivo del fenomeno didattico. È limitativo voler ricondurre tutto alle istituzioni, senza valorizzare e studiare il singolo; il complesso fenomeno dell'apprendimento della matematica non è del tutto spiegabile solo in chiave di adesione a scelte istituzionali. La TAD fornisce strumenti teorici efficaci per lo studio delle organizzazioni matematiche, le relazioni ecologiche tra le stesse e le restrizioni istituzionali che condizionano la sua evoluzione e sviluppo; d'altra parte però, l'identificazione soggetto-istituzione le impedisce di poter dare conto delle condizioni sotto le quali avviene l'apprendimento. *«La ricerca didattica deve centrare la sua attenzione, oltre che sull'ecologia delle organizzazioni matematiche, sui fenomeni cognitivi legati all'apprendimento del sistema di regole che compongono tali organizzazioni»* (D'Amore e Godino, 2006).

Bibliografia

Bishop A. J. (1979), «Visualising and mathematics in a pre-technological culture», in *Educational studies in mathematics*, vol. 10, n. 2, pp. 135-146

Bishop A. J. (1988), «Mathematics education in its cultural context», in *Educational studies in mathematics*, n. 19, pp. 179-191

Boyer C. B. (1990), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano

Bruner J. (1998), *La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola*, Feltrinelli, Milano

Carraher T. N. (1988), «Street mathematics and school mathematics», in *Proceedings of the twelfth international conference for the psychology of mathematics* a cura di A. Borbas e O. O. K. Ferenc Gerzwein, Veszprem, pp. 1-23

Clarkson P. C. (2006), «Multicultural classrooms: contexts for much mathematics teaching and learning», in *Ethnomathematics and mathematics education. Proceedings of the 10th International congress of mathematics education Copenhagen* a cura di F. Favilli, Tipografia Editrice Pisana, Pisa, pp. 9-16

Closs M. P. (1986), *Native American Mathematics*, University of Texas Press, Austin

D'Ambrosio U. (2001), «A matemática na época das grandes navegações e início da colonização», in *Revista Brasileira de História da Matematica*, vol. 1, n. 1, pp. 3-20

D'Ambrosio U. (2002), *Etnomatematica*, Pitagora, Bologna

D'Amore B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna

D'Amore B. (2000), «La didattica della matematica alla svolta del millennio: radici, collegamenti e interessi», in *La matematica e la sua didattica*, n. 3, pp. 407-422

D'Amore B. e Godino J. D. (2006), «Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica», in *La matematica e la sua didattica*, n. 1, pp. 9-38

Dharapal (1971), *Indian science and technology in the eighteenth century*, Biblia Impex Ltd, New Delhi

Eco U. e Sebeok T. A. (a cura di) (1983), *Il Segno dei Tre: Holmes, Dupin, Peirce*, Bompiani, Milano

Gerdes P. (1985), «Conditions and strategies for emancipatory mathematics education in under-developed countries», in *For the learning of mathematics*, vol. 5, n. 1, pp. 15-20

Gerdes P. (1991), *On the history of mathematics in Sub-Saharan Africa*, Third pan-African congress of mathematician, 20-28 august, Nairobi
Hannerz U. (2001), *La diversità culturale*, il Mulino, Bologna
Harris P. (1980), *Measurement in tribal aboriginal communities*, Northern Territory Department of Education, Australia
Joseph G. G. (1991), *The crest of the Peacock. Non-European roots of mathematics*, B. Tauris and co. Ltd, London
Joseph G. G. (2000), *C'era una volta un numero. La vera storia della matematica*, Il Saggiatore, Milano
Kintzler C. (1989), «Éléments», in *Écrits de Condorcet*, Ediling, Paris
Lakatos I. (1976), *Proofs and refutation*, Cambridge University Press, Cambridge
Lancy D. F. (1983), *Cross-cultural studies in cognition and mathematics*, Academic Press, New York
Lean G. A. (1986), *Counting systems of Papua New Guinea*, Research Bibliography, Department of Mathematics, Papua New Guinea University of Technology, Lea, Papua New Guinea
Lewis D. (1976), «Observation on route-finding and spatial orientation among the Aboriginal peoples of the western desert region of central Australia», in *Oceania*, vol. 46, n. 4, pp. 249-282
Needham J. (1981), *Scienza e civiltà in Cina*, Einaudi, Torino
Nicosia G. G. (2006), Etnomatematica: studio delle pratiche e delle teorizzazioni matematiche dei gruppi socioculturali, in *Rivista italo-austriaca sezione scientifica*, n. 2, pp. 3-17
Pinxten R., Van Dooren I. e Harvey F. (1983), *The anthropology of space*, University of Pennsylvania Press, Philadelphia
Pompeu G. Jr. (1992), *Bringing Ethnomatemathics into the mathematics curriculum*, Unpublished Doctoral Dissertation, University of Cambridge
Saxe G. B. (1990), *Culture and cognitive development: studies in mathematical understanding*, Lawrence Erlbaum Press, Hillsdale
Schliemann A. D. e Nunes T. (1990), «A situated schema of proportionality», in *British journal of developmental psychology*, n. 8, pp. 259-268
Sierpinska A. e Lerman S. (1996), «Epistemologies of mathematics and of mathematics education», in *International handbook of mathematics education* a cura di A. J Bishop et al, HL: Kluwer A. P., Dordrecht, pp. 827-876
Van Sertima, I. (1986), *Black in science*, Transaction Books, New Brunswick
White L. A. (1959), *The evolution of culture*, McGraw-Hill, New York
Wotley S. (2001), *Immigration and mathematics education over five decades*, Tesi di dottorato in filosofia, Monash University
Wynn K. (1992), «Addition and subtraction by human infants», in *Nature*, n. 358, pp. 749-750
Zaslavsky C. (1973), *Africa counts. Number and pattern in African cultures*, terza edizione rivisitata 1999, Lawrence Hill Books, Chicago

II. Matematica

1. Guidare con… Fibonacci

Paolo Hägler

This short article presents an unexpected application of th eFibonacci numbers. They can be used to convert distances and speed to and from imperial units for length and speed when driving.

Qualche anno fa mi sono recato oltre Manica con il mio veicolo, con contachilometri e tachimetro in chilometri orari, e di conseguenza mi sono dovuto abituare a convertire le unità di misura inglesi in quelle del sistema metrico decimale. Le unità che ho dovuto trasformare più spesso sono quelle inerenti le lunghezze, sia per sapere le distanze ancora da percorrere per giungere in un dato luogo, sia, come misura derivata, per adattare la velocità del veicolo al limite in vigore su un tratto di strada. In particolare, quindi, si trattava di trasformare in breve tempo le miglia (terrestri) e in parte anche le iarde. Queste misure hanno le seguenti equivalenze nel sistema metrico decimale:

– 1 miglio terrestre (mile) corrisponde a circa 1,609344 chilometri;
– 1 iarda (yd) corrisponde a circa 0,9144 metri.

Le iarde sono usate per esprimere distanze relativamente brevi (considerando la circolazione stradale) come ad esempio la distanza fino al prossimo incrocio, o fino a una curva pericolosa, o altro ancora. La distanza maggiore che mi ricordo di aver visto è di 300 yds (circa 274,32 metri). Per distanze maggiori si trova già il quarto di miglio.

Poiché le iarde sono usate per distanze relativamente piccole, il calcolo può anche essere molto approssimato, tanto da considerare 1 iarda come 1 metro (con un errore relativo del 9,36% circa). Se si vuole essere più precisi, si può calcolare il 90%, togliendo il 10%, e l’errore relativo si riduce all’1,57% circa.

Per le miglia, invece, il calcolo deve essere più preciso poiché concerne grandi distanze ancora da percorrere, o, in maniera indiretta, velocità da non superare. Prima di attraversare la Manica avevo adocchiato il rapporto 8/5, che fornisce un errore relativo dello 0,58% circa, e che mi sembrava molto pratico. Sbarcato in Inghilterra (o meglio sceso dal treno transitato nell’Eurotunnel) mi sono invece accorto che necessitavo di un metodo migliore, che mi permettesse di eseguire i calcoli più rapidamente.

Non volevo però accontentarmi del rapporto 3/2, che fornisce un errore relativo troppo importante, del 6,79% circa.

Osservando che il limite di velocità nell'abitato è di 30 miglia orarie (mph), che corrispondono a 48,28 km/h circa, e quindi simile al nostro (inteso dell'Europa continentale) di 50 km/h, mi è venuta l'illuminazione. Probabilmente 30 e 50 sono stati scelti in quanto multipli di 10 per avere una cifra tonda (in effetti la stragrande maggioranza dei limiti di velocità che ho visto in giro per il mondo sono multipli di 10, con qualche eccezione di multipli di 5 ma non di 10 soprattutto dove si usano le miglia). Dividendoli per 10 si ottengono 3 e 5, e quindi il rapporto 5/3. E qui, ripensando al rapporto di prima che volevo evitare (3/2), ritrovo il 3, e costruisco la successione 2 – 3 – 5 (2 miles circa 3 km, 3 miles circa 5 km). Come continuare la serie, magari avvicinandosi a un rapporto simile a 1,609344 è abbastanza naturale, siccome 2, 3 e 5 sono tre numeri consecutivi della successione di Fibonacci. In questa successione il rapporto tra due termini consecutivi tende alla sezione aurea Φ (circa 1,618), e, siccome il rapporto tra miglia e chilometri è circa la media tra 8/5 e Φ, l'errore relativo di questo metodo doveva essere molto simile a quello ottenibile usando il rapporto 8/5, ossia meno dell'1%. In effetti usando il successivo numero di Fibonacci per trasformare le miglia in km, partendo dal 2, si hanno ottime approssimazioni:

Numero di Fibonacci		**Numero di Fibonacci successivo**	**Errore**
miles	**km**	**km**	**relativo**
1	1.609344	1	37.86%
1	1.609344	2	24.27%
2	3.218688	3	6.79%
3	4.828032	5	3.56%
5	8.04672	8	0.58%
8	12.874752	13	0.97%
13	20.921472	21	0.38%
21	33.796224	34	0.60%
34	54.717696	55	0.52%
55	88.51392	89	0.55%
89	143.231616	144	0.54%

Non è necessario proseguire oltre. In effetti diventerebbe ingombrante sapere a memoria i successivi numeri di Fibonacci, e possiamo accontentarci di questi, moltiplicandoli per le opportune costanti (di solito il 10 è quello più semplice da usare) o anche usando scomposizioni additive. Vediamo alcuni esempi (i numeri di Fibonacci sono sottolineati):

miles	**Calcolo**	**km**	**Calcolo**	**Risultato**	**Errore relativo**
50	10 per $\underline{5}$	80.4672	10 per $\underline{8}$	80	0.58%
100	20 per $\underline{5}$	160.9344	20 per $\underline{8}$	160	0.58%
70	10 per ($\underline{5}$ + $\underline{2}$)	112.65408	10 per ($\underline{8}$ + $\underline{3}$)	110	2.36%
70	$\underline{34}$ + $\underline{34}$ + $\underline{2}$	112.65408	$\underline{55}$ + $\underline{55}$ + $\underline{3}$	113	0.31%
65	$\underline{55}$ + $\underline{5}$ + $\underline{5}$	104.60367	$\underline{89}$ + $\underline{8}$ + $\underline{8}$	105	0.38%
230	10 per ($\underline{21}$ + $\underline{2}$)	370.14912	10 per ($\underline{34}$ + $\underline{3}$)	370	0.04%

Si impongono due osservazioni:

– la prima è che si presentano errori relativi addirittura inferiori rispetto a quello che darebbe il rapporto Φ, e ciò è possibile poiché la successione dei rapporti tra due numeri di Fibonacci consecutivi oscilla attorno a Φ, con valori alternativamente superiori e inferiori. Ad esempio il rapporto 34/21 è superiore a Φ, e il rapporto 3/2 ne è inferiore, e pertanto il rapporto 37/23 (utilizzato indirettamente nell'ultima trasformazione della tabella soprastante) ha un errore relativo molto piccolo poiché i due errori hanno segno opposto e si compensano parzialmente;

– la seconda riguarda il fatto che per ottenere approssimazioni migliori bisogna rinunciare ai rapporti 3/2 e 5/3, o, perlomeno, non accentuare gli errori moltiplicando questi valori. Ad esempio si veda la prima scomposizione del 70 rispetto alla seconda. Il difetto è che rinunciare a questi rapporti rende più difficile trovare le scomposizioni additive e obbliga a utilizzare fattori meno comodi del 10.

Qualche anno dopo ho fatto un *coast to coast* oltre Oceano, prendendo un veicolo a noleggio negli Stati Uniti. Ovviamente aveva il contamiglia e il tachimetro in miglia orarie. Durante la traversata sono sconfinato in Canada per andare a trovare degli amici che stavano a Toronto. In Canada, sia per le distanze sia per le velocità, si utilizzano le stesse unità dell'Europa continentale (ossia km e km/h), e così ho applicato il mio metodo «al contrario», cercando il numero di Fibonacci precedente, invece del successivo, mantenendo come base di partenza la scomposizione additiva utilizzando i numeri di Fibonacci. Esempi:

km	**Calcolo**	**miles**	**Calcolo**	**Risultato**	**Errore relativo**
50	10 per 5	31.0685596	10 per 3	30	3.44%
50	55 - 5	31.0685596	34 - 3	31	0.14%
120	6 per 21 - 2 per 3	74.5645431	6 per 13 – 2 per 2	74	0.76%
160	3 per 55 - 5	99.4193908	3 per 34 - 3	99	0.42%

Nell'articolo è presentata una situazione in cui è necessario eseguire abbastanza rapidamente e con buona precisione un calcolo da svolgere a mente. Qui è presentato un metodo per eseguire questo particolare calcolo (la conversione da miglia terrestri a chilometri o viceversa), ma l'articolo potrebbe essere preso come spunto per trovare altri calcoli al fine di convertire rapidamente altre misure, o anche per organizzare attività scolastiche di allenamento al calcolo mentale.

2. Teorema sulla localizzazione degli zeri reali di un polinomio

Stefano Ravasi[1]

In this paper a theorem about the bound of real roots of a polynomial is proved. It is not very common to find it in high school books and its proof could be an occasion to work with inequalities. The theorem was usually taught in the high schools of the former USSR.

1. Il teorema

Sia dato un polinomio $p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ a coefficienti reali non tutti positivi e con $a_n > 0$. Detto k il numero di monomi con coefficienti positivi o nulli che precedono il primo monomio con coefficiente negativo, posto uguale ad a il valore assoluto del coefficiente negativo di massimo valore assoluto, allora tutti gli zeri positivi del polinomio sono minori di

$$M = 1 + \sqrt[k]{\frac{a}{a_n}}$$

Osservazione 1

Non vi è chi non veda che se il polinomio non costante ha solo coefficienti non negativi, allora gli zeri sono solo negativi e quindi si può assumere M = 0 e il teorema non è significativo.

Esempio 1

Sia $p(x)=2x^7+6x^6-2x^4-13x^3-10x^2-12x-15$.

Allora riesce k = 3 , a = 15, $a_n = 2$.

Dunque $M = 1 + \sqrt[3]{\frac{15}{2}} \sim 3$

Infatti come si può vedere calcolando gli zeri anche con un programma qualunque (con il linguaggio R o Geogebra o Derive o ancor meglio il sito www.wolframalpha.com) lo zero positivo più grande vale circa 1,52.

1. Liceo scientifico Galileo Galilei Trieste.

Osservazione 2

Per quanto riguarda la localizzazione degli zeri negativi riesce che se $x < 0$ è uno zero negativo di $p(x)$ allora $-x$ è uno zero positivo di $p(-x)$. Costruito quindi il polinomio $p(-x)$ la frontiera positiva M' di $p(-x)$ cambiata di segno è la frontiera negativa del polinomio iniziale.

Esempio 2

Sia $p(x) = x^4 - 12\,x^2 - 20\,x - 16$. Riesce $M = 1 + \sqrt{20} \sim 6$

Riesce poi $p(-x) = x^4 - 12\,x^2 + 20\,x - 16$ e dunque $M' = 1 + \sqrt{16} \sim 5$

Dunque tutti gli zeri reali α del polinomio sono tali che $-5 < \alpha < 6$. Infatti riesce che gli zeri reali sono approssimativamente –2,58 e 4,2.

2. Dimostrazione del teorema

Sia dato un polinomio $p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_0$ a coefficienti reali non tutti positivi e con $a_n > 0$.

Non è restrittivo supporre che ci sia uno zero reale maggiore di uno: se così non fosse posso porre M = 1 ed il teorema è banalmente vero. Posto *a* uguale al valore assoluto del coefficiente negativo con massimo valore assoluto, sostituisco $(-a)$ a tutti i coefficienti che seguono il primo negativo. La nuova espressione che ottengo, tenuto anche presente che $x > 1$, è minore del polinomio di partenza.

Riesce dunque

(1) $p(x) = a_n\,x^n + \ldots + (-a)\left(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + x + 1\right)$ essendo k il numero di termini positivi o nulli che precedono il primo con coefficiente negativo.

Osservato ora che $x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + x + 1 = \dfrac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}$, poiché si tratta della somma di termini di una progressione geometrica di ragione x, posso scrivere

(2) $$p(x) > a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_{n-k+1}\,x^{n-k+1} + (-a)\frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}$$

Cancello ora tutti i termini $a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_{n-k+1}\,x^{n-k+1}$ che sono sicuramente positivi visto quanto detto su k e su x, ed ottengo

(3) $$p(x) > a_n\,x^n + (-a)\frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}$$

Eseguo ora la somma indicata a secondo membro e raccolgo x^{n-k+1} ottenendo

(4) $$p(x) > \frac{x^{n-k+1}\left(a_n\,(x-1)^k - a\right) + a}{x - 1}$$

Sostituisco ora alla quantità x^{k-1} la quantità $(x-1)^{k-1}$ ad essa minore e la moltiplico, come indicato, per $(x-1)$ ottenendo

$$(4)\quad p(x) > \frac{x^{n-k+1}\left(a_n (x-1)^k - a\right) + a}{x-1}$$

Se nell'espressione (5) la quantità $[a_n (x-1)^k - a]$ è positiva, allora anche p(x) è positivo e quindi non ha più zeri.

Esplicitando x dalla diseguaglianza $[a_n (x-1)^k - a > 0]$

ottengo $x > 1 + \sqrt[k]{\frac{a}{a_n}}$

In conclusione se $x > 1 + \sqrt[k]{\frac{a}{a_n}}$ p(x) non ha zeri e dunque resta provata la tesi del teorema.

3. Nota di informatica

Presento qui alcune semplici indicazioni per il calcolo degli zeri con il linguaggio R. Il linguaggio R presenta la funzione *polyroot*. I coefficienti del polinomio vanno inseriti in ordine, dal termine noto al coefficiente direttivo e concatenati in un vettore c.

Si vogliano calcolare le radici del polinomio

$p(x) = x^4 - 12\,x^2 - 20\,x - 16$

Si scriverà:

```
f = c(–16,–20,–12,0,1)
radici = polyroot(f)
for (alfa in radici) print (alfa)
```

Si otterranno sia le radici reali che quelle complesse del polinomio proposto. Colgo l'occasione per ricordare che il linguaggio R è un ambiente di sviluppo *open source*, facilmente disponibile in rete, orientato verso l'indagine statistica, che contiene tra le altre cose un linguaggio di programmazione detto S, semplice e ben sviluppato e che contiene molte strutture dei linguaggi di programmazione forse più complessi. Si veda, tra gli altri, il sito http://www.r-project.org

1. Analisi e confronto delle prove di valutazione esterna per la scuola media incrociate tra Canton Ticino e Italia

Giorgio Bolondi[1], Roberta Censi[2] e Silvia Sbaragli[3]

This article is about some studies conducted in Ticino and Italy on proficiency testing system aimed at school: the Swiss «Prove Cantonali» and the Italian «Prove Invalsi» arranged in a crosswise giving. In particular, we analyze the differences and similarities of students' results on these tests, taking into account the differences of the two education systems.

1. Introduzione

Nel periodo compreso tra i mesi di febbraio e maggio 2012, come progetto di tesi all'estero e grazie all'appoggio del Dipartimento Formazione e Apprendimento della Svizzera italiana (DFA-SUPSI) di Locarno e dell'Ufficio per l'Insegnamento Medio di Bellinzona, è nata l'idea di confrontare le prove di valutazione esterna del Canton Ticino e dell'Italia. I due paesi adottano infatti, in modo indipendente, due differenti metodi e tipologie di controllo del «successo scolastico»: le Prove Cantonali e le Prove Invalsi. L'obiettivo dei test è analogo, ossia indagare i contenuti, i processi cognitivi e le competenze apprese dagli studenti, mentre le metodologie utilizzate affinché lo studente raggiunga tali traguardi e soprattutto gli strumenti per verificarli sono diversi.

In questa ricerca è stata effettuata una *somministrazione incrociata* dei testi della Prova Nazionale Invalsi e della Prova Cantonale (la Prova Cantonale è stata affrontata dagli studenti italiani, la Prova Invalsi dagli studenti ticinesi), mentre l'*oggetto di indagine* sono stati i contenuti, i processi cognitivi e le competenze che lo studente ha acquisito al termine di alcuni anni del segmento medio, le classi seconda e terza. In questo modo si è cercato di individuare ambiti di eccellenza o di difficoltà sui quali trarre spunti di riflessione utili per la didattica.

Si sono inoltre studiati gli effetti della somministrazione delle due *prove valutative di tipo esterno* cercando di notare se, nella struttura dei testi, nella preparazione, nella somministrazione e nei risultati, ci fossero analogie o differenze, così da poterle analizzare per capire con che peso questo tipo di test entra a far parte della vita di classe degli studenti e del docente. A questo scopo sono stati somministrati dei questionari agli insegnanti ticinesi e italiani per capire come le prove vengono preparate, affrontate e sfruttate all'interno delle classi. Si è inoltre scelto di indagare come i test

1. Professore ordinario Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.
2. Laureata in Matematica e abilitata all'insegnamento, Università di Bologna.
3. Docente-ricercatore Dipartimento Formazione e Apprendimento (DFA)-SUPSI di Locarno.

vengono considerati dai docenti, se vengono vissuti come intromissioni nella pratica d'insegnamento o se gli insegnanti sono consapevoli dell'importanza e degli scopi che oggi hanno assunto i test valutativi di tipo esterno, nazionali e internazionali, per regolare il sistema di istruzione degli stati.

2. Quadro teorico

2.1. La valutazione in ambito educativo

Il verbo valutare e il sostantivo valutazione, secondo quanto riporta Pianigiani (2002), hanno radice latina. Entrambi derivano dalla parola latina vàlitus, che significa aver prezzo, dare un prezzo, stimare, aver in considerazione o tenerne conto in proporzione al valore che si stima.

Dunque, così come sostiene Domenici (2007): *«si valuta quando si dà valore, si dà importanza a un oggetto, a un soggetto, a un processo, a un contenuto o, in generale, a una situazione».* Non è quindi possibile essere d'accordo con chi sostiene che «valutare è dare un voto», perché valutare è molto di più. Vertecchi (1995) riesce a rendere la complessità dell'atto del valutare nella definizione proposta di docimologia: *«la docimologia è quella scienza che ha per oggetto tutto ciò che è connesso alla misurazione e alla valutazione in ambito educativo, dunque non solo tradizionali tecniche di accertamento della conoscenza, ma anche ogni implicazione affettiva a esse collegata».*

In ambito educativo la valutazione interessa tanti contesti (Domenici, 2007): *«il sistema (ossia il sistema di istruzione nel suo complesso), i vari segmenti scolastici (scuola primaria, secondaria di primo e secondo grado, ...), le singole unità operative (scuole e istituti), l'ambiente di classe, il lavoro del docente svolto in classe, quello dell'allievo e il curricolo».*

Le Prove Cantonali e le Prove Invalsi si collocano trasversalmente all'interno di tutte queste considerazioni perché sono test allo stesso tempo di *sistema*, *esterni*, *valutativi* e *criteriali*. Tali tipi di test sono la risorsa fondamentale per il sistema di istruzione degli Stati perché, come suggerisce Fandiño Pinilla (2002), *«sostengono un aggiornamento continuo delle istituzioni e dei docenti sugli ultimi risultati della ricerca favorendo la nascita di nuovi strumenti che consentono all'insegnante:*

- *di conoscere meglio lo studente;*
- *di mettere sotto analisi la propria trasposizione didattica, ossia quel processo creativo e complesso che il docente mette in atto agendo sul sapere accademico per trasformarlo in un sapere da insegnare adatto all'allievo;*
- *di affrontare in modo preparato un'analisi a priori e a posteriori dell'ingegneria didattica utilizzata, cioè di quell'insieme di azioni didattiche da lui organizzate per favorire un particolare apprendimento per la classe e la successiva valutazione;*
- *di valutare costantemente i curricola e le differenze che intercorrono tra gli obiettivi (ciò che volevamo ottenere) e i risultati (ciò che abbiamo ottenuto), cioè tra curricolo 'intended' e curricolo 'implemented'».*

2.2. Valutazione di sistema, esterna, valutativa e criteriale

Data la complessità del valutare, può essere opportuno identificare la valutazione in oggetto secondo le sue caratteristiche, in questo caso esterna, valutativa, criteriale e di sistema.

Il sociologo Vergani (2002) illustra molto chiaramente come cambia il fine e il significato del valutare se a questa parola vengono associati rispettivamente i termini sopra elencati: *«Con valutazione 'di sistema' si intende generalmente l'insieme delle attività che permettono di formulare una valutazione complessiva sul funzionamento di un sistema formativo. La valutazione di sistema si configura quindi come una valutazione di sintesi costituita da tre momenti fondamentali:*

- *una documentazione;*
- *dati provenienti da osservazioni esterne;*
- *comparazioni con altre esperienze.*

Importante è ricordare che la valutazione di sistema non è mai da intendere come giudizio finale, ma piuttosto come un monitoraggio continuo con l'obiettivo di promuovere».

Riprendendo le parole di Vergani (2002), le prove esterne non vengono effettuate dall'istituzione scolastica e formativa tra i suoi componenti, ma:

- *«chi valuta è esterno, al di sopra delle parti e neutrale alla scuola esaminata;*
- *le motivazioni e i meccanismi attivati sono diversi da quelli che si attiverebbero con la valutazione di tipo interno;*
- *le metodologie utilizzate, i processi di verifica e il modo di condurre le prove sono differenti da quelli di tipo interno».*

Si è sentito il bisogno di valutazioni di tipo esterno in quanto c'era e c'è la necessità di capire se il sistema d'istruzione, così come è stato pensato e viene attuato, può considerarsi ben funzionante, dunque se gli obiettivi prefissati con gli strumenti impiegati vengono o meno raggiunti. Vergani (2002) individua tre tipi di cause che possono aver contribuito alla nascita della valutazione esterna: formali, sostanziali e simboliche: *«Sono formali, ad esempio, quelle cause che muovono le valutazioni nazionali dell'Invalsi, regolate da leggi, norme e decreti. Si parla invece di cause sostanziali e simboliche quando accade che le singole istituzioni scolastiche sentono la necessità di valutazioni esterne per evitare di cadere nell'autoreferenzialità e per rispondere al bisogno di una valutazione neutrale e obiettiva da parte di persone non emotivamente coinvolte».*

Una prova di sistema inoltre perché sia affidabile deve essere costruita in modo che sia assicurata l'oggettività, la pertinenza, l'efficacia e l'efficienza.

La valutazione *valutativa* è quella della scuola che si autovaluta, quella che le permette di effettuare un bilancio confrontando la qualità dell'istruzione fornita nell'anno corrente con i precedenti e di garantire agli studenti una formazione continua. In questa valutazione rientrano le valutazioni sul lavoro degli insegnanti, sui libri di testo e sui curricola.

Come sostiene Fandiño Pinilla (2008), attraverso questo genere di monitoraggio è possibile:

– *«effettuare un bilancio su quello che lo studente è in grado di fare ad un certo momento del processo di insegnamento-apprendimento;*
– *guidare la successiva fase dell'apprendimento sulla base del bilancio precedente;*
– *scoprire le cause della difficoltà dello studente;*
– *incoraggiare il successo dello studente per favorirne la riuscita».*

Questa forma di (auto)controllo è necessaria perché la scuola non vive di vita autonoma, bensì all'interno di un contesto istituzionale e politico del quale bisogna tenere conto.

Una valutazione *criteriale*, così come suggerisce il termine, è basata sul criterio, ossia su di un metodo il più possibile giusto e ugualitario, nel quale categorie e obiettivi sono prefissati. All'opposto, una valutazione che si discosta da questo ideale viene chiamata normativa. In altre parole, *«gli esiti delle prove di valutazione possono essere valutati sulla base di un confronto tra le prestazioni dell'allievo e gli obiettivi della formazione (valutazione criteriale) o sulla base di paragoni tra l'allievo esaminato e gli altri allievi (valutazione normativa)».*[4]

Si utilizza quindi un test normativo se si vuole fare una classificazione degli studenti sottolineando le loro differenze e un test criteriale se si ambisce a verificare cosa sa fare chi sostiene il test e che cosa conosce piuttosto che a porlo in una relazione di confronto con altre persone. Una valutazione di tipo criteriale permette di controllare come gli studenti abbiano appreso i contenuti, i processi cognitivi e le competenze che ci si aspetta siano padroneggiate e quindi di sfruttare le informazioni ricavate per determinare il rapporto tra lo studente e il curriculum attuato dall'insegnante (*implemented curriculum*) e per capire quali obiettivi curricolari siano stati raggiunti (*attained curriculum*). Infatti, nella teoria pedagogica, si sostiene che la valutazione normativa sia sempre accompagnata dal cosiddetto effetto *Posthumus*, il cui enunciato è così formulato: *«un docente tende ad aggiustare il livello del suo insegnamento e i suoi apprezzamenti sulle prestazioni degli allievi in modo da conservare di anno in anno la stessa distribuzione gaussiana delle note».*[5]

Infine, un vantaggio proprio della valutazione criteriale è quello di evitare gli effetti che snaturano le prove. Effetti che, altrimenti, le renderebbero non significative.

I più comuni sono:

– l'effetto stereotipia che consiste in una lettura costante dell'alunno da parte dell'insegnante. L'insegnante si convince che la situazione dello studente non possa cambiare ed evolversi positivamente o negativamente nel tempo. La valutazione e i giudizi nei confronti del ragazzo sono così come congelati da questa opinione;

4. Dagli appunti per il modulo di 'Scienze dell'Educazione', Edo Dozio, DFA - SUPSI di Locarno, 2012.
5. Vedi nota precedente.

– l'effetto alone che porta il docente a interpretare gli esiti in un contesto di situazioni ed elementi che falsano la prova;
– il condizionamento profetico cioè la tendenza dell'insegnante a valutare come scarsi i risultati di particolari allievi con i quali è certo di non poter raggiungere determinati obiettivi.

Il criterio di valutazione può così rappresentare (o fissare) il livello (minimo) di accettabilità di una conoscenza o competenza appresa.

2.3. Valutazione degli apprendimenti in matematica

Le Prove Cantonali e Invalsi mirano a verificare le competenze, le abilità e le conoscenze acquisite dagli studenti in ambito matematico. La valutazione dell'apprendimento come fattore unitario è però molto difficile. È impossibile non riconoscere che in matematica, così come in altre discipline, l'apprendimento è costituito da diversi aspetti (Fandiño Pinilla, 2008). Quando risolviamo un problema, ad esempio, come prima cosa dobbiamo estrapolare dal testo le informazioni necessarie, spesso scritte nel linguaggio comune, e trasformarle in linguaggio matematico, dobbiamo inoltre analizzare e comprendere i concetti che in esso vengono richiamati, riconoscere un possibile svolgimento, applicare gli algoritmi necessari per arrivare al risultato, controllare l'attinenza di ciò che si è ottenuto con la situazione proposta. Non è nemmeno improbabile che venga chiesta una rappresentazione specifica del risultato ottenuto, allora siamo tenuti a rappresentare in forme differenti lo stesso esito. Infine potremmo dover spiegare a un'altra persona cosa abbiamo fatto e per farlo servono abilità di tipo comunicativo.

Queste tappe che percorriamo mettono in risalto almeno cinque diverse tipologie di apprendimento in matematica (Fandiño Pinilla, 2008):

1. *un apprendimento concettuale:* che riguarda la capacità di saper individuare le particolarità di un concetto matematico, saperle rappresentare, trattare all'interno di uno stesso registro e convertire nel passaggio tra registri diversi, non confondendolo mai però con una sua rappresentazione;
2. *un apprendimento algoritmico:* proprio dell'eseguire operazioni, del risolvere un'equazione, del calcolare, dell'operare, del sapere applicare un procedimento di risoluzione costituito da un numero finito di passi meccanici;
3. *un apprendimento strategico:* che riguarda la capacità di risolvere e congetturare, coinvolgendo l'uso di più regole e la successione di operazioni che vengono scelte strategicamente e creativamente dall'allievo nella risoluzione di un problema;
4. *un apprendimento comunicativo:* che riguarda la capacità di esprimere il proprio parere su cose matematiche, di descrivere un oggetto, di spiegarlo ad altri, dato che la matematica stessa è di per sé una forma di linguaggio dotata di una semantica, una sintassi e una pragmatica;
5. *un apprendimento relativo alle rappresentazioni semiotiche.* In matematica uno stesso concetto si può rappresentare in forme tra loro anche molto diverse. Si dirà allora che un alunno ha raggiunto questo tipo di apprendimento quando riesce a rappresentare l'oggetto costruito e a operare su

di esso trasformazioni di trattamento e conversione. Ossia quelle trasformazioni che avvengono all'interno dello stesso registro semiotico (trattamento) o che sono caratterizzate dal passaggio da uno a più registri semiotici diversi (conversione).

Questa suddivisione degli apprendimenti non è esclusiva, ma permette un'ulteriore possibilità di analisi delle difficoltà e lo studio delle cause che generano gli errori al fine di individuarle e su di esse intervenire.

3. Le fasi della ricerca

La ricerca è stata strutturata come riportato di seguito.

Prima fase Analisi delle prove somministrate negli ultimi anni dal Canton Ticino e dall'Italia; reperimento del materiale (linee guida, quadri di riferimento, standard nazionali per la formazione, …) e delle analisi già effettuate dagli organi competenti dei due paesi sui test; confronto tra le prove e scelta delle prove da somministrare in Italia e in Canton Ticino (mese di febbraio).

Seconda fase Individuazione del campione statistico e scelta delle modalità di somministrazione (marzo).

Terza fase Somministrazione e correzione delle prove seguendo i documenti *Risultati e indicazioni per la valutazione* della prova cantonale e *Griglia per l'attribuzione del voto della prova nazionale* Invalsi (marzo).

Quarta fase Somministrazione dei questionari per gli insegnanti. (marzo).

Quinta fase Analisi statistica e grafici sulle percentuali di successo per item (aprile e maggio).

Sesta fase Analisi statistica e grafici sulle percentuali di risposte ottenute in alcune domande del questionario docenti (aprile e maggio).

Settima fase Analisi didattica specifica di alcuni item risultati difficili agli studenti (aprile e maggio).

4. Prove Cantonali e Prove Invalsi a confronto

Le prove Cantonali e Invalsi hanno obiettivi comuni: sono orientative per i docenti e per l'insegnamento e educative per gli allievi che devono diventare consapevoli di quali competenze sono «padroni» o meno. Si differenziano però per alcuni elementi sostanziali.

In primo luogo le Prove Invalsi di terza media rientrano nella valutazione individuale dell'allievo (contribuiscono per 1/7 al voto finale dell'esame conclusivo di terza media), mentre le Prove Cantonali non incidono sulla certificazione degli allievi, hanno cioè esplicitamente un valore formativo e regolativo (anche se avviene molto spesso che gli insegnanti scelgano di utilizzare la prova come verifica sommativa interna). Inoltre, le domande della Prova Invalsi (circa 20-26 item) sono a risposta chiusa con scelta multipla o a risposta aperta univoca. Tra le risposte a scelta multipla, particolare importanza hanno i distrattori, cioè opzioni errate che possono attirare l'attenzione dello studente fornendo informazioni per l'analisi didattica della conoscenza o del contenuto valutato. I problemi della Prova Cantonale (circa 5 o 6 articolati in più domande), al contrario, hanno richieste spesso dipendenti le une dalle altre.

Già dalla diversa struttura e organizzazione delle prove, si nota come la Prova Cantonale cerchi di valutare in misura maggiore, rispetto alle prove Invalsi, i contenuti matematici che l'alunno ha fatto propri nell'ambito della *matematizzazione verticale*,[6] ad esempio nella manipolazione algebrica, nel calcolo mentale, nell'esplicitazione di definizioni o di affermazioni necessarie alla risoluzione di un problema già scritto in linguaggio matematico, ossia già modellizzato.

Nelle prove Cantonali non sono molte le situazioni concrete reali e sono in numero maggiore le domande che non richiedono una contestualizzazione dei risultati ottenuti. La mancanza di un gruppo di risposte già preparato tra le quali scegliere, inoltre, esclude in partenza la risposta data senza motivazione e permette allo studente di scegliere liberamente la metodologia di risposta.

Entrambi i test, italiano e ticinese, sono costruiti per verificare se lo studente, al termine di un determinato corso o anno scolastico, ha raggiunto alcuni obiettivi o competenze. Bisogna però chiarire cosa si intende in Italia e in Ticino con questi termini.

Le prove Invalsi sono costruite seguendo due differenti direzioni di interpretazione e valutazione dei risultati, quella dei *contenuti* e quella dei *processi cognitivi*. I contenuti riguardano gli argomenti matematici coinvolti, mentre i processi cognitivi quell'insieme di azioni attraverso cui l'individuo acquisisce informazioni, le elabora, le struttura e le conserva: conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della disciplina, algoritmi e procedure, varie forme di rappresentazione, acquisire forme tipiche del pensiero matematico e saper risolvere problemi utilizzando strumenti matematici (problem solving).

Contenuti e processi cognitivi determinano così le competenze che si auspica lo studente abbia raggiunto al termine di alcuni anni o segmenti scolastici. In particolare, con il termine competenza: *«si intende la capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo»*.[7]

Tale definizione di competenza o literacy matematica è in linea con quella utilizzata nell'ambito delle prove PISA.[8]

6. Il termine *matematizzazione verticale* si riferisce all'attività di osservazione, strutturazione e interpretazione del mondo attraverso i modelli matematici. Un'attività che comporta il passaggio dal quotidiano alla matematica e dalla matematica al quotidiano si articola in due momenti principali: una *matematizzazione orizzontale*, dove gli strumenti matematici sono promossi e usati per organizzare la risoluzione di un problema reale e una matematizzazione verticale, che suppone la riorganizzazione e le operazioni fatte dagli studenti all'interno del sistema matematico.
7. http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012.php?page=pisa2012_it_01.
8. Per maggiori informazioni sulle prove di valutazione internazionale in Italia e in Canton Ticino rimandiamo *a «I risultati italiani e ticinesi nelle prove OCSE-PISA a confronto»,* Tesi di Laurea Magistrale del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, Sara Zagra, 2012.

In Ticino, le Prove Cantonali sono strutturate in modo da verificare *obiettivi* e *competenze*. Il termine ‘obiettivi’ viene utilizzato analogamente al termine ‘contenuti’ in Italia, competenze invece si riferisce alla: *«capacità di affrontare un compito, una situazione complesso/a, utilizzando in modo creativo e funzionale le conoscenze, le capacità e gli atteggiamenti acquisiti. Le conoscenze, le capacità e gli atteggiamenti sono quindi le risorse necessarie per costruire le competenze. […] Le competenze integrano insiemi di obiettivi relativi a un argomento disciplinare più o meno vasto e concernenti saperi, saper fare e saper essere; sono sempre riferite a una situazione, dove il termine ‘situazione’ sta per ‘famiglia di situazioni’, all’interno della quale il docente sceglierà di volta in volta quella particolare che meglio si adatta all’apprendimento dei propri alunni. Le competenze per classe sono apprendimenti che vanno terminati di anno in anno e rappresentano lo zoccolo duro attorno al quale viene organizzata l’attività didattica annuale. […] L’attività didattica non deve tuttavia limitarsi al lavoro sulle competenze ma dev’essere estesa anche agli altri obiettivi disciplinari che non sono oggetto delle competenze. Essi sostituiscono un importante bagaglio formativo e culturale indispensabile per raggiungere altre competenze negli anni successivi».*[9]

Il concetto di competenza è dunque simile, anche se ogni Paese ne sottolinea aspetti diversi.

In Italia, secondo le indicazioni nazionali Fioroni (D.M. del 31 luglio 2007), tra le competenze matematiche rientrano: *«il saper riconoscere e risolvere problemi di vario genere analizzando la situazione-problema, saper confrontare tra loro vari procedimenti, sostenere le proprie convinzioni con argomentazioni valide, l’accettare di cambiare opinione, il descrivere forme relativamente complesse e anche il semplice accostarsi alla matematica con atteggiamento positivo».*[10]

Non sono elencate competenze specifiche per ogni classe, però si ritrovano competenze che uno studente deve aver acquisito al termine del percorso medio. I traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado sono:

- un atteggiamento positivo rispetto alla matematica e comprensione dell’utilità degli strumenti matematici in situazioni reali;
- percezione, descrizione e rappresentazione di forme relativamente complesse, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall’uomo;
- capacità di argomentare, discutere tra pari, sostenere le proprie idee;
- rispettare punti di vista diversi dal proprio;
- accettare di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta;
- valutare le informazioni che ha su una situazione, riconoscere la loro coerenza interna e la coerenza tra esse e le conoscenze che ha del contesto, sviluppando senso critico;
- riconoscere e risolvere problemi di vario genere analizzando la situazione

9. Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport, Divisione della scuola, Ufficio dell’insegnamento medio, *Piano di Formazione della scuola Media,* Bellinzona, 2004.
10. Le competenze qui riportate sono a titolo esemplificativo e non pretendono di essere esaustive. Per un elenco più dettagliato rimandiamo a D.M. del 31 luglio 2007 del ministro Fioroni.

e traducendola in termini matematici, spiegando anche in forma scritta il procedimento seguito, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. I contenuti e gli obiettivi matematici invece sono raggruppati in quattro aree:

1. *numeri*;
2. *spazio e figure*;
3. *relazioni e funzioni*;
4. *misure, dati e previsioni*.

In base a questi quattro ambiti l'Invalsi ha catalogato gli item delle prove nazionali.

In Ticino, nel Piano di formazione della scuola media gli obiettivi e le competenze vengono specificate per ogni classe, con l'aggiunta di «competenze trasversali» comuni a tutte le classi.

Gli obiettivi sono raggruppati in cinque ambiti:

1. *numeri:* calcolo scritto, mentale, automatico, numerico e letterale;
2. *insiemi*, *funzioni* e *rappresentazioni grafiche*;
3. *geometria*: studio delle figure geometriche del piano e dello spazio;
4. *matematica applicata:* applicazione dei concetti e dei procedimenti matematici a situazioni extra-matematiche;
5. *formazione del pensiero:* sviluppo del pensiero logico, dell'organizzazione delle conoscenze, dell'intuizione e dell'invenzione.

Le competenze specifiche per la classe seconda media (la cui Prova Cantonale è stata affrontata dalle seconde e terze italiane) sono lo studio e l'approfondimento:

– dei numeri interi (calcolo, rappresentazione sulla retta numerica, addizione algebrica, espressioni letterali);
– dell'operatore frazionario (equivalenza tra frazioni, confronto tra frazioni e complementi di una frazione propria rispetto all'unità, interpretazione grafica di una frazione);
– dei poligoni e del cerchio (perimetri e aree, ampiezze di angoli).

Le competenze specifiche per la terza media ticinese (classi che hanno affrontato le prove nazionali delle terze italiane) sono invece leggermente diverse a seconda del tipo di classe.

La più grande differenza tra i percorsi italiano e svizzero consiste nel fatto che gli studenti svizzeri, a partire dalla terza, vengono suddivisi in due corsi – attitudinale (A) e base (B) – a seconda della loro attitudine.

Le competenze per la classe terza B sono:

– frazioni, percentuali, rapporti, proporzioni: in una situazione concernente frazioni e percentuali, saper risolvere problemi usando la calcolatrice e operando opportune approssimazioni dei risultati;
– applicazione del teorema di Pitagora: in una situazione geometrica piana che comprende figure composte riconoscere triangoli rettangoli, applicare

il teorema di Pitagora, usare la calcolatrice, scegliere cifre significative del risultato;
– geometria dei solidi: in una situazione geometrica concernente prismi, piramidi e cilindri riconoscere il tipo di solido e i suoi elementi essenziali, disegnare, calcolare aree e volumi;
– numeri razionali, equazioni: saper risolvere problemi facendo ricorso alle funzioni e alle equazioni;
– figure piane, teorema di Pitagora: saper calcolare esattamente e in modo approssimato mediante la calcolatrice determinate lunghezze;
– geometria dei solidi: eseguire schizzi di prismi, piramidi, cilindri o solidi da essi composti, disegnare il loro sviluppo, calcolare i loro elementi sconosciuti, aree e volumi.

Nel corso attitudinale analogamente:
– saper confrontare numeri razionali scritti in forma frazionaria o decimale ed eseguire calcoli con essi. Saper affrontare una situazione-problema concernente questi numeri (anche senza l'ausilio della calcolatrice), operando opportune approssimazioni dei risultati e usando le equazioni;
– in una situazione geometrica concernente una figura piana, essere in grado di calcolare, anche con l'ausilio del teorema di Pitagora, determinate grandezze, approssimandole convenientemente;
– in una situazione geometrica concernente prismi, piramidi e cilindri, riconoscere il tipo di solido e i suoi elementi essenziali, eseguire schizzi appropriati, calcolare lunghezze, aree e volumi (eventualmente applicando il teorema di Pitagora) usando convenientemente le unità di misura.

Infine sono competenze trasversali per tutte le classi il saper:
– presentare la risoluzione di un problema con spiegazioni dei calcoli effettuati e aggiunte grafiche;
– valutare l'accettabilità di un risultato mediante verifica o ragionamento;
– analizzare una figura geometrica giustificandone le proprietà;
– analizzare criticamente la soluzione di un problema, condividerla o confutarla;
– consultare le fonti di informazione necessarie per comprendere il problema.

Elementi di analogia e differenza tra le due prove sono stati schematicamente riportati nell'elenco e nella tabella seguenti.

Analogie

– Tipo censuario ed esterno
– Finalità orientative per alunni, insegnanti e Paese
– Valutazione di obiettivi e competenze
– Risultati restituiti alle singole scuole, percentuali di riuscita per item pubblici.

Differenze

Prova Cantonale 2° media	**Prova Invalsi 3° media**
Prove preparate dagli insegnanti con la collaborazione degli esperti	Prove preparate dagli insegnanti (ca 250 collaboratori) nel corso di seminari di formazione
Situazioni organizzate in 4 ambiti: 1. Numeri 2. Geometria 3. Insiemi, funzioni e rappresentazioni grafiche 4. Matematica applicata	Item organizzati in 5 ambiti: 1. Numeri 2. Spazio e figure 3. Relazioni e funzioni 4. Dati e previsioni 5. Misure
Rientra nella valutazione dell'alunno solo sotto esplicita richiesta dell'insegnante	Rientra nella valutazione individuale, nell'esame di stato contribuisce per 1/7 al voto finale
3.109 alunni coinvolti	Circa 570.000 alunni coinvolti
Analisi statistica per sede e per situazione	Analisi statistica per sede, genere, item, regione, in base all'origine e alla regolarità del percorso di studi
Prova di fine biennio osservativo, non è una prova di fine ciclo	Prova di fine ciclo superiore di primo grado
Prova aperta di struttura tradizionale, n° tot. domande 6	Prova chiusa, n° tot. domande 26
Domande aperte	Domande chiuse o a risposta aperta univoca, nelle domande a scelta multipla sono presenti i distrattori
Griglia di correzione non rigida	Rigida griglia di correzione
Non si svolge tutti gli anni	Si svolge regolarmente ogni anno
Consentito l'utilizzo della calcolatrice e del formulario se non espressamente dichiarato il contrario	Vietato l'uso sia della calcolatrice sia del formulario
Maggiore importanza allo svolgimento, al procedimento, al calcolo	Maggiore importanza al processo cognitivo coinvolto
Situazioni più focalizzate sul processo di matematizzazione verticale che su quello orizzontale	Ruolo centrale del processo di matematizzazione orizzontale, prove vicine alla realtà

Figura 1. Prove Cantonali e Invalsi a confronto

5. La somministrazione incrociata delle prove di valutazione esterna

Il cuore della ricerca è stata la somministrazione incrociata delle prove. Gli studenti italiani di seconda e terza media hanno affrontato la Prova Cantonale ticinese della classe seconda e gli studenti ticinesi di terza media hanno risposto ai quesiti della Prova Nazionale Invalsi delle classi terze (entrambe relative all'a.s. 2010-2011). Non si è potuto far svolgere prove programmate per lo stesso anno scolastico, essendo predisposte dai paesi ad anni alterni: le Prove Cantonali si svolgono in seconda e quarta media, le Prove Invalsi in prima e terza.

Si sono scelte le prove di terza italiane che rappresentano non solo un controllo dell'andamento scolastico, ma anche una prova conclusiva del segmento dell'istruzione media in Italia e le prove di seconda ticinesi, prove svolte prima della suddivisione degli studenti nei corsi A e B.

Le somministrazioni in Italia sono state svolte tutte nel mese di aprile e dunque gran parte del programma di seconda era già stato svolto, ma occorre tener conto che il programma di seconda ticinese è molto più simile alla tradizionale programmazione didattica italiana di terza e diversi professori non si sono sentiti di somministrare un test per il quale lo studente non aveva una preparazione sufficiente, per questa ragione in alcune scuole si è scelto di svolgere le prove nelle classi terze. La somministrazione in classi diverse si è poi rivelata molto utile per valutare l'evoluzione delle competenze nel passaggio dalla seconda alla terza media.

Dalla fine di aprile a inizio maggio si sono effettuate le prove in Canton Ticino. I docenti si sono dimostrati ben disposti a partecipare e, contrariamente a quanto avvenuto in Italia, le richieste di partecipazione alla somministrazione sono state talmente tante che in certi casi per motivi pratici si è dovuto rifiutare.

6. Metodologia

La prova in ogni classe si è svolta rispettando le modalità operative con le quali veniva attuata nello specifico Paese, si è cercato cioè di riprodurre una condizione simile a quella vissuta dai ragazzi svizzeri o italiani che avevano già affrontato il test. In Italia gli studenti sono stati fatti suddividere in più file, sono stati consegnati i testi, è stato elencato quali strumenti erano consentiti e si è iniziata la prova. Il tempo a disposizione è stato quello previsto dalla prova svizzera: 100 minuti.

In Ticino è stato puntualizzato che non era possibile utilizzare né calcolatrici né formulari, si è letto insieme il foglio di istruzioni allegato al fascicolo, si è sottolineato che per ogni item c'era una sola risposta esatta e infine si è iniziata la prova. Il tempo a disposizione è stato di 75 minuti, esattamente come indicato dall'Invalsi.

Anche in questo caso gli unici aiuti concessi sono stati quelli di rilettura e comprensione del testo. In alcune classi però l'insegnante ha insistito perché, secondo l'abituale prassi d'aula, gli studenti potessero usufruire del formulario. In questi casi non si è contraddetto il docente, ma confrontando i risultati delle classi che hanno affrontato la prova con e senza formulario si è potuto notare che, dove era stato vietato, alcuni item hanno testimoniato una scarsa conoscenza delle formule del calcolo dell'area di alcune basilari figure geometriche piane.

6.1. Campione di riferimento

In Italia le prove sono state somministrate in tre sedi diverse per un totale di dieci classi: sei seconde e quattro terze. Gli studenti coinvolti sono stati 199: 123 di seconda e 76 di terza. Geograficamente le sedi scolastiche, per motivi pratici, sono tutte appartenenti al Nord Italia, in particolare Emilia-Romagna e Lombardia.

In Ticino hanno partecipato tre sedi differenti di scuola media, geograficamente concentrate nel centro del cantone. Le classi coinvolte sono state dieci, per un totale di 134 studenti: 85 dei corsi A e 47 dei corsi B.

6.2. Correzione delle prove

I test, una volta raccolti, sono stati corretti seguendo rigidamente le linee guida della «Griglia di correzione di matematica» della Prova Nazionale dell'Invalsi e il documento «Risultati e indicazioni per la valutazione» delle Prove Cantonali. I dati sono stati raccolti in tabelle ed elaborati in un foglio elettronico. Ogni insegnante ha ricevuto il feed-back della prova della sua classe, con indicazione del successo o insuccesso per item, voto finale in decimi e in sesti. La scala valutativa è infatti differente nei due paesi: in Svizzera in note da 1 a 6 con sufficienza al 4, in Italia con voti da 1 a 10 e sufficienza pari a 6. Le uniche «mezze» note ammesse in Svizzera sono teoricamente il 4,5 e il 5,5, ma nella pratica viene abitualmente considerato anche il 3,5.

7. Analisi statistica dei dati

Le percentuali di riuscita per item o situazioni sono riportate nei grafici seguenti dove sono presenti, per consentire un confronto generale immediato, rispettivamente i risultati degli studenti italiani di seconda e terza e degli studenti ticinesi di terza corso A e corso B. I dati delle prove ticinesi svolte in Italia sono stati confrontati con i dati ticinesi dell'intero Cantone e, analogamente, quelli delle prove italiane svolte in Ticino sono stati confrontati con i dati statistici dell'intera rilevazione italiana.

7.1. La prova Cantonale nelle classi seconde e terze italiane

Ricordiamo che la prova Cantonale in Italia è stata affrontata sia dalle classi seconde sia dalle classi terze a causa della differente programmazione didattica del secondo anno del segmento medio che aveva suscitato perplessità nei docenti. Grazie a questo, però, si è potuto vedere come cambia il livello di competenza degli studenti italiani nel corso di un anno, ossia dalla seconda alla terza media.

Il primo grafico (fig. 2) riporta la percentuale di successo per ogni item (cinque in totale) o sotto-item della prova Cantonale svolta dalle classi seconde e terze italiane (prima e seconda barra) e dalle seconde ticinesi (terza barra).

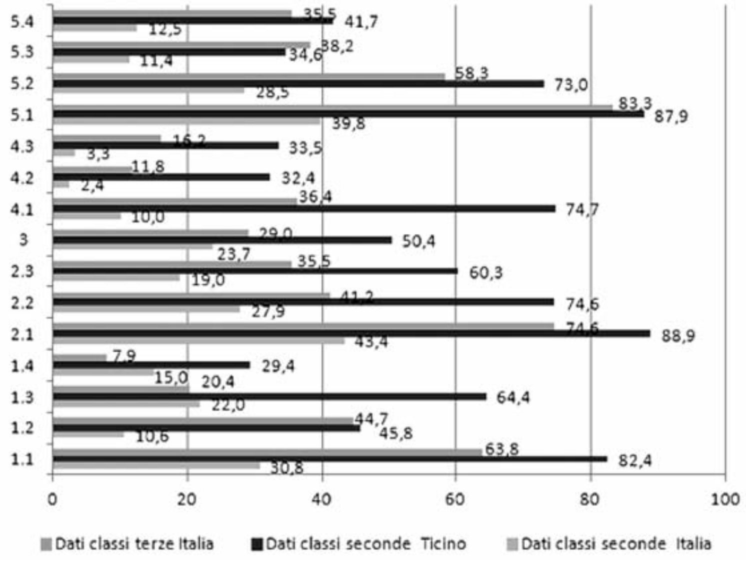


Figura 2. Confronto delle percentuali di successo in Ticino e in Italia sugli item della Prova Cantonale

Si può notare che quasi in ogni item[11] la percentuale di riuscita italiana è inferiore a quella svizzera, sia che si tratti di classi seconde o terze.

Confrontando le percentuali, il test cantonale, che si svolge in Ticino in seconda, ha ottenuto per gli italiani una percentuale di riuscita del 40% nelle terze e solo del 20% nelle seconde, contro un successo del 58% per le seconde ticinesi. Sono stati solo 18 studenti su 123 nelle seconde e 32 su 76 nelle terze a raggiungere la sufficienza, rispettivamente il 14,6% e il 42,1%. Indagando le cause di simili risultati è emerso che queste basse percentuali sono dovute in larga parte, non solo a errori compiuti dai ragazzi durante lo svolgimento del test, ma anche a una mancata conoscenza degli elementi necessari allo svolgimento degli item. Dall'analisi delle prove sembrerebbe che questo scarso successo, almeno per le seconde, sia dovuto al fatto che gli argomenti svolti nelle seconde ticinesi sono in Italia tradizionalmente affrontati in terza. In effetti, la percentuale di riuscita degli studenti di terza è maggiore, anche se ancora relativamente bassa. Sono infatti tantissime le risposte lasciate completamente in bianco così come era già stato previsto dai docenti stessi.

11. I testi della prova Cantonale sono reperibili agli indirizzi:
http://www3.ti.ch/DECS/sw/temi/scuoladecs/files/private/application/pdf/4269_2011_Prova_Cant_Mate_Seconda_Fila_1.pdf
http://www3.ti.ch/DECS/sw/temi/scuoladecs/files/private/application/pdf/4269_2011_Prova_Cant_Mate_Seconda_Fila_2.pdf.

I grafici che seguono rappresentano la frequenza assoluta sul totale del punteggio delle prove somministrate nelle classi seconde e terze italiane.

I grafici riportano in ordinata i punteggi raggiunti dagli studenti e in ascissa la frequenza del punteggio. Sono inoltre riportate moda, media e mediana per ogni classe.

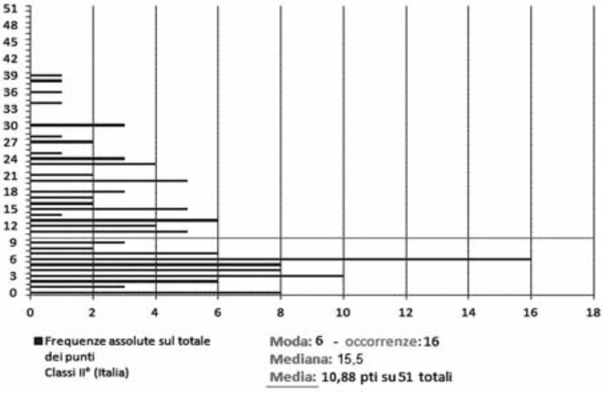


Figura 3. Frequenze assolute sul totale dei punteggi per le classi seconde italiane

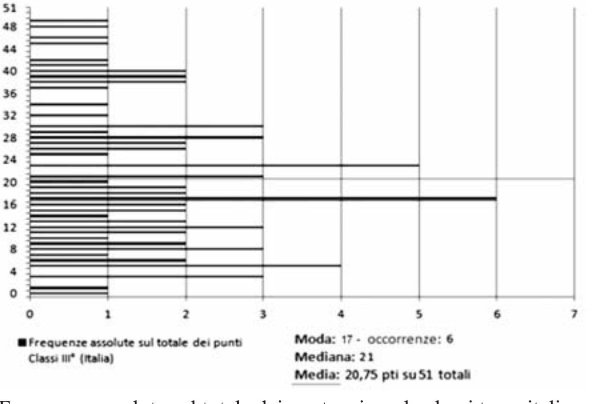


Figura 4. Frequenze assolute sul totale dei punteggi per le classi terze italiane

Il punteggio massimo raggiungibile nella prova era di 51 punti; punteggio che non è stato raggiunto da nessun alunno. I punteggi massimi sono stati rispettivamente di 39 e 49 punti. La moda è stata di 6 punti per le seconde e di 17 per le terze, la media rispettivamente di 10,88 punti e di 20,75. Il grafico si presenta infatti molto schiacciato verso il basso nel caso delle seconde e con un andamento, per le terze, che appare più «gaussiano», nel senso che mostra come solo una piccola parte degli studenti incontra serie difficoltà o raggiunge l'eccellenza, mentre la maggior parte degli studenti si colloca in una fascia intermedia. Nel caso delle seconde, invece, la figura 3 è un campanello di allarme che richiede in primo luogo di vedere a cosa sono dovuti punteggi così bassi e in secondo luogo, se questi sono dovuti a una erronea azione didattica, che richiede un adeguato intervento. Rassicurante è però notare che nel giro di un solo anno scolastico il punteggio medio raddoppia e la situazione migliora.

7.2. La prova nazionale Invalsi affrontata dalle classi terze ticinesi

Il grafico di figura 5, strutturato analogamente al precedente, riporta i risultati degli studenti ticinesi ottenuti nella Prova Nazionale Invalsi. Si evince subito che la riuscita nella Prova Nazionale 2010-2011 sia per gli studenti italiani che per quelli svizzeri dipende molto dall'item.

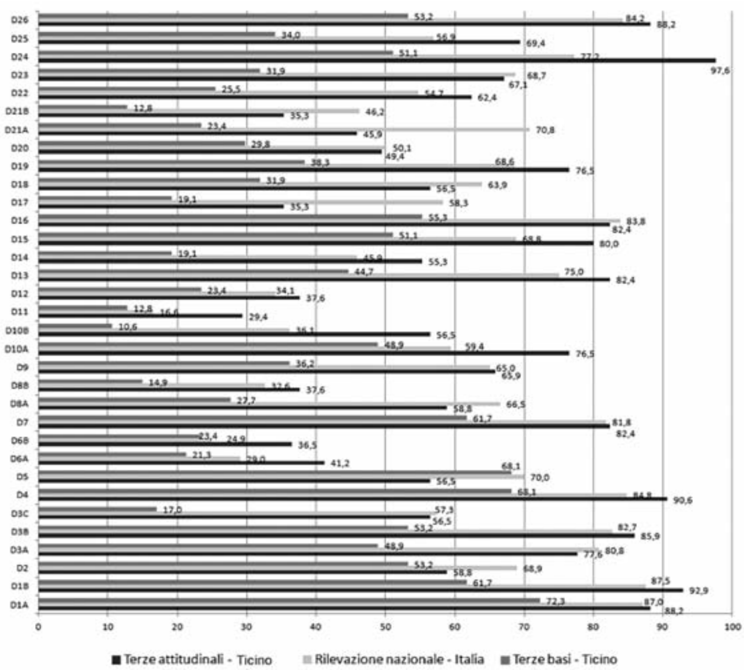


Figura 5. Grafico percentuale di confronto tra la riuscita per item della Prova Nazionale Invalsi delle terze ticinesi e delle terze italiane

Il grafico riporta in ascissa la percentuale di successo per item e in ordinata il numero che identifica l'item della prova (venti in totale articolati in certi casi con più richieste). Nella prima e nella terza barra sono riportati i dati delle classi terze ticinesi, A e B. Nella seconda barra i dati statistici di confronto italiani. A una prima lettura del grafico si vede che, considerando solamente i risultati delle classi terze A, gli unici item in cui la media nazionale italiana di riuscita non viene superata e mantiene un certo distacco sono D2, D3A, D5, D8A, D17, D18, D21A e D21B.[12] Le classi terze B invece rimangono costantemente su livello percentuale molto più basso. Le percentuali di riuscita per i corsi A è stata in media del 64%, per i corsi B del 38%. Dunque, i risultati sono in linea con quanto si aspettavano i docenti ticinesi, anche se in alcuni casi studenti dei corsi B hanno svolto la prova raggiungendo punteggi superiori rispetto a certi loro compagni dei corsi A. Nel complesso però, mediando i dati dei corsi A e B, le percentuali che si ottengono sono più o meno analoghe a quelle delle terze italiane, 50,8% ticinese contro il 56,1% italiano. Questo confronto è sottolineato nel gra-

12. I testi di questi item e della Prova Invalsi 2010-2011 sono reperibili all'indirizzo: http://www.invalsi.it/snv1011/

fico seguente (fig. 6) dove i risultati di tutte le terze ticinesi, A e B insieme, sono facilmente confrontabili con quelli delle terze italiane.

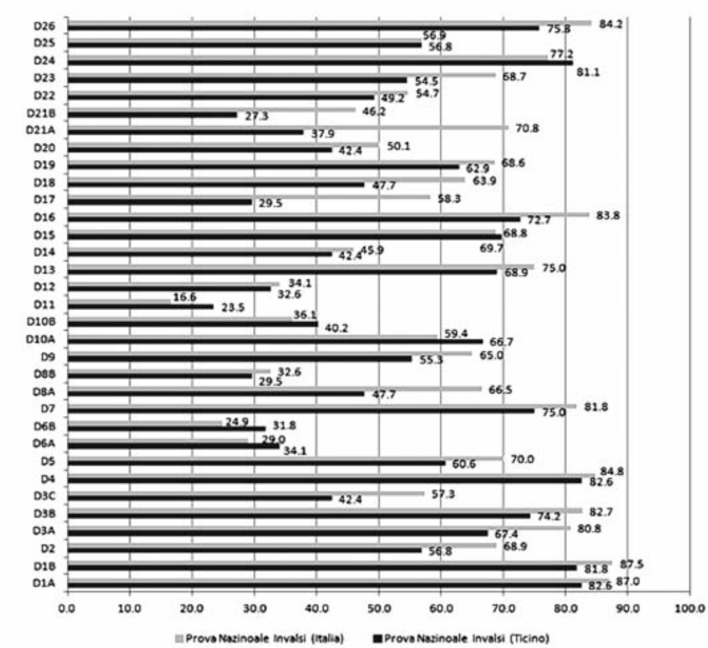


Figura 6. Grafico percentuale di confronto tra la riuscita per item della Prova Nazionale Invalsi delle terze A e B ticinesi e delle terze italiane

I grafici che seguono rappresentano la frequenza assoluta sul totale del punteggio delle prove somministrate nei corsi A e nei corsi B.

I grafici riportano in ordinata i punteggi raggiunti dagli studenti e in ascissa la frequenza del punteggio. Sono inoltre riportate moda, media e mediana.

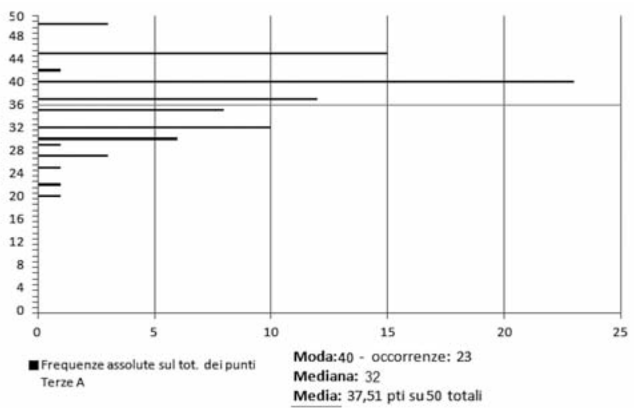


Figura 7. Frequenze assolute sul totale dei punteggi per le classi terze A ticinesi

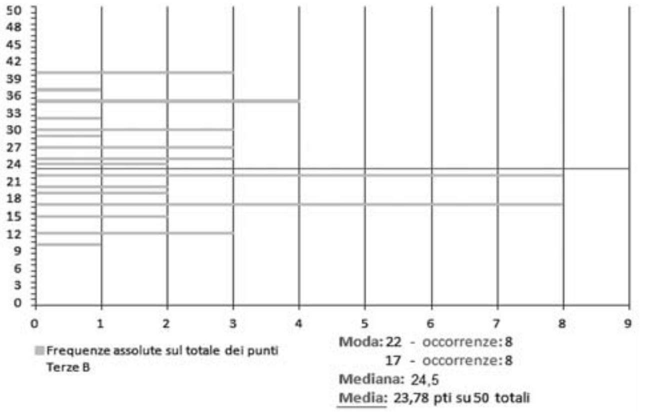


Figura 8. Frequenze assolute sul totale dei punteggi per le classi terze B ticinesi

Il primo dei due grafici precedenti si riferisce ai corsi A, il secondo ai B. Il punteggio massimo raggiungibile era di 50 punti. Il punteggio massimo raggiunto nelle terze A è stato di 49 punti, nelle terze B di 40. Il grafico relativo alla terze B è bimodale, con mode di 17 e 22 punti, mentre la moda per le terze A è 40.

Le medie sono rispettivamente per i corsi A e B: 37,51 e 23,78 punti (su 50).

Non ci sono punteggi estremamente bassi in nessun caso: l'andamento delle frequenze dei corsi B è raggruppato in una fascia di punteggio medio [11,40], quello dei corsi A in un intervallo di punteggi molto elevato [20,49]. I punteggi, riportati in figura 7, appaiono come concentrati nella parte superiore del grafico e presentano un comportamento leggermente anomalo ma comprensibile dato che è proprio la classe di tipo A che riunisce in sé quegli studenti che dimostrano di possedere una migliore attitudine per la matematica.

Il grafico testimonia una situazione migliore di quella italiana, dato che manca completamente la fascia dei punteggi più bassi (<10).

Questo studio però non vuole limitarsi a una lettura di tipo quantitativo, perciò vogliamo analizzare qualitativamente alcuni item significativi.

7.3 Analisi didattica specifica di alcuni item

Di seguito sono stati analizzati tre item ritenuti particolarmente significativi, due della Prova Invalsi (D6 e D11)e uno della Prova Cantonale (item 3).

La tabella relativa all'item 3 della Prova Cantonale non riporta la percentuale di risposte omesse perché l'Ufficio statistico cantonale, che ha elaborato i risultati, non ha previsto questa particolarità. Ciò ha impedito di effettuare un confronto.

	Italia (dati nazionali)		Ticino				
	% Classi 3°	*% Omesse*	*% Terze A*	*% Terze B*	*% Media 3A -3B*	*% Omesse*	
						TerzeA	*TerzeB*
D6	26.9	13.0	38.5	22.4	30.6	25.9	57.4
D11	16.6	11.8	29.4	12.8	21.1	0	4.3

Figura 9. Tabella delle percentuali di successo e delle risposte omesse per la Prova Invalsi somministrata in Ticino

	Italia			Ticino (dati cantonali)
	% Classi 2°	*% Classi 3°*	*% 2° e 3°*	*% Seconde*
Item 3	23.7	29.0	26.4	53.4

Figura 10. Tabella delle percentuali di successo per la Prova Cantonale somministrata in Italia

Ricordiamo che i dati delle prove ticinesi svolte in Italia sono stati confrontati con i dati ticinesi dell'intero Cantone e, analogamente, quelli delle prove italiane svolte in Ticino sono stati confrontati con i dati statistici dell'intera rilevazione italiana. Di conseguenza i protocolli che seguono sono da attribuirsi a studenti svizzeri se la prova è quella nazionale dell'Invalsi, a studenti italiani se la prova è Cantonale.

7.3.1. Analisi degli item D6 e D11 della prova Nazionale Invalsi

Item D6 – Prova Nazionale Invalsi

L'item richiedeva di ricavare con un righello le misure necessarie per determinare l'area di un triangolo scaleno già disegnato sul fascicolo.

L'item è risultato difficile per il Ticino, come si può vedere in tabella (fig. 9), la media di risposte corrette per il corso A è stata del 38,5% mentre quella per il corso B del 22,4%. Nei corsi A, non hanno risposto 12 studenti su 85, nei corsi B 15 su 47. Nonostante ciò, nei corsi A, si è raggiunta una percentuale di riuscita maggiore di quella italiana (26,9%). Gli studenti hanno incontrato difficoltà raggruppabili nelle seguenti quattro tipologie:

1. Misconcezioni relative al concetto di altezza

Su un totale di 85 protocolli delle classi A ci sono state 34 rappresentazioni esatte dell'altezza rispetto al lato CB, 10 rispetto al lato AB e nessuna rispetto al lato CA. Nelle classi B invece su 47 studenti, 8 hanno rappresentato correttamente l'altezza rispetto al lato CB, 7 rispetto ad AB e anche in questo caso nessuno ha tracciato l'altezza relativa al lato CA. Tra chi ha tracciato o considerato segmenti che non sono altezze in particolare si sono evidenziate tre differenti misconcezioni già evidenziate in letteratura (Martini, Sbaragli, 2005):

i. viene considera come altezza uno dei lati, in particolare il lato CA (fig. 11);

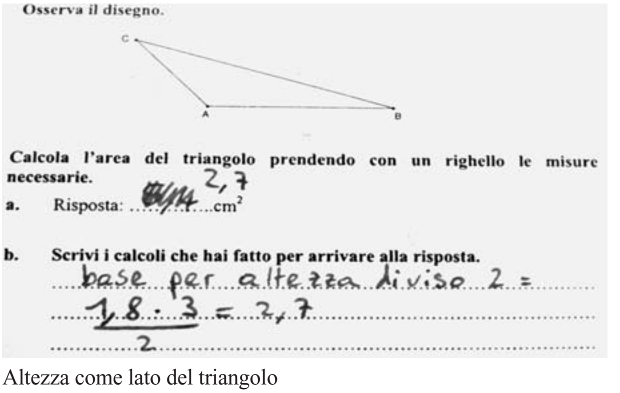


Figura 11. Altezza come lato del triangolo

ii. l'altezza è concepita come un segmento verticale, ma non è tracciato in modo da essere la distanza massima dei punti del triangolo rispetto ad una retta che contiene un lato (fig. 12);

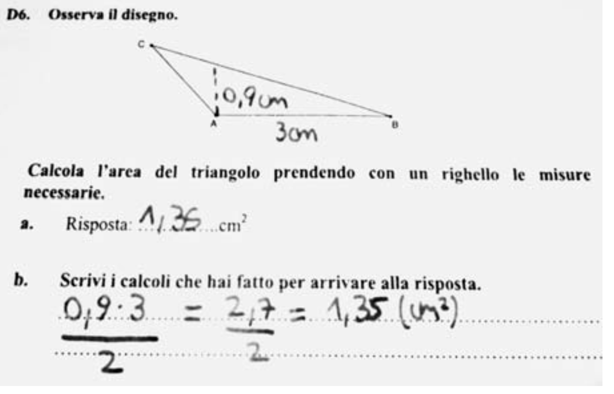


Figura 12. Altezza come segmento obbligatoriamente verticale

iii. l'altezza è quel segmento che parte da un vertice (spesso quello «in alto») e arriva sul lato opposto tagliandolo a metà.

Alcuni studenti, 10 su 85 del corso A e 8 su 47 del corso B, non hanno rappresentato alcuna altezza ma hanno comunque risposto correttamente all'item. Questi protocolli possono essere riconducibili a fenomeni di comunicazione tra i ragazzi o alla prassi purtroppo diffusa di utilizzare la superficie del banco per svolgere i calcoli e riportare esclusivamente il risultato.

2. Difficoltà di calcolo con numeri decimali e radici

Questa difficoltà è stata riscontrata in 10 studenti su 85 delle classi A e in 4 su 47 nelle B.

3. Mancata conoscenza della formula dell'area di un triangolo

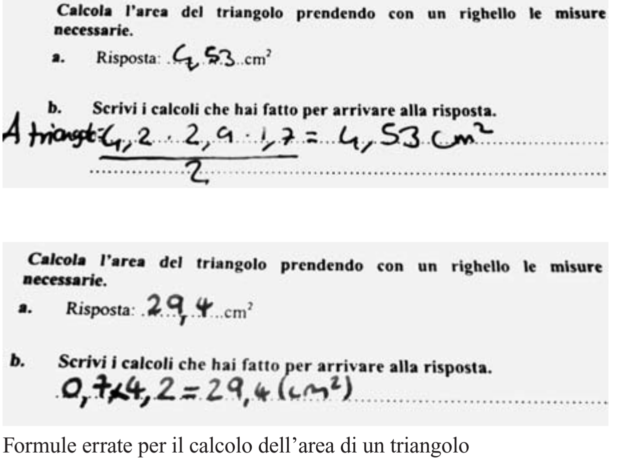


Figura 13 (a,b). Formule errate per il calcolo dell'area di un triangolo

I protocolli riportati testimoniano una mancata conoscenza della formula per il calcolo dell'area del triangolo. In diversi protocolli, inoltre, manca un momento di controllo tipico della fase di matematizzazione orizzontale, ossia il chiedersi se quanto trovato matematicamente attraverso il modello è in accordo con quanto quotidianamente sperimentato (matematica → realtà). In (13b) il risultato di 29 cm^2 rappresenta un'area addirittura superiore a quella dello spazio occupato dal testo dell'intero item.

Una possibile spiegazione relativa alle formule sbagliate per il calcolo dell'area può essere trovata nel divieto dell'uso del formulario durante la prova Invalsi contrariamente a quanto sono abituati a fare nella prassi d'aula ticinese. In certi alunni questo fatto ha suscitato immediate reazioni, in altri casi una specie di panico da assenza del formulario.

Errori riconducibili a una mancata conoscenza della formula dell'area del triangolo sono stati riscontrati in 8 prove su 85 delle classi A e in 4 prove su 47 delle classi B.

4. Automatismi del tipo «applico il teorema di Pitagora essendoci un triangolo»

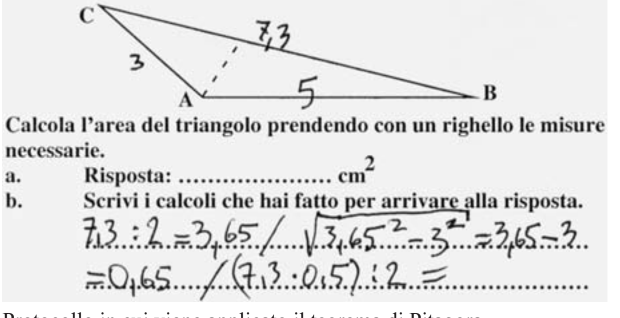


Figura 14. Protocollo in cui viene applicato il teorema di Pitagora

In questo item lo studente applica il teorema di Pitagora pur non trattandosi di un triangolo rettangolo e pur essendo libero di determinare la lunghezza di ogni segmento della figura con il righello. Nel calcolo sbaglia clamorosamente nell'operare con le radici. Questa scelta è stata fatta da 5 studenti su 85 nei corsi A e in 3 studenti su 47 nei corsi B.

Item D11 – Prova Nazionale Invalsi

L'item D11 chiedeva di giustificare se, nella situazione in cui tre ragazzi (Marco, Livia, Lorenzo) scelgono chi laverà i piatti lanciando due volte una moneta, la probabilità di vincere per ognuno dei tre partecipanti è la stessa se Marco li lava quando escono due croci, Livia quando escono due teste e Lorenzo se esce una volta croce e una volta testa.

Le percentuali di riuscita per l'Italia e il Ticino sono rispettivamente del 16,6% e 21,1%.

Nonostante in Ticino non tutte le classi terze (A e B) avessero affrontato l'ambito della probabilità, alcune risposte sono risultate corrette. Tra queste è possibile vedere come gli studenti abbiano cercato di motivare e comunicare al lettore il motivo che li ha portati a optare per l'una o l'altra scelta. Tutti gli studenti, eccetto 2 dei corsi B, hanno risposto al quesito. Molti però, pur non lasciando in bianco l'item, non hanno dato valide giustificazioni della risposta, limitandosi a riportare parti della consegna o risposte del tipo: *«Perché sì»*. In questa categoria rientrano 8 ragazzi dei corsi B e 11 dei corsi A.

Le risposte all'item D11 possono così essere raggruppate in più tipologie. Tra chi ha dato una risposta corretta (25 studenti su 85 dei corsi A e 6 su 47 dei corsi B):

1. Giustificazione data nel solo registro della lingua comune:

«È meno probabile che li laveranno Marco e Livia perché c'è meno possibilità che viene lo stesso segno.»

La maggior parte degli studenti si è limitata a giustificare la risposta a parole: 14 studenti su 85 nei corsi A e 4 su 47 nei corsi B.

2. Giustificazione della risposta facendo uso di altri registri semiotici oltre a quello della lingua comune

In questo caso le giustificazioni (fig. 15) sono caratterizzate dalla presenza di schemi e rappresentazioni grafiche nelle quali, con l'aiuto di colori, frecce e simboli, gli allievi argomentano correttamente la loro opinione (apprendimento semiotico e comunicativo).

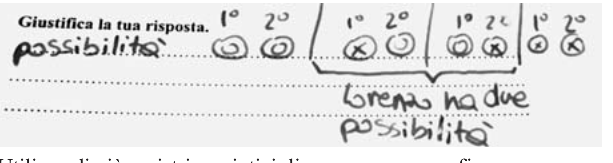


Figura 15. Utilizzo di più registri semiotici: lingua comune, grafico, …

Fra tutti gli studenti dei corsi A, 5 hanno risolto l'item elencando tutte le situazioni possibili, non limitandosi al registro semiotico della lingua comune; nessuno nei corsi B.

3. Giustificazione nel registro della lingua comune che evidenzia una visione strategico-procedurale

La nozione di probabilità necessaria per rispondere all'item era quella classica del rapporto «casi favorevoli su casi possibili» ma, come testimonia il protocollo seguente, era possibile rispondere al quesito in modo intuitivo senza rifarsi a questo sapere.

«La probabilità non è la stessa, perché al primo lancio Marco e Livia hanno il 50% di probabilità mentre a Lorenzo non cambia se esce testa o croce – il secondo lancio o Marco o Livia è già escluso mentre Lorenzo è ancora in gioco.»

Questo esempio testimonia una immedesimazione dello studente nella situazione proposta: deduce che il gioco non è equo mediante uno studio passo per passo. Tale analisi è stata fatta da 6 studenti su 85 dei corsi A e da 2 su 47 studenti dei corsi B. Le categorie possibili che emergono tra chi ha dato una risposta scorretta sono:

– Lettura fisica della moneta in rotazione
(tipologia di lancio, peso, rotazione…)

«Perché dipende da quanto si lancia in alto e dalla velocità non si può calcolare se esce testa o croce, devi avere fortuna.»

«Dipende dalla posizione di partenza della moneta (cioè se è molto verso l'alto dalla parte della testa o dalla parte della croce), dato che gira di 180° per le stesse volte.»

Gli studenti analizzano dal punto di vista fisico la moneta in rotazione in aria deducendone che, date le innumerevoli variabili in gioco, è impossibile stabilire come questa cadrà. 8 studenti su 85 dei corsi A e 2 su 47 nei corsi B hanno guardato «fisicamente» l'item.

– Mancanza della formula

«Perché non puoi sapere cosa si deve fare per far uscire testa o croce. Non c'è una formula.»

In questa tipologia di risposta è presente l'idea che la matematica si esaurisca in un insieme di formule da utilizzare a seconda dei casi che si possono verificare.Per questi studenti la matematica esiste solo nella dimensione algoritmico-applicativa dove si manifesta con la presenza di formule da applicare e non nella ricerca di una strategia risolutiva. Questa tipologia si è riscontrata in 4 studenti, 2 dei corsi B e 2 dei corsi A.

– Concetto errato di probabilità
Sono tre le misconcezioni individuabili:

1. *«Se chi tira la moneta non bara, a ogni lancio c'è sempre la stessa possibilità che esca testa o croce.»*

Il ragionamento di questo alunno è stato fatto su un lancio di una sola moneta e non su due. Rientrano in questa categoria 12 studenti su 85 dei corsi A e 10 su 47 dei corsi B.

2. *«Perché se tiri la moneta due volte sicuramente solo due laveranno i piatti, perché ci sono due possibilità di tirare la moneta, mentre se fossero state tre possibilità allora tutti avrebbero lavato i piatti.»*

Qui l'idea dello studente è la seguente: in un gioco con *n giocatori* e *n* possibili *eventi* la probabilità si distribuisce equamente su 2n possibilità. Lo si vede anche nel seguente protocollo: *«Hanno tutti il 100/6 di percentuale di vincita»*

Come già aveva evidenziato Fischbein (1975) nelle sue prime ricerche in questo campo, molti studenti sono incapaci di risolvere questioni di probabilità perché non riescono ad attribuire una struttura razionale a una situazione aleatoria, cioè per loro il caso, per sua natura, è un fattore che «uguaglia» le probabilità.

Fra gli 85 studenti dei corsi A questa misconcezione è stata riscontrata in 10 casi, tra i 47 studenti dei corsi B in 6. Tra i 10 studenti dei corsi A, 2 in particolare non sono stati in grado di accettare come singolo evento il lancio simultaneo di due monete. Di conseguenza si sono ritrovati a dover gestire sei diversi ipotetici eventi.

3. Nei corsi B 3 studenti su 47 e nei corsi A 2 su 85 argomentano sostenendo che ogni ragazzo ha il 50% di probabilità, andando incontro all'assurdo che la somma delle probabilità dei tre eventi possibili supera l'unità:

«Perché è il 50% che viene testa, il 50% che viene croce e il 50% che viene una volta testa e una volta croce.»

4. Il ruolo del fattore fortuna o destino

«Perché il destino non si può calcolare. Non si può sapere.»

Molti studenti hanno associato la parola destino alla parola probabilità, sostenendo che alla richiesta della situazione non si può rispondere perché non è possibile affermare chi dei tre ragazzi lava i piatti. Il testo però non chiedeva questo. Chiedeva, motivando la risposta, di affermare se tutti avessero o no la stessa probabilità.

Da qui la comparsa dell'effetto fortuna tra le risposte.

«Perché, secondo me, è solo il destino che sceglie, può uscire una testa e una croce, è un po' più probabile, ma potrebbero anche uscire due croci o due teste, perciò tutti hanno la stessa probabilità.»

In questo esempio, a conferma di quanto detto, lo studente ha intuito che la combinazione testa-croce è più probabile ma la contraddice facendo 'vincere' l'elemento destino. Parole come destino, fortuna e caso sono presenti in 15 prove su 85 per i corsi A e in 6 su 47 per i corsi B.

7.3.2. Analisi dell'item 3 della prova Cantonale

Item 3 – Prova Cantonale

L'item 3 della prova cantonale chiedeva a partire da una figura data (contorno di un vaso) di calcolarne l'area. Il modo più semplice per individuare l'area della figura era quello di ricavarla come somma tra l'area di un cerchio e l'area rimanente da un quadrato, una volta sottratta l'area di un triangolo e di due settori circolari in esso contenuti. Le percentuali di riuscita sono state analogamente basse sia per le seconde che per le terze italiane, 23,7% e 29%. Le richieste vertevano infatti sulla conoscenza delle formule del cerchio, parte consistente del programma della classe terza in Svizzera ma più marginale in Italia. La percentuale di non risposta è stata elevata, per le seconde del 56,3% e per le terze del 48,5%. Gli studenti di terza italiani che hanno affrontato l'item hanno commesso più che altro errori di calcolo (26 studenti su 76).

Dal punto di vista degli apprendimenti in matematica invece, è stato interessante notare come alcuni studenti di seconda media fossero consapevoli dalla strategia da utilizzare ma, non avendo le conoscenze matematiche necessarie per calcolare, poiché ancora il cerchio non era stato affrontato in classe, abbiano scelto di scrivere a parole quali fossero i passi necessari da compiere per arrivare alla soluzione (apprendimento comunicativo e strategico). Tra le spiegazioni pervenute particolarmente interessanti sono le seguenti:

1. Linguaggio misto con parole della quotidianità

«Ho trovato l'area del quadrato, poi ho tolto le 'fette' in più e le ho aggiunte alla 'pancia' del vaso e poi ho fatto –3»

In questo protocollo lo studente utilizza un linguaggio misto con parole che rientrano nel linguaggio geometrico e altre nel linguaggio della quotidianità come 'fette' e 'pancia', che rendono in parte l'idea del percorso strategico risolutivo che l'alunno intendeva intraprendere. In questa categoria rientrano le risposte date da 2 studenti di seconda su 123.

2. Linguaggio misto con visione procedurale

«Devo calcolare l'area del quadrato e del cerchio, anche quelli più piccoli e poi togliere un pezzo dal quadrato in mezzo più piccolo.»

Nelle poche righe sopra riportate, non sono più presenti termini come 'fette', 'pancia' o 'vaso' che esulano completamente dal registro matematico. Il linguaggio qui impiegato dall'allievo è più specifico, vengono citati in maniera opportuna i termini geometrici riconosciuti in figura (quadrato, cerchio, area, ...). Non è noto il termine 'settore circolare', ma la descrizione del ragionamento seguito è ben presente nella sequenza di azioni da compiere per calcolare l'area voluta (calcolare, togliere). Un aspetto procedurale è riscontrabile in 3 dei 123 protocolli relativi agli studenti di seconda.

3. Linguaggio matematico e lingua comune

«Calcolo l'area di ABCD (lato per lato)
Calcolo l'area di PCN (base per altezza diviso 2)
Calcolo l'area di PQ (raggio per raggio per 3,14 diviso 4)
Calcolo l'area di NM (raggio per raggio per 3,14 diviso 4)
Calcolo l'area di QM (raggio per raggio per 3,14 diviso 4 per 3)
Area = QM + [ABCD – (PCN + PQ + MN)]»

Risultano interessanti i protocolli di 2 studenti di terza che sentono la necessità di riscrivere ogni formula utilizzata in lingua comune. Nel protocollo precedente l'alunno ha svolto correttamente l'item (dove ha indicato con due lettere maiuscole l'area di settori circolari), ma ha anche scritto per ben cinque volte in lingua comune quello che poteva essere espresso analogamente nel registro algebrico.

4. Approssimazioni e strategie alternative

Tra i diversi percorsi risolutivi il più 'curioso' riscontrato è stato quello di approssimare l'area di un settore circolare con l'area di un triangolo e l'area della figura data con l'area di un quadrato. Hanno compiuto approssimazioni simili 11 alunni di terza su 76. Interessante è stata la risoluzione di uno studente di terza che ha effettuato una scomposizione alternativa della figura e relazioni tra alcune sue parti e parti del quadrato.

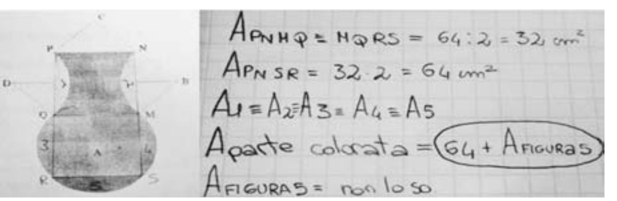


Figura 16. Strategia risolutiva alternativa

Nonostante la buona intuizione, l'allievo si è però bloccato nel calcolo dell'area di un segmento circolare: «*Area figura 5 = non lo so*».

Nelle classi seconde pochi studenti hanno affrontato l'item e molti di quelli che l'hanno fatto si sono poi fermati dopo aver calcolato l'area del quadrato o tratto immediate considerazioni dalla figura riportata sul fascicolo (48 studenti su 123).

8. I docenti e le prove valutative di tipo esterno

Attraverso l'analisi delle risposte di un questionario per gli insegnanti, che è a disposizione per chi desidera consultarlo, si è cercato di capire come queste prove di valutazione sono utilizzate all'interno della classe, cosa i docenti ne pensano e come secondo loro lo studente reagisce a prove così diverse rispetto agli abituali compiti di verifica. L'idea generale che se ne è potuto trarre, è stata la seguente: la maggior parte degli insegnanti è a conoscenza delle finalità delle prove e le sfrutta all'interno della classe ma, a volte, nella scala delle loro priorità, l'analisi di un test di valutazione esterna viene scavalcata da altre azioni della quotidianità di classe. Si dedica molto più tempo alla preparazione necessaria per affrontare la prova che alla sua analisi, in Italia in misura maggiore rispetto al Ticino.

Sembra dunque che per alcune classi manchi un momento post-prova, ben pensato e strutturato, che permetta di apprendere o consolidare gli elementi presenti nelle situazioni affrontate. Un momento che potrebbe invece essere importante per aiutare a condurre un'azione didattica mirata al rafforzamento dei punti deboli evidenziati e permetterebbe agli studenti di dare risposta alle domande lasciate in sospeso.

Si può affermare che nel complesso la maggior parte degli insegnanti accetta di buon grado le valutazioni esterne. Di questi però una parte sembra viverle subendole passivamente senza cioè trarne i benefici che potrebbe. Particolare è il caso di molti docenti svizzeri che vedono nelle prove esclusivamente lo strumento che la Divisione Scuola usa per controllare quanto la situazione reale dell'insegnamento-apprendimento si discosta da quella ideale, quanto le conoscenze degli studenti si avvicinano a quelle previste dal Piani di Formazione della scuola media. L'idea della prova di valutazione esterna come mezzo per autoregolarsi nell'azione didattica appare meno diffusa in Ticino. Al contrario in Italia si presenta più spesso il fenomeno di preparazione quasi meccanica e ripetitiva dello studente alla prova. Nel senso che gli studenti in Svizzera vengono preparati sui possibili contenuti dei test e non specificatamente al meccanismo e alla struttura con cui si presentano. Gli insegnanti italiani cercano invece di rendere le prove Invalsi familiari al maggior numero di studenti possibile. A questo proposito bisogna tenere conto che la Prova Cantonale si è dimostrata ordinaria per lo studente italiano, mentre la prova Invalsi in Ticino ha suscitato stupore e piacere perché a risposta chiusa e caratterizzata da tratti nuovi e insoliti. Le prove cantonali hanno un aspetto molto più simile alle prove interne di quanto abbiano invece le prove Invalsi.

Un buon gruppo di insegnanti, quindi, sia in Italia che in Ticino, vede nelle prove di valutazione esterne uno stimolo, una proposta positiva, ma rimane diffusa l'idea che queste abbiano come scopo quello di valutare l'insegnante. Diversi docenti ticinesi sostengono che gli studenti affrontano i test non dando loro il giusto peso e con il giusto grado di consapevolezza. Per questa ragione, molti docenti per aggirare il problema scelgono di utilizzarli nella valutazione individuale dello studente. In Italia, nel caso della Prova Nazionale, il problema non si presenta perché ogni allievo, dato che la prova contribuisce per 1/7 al voto dell'Esame di Stato, è direttamente interessato a svolgerla al meglio delle sue possibilità. Nel caso di valutazioni condotte in classi diverse dalla terza invece può capitare che i test non vengano ugualmente affrontati con il medesimo impegno.

9. Breve conclusione

La somministrazione incrociata effettuata in questa ricerca, per quanto limitata a un campione di studenti modesto, ha consentito di cogliere alcune informazioni sui tipi di valutazione esterna adottati in entrambi i paesi e su alcune difficoltà riscontrate dagli allievi. L'analisi ha fatto emergere punti di forza per l'uno e l'altro paese, ma anche alcune debolezze. In generale, il Ticino, realtà più piccola e ricca, ha avuto percentuali di successo globalmente migliori rispetto a quelle italiane per i corsi A e globalmente inferiori per i corsi B. Rimangono però anomale, per il Cantone, alcune prove dei corsi B, risultate migliori di certe dei corsi A.

Un'indagine successiva potrebbe essere quella di andare a indagare se ci sono modalità o strategie di insegnamento di successo per apprendimenti in cui il Ticino si è rivelato più forte dell'Italia e viceversa o se modificando l'azione didattica degli insegnanti si ha una modifica nei risultati. Si è visto infatti che non solo la lingua, la cultura e le tradizioni sono simili, ma anche alcune difficoltà che si incontrano negli ultimi anni del segmento medio. Difficoltà vissute da un numero molto più consistente di studenti italiani che ticinesi.

Dalle interviste realizzate agli insegnanti è emerso che gli italiani sono più aperti, favorevoli e uniti nel sostenere le valutazioni esterne, ma divisi nel modo di utilizzarle e sfruttarle in classe. In Ticino, al contrario, il corpo docente è costituito da due opposti schieramenti: «nuovi» insegnanti favorevoli a sperimentazioni e prove di valutative esterne e insegnanti in servizio da molti anni ancorati all'idea della valutazione esclusiva del docente. Riteniamo importante un'azione specifica sui docenti per consentire una rivalutazione didattica delle valutazioni esterne.

In effetti, siamo convinti che ogni paese abbia bisogno di questo tipo di valutazione e di questo tipo di confronti se vuole investire su un'istruzione di qualità. Attraverso le valutazioni esterne è infatti possibile avere un'immagine riflessa del sistema di istruzione e, attraverso il confronto, guardare questa immagine in modo ancora più ragionato e consapevole: *«una carenza di cultura della valutazione può penalizzare nei confronti internazionali. La sua priorità non è quella di punire o premiare. La valutazione ci consente di guardarci oggettivamente per misurare i punti di forza e debolezza e poi migliorare»*.[13]

La tematica della valutazione e del monitoraggio del proprio sistema di istruzione sta diventando per questo sempre più importante in entrambi gli Stati. Il processo è però ancora in una fase di assestamento tra le varie parti coinvolte: istituzioni, insegnanti, studenti, società, ... per questo occorre rifletterci con sempre maggiore forza e consapevolezza.

---

13. Dichiarazione del Ministro dell'Istruzione italiano F. Profumo, 9 maggio 2012, http://www.orizzontescuola.it/news/e-guerra-sul-test-invalsi-interviene-il-ministro

La valutazione esterna, per quanto spesso si sostenga non necessaria, si conferma l'unica che permette la pianificazione di azioni di intervento ad ampio raggio e che fornisce un valore aggiunto alla qualità dell'istruzione dei vari paesi.

Bibliografia

Domenici G. (2007). *Manuale della valutazione scolastica*. Roma: Editori Laterza.
Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.
Fandiño Pinilla M. I. (2010). *Valutare un apprendimento matematico*. In: D'Amore B. (2010). *Matematica: didattica e avventura.* Numero speciale monografico di Vita Scolastica. 64, 18, 19-21. Firenze: Giunti.
Fischbein E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht (Olanda): D. Reidel Publishing Company.
Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica.* Napoli: Tecnodid.
Pianigiani O. (2002). *Vocabolario etimologico della Lingua Italiana*. Firenze: Ariani.
Vergani A. (2002). *La valutazione esterna delle istituzioni scolastiche e formative: alcune considerazioni introduttive*, AIV- Associazione Italiana di Valutazione.
Vertecchi B. (1995). *Decisione didattica e valutazione*. Firenze: La nuova Italia.

2. I bambini di scuola dell’infanzia confrontati con situazioni probabilistiche[1]

Larissa Bizzozero[2]

This research is focused on the educational environment and it deals with issues in the maths field. More specifically, it attempts to comprehend how young pupils react when faced with unpredictable situations which, nonetheless, can be encountered in everyday life. As emotions are part of our existence, this research aims at understanding the children’s affective reactions when they are confronted with a task whose result is uncertain. Three game-like situations and further semi-structured interviews during classes were suggested to gather the data. The analysis of these figures was carried out through the reading of protocols and the categorisation of the information.

1. Introduzione

La società odierna esige dal docente che sia un professionista del processo di insegnamento/apprendimento e, tra le competenze che gli sono richieste, si annovera anche il «saper fare ricerca» allo scopo di cercare di rispondere, in maniera attiva ed efficiente, alle situazioni che si verificano a scuola. Mi riferisco soprattutto a quei problemi che si presentano di volta in volta nei settori disciplinari e naturalmente a quegli aspetti educativi che accompagnano e guidano la crescita di ogni individuo.

Attraverso la ricerca che intendo avviare, cercherò appunto di indagare la realtà educativa nella quale tra pochi mesi sarò quotidianamente coinvolta e di studiare attraverso degli interventi un tema specifico in ambito matematico. Chiarisco che sono stata motivata ad approfondire la probabilità alla scuola dell’infanzia, senza dubbio per la passione che nutro per questo mondo e per la curiosità di comprendere come reagiscono i piccoli allievi di fronte a situazioni che non sono esattamente prevedibili, ma che nella vita reale si possono incontrare quotidianamente. E siccome la nostra esistenza è fatta di emozioni, la ricerca mira anche a studiare le reazioni affettive che i bambini hanno di fronte a un compito il cui risultato non è certo.

2. Quadro teorico

2.1. La matematica nella scuola dell’infanzia

Quando si pensa alla matematica spesso si finisce per considerarla una disciplina tecnica, ricca di termini specialistici, di equazioni, di regole e di simboli di

1. Sintesi del lavoro di diploma del corso Bachelor of arts in pre-primary education, anno accademico 2011/2012. Relatrice: Silvia Sbaragli.
2. Insegnante alla scuola dell’infanzia di Rivera (Monteceneri).

difficile decodificazione. Tuttavia la matematica non è fatta solo di «saper fare», ma è una materia che tocca anche la sfera affettiva e relazionale della persona: secondo D'Amore (1994, citato da Giovannoni, 1998) *«il mondo matematico è assai vasto e invade la vita sociale e affettiva, i giochi, i rapporti interpersonali,… qualsiasi cosa si faccia, un po' di matematica (o tanta!) c'è»*.

Un altro elemento da considerare riguarda l'uso spontaneo che si fa della matematica: infatti *«è una forma di conoscenza che si può rintracciare e scoprire in molte attività dell'uomo, pratiche o anche solo linguistiche»* (Angeli, D'Amore, Di Nunzio & Fascinelli, 2011). Pensando alle nostre quotidianità, possiamo riflettere su come la matematica viene utilizzata come valido linguaggio per esprimere con precisione certi concetti, talvolta in modo del tutto spontaneo e istintivo. Dunque anche i bambini, quando arrivano alla scuola dell'infanzia, hanno già numerose intuizioni che derivano dai loro vissuti e, a partire dalle esperienze personali a contatto con ogni tipo di ambiente (familiare, scolastico ed extra-scolastico), si costruiscono spontaneamente modelli mentali profondi che possono essere corretti o errati. Con il passare del tempo, però, i bambini devono imparare a usare i modelli che gli vengono trasmessi a scuola. Nell'ottica di un'educazione matematica più efficace, per il docente sarebbe utile conoscere i modelli mentali di ogni singolo allievo, ma ciò risulta problematico perché sono interni e difficili da tradurre a parole. (Angeli et al., 2011).

Per Angeli et al. (2011) apprendere significa *«essere in grado di compiere un processo di assimilazione e accomodamento»*, in cui si deduce che avviene un cambiamento (di un comportamento, di un pensiero, della persona stessa, ecc.) costituito da un processo di equilibrio tra momenti in cui il bambino ha dei modelli mentali stabili e momenti in cui questi modelli vengono modificati di fronte a problemi e situazioni nuove per poi ridiventare stabili. (Crivelli & Poletti, AA 2009-2010). Soprattutto per quei bambini nei quali i modelli spontanei sono più forti, l'insegnante ha il ruolo fondamentale di favorire questo processo attraverso attività pianificate attentamente a partire dalle caratteristiche e dalle esigenze dei singoli bambini e del gruppo-sezione in quel determinato periodo dell'anno (nel «qui e ora»). Diventa dunque indispensabile una riflessione sulla differenziazione (per capacità, interessi, ecc.) da considerare prima di pianificare e animare le attività matematiche. Il docente deve assumere il ruolo di regista e spetta a lui il compito di osservare attentamente gli allievi, di raccogliere le informazioni, di motivarli, di accrescere in loro il desiderio di conoscere e di sperimentare, e di trovare soluzioni nuove e sostenere i bambini confrontati con l'insuccesso. In questo modo, l'insegnante contribuisce alla formazione di modelli mentali corretti e profondi, pronti a essere rimessi in discussione con la consapevolezza che ogni immagine costruita potrà ulteriormente svilupparsi (Angeli et al., 2011).

2.2. Che cosa significa fare matematica nella scuola dell'infanzia

L'obiettivo del fare matematica nella scuola dell'infanzia non è certamente di trasmettere nozioni teoriche, bensì di sviluppare il pensiero del bambino attraverso operazioni intellettuali (osservare, descrivere, classificare…) e operazioni logiche (analogie, differenze, comparazioni…). Per fare ciò, è quindi necessario proporre attività di scoperta, che permettano al bambino non solo di arricchire le sue conoscenze, ma anche di sviluppare il suo linguaggio. Sarebbe inoltre opportuno privilegiare l'esperienza proprio come attività di esplorazione, piuttosto che l'esercizio (Häusermann & Renzetti, AA 2011-2012).

Dato che i bambini in età prescolare hanno conoscenze poco o per nulla formali in ambito matematico, essi mettono in atto strategie «ingenue» nelle quali è presente un certo modo di vedere il mondo e di leggere la realtà. L'insegnante deve dunque stare attento a non bloccare questi comportamenti con atteggiamenti rigidi e formali, che potrebbero, in futuro, portare i bambini a perdere il piacere di fare matematica e ad allontanarsi dalla disciplina. Per favorire una maggiore serenità di fronte a questa materia, alla scuola dell'infanzia si identificano dunque come obiettivi principali anche quelli di *«suscitare simpatia nei riguardi delle attività a carattere matematico e favorire una bella immagine di tutto ciò che riguarda la matematica»* (Angeli et al., 2011).

Per i motivi sopraccitati, l'educazione matematica alla scuola dell'infanzia ha una natura prettamente propedeutica agli insegnamenti futuri e non formativa di abilità specifiche. Secondo Caldelli e D'Amore (1989) *«si tratta, in sostanza, di preparare il terreno alla formazione di una mentalità adatta a ricevere a tempo opportuno la matematica, a un modo di fare, pensare, agire, mirando alla formazione di una capacità di far uso consapevole della lingua».*

2.3. Il ruolo del linguaggio

Come ho già detto, ogni individuo costruisce la conoscenza in relazione all'ambiente in cui vive, ma per costruire conoscenza ha bisogno del linguaggio. Angeli et al. (2011) affermano che *«la lingua naturale è il perno dell'apprendimento»* e, di conseguenza, il linguaggio è uno strumento di apprendimento, perché permette di organizzare e strutturare il pensiero. L'acquisizione delle competenze linguistiche è un processo continuo che ha la sua fase più importante nei primi tre o quattro anni di vita. Dai tre ai quattro anni il bambino parla moltissimo e di tutto, gioca con le parole e costruisce catene di associazioni. Indicativamente, dai quattro ai sei anni il bambino dovrebbe aver imparato gli aspetti essenziali del linguaggio e comunicare in una forma il più possibile vicino al linguaggio dell'adulto (Yserman, AA 2011-2012).

Anche a scuola occorre stimolare i bambini facendo leva sulle curiosità e sugli interessi dei singoli, in modo da consentire loro di costruire i linguaggi, le modalità e i criteri operativi. È proprio il desiderio di costruire conoscenza che spinge ognuno di noi ad acquisire il linguaggio (Dodman, 2009). La lingua ha molta importanza rispetto a tutti gli apprendimenti e, dunque, anche in campo matematico è una delle competenze che occorre sviluppare. Inoltre, come è emerso in precedenza, *«matematica e lingua sono sempre campi di esperienza molto vicini»* (Angeli et al., 2011). Con questo, non intendo dire che i bambini debbano imparare a far uso di terminologie matematiche specifiche, ma piuttosto sottolineare il fatto che il linguaggio, assieme al disegno, alla scrittura e alle immagini, è una forma di rappresentazione (Caldelli & D'Amore, 1989). E affinché il bambino possa costruire dei modelli mentali che gli permettano l'acquisizione di nuove conoscenze, è necessario da parte del docente stimolare l'allievo a fare uso delle rappresentazioni. A volte però il linguaggio comporta dei limiti, perché il bambino potrebbe possedere capacità linguistiche (lessicali, sintattiche, fonologiche) che ancora non gli permettono di trasmettere un messaggio o di esprimere un suo modello mentale. Il docente stimola allora il bambino anche all'esperienza diretta, al fine di osservare, oltre che il linguaggio, le azioni e i comportamenti in relazione al compito (Häusermann et al., AA 2011-2012).

Ritengo inoltre opportuno aggiungere che la comunicazione diviene maggiormente efficace se favorisce reali occasioni di scambio e riflessione fra gli allievi, fa nascere situazioni in cui avviene una metacognizione di ciò che si è svolto e sviluppa il conflitto socio-cognitivo. Viene dunque stimolata l'analisi critica sulla pertinenza e l'esattezza dei ragionamenti utilizzati, permettendo ai bambini di giungere a concettualizzazioni che sarebbe più difficile raggiungere attraverso il lavoro individuale. Una maggiore competenza e una maggiore consapevolezza nell'azione didattica permettono inoltre di migliorare lavoro e risultati (Montanari Lunghi, 2007).

2.4. Il ruolo del gioco

Considerata l'età dei bambini che va dai tre ai sei anni, nella scuola dell'infanzia molte azioni didattiche avvengono attraverso una messa in situazione in una dimensione ludica. Angeli et al. (2011) definiscono una situazione come *«una proposta didattica, complessa e strutturata, che parta dall'interesse dei bambini e si sviluppi all'interno di esperienze significative e complete»*. Sarebbe opportuno preparare delle attività da proporre alla classe a partire dai vissuti dei bambini, per coinvolgerli maggiormente e innestare i nuovi apprendimenti o approfondimenti (il nuovo sapere) sulle conoscenze che già possiedono.

Fin dall'antichità, per proporre esperienze in ambito matematico (o in altre discipline) veniva favorita la strategia del gioco (libero e spontaneo, oppure guidato). Questo deriva dal fatto che la percezione dei bambini (ma anche degli adulti) di fronte alla materia diventa maggiormente positiva, perché la dimensione ludica permette di coinvolgere, di motivare, di mantenere l'attenzione più a lungo e di ridurre l'ansia di chi incontra un argomento pressoché sconosciuto. Inoltre, in seguito al raggiungimento di traguardi positivi, il bambino sviluppa una buona percezione di sé (e dunque un sentimento piacevole) di fronte al compito (Aglì & Martini, 1995).

Il gioco permette di simulare la realtà e di immedesimarsi in un mondo fantastico in cui trovare situazioni educative e complesse che rispecchiano la propria storia. Il gioco si presta bene come strategia didattica, poiché il docente può scegliere quello che ritiene più adatto e funzionale agli obiettivi prefissati, ai bisogni e alle competenze del gruppo.

Ogni gioco *«propone una molteplicità di situazioni che implicano e sviluppano conoscenze e competenze diverse»* (Aglì et al., 1995), in cui il docente ha il ruolo di chiarire gli obiettivi, definire le regole, sostenere, sollecitare e porre domande ai bambini, per aiutarli a diventare consapevoli del loro sapere. *«Quando l'insegnante tiene conto delle competenze dei bambini, non anticipa le soluzioni, non giudica come giuste o sbagliate le loro scelte, ma stimola l'osservazione e il ragionamento, i giochi dei bambini diventano esperienze efficaci e significative»* (Aglì et al., 1995).

Nella dimensione ludica, i bambini si trovano nella condizione favorevole di utilizzare l'anticipazione per prevedere un possibile proseguimento. In questo modo viene posta maggiore attenzione sull'obiettivo del gioco ed è dunque più semplice individuare un problema. È la situazione stessa, attraverso riuscite ed errori, che conduce poi gli allievi a trovare una soluzione adeguata e, dunque, a costruire il loro sapere (Aglì et al., 1995).

3. La probabilità nella scuola dell'infanzia

3.1. Il vissuto del bambino e l'educazione al pensiero probabilistico

Esistono molte situazioni che si possono incontrare quotidianamente alle quali non è possibile dare una risposta certa. Pensiamo, ad esempio, alle previsioni del tempo meteorologico o del risultato di una partita di calcio. Solo dopo che questi eventi si saranno verificati potremo valutare le risposte date come più o meno adeguate. Per valutare nel modo migliore quei fenomeni che non sono esattamente prevedibili, si ricorre al calcolo delle probabilità (Aglì et al., 1995).

Praticamente in tutte le situazioni reali si tende ad esprimere giudizi probabilistici di tipo qualitativo e non quantitativo. Arrigo e Piatti (2005) suddividono i giudizi qualitativi in tre categorie: classificatori («A è probabile»), comparativi («A è più probabile di B») e di rapporto («A è almeno il doppio più probabile di B»). Questi diversi tipi di previsione vengono utilizzati quotidianamente, anche in modo inconsapevole, in qualsiasi situazione incerta. Proprio perché la vita reale è piena di situazioni incerte, i bambini della scuola dell'infanzia possiedono già dei vissuti in questo campo. Anche in svariati giochi che i bambini conoscono fin da piccoli, compaiono elementi legati all'ambito probabilistico, come il lancio di un dado, l'estrazione di un gettone o il sorteggio di una carta. Per trattare la probabilità alla scuola dell'infanzia e stimolare maggiormente gli allievi, sarebbe dunque opportuno proporre attività che prendano in considerazione non tanto i contenuti matematici, quanto i contesti extra-matematici e familiari ai bambini (Arrigo, Maurizi, Minazzi e Ramone, 2011). Quindi, proporre situazioni ludiche che presentano problemi di vita pratica e di cui non si può prevedere con certezza l'esito, permette di sviluppare l'aspetto strategico e di favorire nei bambini un uso intuitivo delle nozioni di casualità (Arrigo, 2010). D'Amore (1986, citato da Arrigo, 2010) sostiene che *«la mentalità probabilistica è insita nel modo di pensare comune, ma va educata e aiutata a crescere per potersi affermare»*.

Con i bambini in età prescolare non è possibile quantificare numericamente la probabilità di un evento, è invece auspicabile stimolare la formulazione di ipotesi e l'analisi di previsioni relative a due eventi diversi, al fine di confrontarli tra loro. D'Amore et al. (2004) affermano che *«il campo della probabilità qualitativa (senza calcoli ma solo paragoni) offre spunti notevolissimi per la formazione di competenze profonde»*.

3.2. Il linguaggio in ambito probabilistico

Anche per quanto riguarda il linguaggio specifico, come detto in 2.3, il bambino dai tre anni possiede già un vissuto: nel linguaggio comune si utilizzano infatti termini della probabilità (come ad esempio: «oggi è probabile che piova», «di sicuro arriverò in ritardo», «è possibile che mi hai cercato», «è impossibile!», ecc.). A volte, però, alcuni di essi vengono utilizzati in maniera imprecisa dal punto di vista matematico e ritengo perciò opportuno chiarire il significato di alcuni concetti.

Contrariamente a quanto avviene di solito in matematica, la probabilità cerca di descrivere l'incerto. Si parla dunque di prova aleatoria, ossia di *«un'azione che può avere qualsiasi risultato appartenente a un insieme conosciuto di risultati possibili»* (Arrigo et al., 2011). Relativamente a ogni prova aleatoria è possibile considerare degli «eventi», ossia *«enunciati, che esprimono un fatto che, dopo l'esecuzione della prova, si possa stabilire se è vero o falso, cioè se si è verificato o no»* (D'Amore, Fandiño Pinilla, Gabellini, Marazzini, Masi & Sbaragli, 2004).

Esistono tre tipi diversi di evento a seconda della loro probabilità di realizzarsi. Un evento è detto «certo» se vi è la sicurezza che esso si verifichi ancor prima di effettuare la prova. Al contrario, viene detto «impossibile» un evento che si è sicuri che non si verificherà. Tutti gli altri eventi vengono detti «possibili». Nell'uso comune capita a volte che i termini «possibile» e «probabile» vengono confusi o utilizzati come sinonimi. Ciò è errato, poiché l'aggettivo «probabile» esprime la misura della possibilità (D'Amore et al., 2004).

I quattro aggettivi appena esplicitati potrebbero non venire utilizzati in maniera naturale e spontanea dai bambini in età prescolare. Tuttavia, è importante che il docente ne faccia un uso corretto, al fine di abituare i bambini a utilizzare un linguaggio preciso e permettere loro, attraverso l'imitazione, di acquisire i termini e farne progressivamente un uso consapevole (D'Amore et al., 2004).

Anche nel campo delle probabilità, come in molte altre discipline trattate alla scuola dell'infanzia, *«uno dei principali obiettivi è linguistico. Si ritiene normalmente che i bambini anche piccoli sappiano ben distinguere tra evento certo, impossibile, possibile, ma nella realtà non è così»* (D'Amore et al., 2004). Non ci si deve dunque limitare a prendere per buone le risposte orali dei bambini, ma per capire che cosa intendono dire, il docente deve osservare i comportamenti che adottano e interpretare i dati raccolti (D'Amore et al., 2004).

3.3. Le misconcezioni in ambito probabilistico

Quando si propongono attività in ambito probabilistico bisogna evitare che i bambini costruiscano misconcezioni, cioè opinioni incompatibili con quelle accettate dalla matematica, che possono far sviluppare errori di carattere concettuale o contenutistico (Arrigo et al., 2011). Una misconcezione è un concetto errato e dunque è genericamente qualcosa da evitare; essa però secondo D'Amore (2001) *«non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione»*.

In ambito probabilistico possiamo citare in particolare tre tipi di misconcezioni: la prima consiste nel credere che anche un piccolo campione rispetti la probabilità teorica (ad esempio se lancio 10 volte una moneta mi aspetto che esca 5 volte testa); la seconda è l'idea che una prova aleatoria sia influenzata dalla soggettività, dalla fortuna o dalla sfortuna; mentre la terza consiste nel ritenere che il risultato di una prova sia influenzato da quelli delle prove precedenti (ad esempio che i risultati ritardatari abbiano maggior probabilità di verificarsi) (Arrigo et al., 2011).

Tuttavia, una prova aleatoria *«non ha memoria e quindi, ogni volta che* *viene effettuata, ogni risultato possibile ha sempre le stesse probabilità di uscire, indipendentemente dai risultati precedenti»* (Arrigo et al., 2011).

È però importante rendersi conto che i bambini tra i 3 e i 6 anni sono ancora fortemente influenzati dai fattori affettivi ed emozionali e, per questo motivo, potrebbero essere maggiormente esposti alla formazione di misconcezioni legate alla fortuna o ad esempio al colore preferito nel caso del lancio di un dado con le facce colorate. Perciò, fare esperienze in ambito probabilistico può rappresentare anche un'occasione per permettere ai bambini di superare progressivamente questo tipi di condizionamenti (Aglì et al., 1995).

3.4. Le implicazioni emotive

Goleman (2001) afferma che *«tutte le emozioni sono, essenzialmente, impulsi ad agire; in altre parole, piani d'azione dei quali ci ha dotato l'evoluzione per gestire in tempo reale le emergenze della vita»*. Nell'individuo avvengono contemporaneamente delle alterazioni comportamentali, fisiologiche e di pensiero. Così, posto di fronte a qualcosa, sia che si tratti di una parola, di un'immagine, di una persona o di un oggetto, non resta mai indifferente, ma prova un'immediata reazione affettiva (positiva o negativa) che precede le facoltà cognitive e i pensieri e influenza le decisioni. Il valore affettivo che l'individuo attribuisce a qualcosa, gli permette di stimarne, velocemente e con poco sforzo cognitivo, l'importanza. La propensione ad avvicinarsi a qualcosa sarà tanto maggiore, quanto maggiore è il valore affettivo che gli viene attribuito e ogni azione che porta ad avvalorarlo, ne incrementerà la probabilità di scelta. Ciò che ho appena descritto consiste in un processo valutativo semplificato che le persone utilizzano per risolvere compiti cognitivi complessi, come ad esempio la stima dell'incertezza o del rischio (Bonini & Hadjichristidis, 2009).

D'Amore et al. (2004) dichiarano che la probabilità *«è un campo di forte presa emotiva»* soprattutto per i bambini in età prescolare, nei quali gli aspetti emotivi e affettivi sono accentuati e dominanti. Per questa ragione, la probabilità viene considerata una disciplina più difficile di altre da trattare alla scuola dell'infanzia, ma allo stesso tempo necessaria per avvicinarsi insieme ai bambini al mondo reale (Angeli et al., 2011). Questa materia viene considerata complicata anche in relazione alle caratteristiche della fascia d'età in cui si trova il bambino che frequenta la scuola dell'infanzia. Egli pensa ancora in maniera egocentrica, per cui non riesce a immaginare che la realtà possa presentarsi ad altri diversamente da come la percepisce lui. Ignora i punti di vista diversi dal proprio e non è consapevole del fatto che altre persone abbiano conoscenze, emozioni o pensieri diversi dai suoi. In questa fascia di età, le azioni mentali sono rigide e irreversibili, dunque ciascuna rappresentazione mentale rimane isolata e non si coordina con le altre. È inoltre presente nei bambini la concezione che tutto avviene per un determinato motivo; gli oggetti e i fenomeni hanno un fine preciso (finalismo), sono dotati di intenzionalità e di un'anima (animismo) e sono il prodotto della costruzione umana (artificialismo) (Crivelli et al., AA 2009-2010). Gli aspetti appena citati potrebbero dunque comportare una maggiore difficoltà a comprendere i fenomeni legati alla casualità.

4. Domande e ipotesi di ricerca

Il tema delle probabilità alla scuola dell'infanzia mi ha incuriosito e motivato a documentarmi e a conoscere meglio la disciplina in oggetto. Di fronte alla complessità dell'argomento ho selezionato alcuni aspetti che ho trattato nel quadro teorico e che mi hanno fatto nascere le seguenti domande:

D1. Quali strategie intuitive mettono in atto gli allievi di scuola dell'infanzia confrontati con situazioni di tipo probabilistico?
D2. In che misura entra in gioco la sfera affettiva ed emotiva (gusti personali, relazione con un compagno…) nell'analisi delle situazioni proposte in ambito probabilistico e nelle scelte da compiere?

Rispetto alle domande di ricerca, formulo le seguenti ipotesi:

I1. Di fronte a situazioni incerte nelle quali bisogna compiere scelte in maniera ripetuta, ipotizzo che i bambini in età prescolare si comportino in modi differenti: alcuni potrebbero mantenere invariata la preferenza essendo condizionati dalle loro idee o dal valore affettivo (positivo o negativo) attribuito a un oggetto, mentre altri potrebbero alternare le scelte per l'indecisione o la curiosità di esplorare il materiale.
Ipotizzo che i bambini con dei modelli mentali più sviluppati riescano a confrontare due situazioni incerte diverse tra loro e a usare il linguaggio per formulare previsioni, mentre altri, confrontati con le stesse situazioni, agiscano in maniera più impulsiva a seconda dei loro vissuti e dei loro stati d'animo. Inoltre, alcuni bambini potrebbero riscontrare delle difficoltà di tipo linguistico (uso di un lessico specifico, sintassi corretta, capacità fonologiche, ecc.) che ancora non consentono loro di giustificare le scelte o di esprimere i modelli mentali.
I2. Ipotizzo che i bambini in possesso di modelli mentali più sviluppati diano risposte più razionali, costruite tenendo conto del concetto di probabilità e riuscendo a mettere in secondo piano la dimensione emotiva, affettiva e relazionale.
Ipotizzo che altri bambini non riescono a dominare/gestire la loro intelligenza emotiva e cerchino soluzioni e risposte che riguardino i loro gusti personali: potrebbero scegliere i materiali esteticamente più belli e in relazione con i loro vissuti. Inoltre, credo che potrebbero venire influenzati dalle scelte compiute dai compagni e agire per imitazione.

5. Scelte metodologiche

5.1. Tipo di ricerca

Questo lavoro si può definire una ricerca con intervento, che consiste, una volta individuato un problema, nell'introduzione di un cambiamento al fine di verificarne gli effetti e risolvere una situazione problematica (ricerca-azione) (Coggi & Ricchiardi, 2005). Si tratta di una ricerca prevalentemente qualitativa, perché mira a *«comprendere la realtà educativa indagata e approfondirne le specificità, mediante il coinvolgimento e la partecipazione personale del ricercatore»* (Coggi et al., 2005). Nel mio caso specifico, entro a contatto in prima persona con i soggetti osservati (sistema di relazioni) e con il contesto di studio, assumo un ruolo attivo e cerco di comportarmi in maniera neutra per evitare di trasformare e influenzare le risposte dei bambini attraverso le parole, i gesti, la mimica facciale, ecc.

Secondo la logica di questo modello di ricerca, i soggetti non sono mai considerati completamente equivalenti e, per questo, si prende come oggetto di studio il singolo nella sua totalità (fisica, cognitiva e affettiva) e nella sua unicità. Ne consegue dunque che il ricercatore deve assumere un atteggiamento flessibile e aperto ai cambiamenti e agli imprevisti, senza essere guidato da rigide ipotesi di intervento formulate in anticipo. Per questo motivo, gli strumenti tipici della ricerca quantitativa sono poco strutturati (Coggi et al., 2005).

5.2. Campione di riferimento

Come ho scritto nel quadro teorico, il bambino che frequenta la scuola dell'infanzia pensa ancora in maniera egocentrica e non è consapevole del fatto che altre persone possano avere conoscenze, emozioni o pensieri diversi dai suoi. Siccome a tre anni è presente un forte egocentrismo, ho deciso di concentrare questo progetto di ricerca sui bambini appartenenti al II e al III livello.

Il campione di riferimento è composto di 25 bambini (9 del II livello e 16 del III livello) che frequentano le scuole dell'infanzia di Camorino e di Gerra Gambarogno. Le due docenti titolari mi hanno informata che, all'interno delle classi, non erano mai state svolte attività incentrate sulla probabilità e mi hanno fornito alcune informazioni preliminari e necessarie per fare leva sulle curiosità e sugli interessi dei due gruppi (motivazione).

5.3. Modalità di raccolta dati

Ho deciso di proporre ai bambini alcune attività di scoperta, attraverso l'uso di materiali nuovi e stimolanti che permettono di sviluppare sia le conoscenze sia il linguaggio. L'azione didattica è costituita da tre interventi in cui propongo un gioco di società accompagnato da un'intervista semi-strutturata che viene svolta durante l'azione. Seguendo questa modalità, preparo alcune domande (da porre ai bambini in un ordine non rigido) per rilevare conoscenze, informazioni, percezioni, idee, atteggiamenti, ecc. in relazione al contesto reale e per stimolarli ad acquisire nuove conoscenze attraverso l'uso della rappresentazione (Coggi et al., 2005).

Dato che l'intervista può venir sottoposta sia ai singoli sia a un gruppo, ritengo interessante poter svolgere la seconda e la terza attività in sottogruppi di due o tre bambini, in modo da verificare se la relazione con i compagni condizioni le scelte e in che misura rientri la sfera affettiva. Nella discussione collettiva, infatti, *«l'insegnante può osservare sia le modalità d'interazione tra i bambini, sia le modalità e i risultati della costruzione sociale delle conoscenze»* (Coggi et al., 2005). Nello svolgersi della discussione si possono poi cogliere le sequenze di sviluppo del ragionamento e le operazioni argomentative che il bambino mette in atto per sostenere i concetti.

Per la registrazione e l'analisi dei dati è utile filmare gli interventi e avere a disposizione il formato audio e video. In questo modo, potrò esaminare il materiale anche dopo l'intervento e svolgere un lavoro più accurato e preciso (trascrizione dei protocolli).

Prima di recarmi nelle due sezioni, invio ai bambini una lettera per presentarmi ed entrare in contatto con la classe. Allego anche una fotografia che mi ritrae insieme al mio piccolo gatto. Questo elemento, che caratterizza il mio vissuto, permette di farmi conoscere, di condividere e accrescere l'interesse dei bambini e di creare lo sfondo motivazionale nel quale inserire gli interventi.

Inizialmente, il materiale che avevo considerato di proporre era il dado, ma poi ho riflettuto sul fatto che per alcuni bambini poteva essere difficile prendere visione con uno sguardo d'insieme e considerare tutti i colori presenti su ogni faccia. Per questo motivo, ho deciso di proporre l'estrazione di gettoni da una scatola su cui applicare un cartello che ne indica il contenuto. Un vantaggio di questo materiale consiste nel fatto che si può modificare il numero di elementi contenuti nelle scatole e non si è legati alle sei facce del dado convenzionale. Inoltre, in questo modo, il bambino può confrontare due scatole di contenuto differente in maniera più semplice e diretta.

5.4. Modalità di analisi dei dati

L'analisi dei dati avviene attraverso la lettura dei protocolli che consente di estrapolare informazioni che vengono classificate in categorie costruite in modo flessibile, adattate alle risposte dei bambini e interpretate.

I dati che emergono sono messi in relazione agli interrogativi di ricerca, per cercare le risposte che consentono di comprendere la realtà indagata e approfondire la materia di studio. Infine, vengono confrontati i risultati ottenuti con le ipotesi formulate in precedenza, che potrebbero venir confermate o smentite.

6. Analisi dei dati

La lettura dei protocolli mi ha permesso di costruire alcune tabelle nelle quali ho registrato i dati relativi alle tematiche degli interrogativi di ricerca. Durante questo lavoro, ho formato delle categorie che riuniscono i bambini che hanno adottato strategie e comportamenti simili e, oltre ad aver posto l'attenzione sugli elementi significativi emersi dal gruppo, ho cercato di prendere in considerazione e valorizzare anche il comportamento dei singoli.

Nell'analisi dei dati non viene fatta una distinzione per livelli, perché ognuno ha uno sviluppo di crescita diverso (indipendente dall'età) e possiede un bagaglio di esperienze differente dagli altri.

Per garantire la privacy, a ogni bambino è stata assegnata una sigla casuale da B1 a B25 ed è stato utilizzato il genere maschile.

Il gioco consiste in una gara tra i due gatti: si pesca una pallina e si fa avanzare di una casella il gatto dello stesso colore.

6.1. Primo intervento

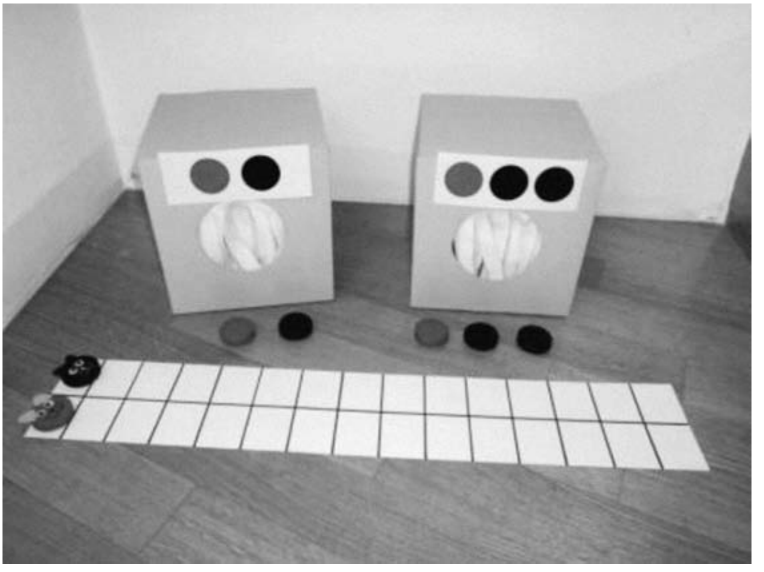


Figura 1. La situazione. I colori dei gettoni (e dei gatti) sono il rosa e il nero.

All'inizio della prima partita[3] del gioco, ho chiesto ai singoli bambini di fare una previsione su quale pedina (tra i due colori scelti) sarebbe arrivata per prima al traguardo.

19 bambini del gruppo-campione hanno risposto che avrebbe vinto la pedina del colore preferito: 7 di loro non sono riusciti a motivare le scelte, forse perché li avevo appena conosciuti e stavamo costruendo la relazione, mentre 12 hanno affermato:

B1: *So che lo sto prendendo.*
B5: *(Vince) il mio (verde). […]. Perché io ho anche un gatto in Messico. Perché quei gatti giocano sempre a far gare.*
B9: *Mi piace il colore.*
B24: *Quello… rosa. […]. Mi piace di più il rosa.*

Ho notato che i bambini facevano riferimento al valore affettivo che attribuivano alla pedina del loro colore preferito e che prendevano in considerazione gli aspetti legati ai loro vissuti. Dal colloquio avuto con B18 ho estratto una situazione che offre spunti di riflessione:

L: *Secondo te quale gatto vincerà?*
B18: *Non lo so ancora.*
L: *Proviamo a scommettere.*
B18: *Io dico il rosa […]. Perché è il mio colore preferito.*

Ho scoperto che solo lui è riuscito a esprimere l'incertezza della situazione di fronte alla quale era stato posto, mentre gli altri mi hanno risposto in modo più veloce. Ho l'impressione che non si siano presi del tempo per riflettere, ma che siano stati spinti dall'impulsività e dal valore affettivo attribuito alla pedina del loro colore preferito.

3. La prima partita del gioco prevede l'utilizzo della scatola 1.

6 bambini hanno invece indicato come pedina vincente quella del colore meno gradito. Di questi, 5 non si sono espressi, mentre 1 ha giustificato la sua scelta adducendo motivi di tipo affettivo:

L: Secondo te chi vincerà?
B6: Il nero. […]. Perché è nero e perché è più forte.

Questo bambino ha argomentato la sua scelta seguendo probabilmente un'idea convenzionale che attribuisce al colore nero delle caratteristiche dominanti. Durante la partita, in alcune occasioni, ho invitato i bambini ad anticipare quale gettone avrebbero estratto dalla scatola. I giocatori hanno adottato comportamenti differenti. 6 bambini non hanno voluto esprimersi, 11 bambini hanno sempre indicato il colore preferito, come ad esempio B10:

L: Secondo te che cosa uscirà? Rosa o nero?
B10: Rosa. […].
L: Adesso che cosa uscirà?
B10: Rosa. […].
L: E adesso?
B10: Rosa.

Questi risultati mi fanno nuovamente riflettere sul fatto che la sfera affettiva ha condizionato le scelte compiute dai bambini di fronte alla situazione di incertezza. Durante la partita nessuno di loro ha fatto riferimento a una probabilità di uscita uguale per i due gettoni. Ci sono stati invece 8 bambini che hanno alternato le risposte, come ad esempio B2:

L: Secondo te che gettone uscirà adesso? Prova a indovinare.
B2: Il nero, per me esce il nero. […].
L: Uscirà il…
B2: Blu. […].
L: Adesso uscirà…vediamo il…
B2: Nero. […].
L: Adesso il…
B2: Blu. […].

Ho avuto l'impressione che questi bambini formulassero delle previsioni che prendevano in considerazione la possibilità di uscita di entrambi i gettoni, tuttavia non sono riusciti a motivare la loro scelta. Ho poi notato che 2 bambini hanno indirizzato le loro previsioni basandole su situazioni di gioco che si erano create in precedenza:

L: Che cosa uscirà?
B9: Il nero.
L: Il nero, perché?
B9: Perché esce il rosa, dopo il nero, e dopo il nero, e dopo il rosa.
L: Come hai fatto a indovinare?
B8: Perché qui era sempre avanti il nero.

Questi bambini hanno ritenuto che i risultati delle estrazioni potevano essere influenzati da quelli delle prove precedenti (misconcezione) (Arrigo, 2010). Anche prima della seconda partita[4], dopo aver mostrato la scatola 2, ho chiesto agli allievi

4. Nella seconda partita si ripete il gioco con la scatola 2 e si confronta la nuova situazione con quella precedente.

di fare una previsione sulla pedina vincente. 14 bambini hanno indicato quella del loro colore preferito. Di questi, 6 non hanno saputo motivare la risposta e 5 mi hanno dato spiegazioni di tipo affettivo ed emotivo, come ad esempio:

B2: *Perché mi piace.*
B13: *Pesco sempre il rosa.*
B22: *Di nuovo il rosa. Mi piace.*

Altri 3 hanno invece giustificato le loro risposte basandole sui risultati ottenuti durante le partite precedenti:

B5: *Ha già vinto (nella prima partita). Perché è più furbo.*
B6: *Se ha vinto il nero adesso può vincere il giallo.*
B15: *È più veloce (perché ha già vinto).*

Questi 14 bambini hanno osservato il contenuto della scatola, ma ho l'impressione che non siano stati in grado di prendere in considerazione l'aggiunta di un gettone e la conseguente probabilità di uscita diversa dei due colori. Inoltre ho notato che in alcune di queste affermazioni è presente la misconcezione secondo la quale i bambini ritengono che il risultato della prova può essere influenzato da quelli precedenti.

11 bambini hanno invece previsto che vincesse la pedina del colore meno gradito. Di questi, 8 mi hanno detto:

B7: *Io penso (che vincerà) il nero. […]. Perché ne ha 2.*
B17: *Perché ci son 2 marroni.*
B19: *Succederà che vincerà sempre il nero.*
B25: *Perché sono già in 2 e solo 1 rosa.*

Attraverso le conversazioni, ho appreso che sono riusciti a osservare e analizzare la situazione, prendendo in considerazione il contenuto della scatola 2, facendo un confronto con la fase di gioco precedente e riuscendo ad esprimere una differenza nella probabilità di uscita dei due colori. Inoltre, nessuno di loro ha fatto dei riferimenti alle sfere affettiva ed emotiva.

2 bambini hanno basato le loro risposte sul confronto con il risultato della prima partita e hanno spiegato che:

B8: *Forse adesso (vince) il nero. Perché prima ha vinto questo (gatto rosa) e adesso forse questo (gatto nero).*
B21: *Nero. Perché prima ha vinto il giallo.*

Un altro ha invece risposto in maniera egocentrica, dicendo che:

B23: *(Vince) perché l'ho pensato io, perché sì.*

I comportamenti e le affermazioni dei tre bambini mi fanno credere che non siano stati in grado di valutare e confrontare il contenuto delle due scatole.

Quando ho chiesto di ipotizzare il colore del gettone da estrarre:

9 bambini non hanno saputo esprimersi.

2 hanno indicato sempre il preferito, come ad esempio B5:

L: *Che cosa pescherai?*
B5: *Verde. […].*
(Inserisce la mano nella scatola e dice:) Verde, verde, verde. […].
(Fa la stessa cosa dicendo:) Mescola mescola nel pentolone,
che adesso voglio il verdone.

Dai protocolli emerge che il bambino è sicuramente influenzato da implicazioni emotive e affettive che sono dominanti sui ragionamenti di tipo cognitivo. Infatti, nella fase finale del gioco, ha dimostrato di aver avuto delle intuizioni e di aver saputo fare dei ragionamenti di tipo probabilistico, che approfondirò in seguito. Invece, in questa occasione, l'affettività e la speranza l'hanno spinto ad indicare il colore preferito e a pronunciare una formula magica per condizionare il risultato dell'estrazione (egocentrismo).

2 bambini hanno sempre ipotizzato l'estrazione del gettone del colore meno gradito, ma senza motivare spontaneamente le scelte. Suppongo che possano aver confrontato i materiali ed essersi resi conto delle probabilità di uscita differenti.

Altri 12 hanno invece alternato la scelta, ma senza saperla giustificare e apparentemente senza considerare il contenuto della scatola. Anche in questo caso, ho notato che un bambino ha basato le sue riflessioni sul risultato delle estrazioni precedenti:

L: E adesso (che cosa esce)?
B8: Rosa.
L: Come mai?
B8: Perché guarda ha fatto tanti saltini e adesso tocca un po' a lui.

Al termine del gioco, ho stimolato i bambini a confrontare le due scatole e a riflettere su quanto è avvenuto durante le partite.

6 di loro non si sono espressi.

14 hanno commentato l'esperienza e espresso le loro idee in cui comparivano anche intuizioni probabilistiche, come ad esempio:

B9: (Il gatto nero) ha vinto perché prendevamo uno e poi l'altro, uno e poi l'altro.
L: Ah, uno e poi l'altro di quelli neri dici. E il rosa allora? Prendevamo anche quello?
B9: No perché non ce ne aveva due (gettoni neri).
L: Quale scatola è migliore?
B15: Questa (scatola 1) perché quella (scatola 2) è un po' difficile.
L: È più difficile questa, perché?
B15: Eh, bom...se tu peschi una volta il marrone e ancora una volta il marrone e dopo il verde... È un po' difficile scegliere il verde. [...]. Per colpa di questa scatola. Per colpa di questi due (indica i due gettoni neri).
L: Quale delle due scatole è meglio per giocare?
B18: Quella lì da due (scatola 1). [...]. Perché ha due pedine (gettoni) e ci son due gatti.

I 14 bambini sono stati in grado di considerare e confrontare il contenuto delle due scatole, anche grazie all'esperienza di gioco che li ha confrontati con riuscite e insuccessi, e hanno individuato nella seconda scatola una probabilità maggiore di spostare la pedina del colore meno gradito, definendola «più difficile».

3 bambini hanno commentato la situazione attraverso elementi di tipo affettivo ed emotivo, come ad esempio:

B3: Forse (il gatto) blu era stanco.
B11: Il marrone era più veloce.
B13: Quando ha cominciato (il gatto rosa) ha fatto così un po' fatica.

Questi bambini si sono resi conto che utilizzando la scatola 2 il gettone del loro colore preferito veniva estratto meno volte rispetto all'altro, ma non sono tuttavia stati in grado di giustificare i risultati mettendoli in relazione con i contenuti differenti delle scatole.

Altri 2 bambini hanno invece espresso osservazioni legate al primo colore che veniva estratto durante le partite:

B6: *Se uno comincia per primo, quello vince.*
B21: *Il nero ha cominciato prima e è andato più avanti.*

Ho l'impressione che per motivare la scelta non abbiano considerato o confrontato il contenuto delle due scatole, ma che si siano basati sul risultato della prima estrazione della partita, credendo che questa abbia determinato l'esito finale.

Per concludere l'analisi dei dati del primo intervento, ritengo interessante fare una ricapitolazione e mettere in evidenza quei risultati che mi permettono di comprendere se c'è stata un'evoluzione nel pensiero del bambino (tra la prima e la seconda partita) per quello che riguarda le scelte effettuate.

Le previsioni riguardo alla pedina vincente sono state le seguenti: nella prima partita 19 bambini hanno scelto quella del loro colore preferito, 6 quella del colore meno gradito, mentre nella seconda partita 14 hanno ipotizzato la preferita, mentre 11 quella del colore meno gradito. Dai dati emerge che tra la prima e la seconda partita è diminuito il numero di bambini che ha previsto la vittoria della pedina del colore preferito (da 19 a 14), mentre è aumentato il numero dei giocatori che ha ipotizzato che la pedina meno gradita (da 6 a 11) sarebbe stata vincente. Inoltre, durante la discussione finale, 14 bambini hanno avuto intuizioni di tipo probabilistico

Un esempio interessante emerge dall'analisi del protocollo di B5, che durante tutta la partita ha previsto le estrazioni del gettone del suo colore preferito. Durante il gioco veniva fortemente condizionato dal valore affettivo attribuito al colore rosa, che prevaleva sui ragionamenti di tipo cognitivo; tuttavia, ha dimostrato più volte di avere intuizioni di tipo probabilistico. Ad esempio, durante la prima partita, ha spiegato che le due pedine erano sempre in una situazione di parità perché «è solo fortuna», oppure nella discussione finale ha spiegato che la scatola 2 era più difficile «perché c'era uno (rosa) e due neri» e quindi «il gatto nero aveva più fortuna». Questo bambino è stato l'unico a utilizzare il termine «fortuna» per indicare la probabilità di uscita dei due gettoni.

6.2. Secondo intervento

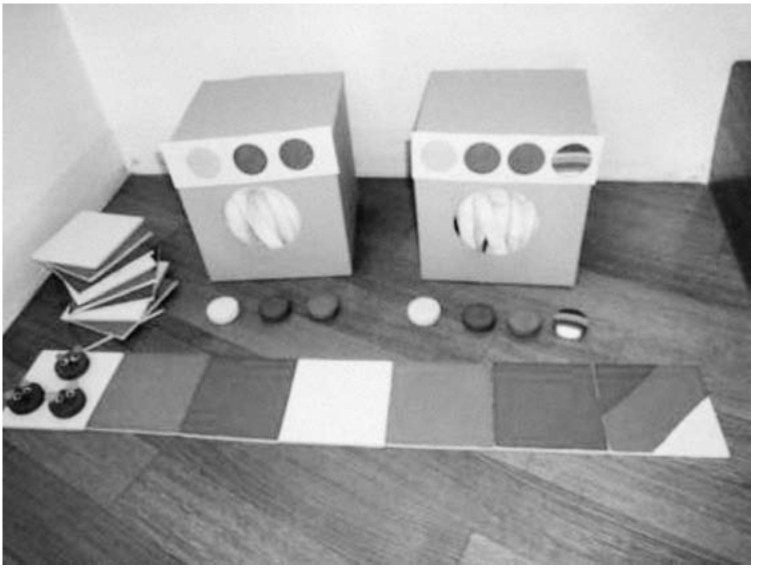


Figura 2. La situazione. Nella prima scatola vi sono 3 palline: una gialla, una blu e una verde. Nella seconda scatola a queste palline se ne aggiunge una multicolore. Se si pesca la pallina multicolore, si sta fermi un turno. Un allievo dopo l'altro è invitato a estrarre una pallina da una scatola e a muovere il gatto di conseguenza. Gli altri bambini non vedono né sentono che cosa accade a chi gioca.

Ho notato che i bambini hanno reagito comportandosi in modi differenti, che ho suddiviso in tre categorie.

La prima raggruppa 2 bambini che hanno sempre scelto di estrarre il gettone dalla scatola in cui era certo uno spostamento della pedina. Dai protocolli ho estratto le seguenti affermazioni:

B4: (Ho scelto questa scatola) perché è più facile. Perché qui ci sono tre e qui (scatola 2) quattro. Almeno vinco. Perché qui c'è questo (gettone variopinto) e dopo bisogna stare fermi.
B6: (Ho scelto questa scatola) perché ne ha tre. Perché non c'è quello (gettone variopinto). Quella lì (scatola 2) devi stare sempre ferma.

Attraverso l'osservazione e le conversazioni con i 2 allievi, mi sono resa conto che sono stati in grado di analizzare e confrontare i materiali, e compiere anticipazioni che prevedevano che cosa sarebbe potuto accadere con la scelta della scatola 1 (definita «più facile») o della scatola 2 (definita «più difficile»). Il paragone ha portato i bambini a giocare con la scatola che certamente avrebbe permesso loro di muovere la pedina, mentre si erano resi conto che scegliendo la scatola 2 avrebbero avuto la possibilità di restare fermi un turno. I 2 giocatori non si sono mai lasciati influenzare dalle scelte compiute dagli altri, riuscendo a gestire le emozioni, e si sono dimostrati convinti nel sostenere le loro idee. Questi comportamenti, adottati durante il gioco, mi permettono di considerare che i 2 bambini hanno agito seguendo una logica probabilistica.

La seconda categoria riunisce 2 bambini che hanno scelto di giocare sempre con la scatola 2, esprimendo le seguenti giustificazioni:

B10: (Scelgo la scatola 2) Perché mi piace il viola (presente sul gettone variopinto).
B17: (Scelgo la scatola 2) Perché ci sono di più (gettoni).

Le loro affermazioni permettono di capire che hanno confrontato il contenuto delle scatole, compiendo delle scelte apparentemente affettive (il colore preferito e la quantità maggiore di gettoni), che hanno caratterizzato l'intera partita. Suppongo che entrambi siano stati fortemente attratti dalla scatola 2, perché le hanno attribuito un valore affettivo maggiore, mentre si sono «allontanati» dall'altra scatola alla quale davano minore importanza (Bonini et al., 2009). Anche quando hanno estratto il gettone variopinto e sono stati fermi un turno (confronto con una situazione di insuccesso), hanno mantenuto invariata la scelta della scatola. Nel caso di B17, ho avuto conferma che i condizionamenti di tipo emotivo e affettivo sono stati più incidenti dei ragionamenti di tipo cognitivo. In una situazione di gioco, ha affermato che *«(B23 ha scelto la scatola 1) perché (nella scatola 2) c'è l'arcobaleno e non vuole stare fermo»*. Quindi, anche se il bambino si era reso conto che la scatola scelta presentava la possibilità di restare fermo, ha continuato a preferirla all'altra.

Nella terza categoria si trovano 21 bambini che hanno scelto di giocare con entrambe le scatole e, siccome hanno adottato comportamenti differenti, li ho suddivisi in ulteriori tre sottogruppi.

8 bambini hanno compiuto le prime estrazioni dalla scatola 2 e, dopo aver pescato il gettone variopinto (o, nel caso di B18, dopo aver visto il compagno B22 fermo alla partenza), hanno modificato la scelta e effettuato le ultime dalla scatola 1. In queste situazioni, i bambini si sono confrontati con l'insuccesso (estrazione del gettone variopinto), e hanno riflettuto sul fatto che scegliendo la scatola 1 c'era la certezza di muovere la pedina. Come è sostenuto da Bonini et al. (2009) la reazione negativa nei confronti di un oggetto ha come immediata conseguenza quella di far allontanare la persona dallo stesso, favorendone il rifiuto. Anche il confronto e la relazione tra bambini hanno contribuito a modificare le scelte personali e il dialogo avvenuto tra B7 e B9 dopo le prime estrazioni, è un esempio che sostiene la mia affermazione:

B9: E adesso siamo tutti fermi (perché abbiamo estratto il gettone variopinto). [...]. Dopo scelgo quella (scatola 1).
B7: Anche io dopo scelgo quella.
B9: Perché qui c'è il colorato che fa fermare.
B7: È vero.

3 bambini hanno scelto sempre la scatola 2 e in un solo caso hanno estratto un gettone dalla scatola 1. Dalle risposte che ho raccolto (B12 non ha risposto, B16 e B25 hanno detto: *«Perché ha il blu»*), mi sembra che loro non abbiano saputo motivare la scelta. Credo che, come è accaduto a quelli appartenenti alla seconda categoria, siano stati condizionati da implicazioni emotive che li hanno portati a preferire la scatola 2, ma che siano stati spinti dalla curiosità di introdurre la mano una volta anche nella scatola 1.
10 bambini hanno compiuto le estrazioni da entrambe le scatole e credo che, in generale, abbiano variato la scelta senza seguire un ordine preciso. Alcune motivazioni erano:

B13: Perché mi piace il blu.
B17: Non so.
B20: (Indica il gettone giallo per comunicarmi che gli piace.)
B23: Mi piace di più.
B24: Ci sono il giallo e il celeste.

La maggior parte delle risposte comprendeva elementi legati alla sfera affettiva ed emotiva (soprattutto in relazione ai colori preferiti), senza prendere in considerazione il confronto del contenuto delle scatole e, apparentemente, senza utilizzare ragionamenti probabilistici. Mi sembra anche che questi bambini non abbiano saputo giustificare verbalmente le loro scelte.

Dall'analisi dei dati, ho osservato che i 10 bambini, dopo aver estratto il gettone variopinto ed essersi confrontati con l'insuccesso, hanno spesso cambiato scatola. L'allontanamento dalla scatola 2 è probabilmente dovuto al sentimento di frustrazione provocato da questa situazione, che obbligava a stare fermi per un turno. Tuttavia, si tratta di un rifiuto momentaneo, poiché tutti i bambini dopo alcune estrazioni, tornavano a scegliere la scatola contenente il gettone variopinto. Questo riavvicinamento mi porta a pensare che i bambini erano maggiormente attratti dalla scatola 2 e che le attribuivano un valore affettivo maggiore, anche se erano consapevoli della possibilità di imbattersi nell'insuccesso.

Dai dati raccolti emerge pure che 20 bambini su 25 hanno scelto di estrarre il primo gettone dalla scatola 2. Questo ulteriore elemento permette di riflettere sul fatto che i bambini possano essere stati attratti dalla dimensione estetica del gettone variopinto e che abbiano attribuito un valore affettivo maggiore alla scatola che lo conteneva, per cui hanno indirizzato le loro preferenze verso quell'oggetto.

Al termine della partita, ho chiesto agli allievi di indicare quale scatola ritenevano migliore per giocare e di specificare le motivazioni. 18 bambini hanno indicato la scatola 1; 2 di loro non si sono espressi, mentre 12 hanno detto:

B1: Perché sono più pochi.
B4: Perché se pesco questo (gettone variopinto) devo stare qua fermo.
B7: Perché non ha la fermata.
B9: Abbiamo saputo che quella (scatola 2) fermava e abbiamo scelto questa.
B21: Perché non c'è questo qui (gettone variopinto). È più facile.

Questi protocolli mi permettono di considerare il fatto che i bambini sono stati in grado di confrontare il contenuto delle scatole, individuando nella seconda la possibilità di stare fermi un turno e definendola «più difficile». Lo dimostra anche il fatto che nessuno di questi bambini ha espresso preferenze di tipo affettivo o emotivo.

4 bambini hanno invece indicato la scatola 2 come migliore, ma discutendo con i compagni hanno cambiato idea e hanno fornito risposte simili a quelle riportate sopra. Probabilmente non avevano ancora un pensiero stabile, oppure hanno attribuito un valore maggiore alle risposte dei compagni piuttosto che alla loro (relazione affettiva).

Il grande numero di bambini (18 su 25) che a fine partita ha sostenuto che la scatola 1 era migliore per giocare e i 2 bambini che, ancor prima di iniziare, hanno riconosciuto nella scatola 2 una probabilità più bassa di muovere la pedina (2), mi inducono a pensare che la situazione proposta ha davvero stimolato i bambini a compiere confronti, a valutare le situazioni e a trovare soluzioni, costruendo il loro sapere (Aglì et al., 1995). 5 bambini hanno invece preferito la scatola 2 e hanno motivato le loro scelte in questo modo:

B10: Perché mi piace il viola (presente sul gettone variopinto).
B11: Ce n'erano quattro e io ho quattro anni.
B17: Perché ha quello (gettone variopinto).

Da questi protocolli emergono principalmente dei riferimenti alle sfere affettiva ed emotiva (colore preferito, vissuti dei bambini), senza considerare il confronto tra i materiali.

2 bambini non sono stati in grado di prendere posizione in merito alla scatola migliore (*B2: «Non lo so», B5: «Tutte e due»*). Tuttavia, durante la partita B2 ha indicato la scatola 1 come «più facile», mentre B5, quando sceglieva la scatola 2, diceva sottovoce: *«Non prendere l'arcobaleno»*. Si sono quindi resi conto della possibilità di restare fermi scegliendo la scatola 2, ma erano maggiormente attratti dal gettone variopinto (valore affettivo). Nel momento in cui gli veniva chiesto di esprimere una preferenza, probabilmente non riuscivano a scegliere.

6.3. Terzo intervento

Figura 3. La situazione è uguale alla precedente; unica differenza, la seconda scatola è stata arricchita esteticamente e appare con le sembianze di un gatto.

Ho suddiviso i comportamenti dei bambini in tre categorie.

La prima comprende 9 bambini che hanno sempre scelto di estrarre il gettone dalla scatola in cui era certo uno spostamento della pedina. Le motivazioni sono state del seguente tipo:

> *B1: È più brutta quella (scatola-gatto) perché se prendi questo (gettone variopinto) si sta fermi un giro.*
> *B4: È sempre più facile. Perché tre… con quello colorato restiamo lì fermi.*
> *B14: Perché ho paura di prender questo (gettone variopinto).*

Questi bambini sono stati in grado di analizzare e confrontare i materiali, senza farsi condizionare dalla scatola-gatto o dalle scelte dei compagni. Ho l'impressione che siano riusciti a mettere in relazione questa partita con quella svolta in precedenza (secondo intervento) e che abbiano valutato la presenza del gettone variopinto.

La seconda categoria raggruppa 4 bambini che hanno sempre deciso di giocare con la scatola-gatto, esprimendo le seguenti giustificazioni:

B11: Perché a me piacciono i gatti.
B12: Perché c'è sopra il gatto.
B17: Perché mi piaceva il gatto.

Da questi protocolli emerge che i bambini hanno indirizzato le loro scelte verso la scatola-gatto a causa del valore affettivo che le hanno attribuito. Un esempio significativo è quello di B21, che ha affermato che *«è più difficile. […].C'è quello di tutti i colori»*. Quindi il bambino si rende conto che compiendo quella scelta ha la possibilità di restare fermo un turno, tuttavia viene condizionato dalle sue emozioni, che sono dominanti rispetto ai ragionamenti cognitivi.

La terza categoria riunisce 12 bambini che hanno giocato con entrambe le scatole e, come nel secondo intervento, li ho divisi in ulteriori tre sottogruppi.

2 bambini hanno compiuto le prime estrazioni dalla scatola-gatto e quelle finali dalla scatola 1. B5 ha modificato la sua scelta dopo aver estratto il gettone variopinto e dopo essersi confrontato con l'insuccesso, mentre B22 lo ha fatto spontaneamente al momento della terza estrazione (ho l'impressione che nelle prime due sia stato condizionato dall'affettività). 2 bambini hanno sempre estratto i gettoni dalla scatola 1 e in una sola occasione hanno scelto la scatola-gatto. B7 ha affermato che l'ha fatto *«così, per cambiare»*, mentre B18 perché *«c'è quella colorata»*, ma ha aggiunto di non voler estrarre il gettone variopinto. Ho l'impressione che i 2 bambini si siano resi conto della possibilità di stare fermi scegliendo la scatola-gatto, ma che fossero comunque attratti da essa e curiosi di inserirvi la mano.

Altri 8 bambini hanno invece compiuto le estrazioni dalle due scatole, apparentemente senza seguire una logica precisa e, come per il secondo intervento, quando sceglievano la scatola 2 le motivazioni erano legate alle sfere affettiva ed emotiva:

B6: È il mio preferito. Ho un gatto a casa.
B8: Mi piace il gatto.
B20: Perché c'è il gatto.

Invece, quando sceglievano la scatola 1, dicevano:

B13: Perché non voglio stare fermo.
B18: Perché lì c'è dentro quella colorata (gettone variopinto) che vuol dire fermo.
B20: Non c'è questo (gettone variopinto).

Attraverso questi protocolli posso considerare il fatto che i bambini si rendono conto della possibilità di restare fermi scegliendo la scatola 2, ma che la dimensione estetica (affettività) della scatola-gatto è talmente forte da spingerli ad alternare le loro scelte e rischiare di confrontarsi con l'insuccesso. Ciò che ho appena affermato viene dimostrato da B2 che scegliendo la scatola 2 ha sostenuto che *«però fa niente (se si sta fermi un turno) […]. Non è importante vincere, è importante divertirsi»*.

Alla fine della partita ho di nuovo chiesto agli allievi di stabilire quale scatola era migliore per giocare. 17 bambini hanno indicato la scatola 1 e, chiedendo loro di specificare le motivazioni, 2 di loro non si sono espressi, mentre 13 hanno risposto in questo modo:

B2: Con quella (scatola-gatto) ti riposi.
B9: Questa qui (scatola 1). Perché non c'è quello che ferma. […]. Però questa qui (scatola-gatto) è bella.
B18: Perché sono solo tre pedine e lì (scatola-gatto) c'è quella colorata.
B22: Perché non ha quello di tutti i colori.

B25: *Perché questa (scatola 1) va meglio, perché qua (scatola-gatto) c'è questo (gettone variopinto). […]. E allora guarda, io non voglio più fermarmi per sempre.*

Questi bambini hanno motivato le loro risposte prendendo in considerazione il contenuto delle scatole e valutando la possibilità di stare fermi un turno scegliendo la scatola-gatto. L'esperienza con la quale i bambini erano confrontati ha offerto numerosi spunti per la formazione di competenze profonde e ha permesso loro di utilizzare un modo di pensare e di esprimersi che li avvicina a concetti probabilistici (D'Amore et al., 2004).

Come nel secondo intervento, anche in questo caso 2 bambini hanno indicato inizialmente la scatola contenente il gettone variopinto come migliore, ma discutendo con i compagni hanno cambiato idea: B20 non ha motivato la scelta, mentre B5 ha affermato che «quella (scatola 1) è più veloce e quella (scatola-gatto) è più bella».

Altri 7 bambini hanno invece indicato come migliore la scatola-gatto; 1 di questi non ha voluto giustificare la sua scelta, mentre gli altri hanno affermato che:

B6: *Il gatto è più veloce dei colori, il gatto vuol dire che ci fa vincere e quella lì (scatola 1) perdere.*
B11: *Perché i gatti mi piacciono.*
B12: *Perché è il gatto Findus.*

I bambini hanno fatto riferimento principalmente a elementi legati all'affettività e all'emotività, senza prendere in considerazione il contenuto delle scatole. Tuttavia, 2 di questi bambini hanno motivato la loro scelta aggiungendo che *«per me è più difficile, ma è meglio se è più difficile. […]. Poi mi piace il gattino.»* (B21), e che *«si sta fermi»* (B17), dunque si sono resi conto che la scatola-gatto è meno conveniente dal punto di vista probabilistico, ma probabilmente il valore che hanno attribuito al gatto era forte a tal punto da condizionare i ragionamenti cognitivi.

Ho inoltre l'impressione che 1 di questi 7 bambini abbia indicato la scatola-gatto, perché condizionato dalle risposte dei compagni. Infatti, durante il gioco aveva compiuto tutte le estrazioni dalla scatola 1. Un altro bambino non è riuscito a decidere quale scatola fosse la migliore e ha affermato che *«sono belle tutte e due»* (B8). Questa osservazione permette di capire che il bambino ha attribuito a entrambe le scatole dell'affettività, che lo ha probabilmente portato a essere indeciso. Questa indecisione ha caratterizzato tutta la partita, poiché anche nel momento in cui doveva decidere da quale scatola estrarre il gettone ha alternato le scelte.

Per concludere questo capitolo, ritengo necessario mettere in evidenza e confrontare i dati degli ultimi due interventi per verificare se c'è stato un cambiamento nel pensiero dei bambini.

Nel terzo intervento il numero di bambini che ha sempre scelto la scatola 1 è aumentato rispetto al secondo (da 2 a 9). Questo mi permette di supporre che, grazie all'esperienza di gioco e al periodo di tempo trascorso tra le due partite, i bambini abbiano avuto l'occasione di assimilare e costruire delle conoscenze in ambito probabilistico.

Anche il numero di bambini che ha deciso di giocare sempre con la scatola contenente il gettone variopinto ha avuto un incremento (da 2 a 4), probabilmente dovuto alla dimensione estetica (arricchimento della scatola) che ha favorito un avvicinamento da parte di quei bambini che non riescono ancora a dominare/gestire la loro intelligenza emotiva.

I bambini che hanno utilizzato entrambe le scatole sono diminuiti da 21 a 12. Nella scelta della scatola migliore i bambini che erano indecisi sono diminuiti (da 2 a 1), come pure quelli che hanno indicato la scatola 1 (da 18 a 17), mentre sono aumentati quelli che hanno preferito la scatola contenente il gettone variopinto (da 5 a 7). Nello specifico, 13 bambini hanno mantenuto invariata la loro scelta, mentre hanno cambiato preferenza in 12: 5 sono passati dalla scatola 2 alla scatola 1, 4 dalla scatola 1 alla scatola 2, 1 che aveva preferito la scatola 1 è diventato dubbioso, mentre i 2 bambini che erano indecisi hanno preferito la scatola 1 nel terzo intervento. Questa variazione dei dati è probabilmente dovuta all'arricchimento estetico della scatola 2 e al valore affettivo maggiore rispetto alla 1 che i bambini le hanno attribuito. Tuttavia quelli in possesso di modelli mentali più stabili e quelli che hanno costruito le conoscenze grazie all'esperienza di gioco (attraverso riuscite e insuccessi) hanno preferito la scatola che dava la certezza di muovere sempre la pedina.

È inoltre interessante osservare che, nella prima estrazione, il numero di bambini che ha scelto la scatola contenente il gettone variopinto è passato da 20 a 14. Questa diminuzione è probabilmente avvenuta grazie al fatto che i bambini si sono ricordati le regole del gioco e che hanno confrontato il contenuto delle due scatole.

7. Confronto con le domande iniziali

In questo capitolo cerco di mettere in relazione i dati analizzati con gli interrogativi di partenza, allo scopo di dare senso al lavoro di ricerca e comprendere meglio la realtà educativa indagata.

R1. Come avevo ipotizzato, i bambini dai 4 ai 6 anni di età affrontano in modi diversi le situazioni incerte nelle quali devono compiere scelte in maniera ripetuta. Alcuni mantengono invariate le preferenze e si orientano verso l'alternativa con probabilità più favorevole allo scopo del gioco. Sembrerebbe che questi bambini riescano a confrontare le situazioni e i materiali e che riescano, forse in modo intuitivo, a esprimere giudizi comparativi e a ragionare con la mentalità probabilistica (previsioni).
Altri, pur mantenendo invariate le preferenze, si direbbe che vengano condizionati da implicazioni emotive e scelgono oggetti esteticamente più belli, anche se offrono una probabilità di successo minore.
Ci sono poi bambini che alternano le loro scelte senza un ordine preciso. Sembrerebbe che questi cambiamenti si verifichino perché nasce la curiosità di esplorare i materiali, c'è un sentimento di indecisione o temono di confrontarsi nuovamente con l'insuccesso. Ho l'impressione che alcuni di questi bambini riescano, attraverso successi ed errori, a considerare le probabilità differenti di uscita e a modificare il loro comportamento.

R2. I bambini, nell'analisi di situazioni in ambito probabilistico, hanno reazioni emotive diverse. Sembra che le scelte di alcuni siano condizionate dai gusti personali, dai legami amicali, dai vissuti e dal valore affettivo che attribuiscono ai materiali. In questi casi, i bambini non riescono a gestire le loro emozioni e mettono in secondo piano i ragionamenti proba-

bilistici, le facoltà cognitive e i pensieri, anche quando li esprimono oralmente.
Sembrerebbe invece che altri bambini riescano a dominare la sfera emotiva e a prendere decisioni che non siano condizionate da questi fattori, ma che dipendano da ragionamenti cognitivi.
Ho anche notato che certi bambini sono indecisi e a volte riescono a prendere decisioni in maniera razionale, valutando la situazione reale anche dal punto di vista probabilistico, mentre altre volte le sfere affettiva ed emotiva sono dominanti e condizionano le scelte.

8. Conclusioni

8.1. Limiti, critiche e possibili modifiche

La riflessione mi ha portato a individuare alcuni limiti e critiche al mio lavoro di ricerca.

Il primo riguarda il numero ristretto di individui che sono stati coinvolti e che permette di avere a disposizione dei dati non necessariamente rappresentativi dei bambini in età prescolare.

Il secondo si riferisce agli aspetti organizzativi di tempi e spazi, ai quali ho dovuto adattarmi senza poterli strutturare in modo libero e spontaneo per renderli più adeguati al tipo di esperienza proposta. Organizzativamente si sarebbe potuto migliorare anche l'uso del materiale, che infatti prevedeva un numero di estrazioni limitato e che non ha sempre consentito di avere risultati più vicini a quelli della probabilità teorica.

Il terzo limite è costituito dall'analisi dei dati e dalle risposte agli interrogativi, che sono state espresse con un linguaggio di tipo ipotetico-valutativo. Soprattutto laddove si affrontava il discorso dell'affettività e delle emozioni, non è stato facile considerare razionalmente gli atteggiamenti dei bambini.

Anche se i risultati ottenuti in questa ricerca non sono generalizzabili, permettono comunque di conoscere un po' meglio la realtà indagata e di far emergere le ricchezze e le diversità dei bambini di questa fascia di età.

8.2. Sviluppi

Questa ricerca mi ha permesso di migliorare le esperienze professionali attraverso un approccio cognitivo e riflessivo, che mi stimola ad approfondire l'indagine, attraverso l'osservazione dei comportamenti e delle implicazioni affettive dei bambini di fronte a nuove situazioni di incertezza. A questo proposito, si potrebbero stimolare gli allievi a sviluppare l'aspetto strategico variando il materiale: aumentando il numero di gettoni presente nelle scatole (con probabilità di uscita diverse) o aumentando il numero delle scatole stesse (una potrebbe presentare una situazione impossibile).

Mi piacerebbe anche indagare se i bambini, attraverso un percorso didattico che offre esperienze nel campo della probabilità qualitativa (in tempi più lunghi), possano sviluppare e fare uso di un linguaggio specifico (utilizzando i termini in modo opportuno).

Bibliografia

Aglì F. e Martini A. (1995). *Esperienze matematiche nella scuola dell'infanzia*. Firenze: La Nuova Italia Editrice.
Angeli A., D'Amore B., Di Nunzio M. e Fascinelli E. (2011). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*. Bologna: Pitagora Editrice.
Arrigo G. e Piatti, A. (2005). Il senso della probabilità è impreciso. *Bollettino dei docenti di Matematica, nr. 50*. Bellinzona: UIM-CDC. 50-68.
Arrigo G. (2010). Le misconcezioni degli allievi di scuola primaria relative al concetto di probabilità matematica. Rapporto di ricerca. *Bollettino dei docenti di Matematica, nr. 60*. Bellinzona: UIM-CDC. 59-82.
Arrigo G., Maurizi L., Minazzi T. e Ramone V. (2011). *Combinatoria Statistica Probabilità*. Bologna: Pitagora Editrice.
Bonini, N., Hadjichristidis, C. (2009). Il sesto senso. Emozione e ragione nella decisione. Milano: Il Sole 24 Ore.
Caldelli M. L. e D'Amore B. (1989). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare*. Firenze: La Nuova Italia Editrice.
Coggi C., & Ricchiardi P. (2005). *Progettare la ricerca empirica in educazione*. Roma: Carocci editore.
D'Amore B. (1990). *Probabilità e statistica*. Milano: Franco Angeli Libri.
D'Amore B. (2001). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.
Goleman, D. (2001). *Intelligenza emotiva*. Milano: Biblioteca Universale Rizzoli Saggi.
D'Amore e S. Sbaragli (a cura di). *Pratiche matematiche e didattiche in aula. Atti del Convegno Nazionale «Incontri con la matematica» n.23*. Bologna: Pitagora. 69-74.
Dodman M. (2009). Plurilinguismo, crescita neuronale e matematizzazione in età precoce. In B. D'Amore B. e Sbaragli S. (a cura di). *Allievi, insegnanti, sapere: la sfida della didattica della matematica. Atti del Convegno Nazionale «Incontri con la matematica» n.21.* Bologna: Pitagora. 127-130.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Gabellini G. Marazzini, I., Masi F. e Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia.* Bologna: Pitagora Editrice.
Giovannoni L. (1998). Prima della prima. L'educazione matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare in un'ipotesi di continuità. In E. Barbieri, W. Monaco Foletta, G. Pennisi & M. Polti (A cura di). *La matematica nella quotidianità della scuola dell'infanzia.* (pp. 5-10). Bellinzona.
Montanari Lunghi A. (2007). Alice e la logica, la probabilità e il calcolo combinatorio. In Polti (A cura di). *La matematica nella quotidianità della scuola dell'infanzia.* (pp. 5-10). Bellinzona.
Negrini, P. e Ragagni M. (2005). *La probabilità.* Roma: Carocci Faber.
Ufficio delle scuole comunali. (2007). Profilo professionale di riferimento per i docenti delle scuole comunali. [Brochure]. Bellinzona: USC.

3. Gocce di didattica Spunti e riflessioni dalla ricerca in didattica della matematica

Alberto Piatti[1]

Una nuova rubrica

Lo scopo di questa nuova rubrica è fornire ai docenti di matematica di ogni ordine scolastico spunti e riflessioni sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica partendo da risultati pubblicati in articoli di didattica della matematica apparsi in riviste e pubblicazioni internazionali.

Ogni intervento partirà da una citazione di un articolo di ricerca, che fungerà da stimolo per una riflessione libera del curatore sul tema e per la formulazione di una serie di suggerimenti, utili per interrogarsi in merito alla propria pratica come insegnante.

Il linguaggio utilizzato è volutamente semplice, sintetico e informale. Allo stesso modo si rinuncia esplicitamente a qualsiasi formalismo scientifico. Gli spunti forniti e le opinioni espresse, pur essendo suggerite dall'articolo considerato, sono da considerarsi un punto di vista soggettivo dell'autore della presente rubrica, che se ne assume la completa responsabilità, e non un risultato di ricerca.

Speriamo che questa nuova rubrica possa contribuire ad animare un dibattito e una riflessione tra i docenti di matematica. A questo proposito, riceviamo volentieri reazioni, riflessioni e prese di posizione dei nostri lettori che potranno essere pubblicate di volta in volta nella rubrica in risposta agli spunti forniti nel numero precedente. L'autore rimane anche a disposizione dei lettori per eventuali discussioni e approfondimenti.

1. Responsabile della formazione dei docenti di scuola media presso la SUPSI-DFA a Locarno e docente di didattica della matematica. alberto.piatti@supsi.ch

1. Il concetto di alfabetizzazione probabilistica e l'insegnamento della probabilità nella scuola dell'obbligo

«Probability is not a tangible characteristics of events, but rather a perception, *whether expressed via a formal mathematical notation or informal means, of the chance of likelihood of occurence of events.»*[2]

La probabilità non è una caratteristica tangibile degli eventi, quanto piuttosto una percezione, espressa in termini matematici o informali, della possibilità o della verosimiglianza che un dato evento si verifichi.

L'insegnamento della probabilità persegue due scopi distinti ma non esclusivi: lo sviluppo della teoria matematica alla base della teoria della probabilità e della statistica, e lo sviluppo delle competenze necessarie ad ogni cittadino per affrontare consapevolmente e in autonomia situazioni di vita quotidiana caratterizzate da incertezza. A mio modo di vedere, nella scuola dell'obbligo, dovrebbe essere data maggiore enfasi al secondo aspetto piuttosto che al primo, visto il carattere di formazione generale del cittadino che la contraddistingue. Paradossalmente, è stato ampiamente dimostrato che, nella realtà dei fatti, il primo aspetto ha spesso la prevalenza sul secondo, che spesso non viene nemmeno trattato.

Qualsiasi situazione della vita quotidiana può essere interpretata sia in modo deterministico, sia in modo probabilistico. Il ragionamento deterministico consiste nel considerare un unico scenario possibile, e interrogarsi, nel caso in cui lo scenario non si sia verificato, sulle possibili cause. Ad esempio ragioniamo in maniera deterministica quando non carezziamo un cane perché i cani mordono. Il ragionamento probabilistico invece consiste nel considerare diversi scenari possibili e la rispettiva probabilità. Ragioniamo ad esempio in maniera probabilistica quando vedendo il cielo nuvoloso decidiamo (o meno) di portare con noi un ombrello considerando che potrebbe (non) piovere.

Il ragionamento deterministico è più veloce e meno faticoso, ma utilizza peggio l'informazione disponibile e porta a soluzioni estreme (di rischio o di evitamento). Il ragionamento probabilistico è più lento e faticoso, ma utilizza molto meglio l'informazione e permette di considerare esplicitamente i rischi. Di solito i bambini piccoli ragionano in maniera deterministica, mentre gli adulti, di regola a partire dalla scuola media, sono in grado di ragionare in entrambi i modi. Spesso non si tratta di capire se una situazione sia probabilistica o deterministica, ma decidere in che modo percepirla per ragionare e decidere di conseguenza.

L'insieme delle competenze necessarie per ragionare probabilisticamente e decidere di conseguenza in maniera autonoma in situazioni della vita quotidiana caratterizzate da incertezza è stato denominato *alfabetizzazione probabilistica*. Una mancanza di alfabetizzazione probabilistica può spingere una persona a percepire in modo deterministico anche situazioni complesse, giungendo di conseguenza a decisioni e deduzioni che spesso sono troppo rischiose o, viceversa, troppo semplicistiche.

2. Tratta da: Iddo Gal (2005) Towards probability literacy for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In Graham A. Jones (editor). Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning. 39-63. Mathematics education library, volume 40. Springer.

È dunque fondamentale che la scuola dell'obbligo si preoccupi di sviluppare queste competenze in tutti gli allievi.

L'alfabetizzazione probabilistica è stata in particolare definita da Gal come un insieme di attitudini e conoscenze necessarie nella vita quotidiana per (1) interpretare giudizi probabilistici prodotti da altri, (2) esprimere la propria opinione in situazioni d'incertezza e (3) prendere decisioni ponderate in situazioni caratterizzate da incertezza. Le attitudini che Gal considera come necessarie a questo fine sono fondamentalmente tre: (a) l'atteggiamento critico, necessario per dubitare, (b) l'autostima, necessaria per essere pronti ad esprimere una propria opinione e (c) un'attitudine definita nei confronti del rischio (una propensione o un'avversione al rischio), necessaria per essere in grado di prendere decisioni. Le conoscenze necessarie sono invece cinque: (i) avere un'idea intuitiva delle idee fondamentali del ragionamento probabilistico, come ad esempio i concetti di variabile e d'indipendenza, (ii) conoscere i diversi modi in cui una probabilità può essere stimata, (iii) possedere dei termini in linguaggio naturale necessari per esprimere situazioni di incertezza e conoscere i termini tecnici utilizzati in probabilità e statistica, (iv) essere in grado di riconoscere l'incertezza e il ruolo del ragionamento probabilistico all'interno di un contesto reale e (v) essere in grado di porsi le domande giuste di fronte a un giudizio probabilistico espresso da altri.

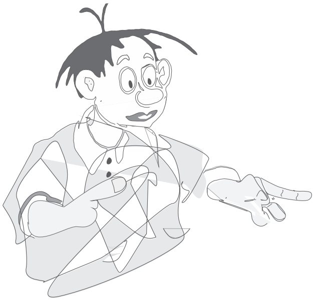
L'insegnamento della probabilità nella scuola dell'obbligo, ed in particolare nella scuola media, si dovrebbe dunque occupare di tutti questi aspetti.

Tre consigli concreti per sviluppare l'alfabetizzazione probabilistica nella scuola dell'obbligo:

1. Partire dal contesto e da situazioni reali e non dalla teoria e da situazioni artefatte. Per sviluppare alfabetizzazione è necessario partire da situazioni reali e autentiche, vicine al vissuto dei ragazzi, anche se non è possibile modellarle in maniera esatta tramite modelli matematici. Questo richiede però il coraggio di…
2. … fare probabilità senza numeri. Spesso è più importante essere in grado di identificare in maniera esaustiva ed esclusiva gli scenari possibili in una certa situazione, oppure mettere in ordine diversi scenari a seconda di quanto li si giudica probabili, oppure selezionare lo scenario più (o meno probabile), piuttosto che essere in grado di associare ad ogni scenario un numero. Si tratta dunque più di un'attività di logica che di aritmetica. Fondamentale è però che queste scelte siano argomentate. È dunque necessario che…
3. … gli allievi possano confrontarsi tra di loro, producendo e interpretando tra pari giudizi probabilistici e confrontando le diverse decisioni. Questo è possibile solo se si prediligono forme didattiche che facilitano lo scambio allievo-allievo rispetto allo scambio allievo-docente, come ad esempio i lavori di gruppo o le messe in comune.

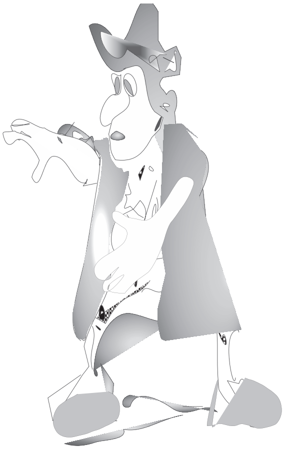
Quiz numero 50: Un'occasione d'oro

Aldo Frapolli



Caro Joe,
siamo al numero 50, un'occasione d'oro, come
si usa dire nel caso dell'anniversario di matrimonio.
Fra le tante proprietà di questo bel numero
voglio sottoporti questa:
*si tratta del numero naturale più piccolo che può
essere espresso come somma di due quadrati
(diversi da 0) in esattamente* ***due modi*** *diversi.*

$\mathbf{50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2}$



Me ne avevi già parlato,
così mi sono premunito e ho calcolato
alcuni termini della successione
formata da tali numeri.

Ecco i primi cinque: 50, 65, 85, 125, 130, …

Scommetto che hai pensato di chiedermi di
individuare il suo 50-esimo termine!

No, no! La mia sfida è più semplice:
*fino a quale numero del QUIZ dovremmo
arrivare per avere il più piccolo numero
naturale che si può scrivere come somma
di due quadrati in esattamente* ***tre modi*** *diversi?*

Chi di voi affezionati lettori è disposto a raccogliere quest'ultima sfida di Archie, rispondendo alla domanda seguente?

Fino a quale numero dovremmo arrivare con il QUIZ per festeggiare il più piccolo numero naturale che si può scrivere come somma di due quadrati in esattamente ***tre modi*** *diversi?*

Per questa occasione, ad attendere l'autore della migliore risposta, ci sarà un premio a sorpresa veramente speciale.

Soluzione del Quiz numero 49

Ecco la soluzione proposta da Paolo Hägler, assiduo frequentatore del QUIZ, che si aggiudica il libro messo in palio per il contributo più completo e chiaro fra quelli pervenutici.

«Per prima cosa tracciamo le linee che suddividono il foglio A4 in 8 rettangoli A7, sia da un lato sia dall'altro del foglio. Possiamo osservare che, se percorriamo in ordine crescente di numero i diversi rettangoli, solo il 2 ed il 3 non hanno un lato in comune. Il fatto che tutti gli altri numeri sono vicini ci aiuta, basta effettuare sempre e solo le piegature che sovrappongono soltanto numeri vicini, ossia tenendo i numeri vicini all'interno della piegatura (regola base). Il problema sta nell'impilare, uno dopo l'altro, il 2 ed il 3. Il 2, oltre all'1, ha per vicini il 7 ed il 5. La vicinanza tra 2 e 7 implica che tutti i numeri dal 3 al 6 vanno infilati lì in mezzo (condizione A) e quella tra 2 e 5 implica che il 3 ed il 4 vanno infilati lì in mezzo (condizione B). Ragionando con il numero 3, invece, bisogna infilare il 4 ed il 5 tra il 3 ed il 6 (condizione C).

La condizione C si potrebbe risolvere facilmente con la regola base, piegando soltanto la metà destra del foglio A4, ed è quello che faremo, ma non subito, non potendo piegare solo metà foglio. Per poter fare ciò, occorre, come prima mossa, piegare il foglio a metà tra il 2 e il 7 a sinistra, ed il 5 e il 6 a destra. Possiamo farlo mettendo i numeri all'interno o all'esterno (le due soluzione sono simmetriche). Per il seguito, consideriamo di mettere i numeri all'interno.

Posizioniamo il foglio A5 di modo che la piegatura resti sul lato destro e la parte che vediamo in alto dopo la piegatura sia la metà destra del foglio A4.

Facendo questa mossa abbiamo infranto la regola base, poiché abbiamo sovrapposto il 2 ed il 5 (anche 0-4 e 1-3, ma non avendo lati in comune non ci sono problemi), infrangendo la condizione B. Per poter rispettare questa condizione, come seconda mossa, pieghiamo soltanto la metà destra del foglio A4 (ossia la parte in alto del foglio A5), di modo da soddisfare la condizione C, ossia lungo la linea che separa il 4 ed il 5 (parte superiore) dal 3 e dal 6 (parte inferiore), tenendo verso l'interno della piegatura il lato del foglio A4 senza i numeri (abbiamo impilato il 3 ed il 4, ed anche il 5 ed il 6).

A questo punto possiamo soddisfare contemporaneamente le regole A e B. La terza mossa sarà piegare lungo la linea che separa il 3 ed il 4 a sinistra dal 5 e dal 6 a destra, tenendo i numeri 4 e 5 all'interno (e quindi 3 e 6 all'esterno). Bisogna quindi infilare i rettangoli 3 e 4 tra il 2 ed il 5.

A questo punto è fatta. Abbiamo un foglio A6, dove a sinistra ci sono i numeri 0 e 1 sovrapposti, e dall'altra i numeri dal 2 al 7 sovrapposti. Ora basta seguire la regola base, e la quarta e ultima mossa è piegare lungo la linea restante, che separa le due metà, tenendo all'interno l'1 ed il 2».

Illustrazione del procedimento descritto, mediante foto
realizzata dalla redazione

Grazie a tutti coloro che si sono cimentati e complimenti al vincitore!

2. Il gioco «Dado-differenza»

Stefan Meyer[1]

«Dice-Difference» is a game similar to the well-known Swiss card-play «Differenzler» in which every player fixes his number of points he probably can reach in a round according to the value of his nine cards. The differences between the estimation and the obtained points will been added at the end of a couple of rounds. In the «Dice-Difference-Game» every color of a dice represents a position of the decimal number system. Players declare a target-number (integer or decimal fraction). Then they play at dice trying to reach the target-number as well as possible. After reaching or surpassing the target-number, the players note the differences between target and obtained number for every round. The winner has the smallest sum of a couple of differences. It is a funny game and a mathematical experience.

1. Introduzione

Il gioco «Dado-differenza[2]» è stato sviluppato partendo da quello detto «Jass-differenza», più difficile, ma altrettanto divertente, molto conosciuto nella Svizzera tedesca[3]. In esso il giocatore può vincere sia con carte di valore alto sia con carte di poco valore. Deve esaminare le sue carte e stimare quanti punti potrà raggiungere giocando contro uno, due o tre giocatori (Egg, 1989).

Il gioco «Dado-differenza» offre meno possibilità di operare scelte tattiche e risulta quindi più facile. Inoltre, difficoltà e complessità matematica possono essere adattate a piacere.

Oltre al divertimento, il gioco è un buon mezzo per esercitare la stima dei numeri e la capacità di prendere decisioni strategiche. I giocatori agiscono considerando sempre il punteggio acquisito e quello che hanno dichiarato di poter raggiungere (traguardo). Devono quindi considerare insiemi variabili di numeri, espressi nell'abituale sistema decimale, calcolare somme e differenze (con passaggi della decina e riporti) nell'intervallo numerico prefissato. Inoltre, prima di ogni lancio di dadi, devono dichiarare se il punteggio che otterranno intendono sommarlo o sottrarlo a quello raggiunto al momento. Il giocatore deve controllare e verificare la correttezza dell'applicazione delle decisioni dichiarate e del calcolo dei suoi avversari, quindi il coinvolgimento è immediato e importante. Lo possono fare redigendo tabelle nelle quali registrano i risultati parziali. L'andamento del gioco e i risultati numerici forniscono abbondante materia per riflessioni sulla ma tematizzazione. Ringrazio Gianfranco Arrigo per gli importanti suggerimenti. Di seguito presento alcuni esempi di scelta delle regole del gioco e descrivo qualche giocata.

1. Docente della *Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik* di Zurigo.
2. Nota di traduzione: in tedesco, «Würfel-Differenzler».
3. Il gioco «Jass-Differenzler» è diventato popolare anche grazie alla trasmissione televisiva della DRS «Samschtig Jass». In esso il giocatore dichiara all'inizio il punteggio che pensa di poter realizzare.

2. In che cosa consiste il gioco?

Nel gioco «Dado-differenza» si deve cercare di raggiungere un numero prefissato con meno lanci di dadi possibile. I giocatori combinano fortuna, capacità di prendere decisioni tattiche e calcolo mentale.

La differenza dal numero dichiarato (traguardo concordato dai giocatori) deve essere ridotta al minimo. Occorre anche stabilire le regole del gioco. La variante più semplice consiste nel lanciare due dadi e aggiungere la somma dei punti ottenuti al punteggio parziale. Il tutto può essere riportato in una tabella. Se si è troppo vicini al traguardo, o se lo si è superato, è possibile continuare dichiarando di voler sottrarre il punteggio che si otterrà. Le regole del gioco devono essere discusse e approvate all'inizio. Nel nostro esempio il campo numerico è limitato ai naturali minori di 100. Come detto, il traguardo può essere abbassato o alzato, a seconda delle conoscenze dei giocatori. Nella scuola dell'infanzia si può eventualmente usare un solo dado che simboleggia le unità. In classi della scuola elementare si può giocare con dadi di colori diversi (uno per le unità, uno per le decine, uno per le centinaia, uno per le migliaia,…).

3. Materiale necessario

Due dadi, per esempio blu, per le unità.
Due dadi, per esempio bianchi, per le decine.
Due dadi di un altro colore per le centinaia, ecc.
Foglio, matita e gomma.
Eventualmente altri dadi colorati per decimi, centesimi, …
Si possono anche usare dadi con 8 facce, con 10 facce, …

migliaia	centinaia	decine	unità	,	decimi	centesimi
						

differenziazione e complessità

Figura 1. Esempio di convenzione

La figura mostra una convenzione adottata, secondo la quale i dadi bianchi (uno o due) indicano le unità, mentre quelli blu i decimi. Nel protocollo di gioco occorre scrivere il numero 4,6. Con dadi di quattro colori diversi si possono stabilire convenzioni più articolate e altri traguardi.

migliaia	centinaia	decine	unità	,	decimi	centesimi
						

Figura 2. Altro esempio di convenzione

La figura illustra una variante con dadi ottaedrici. Dadi rossi per i decimi, verdi per i centesimi. Nel protocollo di gioco occorre scrivere il numero 0,17. Con dadi di 10 o più facce (per esempio prismi che si fanno rotolare oppure ruote della fortuna) il numero delle possibili operazioni risulta molto più elevato (Padberg, 2005).

4. Le strutture del gioco

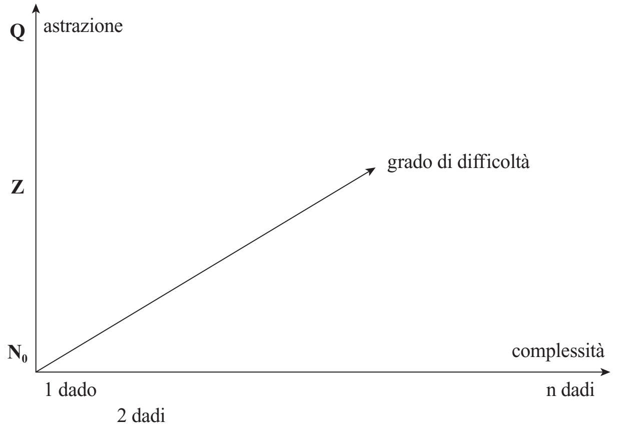


Figura 3. Grafico della difficoltà.

La figura mostra chiaramente le strutture del gioco. All'inizio i giocatori si muovono nella zona dei numeri naturali diversi da zero (N) e usano un solo dado. Inoltre stabiliscono un traguardo adeguato. Con l'acquisizione graduale di esperienza e sapere e anche con l'avanzare dell'età, il gioco dei dadi può diventare sempre più complesso (nell'insieme N_0 o Z) e anche i traguardi possono diventare più difficili e astratti (scelti nell'insieme Q dei numeri razionali). Alla fine il gioco può anche essere descritto algebricamente. Il grafico mostra anche un altro elemento di sintesi che si riallaccia al concetto di accelerazione cognitiva. Da una parte abbiamo la teoria genetica di Piaget (1983): come nel gioco delle biglie, ci si chiede come si sviluppa l'applicazione e la consapevolezza delle regole. Dall'altra parte sono interessate zone di sviluppo integrate nella progettazione dei processi psicologici e pedagogici (Wygotski, 1986). La sintesi dei due aspetti si realizza con successo nel concetto di accelerazione cognitiva (Adey e Shayer, 1994; Adey, 2004, 2008). In questo modo gli allievi sono coinvolti per più anni, una volta la settimana, in discussioni aperte su temi ben definiti. Queste attività si rivelano importanti per la crescita dell'apprendimento in tutte e discipline.

5. Esempio di una semplice sequenza di gioco

Due (o più) bambini si siedono intorno a un tavolo. Ciascuno dispone di due dadi bianchi e due blu, i bianchi per le decine e i blu per le unità. A ogni giocata i due, Max e Sofia, devono lanciare i dadi, ma sono completamente liberi nella scelta di quali dadi usare. Il gioco è costituito di più giocate con le quali si cerca di raggiungere o di avvicinarsi il più possibile al traguardo.

a) Scelta di un traguardo

I giocatori e le giocatrici si accordano su un numero che sarà il loro traguardo; nell'esempio è stato scelto il numero 99.

b) Un primo gioco

giocate			**somma dei punti**	
nr.	Max	Sofia	Max	Sofia
1	80	16	80	16
2	5	70	85	86
3	1	15	86	101
differenza a 99			13	2

Tabella 1. Protocollo di gioco

La tabella illustra come ambedue i due giocatori hanno concluso il gioco in tre giocate. Sofia nella terza giocata partendo da 86 punti ha scelto di tirare un dado bianco e due blu e ha ottenuto un punto sul dado bianco che significa 10, un due e un tre sui dadi blu, in totale 15 punti. Max ha invece deciso di tirare solo un dado blu e ha ottenuto un punto. Il 99 è stato superato (da Sofia) e allora i due hanno calcolato la differenza a 99. Per Max è 13, per Sofia è 2. Questi numeri sono stati riportati nella tabella 2.

c) Conclusione di una seduta di giochi

Nella nuova tabella sono riportate solo le differenze riscontrate alla fine di ogni gioco. La seduta si compone di 5 giochi.

protocollo delle differenze		
nr.	Max	Sofia
1	13	2
2	0	21
3	16	5
4	18	0
5	7	22
somma	54	50

Tabella 2. Protocollo di una seduta di 5 giochi

Nella tabella sono riportate le differenze riscontrate dai due giocatori nei 5 giochi effettuati. Si può dedurre chi dei due nel totale dei 5 giochi ha ottenuto si è avvicinato di più al traguardo. Per stabilirlo, si possono calcolare le somme delle singole differenze. Con questo criterio risulta vincente Sofia.

6. Varianti del gioco

Si possono effettuare giochi semplici o complessi. Si può anche organizzare un torneo a eliminazione: il vincente di una seduta passa al turno successivo, fino ad arrivare a un'unica finale.

7. Matematizzazione

È sotto gli occhi di tutti che in questa attività ludica sono presenti obiettivi del programma di matematica, operazioni che vengono esercitate, convenientemente differenziate e in parte automatizzate. Negli ultimi decenni, molti progetti e teorie hanno dimostrato che questa forma di apprendimento e di esercitazione è molto valida ed efficiente (Oerter, 2012; Kamii, 1985, 1994, 2000, 2004; Meyer, 2006, 2007; Ramani & Siegler, 2008). Queste attività possono costituire oggetto di insegnamento nelle scuole di formazione[4] per insegnanti o anche applicate direttamente in progetti con allievi che incontrano serie difficoltà di apprendimento.

Accanto agli aspetti di esercitazione e automatizzazione, le esperienze di gioco costituiscono una ricca base per lo sviluppo di attività matematiche (cfr. Lehrplan 21). Al centro si situano domande dei bambini che convertono in modo naturale nell'azione gli aspetti concettuali. Le domande generano compiti significativi, di tipo chiuso o aperto. L'attività matematica è radicata nei desideri personali e sociali di conoscere (Imola, 2010; Gruschka, 2011).

Possono sorgere domande di questo genere:

Quale coppia di giocatori ha ottenuto la differenza minima? Perché?

Chi nella prima seduta di giochi ha ottenuto la minima differenza? I bambini o le bambine?

È vero che il vincitore finale è quello che ha ottenuto la differenza minima nel totale delle sedute?

Quale fattore ha permesso ai vincitori e alle vincitrici di spuntarla sugli altri? Forse il fatto che in tante giocate hanno usato pochi dadi, oppure perché li hanno usati tutti?

Ecc.

Nella messa in comune delle varie esperienze di gioco si toccano parecchi aspetti dell'attività di apprendimento della matematica: descrivere, interpretare, comunicare, argomentare, fondare, calcolare (calcolo scritto e mentale), interpretare, riflettere, ricercare. La scelta delle attività dipende dalle domande poste.

4. Per esempio nelle Alte scuole di pedagogia curativa (in tedesco Hochschule für Heilpedagogik, HfH).

Bibliografia

Adey, P., Shayer, M. (1994). Really Raising Standards: Cognitive Intervention and Academic Achievement. London: Routledge Chapman & Hall.
Adey, P. (2004). Accelerating the development of general cognitive processing. In A. Demetriou, Raftopoulos, A. (Hrsg.), Cognitive Developmental Change (S. 296-317). Cambridge: Cambridge University Press.
Adey, P. (Hrsg.). (2008). Let's Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School. London: GL assessment.
Egg, G. (1989). Puur Näll As (6. Aufl.). Neuhausen am Rheinfall: AGM AGMüller.
Gruschka, A. (2011). Verstehen lehren. Ein Plädoyer für guten Unterricht. Stuttgart: Philipp Reclam.
Imola, A. (2010). Empathie und verstehen. Die Methode von Nicola Cuomo. Verfügbar unter: http://rivistaemozione.scedu.unibo.it [18.03.2012]
Kamii, C. (1985). Young Children Reinvent Arithmetic. New York: Teachers College Press.
Kamii, C. (1994). Young children continue to reinvent arithmetic. 3rd Grade. New York: Teachers College Press.
Kamii, C. (2000). Number in preschool & kindergarten (8th Printing). Washington: National Association for the Education of Young Children.
Kamii, C. (2004). Young Children Continue To Reinvent Arithmetic. 2nd Grade (2nd ed). New York: Teachers College Press.
Meyer, S. (2006). Das flexible Interview. Verfügbar unter: http://public.bscw-hfh.ch/d_1/FI_www/ [10.10.2009]
Meyer, S. (2007). Kommt, wir jassen und mathematisieren (S. 95): Hochschule für Heilpädagogik, Zürich.
Oerter, R. (2012). Lernen en passant: Wie und warum Kinder spielend lernen. Diskurs Kindheits- und Jugendforschung(4), 389-403.
Padberg, F. (2007). Didaktik der Arithmetik (3., erw. u. vollst. aktual. Neuauflage). Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
Piaget, J. (1983). Das moralische Urteil beim Kinde (2., veränderte Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.
Ramani, G. B., Siegler, R.S. (2008). Promoting Broad and Stable Improvements in Low-Income Children's Numerical Knowledge Through Playing Number Board Games. Child Development, 79(2), 375-394.
Wygotski, L. S. (1986). Denken und Sprechen. Frankfurt a.M.: Fischer.

1. Matematicando: a spasso con la Matematica per le strade di Locarno

Programma

Venerdì 16 e sabato 17 maggio
Venerdì 16 maggio: iscrizione obbligatoria
Sabato 17 maggio: fruizione libera

Laboratori (durata 45 minuti).
Orari di inizio previsti per venerdì 16 maggio:
9.00; 10.00; 11.00; 12.45; 13.45; 14.45

1. La geometria nell'origami

Paolo Bascetta e Francesco Decio, Centro Diffusione Origami)

Età: a partire da 4 anni **Breve descrizione:** Esposizione e spiegazione di forme geometriche piane e solide ottenute con la tecnica dell'origami, ovvero senza l'uso di forbici e collanti: triangoli, parallelogrammi, trapezi e poligoni regolari. Poligoni stellati. Curve notevoli: circonferenza, parabola, ellisse e iperbole. Spirali. Solidi platonici, poliedri stellati, scheletri di poliedri. Tassellazioni piane. Trasformazioni geometriche. Durante i laboratori verranno insegnati alcuni interessanti modelli geometrici adatti ad essere inseriti nella didattica fin dalla scuola dell'infanzia.

2. Un paese per giocare

Maria Avaltroni, *Alberto Marchetti* ***e*** *Miranda Tassi,*
Istituto Comprensivo «G. Rossini», San Marcello, Ancona

Età: a partire dai 4 anni **Breve descrizione:** Se verrai a giocare nel nostro atelier potrai scoprire come un pastore può trasportare le pecore dall'altra parte del fiume senza farsele mangiare dal lupo. Troverai inoltre un ***paese fantastico*** con giochi del tempo che fu, labirinti, lumache che scavalcano i muri e tanti, tanti problemi da risolvere.

3. «Se non giochi, non ti diverti, se non ti diverti, non impari»

Studenti ed ex-studenti secondo anno Bachelor del DFA - SUPSI
con la collaborazione di Rossana Falcade e Aline Pellandini

Età: 4-6 anni **Breve descrizione:** Il laboratorio, gestito dalle studentesse del secondo anno Bachelor del DFA, propone giochi da tavolo ideati, progettati e realizzati per gli allievi della scuola dell'infanzia. Si tratta di giochi differenziati che hanno lo scopo di permettere anche ai più piccoli di sviluppare competenze matematiche, divertendosi.

4. Le avventure di Bee-bot

Giorgio Häusermann e Pamela De Lorenzi,
Il Giardino della scienza SE Ascona e DFA - SUPSI

Età: da 4 a 8 anni **Breve descrizione:** Il Bee-bot è un'ape robot programmabile di solida costruzione, che percorre passi di 15 cm in avanti e indietro e rotazioni di 90°. Si possono programmare fino a 40 movimenti. Grazie al suo funzionamento estremamente semplice è adatto ai bambini della scuola dell'infanzia e del primo ciclo della scuola elementare. Il Bee-bot può essere arricchito con nu-

merosi accessori e ne esiste una versione a forma di «scavatrice». I Bee-bot sono stati utilizzati nella puntata di *Colazione con Peo* del 26 novembre 2011 che, può essere visionata all'indirizzo:
http://la1.rsi.ch/peo/welcome.cfm?idg=0&ids=3987&idc=42516.

5. Giochi probabilistici
Società Matematica della Svizzera Italiana - SMASI

Età: da 4 a 8 anni **Breve descrizione:** Il bambino è invitato a partecipare a semplici giochi nei quali, per riuscire a vincere il premio, occorre effettuare stime di probabilità, cioè, in pratica, rispondere a domande del tipo: quali scelte conviene operare per avere più probabilità di guadagnare il premio?

6. La mente in gioco. Giochi di strategia, una vera e propria palestra per la mente
ForMath

Età: da 4 a 10 anni **Breve descrizione:** Da un grande «classico moderno» come *Hex* al semplicissimo ma intrigante *Germogli*, dal *Nim* all'antico gioco africano *Oware,* dal *Quarto* al *Pylos*, i giochi proposti permettono partite veloci, divertenti e stimolanti anche per i principianti. L'obiettivo è quello di sviluppare nei ragazzi, attraverso l'approfondimento di alcuni giochi di strategia, la capacità di analizzare una situazione, rispettare le regole del gioco, elaborare tattiche efficaci, pianificare strategie, esaminare razionalmente il comportamento proprio e altrui.

7. Giochi motori e matematica
Alejandro Arigoni e Flavio Rossi, DFA – SUPSI
con la collaborazione di Claudio Ruggeri,
docente di educazione fisica, scuola elementare di Losone

Età: da 4 a 11 anni **Breve descrizione:** Attività motorie e matematica, due pratiche che in apparenza sembrano distanti, ma che se viste insieme possono diventare accattivanti. Il laboratorio propone attività di gioco, differenziate per la scuola dell'infanzia e la scuola elementare: corse e numeri, lanci e calcoli: quando la matematica è vissuta con il corpo e si mette in gioco.

8. La matematica: attività reali e virtuali con Cabri Elem
Gruppo Cabri Elem Ticino con la collaborazione di Silvia Fumagalli,
classe 1C di Stabio, I Circondario e Claudio Fenaroli,
classe III di Paradiso, II Circondario

Età: a partire dai 5 anni **Breve descrizione:** Nel laboratorio saranno presentate alcune attività di aritmetica e di geometria per la scuola dell'infanzia ed elementare, realizzate alternando proposte concrete e proposte virtuali, utilizzando quaderni creati dal gruppo *Cabri Elem Ticino.* I bambini potranno così appassionarsi alla matematica e scoprirla in un nuovo ambiente virtuale.

9. Diamo i numeri!
Studenti secondo anno Bachelor del DFA - SUPSI,
con la collaborazione di Miriam Salvisberg e Silvia Sbaragli

Età: da 5 a 7 anni **Breve descrizione:** Fin dalla scuola dell'infanzia i bambini sono affascinati dai numeri che incontrano e scoprono nel mondo che li circonda: nel calendario, nella sveglia, nelle targhe delle auto, … e che spesso rappresentano una forte componente delle esperienze che vivono. Partendo dalla considerazione che il mondo è pieno di numeri, saranno proposte delle giocose attività per avvicinare i bambini, in modo curioso e accattivante, ai diversi aspetti dell'apprendimento numerico.

10. Robotica Lego e Polydron. Esperienze didattiche in continuità dalla scuola dell'infanzia e alla scuola elementare

Lorella Campolucci e Danila Maori - MIR, Corinaldo e RSDDM, Bologna

Età: da 5 a 12 anni **Breve descrizione:** Laboratori didattici realizzati con materiali concreti: le forme geometriche Polydron e i sistemi di robotica LEGO Education. Tali strumenti consentono un approccio didattico che coinvolge attivamente gli studenti nel loro processo di apprendimento e di costruzione delle conoscenze, promuovendo il pensiero creativo, il lavoro di gruppo e il *problem solving.*

11. La geometria con le bolle di sapone

ForMath

Età: a partire da 6 anni **Breve descrizione:** Che cos'è una bolla di sapone? Perché sono tutte rotonde? Partiremo dall'osservazione di questi fenomeni con occhio più scientifico, per approdare a piccoli passi nel mondo matematico delle bolle. Con una serie di esperimenti e semplici materiali saranno studiate le bolle di sapone e le incredibili proprietà delle superfici minime. Attraverso un affascinante viaggio tra arte e scienza, avente per filo conduttore queste meravigliose bolle, scopriremo insieme quali sono le leggi che regolano la natura. La bellezza o l'economia dei materiali?

12. Problemi grandi e piccoli

Luca Crivelli, classe 2-3 di Lattecaldo, I Circondario e Silvia Fioravanti, classe 5A di Vezia, V Circondario

Età: dai 6 agli 11 anni **Breve descrizione:** Il mondo dei problemi è variegato e divertente, per viaggiare al suo interno c'è bisogno di creatività e di un pizzico d'ingegno. Passeggiando a Königsberg con Eulero, tentando di tenere sotto controllo famiglie di conigli sempre più numerose, aiutando mercanti in difficoltà e celebri allievi o viaggiatori del tempo passato, i bambini avranno l'opportunità di avere un assaggio della storia della matematica e di confrontarsi con problemi famosi e meno conosciuti. Variando la complessità delle situazioni e gli strumenti a disposizione, ogni risolutore avrà pane per i suoi denti.

13. Idee, esperimenti e racconti dalla storia della scienza

Emanuele e Beniamino Danese, Reinventore, Verona

Età: a partire da 8 anni **Breve descrizione:** La storia della scienza mostra come gli esperimenti incuriosiscono, risultando familiari e adatti a ogni età. *Reinventore* è un'impresa che raccoglie, integra e diffonde questa tradizione di insegnamento scientifico, attraverso varie attività. In questo laboratorio, in modo amichevole e informale, vengono mostrati ed eseguiti i più vari esperimenti scientifici, coinvolgendo gli stessi partecipanti, con un linguaggio adatto ad ogni età.

14. Situazioni probabilistiche intriganti. Scommettiamo? Prevediamo?

Società Matematica della Svizzera Italiana - SMASI

Età: a partire da 9 anni **Breve descrizione:** Prevedere esattamente il futuro o ciò che ci è nascosto è impresa impossibile. La matematica può però aiutare, permettendo di stabilire ciò che è più probabile. Il partecipante è messo di fronte ad alcune situazioni semplici nelle quali è invitato a indicare la soluzione (l'ipotesi) più probabile. Lo può fare mediante una stima personale oppure con un semplice calcolo di probabilità.

Spettacoli previsti venerdì e sabato

1. Fisica sognante. Riflessioni su matematica, fisica, giocoleria e didattica

Federico Benuzzi

Età: a partire da 4 anni **Breve descrizione:** Federico Benuzzi, giocoliere professionista e insegnante di fisica e matematica, è autore e interprete di *«FISICA SOGNANTE: per divertirsi, interrogarsi, capire»,* una conferenza-spettacolo che unisce matematica, fisica e giocoleria per spiegarne i tempi, i concetti e i modi di «pensare» di una disciplina rispetto all'altra. Durante il convegno lo vedrete affrontare nuovamente il diablo (con il quale si è esibito anche al circo di San Pietroburgo, Russia – parte adatta ad un pubblico di tutte le età), ma anche tutta la giocoleria lanciata (palline, clave, cerchi – più adatta ad un pubblico che conosce un po' di matematica e fisica).

2. Ma la palla è rotonda? La scienza del gioco del calcio e degli altri giochi con palle, palloni e palline

Giorgio Häeusermann, Il Giardino della scienza, DFA – SUPSI

Età: a partire da 6 anni **Breve descrizione:** Dicono che il gioco più bello del mondo sia il calcio: basta avere qualcosa che assomigli a una palla e subito viene voglia di dargli un calcio. Ma è proprio così semplice la scienza del calcio? Proviamo a scoprirlo: dal gioco dei più piccoli al moto dei pianeti, fino ai gol dei grandi campioni!

3. «Il gioco musicale dei dadi» di W. A. Mozart

Giovanni Galfetti, DFA – SUPSI di Locarno e Andrea Pedrazzini

Età: a partire da 8 anni **Breve descrizione:** Il *«Musikalisches Würfelspiel»* (KV 516f) di Wolfgang Amadeus Mozart venne pubblicato postumo nel 1792, un anno dopo la morte del compositore, che lo definì *«Gioco per comporre musica con i dadi senza intendersi di musica o di composizione».* Giocare è estremamente semplice. A disposizione del giocatore vi sono 176 battute musicali, ripartite in due tabelle che ne contengono 88 ciascuna e che servono alla composizione di un Walzer di tempo ternario; altre 176 battute (pure ripartite in due tabelle) permettono la composizione di una Contraddanza (tempo binario). Ascolteremo quali composizioni usciranno lanciando i dadi.

4. Figuriamoci! Figure geometriche in movimento

Spettacolo di burattini di Ioana Butu, attrice, burattinaia e cantante con la collaborazione di Silvia Sbaragli (durata 15 minuti)

Età: a partire da 4 anni **Breve descrizione:** L'arte dei burattini si incontra con la geometria, consentendo alle figure di prendere vita sotto le abili mani di Ioana Butu. Un modo diverso di familiarizzare con la geometria, una disciplina solo in apparenza distante dal vissuto dei bambini. Sarà divertente scoprire alcuni elementi e proprietà delle figure e le loro diversità, sentendole parlare, discutere, eventualmente cantare e ballare con leggiadria.

5. Letture matematiche per bambini (durata 20 minuti ciascuna)

Storie per i più piccini
Anna Cerasoli, divulgatrice matematica

Letture previste venerdì 16 maggio

Le avventure del signor 1

Età: 4-5 anni **Breve descrizione:** il primo giorno di primavera il numero 1 decide di staccarsi dal calendario e andare a spasso per il mondo. Peccato che un fruttivendolo del mercato lo scambi per un insetto pericoloso e decida di inseguirlo. Dove può nascondersi il nostro 1? Nella divertente fuga scopriamo i tanti numeri della nostra realtà quotidiana.

Gatti neri gatti bianchi

Età: 6-8 anni **Breve descrizione:** tra i tanti quartieri della città, uno soltanto può vantare questo primato «avere gatti tutti neri». Ma all'improvviso compare un gattino bianco a negare questa verità. I gatti bianchi aumentano, aumentano sempre più finché nel quartiere ogni gatto è bianco e nessun gatto è nero. Cosa succede se poi arriva un'intera famiglia di gatti rossi e poi un'altra di gatti a strisce e maculati? Un racconto buffo per scoprire e familiarizzare con i quantificatori logici *tutti, nessuno, qualcuno* e le loro negazioni.

La grande invenzione di Bubal

Età: 8-10 anni **Breve descrizione:** Bubal, una pastorella preistorica escogita un modo per riassumere con pochi segni la quantità delle sue pecore. Un racconto sul percorso logico che ha portato all'invenzione dei numeri, senza dubbio una delle più grandi invenzioni dell'intelletto umano.

Letture previste sabato 17 maggio

L'insieme fa la forza

Età: 6-8 anni **Breve descrizione:** la famiglia Topinis de Topinibus non ci sta a farsi prendere a bastonate dal troppo irascibile padrone di casa. Una favola sull'amicizia e sul rispetto che, tra le righe, presenta le prime operazioni di logica e di insiemistica.

10+ il genio sei tu

Età: 8-10 anni **Breve descrizione:** tre asinelli hanno saputo che la loro razza è in via di estinzione, ma non si scoraggiano e insieme alle loro compagne si adeguano ai tempi «lasciando la mola per la scuola». L'asina più in gamba la frequenterà per imparare le quattro operazioni, fondamentali al rilancio della loro fattoria. Al ritorno, con l'aiuto di una gallina, sua assistente, terrà una lezione magistrale spiegando a cosa servono queste operazioni matematiche e com'è facile eseguirle. Dal racconto deriva un importante consiglio per gli educatori: insegnare a imparare. Solo così i loro allievi potranno stare al passo con i tempi, utilizzando le conoscenze acquisite per formarsene sempre di nuove.

La Geometria del faraone

Età: 8-10 anni **Breve descrizione:** una fiaba per raccontare la nascita della geometria, mostrandone i primi strumenti e i primi concetti. Siamo in Egitto, nel 2000 a. C., il Nilo straripa fertilizzando i campi ma, allo stesso tempo, distruggendone i confini. Il Faraone invia i suoi tecnici che, tendendo corde, ridisegnano le forme quadrate dei recinti. Il protagonista della fiaba è un ragazzo, il cui padre è uno dei più bravi tecnici del Faraone. In sua assenza sarà lui, con i suoi tre fratelli a realizzare un quadrato perfetto, tanto da ricevere in premio uno scarabeo tutto d'oro.

Organizzazione
Sono previste aree pic-nic.

Iscrizioni
Per informazioni rivolgersi a: dfa.fc@supsi.ch.

Comitato organizzativo
Francesca Antonini
responsabile della formazione bachelor,
Dipartimento formazione e apprendimento SUPSI
Marco Beltrametti
responsabile formazione continua,
Dipartimento formazione e apprendimento SUPSI
Elena Mock
Ispettrice del II Circondario
Vittoria Ponti
amministrativa formazione continua,
Dipartimento formazione e apprendimento SUPSI
Adolfo Tomasini
pedagogista, già direttore delle scuole comunali di Locarno
Silvia Sbaragli
docente-ricercatore in didattica della matematica
Dipartimento formazione e apprendimento SUPSI

2. Recensioni

Enrico Giusti. (2004). La matematica in cucina. Torino: Bollati Boringhieri. **ISBN: 88-339-1527-I. Pagg. 226, € 25,00.**

Con piacere segnalo questo bel volumetto di matematica… quotidiana. Può aiutare sicuramente gli insegnanti che si trovano di fronte classi poco motivate ad apprendere la matematica, allievi che pensano che questa disciplina non abbia nulla a che vedere con la vita di tutti i giorni e con i loro interessi; insomma, con gli studenti che hanno chiuso con tutto ciò che sa di matematica (soprattutto di quella scolastica). Ma può tornare utile anche a chi abbia l'interesse di capire sempre di più il micromondo delle attività quotidiane. Quante cose si fanno, automaticamente, acriticamente, senza sapere il perché e quante si eseguirebbero meglio conoscendo la matematica soggiacente.

Veniamo alla struttura del libro. La scelta dei vari capitoli è nettamente improntata a problemi pratici e, nonostante il titolo, non solamente di cucina. Il modo col quale l'Autore sa coinvolgere già dalle prime righe il lettore – anche chi, magari, apre per caso il libro, senza alcuna voglia di leggerlo – è singolare. Ci si imbatte subito nei due protagonisti, amici per la pelle, ma molto diversi nel rapporto con la cultura. I loro nomi, Gianni e Pinotto, possono generare l'impressione che si tratti di una baggianata, come lo erano i film comici di tanti anni fa che avevano per protagonisti due personaggi con questi nomi. In realtà si tratta di ben altro. Gianni è un giovane appassionato di letteratura, aperto e curioso di capire anche il lato scientifico della realtà. Il suo nome è un omaggio allo scrittore Giovanni Boccaccio. Pinotto è invece un giovane appassionato di matematica, con tanta voglia di insegnare questa disciplina a chiunque gli capiti a tiro. Il nome nasconde quello di Giuseppe Peano, che, come si sa, oltre a essere un matematico di valore, era anche molto interessato alla didattica. Nell'immaginario, i due sono amici per la pelle, si frequentano regolarmente e le loro avventure finiscono sempre in lezioni di matematica che Pinotto elargisce a Gianni, per spiegargli il perché di fenomeni quotidiani. Dal canto suo, Pinotto accetta questi interventi cattedratici per amicizia, ma anche molto spesso perché sente come il suo spirito fondamentalmente umanistico si arricchisce di piccole ma preziose perle scientifiche, di natura matematica.

Solo per dare un'idea dei contenuti descrivo in sintesi il primo capitolo, intitolato «Avanti prego, e accendete la luce». La matematica interessata è la logica delle proposizioni, trattata con estrema chiarezza, partendo dai circuiti elettrici basilari. Gli interruttori in serie che accendono la lampadina solo se accesi tutti e due contemporaneamente danno lo spunto a Pinotto per presentare la congiunzione logica, ma anche per parlare di molte applicazioni tecniche, dette dispositivi di sicurezza, come lo sono per esempio gli interruttori di un frullatore (bottone e levetta nel coperchio), il doppio circuito frenante delle automobili, ecc. Gli interruttori in parallelo, che accendono la lampadina se almeno uno dei due è acceso, forniscono lo spunto a Pinotto per parlare della disgiunzione logica e delle sue applicazioni tecniche, due interruttori della luce nello stesso locale o i dispositivi di emergenza, come per esempio un impianto di allarme incendio nel quale è sufficiente che almeno un sensore chiuda il circuito per mettere in moto l'allarme, ecc.

Nell'ordine, gli altri capitoli portano i titoli:

– Acqua calda
– Spaghetti
– Arrosto con patate
– Insalata
– Il rubinetto
– Qualcuno vuole caffè?
– Focaccia per pane
– Lotterie.

Matematica e spunti letterari condiscono questi avvincenti episodi e danno innumerevoli spunti per proporre in classe attività diverse dalle solite. E per creare uno spirito pienamente culturale. (G. Arrigo)

Riccardo Bersani, Ennio Peres. (seconda edizione 2010). Matematica, se la conosci NON la eviti. Milano: Ponte alle Grazie. ISBN: 978-88-6220-109-4. Pagg. 361, € 16,80.

Anche questo libro è pensato per studenti con poca propensione verso la matematica e quindi risulta molto utile agli insegnanti alle prese con tali allievi. Nella prefazione si sostiene che un modo per avvicinare le persone meno disposte nei confronti della nostra disciplina può consistere nel cercare di individuare, nella vita di tutti i giorni, un maggior numero di applicazioni matematiche, con la precauzione di chiarire bene la differenza tra modello matematico e realtà. Come dire: due mezze scodelle ottenute con un taglio non faranno mai la scodella intera di partenza. Gli Autori propongono alcuni aspetti della vita quotidiana di una persona media, evidenziando le situazioni in cui un approccio di tipo matematico può rivelarsi efficace per operare la scelta più opportuna.

Significativo è il seguente passaggio della loro prefazione:

«Questo libro, quindi, va considerato come quei manuali di accordi per chitarra che offrono la possibilità di accompagnare un gran numero di canzoni senza addentrarsi in uno studio musicale vero e proprio. Ma come il piacere di saper strimpellare la chitarra può far nascere la voglia di conoscere meglio la musica, ci auguriamo

che la lettura di questo libro possa indurre in qualche lettore il desiderio di approfondire temi matematici più elevati.»

I contenuti sono suddivisi in 15 capitoli, dai titoli stimolanti:

– La scienza che insegna a non fare le operazioni
– La scienza che insegna a fare le operazioni
– In casa, matematica domestica
– La spesa, matematica mercantile
– L'amministratore, matematica condominiale
– Affari e lavoro, matematica finanziaria
– Gli spostamenti, matematica dei trasporti
– Viaggi e tempo libero, matematica vacanziera
– Gli amici e lo svago, matematica conviviale
– Amore e amicizia, matematica sentimentale
– Lotterie e azzardo, matematica truffaldina
– Giochi e sport, matematica ludica
– Parlamento ed elezioni, matematica politica
– Il tempo, matematica cronologica
– Giochi di prestigio, matematica magica

Anche qui il docente può trovare numerosi spunti per mostrare agli allievi che la matematica è presente ovunque, anche dove solitamente non lo si pensa. (G. Arrigo)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
67

In questo numero: discorso di accettazione del dottorato Honoris Causa di B. D'Amore; Etnomatematica di B. Marotta; P. Hägler con un'applicazione della successione di Fibonacci; S. Ravasi sugli zeri di un polinomio; G. Bolondi, R. Censi e S. Sbaragli con uno studio comparato Ticino-Emilia Romagna; L. Bizzozero sulle concezioni dei bambini riguardanti la probabilità; A. Piatti propone una nuova rubrica di didattica; A. Frapolli con l'ultimo suo Quiz; un gioco di S. Meyer; segnalazioni e recensioni.

ISBN 978-88-86486-89-7
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport