

**Dr. Papp Ferenc**

# RÚDAK CSAVARÁSA

## 1. Prizmatikus rúdelem csavarása

Egyenes tengelyű és állandó keresztmetszetű (prizmatikus) rúdelem csavarásáról beszélünk, ha a rúd tengelye körül működő csavaró nyomaték hatására a rúdelem keresztmetszetei a tengely körül elfordulnak. A csavarásnak két alapesetét különböztetjük meg:

- **egyszerű** (vagy St.Venant-féle) csavarás;
- **gátolt** csavarás.

A csavarás részletes mechanikai leírása a szakirodalomban megtalálható. Tetszőleges vékonyfalú keresztmetszetekre vonatkozó átfogó megoldást eredendően *Urban* és *Vlaszov* publikált (УРБАХ И. Б. 1955; ВЛАСЗОВ В.З. 1961). Munkáik nyomán számos irodalom foglalkozott a témával. Az angol nyelvű irodalomból a következőket emelnénk ki: (KOLLBRUNNER F.C. BASLER K. 1966); (CHEN, W. - ATSUTA, T. 1977b); (KOLLBRUNNER F.C. - HAJDIN N. 1992.). A magyar nyelvű irodalomból a következőket kell megemlítenünk: (CSELLÁR Ö. – HALÁSZ O. – RÉTI V. 1965.); (IVÁNYI M. 1995.). Az alábbiakban a csavarás problémáját a gyakorlat oldaláról közelítjük meg. Mellőzzük a szakirodalomban számos helyen megtalálható levezetéseket, és csak a legfontosabb fogalmakra és összefüggésekre koncentrálnunk.

### 1.1 Az egyszerű csavarás

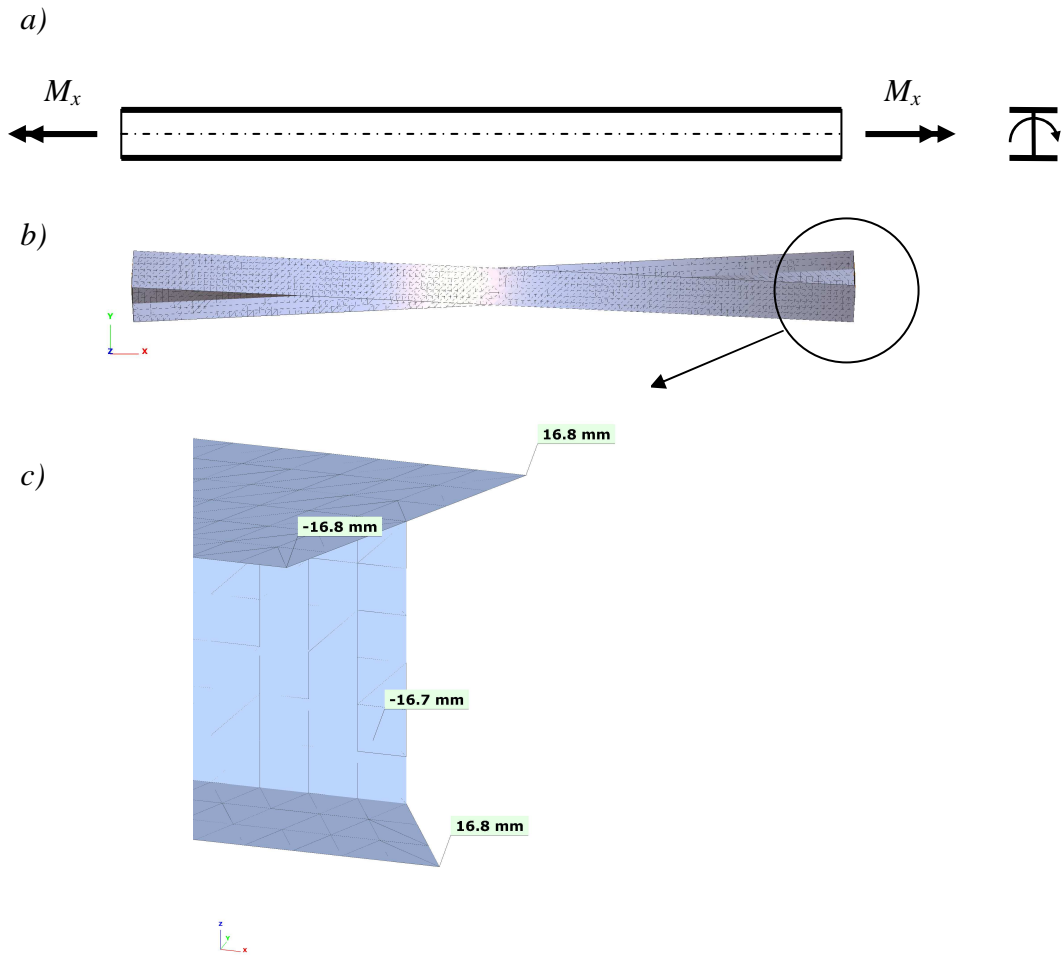
Egyszerű, vagy St.Venant-féle csavarásról beszélünk, amikor a csavaró igénybevételből a rúdelem valamennyi keresztmetszetében csak **nyírófeszültség** keletkezik. Ez azt jelenti, hogy a csavarás hatására a keresztmetszet egyetlen alkotója sem szenved relatív nyúlást (vagy rövidülést), és így nem keletkeznek normálfeszültségek. Ennek az esetnek általában két alapfeltétele van:

- **állandó** csavaró igénybevétel a rúd hossza mentén;
- keresztmetszet **szabad öblösödése**.

A csavarás során – szemben a hajlítással, ahol a keresztmetszetek síkok maradnak – a keresztmetszeti pontok kilépnek a síkjukból: a keresztmetszet **öblösödik**. Amennyiben állandó csavarónyomaték mellett az öblösödés szabadon létrejöhet, akkor az alkotókban nem keletkeznek normálfeszültségek. Az egyszerű csavarást a *1. ábra* segítségével mutatjuk be. Vizsgáljuk az I keresztmetszetű rúdelemet, amikor a végein ellentétes előjelű, de azonos nagyságú csavarónyomaték hat. A *1b. ábra* a numerikus módszerrel végrehajtott csavarási kísérlet eredményét mutatja.

Az **egyszerű csavarásra** vonatkozó kísérletből az alábbi általánosítás vonható le:

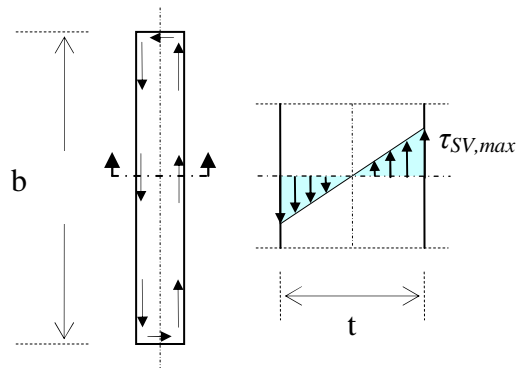
- a keresztmetszet minden alkotója egyenes marad;
- a keresztmetszetek öblösödnek;
- a keresztmetszetekben csak nyírófeszültség keletkezik.



1. ábra. Az egyszerű (St.Venant-féle) csavarási modell: a) modell; b) csavarási deformáció; c) öblösödés.  
(öblemezek: 300-12; gerinclemez:288-10; rúd hossz: 6000mm; anyagminőség: S235;  
csavarónyomaték:  $M_x=30 \text{ kNm}$ )

A keresztmetszetek öblösödését a 1c. ábra szemlélteti. I vagy H szelvények esetén az öblösödés az öblemezek pontjainak a keresztmetszetre merőleges irányú elmozdulásában jelentkezik.

Az elméleti rugalmasságtan összefüggései alapján levezethető, hogy az egyszerű csavarásnak kitett, viszonylag vékony lemez keresztmetszetében a nyírófeszültség a középvonalban zérus, és a lemezoldalak felé haladva lineárisan változik (2. ábra).



2. ábra. Az egyszerű csavarásból származó nyírófeszültség eloszlása a vékony lemezekben.

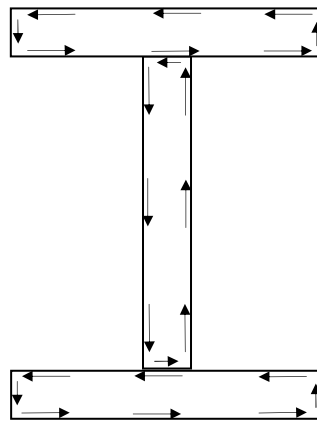
A 2. ábrán vázolt St.Venant-féle nyírófeszültség legnagyobb értéke:

$$\tau_{SV,max} = \frac{M_x}{I_{SV}} \cdot t \quad (1)$$

A (1) kifejezésben  $M_x$  a külső csavarónyomaték,  $I_{SV}$  a keresztmetszet St.Venant-féle csavarási inercianyomatéka, és  $t$  a falvastagság. Vékony lemezek esetén a csavarási inercianyomatékot közelítőleg az alábbi kifejezéssel számíthatjuk:

$$I_{SV} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot t^3 \quad (2)$$

Az egyszerű csavarásnak nincs kitüntetett tengelye, ezért a vékony lemezekből összetett keresztmetszetek csavarási viselkedése jól leírható az alkotó lemezek csavarásának összegeként (3. ábra).






3. ábra. A vékonyfalú összetett keresztmetszetek egyszerű csavarásának modellje.

Mivel a 2. ábra szerinti feszültségeloszlás a lemezek végein (illetve a lemezek csatlakozásánál) zavart, ezért az összetett keresztmetszet csavarási inerciája „kézi” számítás esetén az alkotó lemezek (2) szerinti inerciája módosított összegével számítható ki:

$$I_{SV} = \frac{1}{3} \cdot c \cdot \sum b \cdot t^3 \quad (3)$$

A (3) kifejezésben a  $c$  módosító tényező a 3-4 ábra alapján vehető fel (pl. CSELLÁR Ö. – HALÁSZ O. – RÉTI V. 1965.).

keresztmetszet	$c$
	$1 - 0,63 \cdot \frac{t}{b}$
	1,31
	1,12

4. ábra. A  $c$  módosító tényező értékei.

A keresztmetszet öblösödése a lemezek középvonalában fekvő pontoknak az  $(y,z)$  keresztmetszeti síkra merőleges  $u(y,z)$  elmozdulásával írható le. Az egységnyi elcsavarodásból keletkező elmozdulásokat öblösödési mértéknek nevezzük:

$$\omega(y,z) = \frac{u(y,z)}{\vartheta} [m^2] \quad (4)$$

A (4) kifejezésben  $\vartheta [1/m]$  az egységnyi rúdhosszra jutó fajlagos elcsavarodás.

Az  $\omega(y,z)$  **öblösödési mérték**, egységnyi fajlagos elcsavarodást feltételezve, megadja az  $(y,z)$  koordináták által meghatározott keresztmetszeti pont rúdtengely irányú elmozdulását.

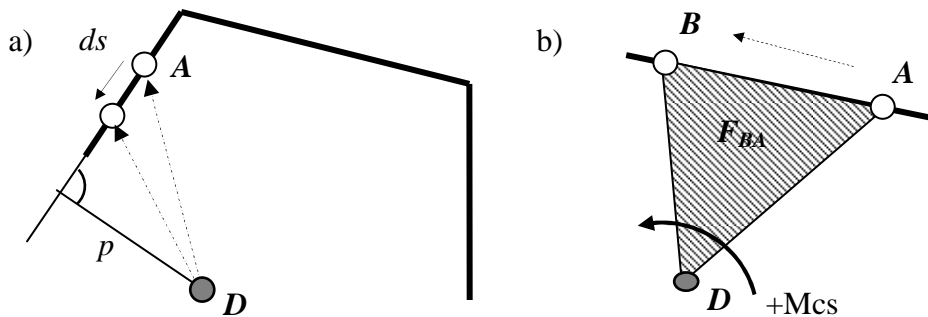
Az  $\omega(y,z)$  öblösödési mérték a keresztmetszeti pont „**harmadik koordinátája**”, amely hasonló szerepet tölt be a csavarási feszültségek számításánál, mint a hajlítási tengelyektől mért  $y$  és  $z$  távolságok a hajlítási feszültségek számításánál.

Legyen  $p$  az  $A$  keresztmetszeti pontot tartalmazó alkotólemez távolsága a  $D$  csavarási tengelytől (5. ábra). Az  $A$  ponttól  $ds$  távolságra lévő pontba áttérve az öblösödési mérték megváltozik:

$$d\omega = -p \cdot ds \quad (5)$$

A (5) kifejezés szerint az alkotólemez  $A$  és  $B$  pontja között az öblösödési mérték megváltozása (5b. ábra):

$$\Delta\omega = \omega_B - \omega_A = \int_A^B d\omega = -\int_A^B p \cdot ds = 2 \cdot F_{BA} \quad (6)$$



5. ábra. Az öblösödési mérték megváltozása két keresztmetszeti pont között.

Amennyiben adott a csavarás tengelye és a keresztmetszet középvonala egy pontjában az öblösödés mértéke, akkor a (6) alapján a teljes keresztmetszetre kiszámítható az öblösödési mérték.

Legyen adott a rúdelem csavarási tengelye, és legyen  $\varphi(x)$  a tengely elcsavarodását leíró függvény. Egyszerű csavarás esetén a külső csavaró nyomatékkal a (1) szerinti **nyírófeszültségek  $T_{sv}$  eredője** (belső csavarónyomaték) tart egyensúlyt:

$$T_{sv} = G \cdot I_{sv} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (7)$$

A (7) kifejezésben  $G$  az anyag nyírási rugalmassági modulusa,  $I_{sv}$  a keresztmetszet (3) szerint meghatározott csavarási inercianyomatéka. A térbeli stabilitásvesztési módok vizsgálatában a (7) kifejezésnek fontos szerepe lesz.

### 3.1.2 A gátolt csavarás

Egyszerű csavarás esetén a csavarónyomaték állandó és a rúdelem keresztmetszetei öblösödnek (a keresztmetszeti pontok kilépnek a síkjukból), de az alkotók hossza nem változik meg, és ezért az öblösödés minden keresztmetszetben egyforma:

$$u = \omega \cdot \vartheta \quad (8)$$

Amennyiben a 1. ábrában vázolt rúdelem  $x=0$  végénél az elcsavarodás értékét  $\varphi(0)=0$  értékre választjuk, akkor az  $x$  távolságra lévő keresztmetszet elcsavarodása:

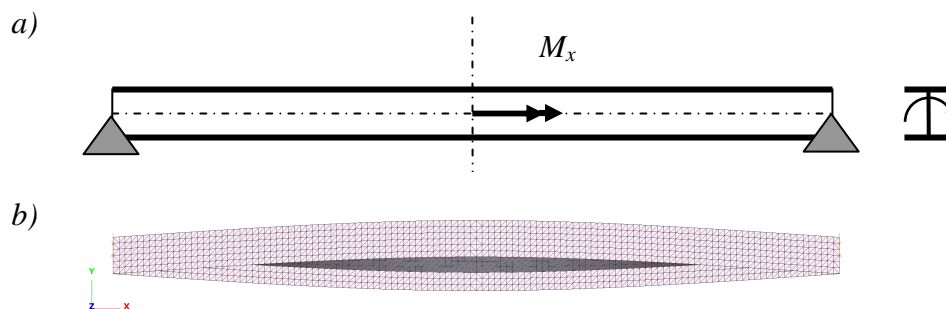
$$\varphi(x) = \vartheta \cdot x \quad (9)$$

A (9) szerint az elcsavarodási függvény lineáris, ezért a csavarási tengelytől  $r$  távolságra lévő alkotó egyenes marad, de  $\alpha$  szöggel elfordul:

$$\alpha = r \cdot \vartheta \quad (10)$$

Amennyiben a  $\vartheta$  fajlagos elcsavarodás a tengely mentén változik, akkor a (10) szerint az alkotó  $\alpha$  elfordulási szöge is változik, aminek következtében az **alkotó meggörbül** (kivéve a csavarási tengelyt, amelyik egyenes marad). A csavarásnak ezt a módját **gátolt csavarásnak** nevezzük.

A gátolt csavarásra mutat példát a 6. ábra, ahol egy villás kéttámaszú tartót közepén  $M_x$  külső csavarónyomaték terhel. A numerikusan végrehajtott csavarási kísérletből jól látszik, hogy az övlemezek alkotói meggörbülnek (6b. ábra).



6. ábra. Az egyszerű csavarásnak kitett gerenda: a) csavart rúdelem modellje; b) csavarási deformáció felülnézetben. (övlemezek: 300-12; gerinclemez:288-10; rúd hossz: 6000mm; anyagminőség: S235; csavarónyomaték:  $M_x=30 \text{ kNm}$ )

A fentiek alapján kimondhatjuk, hogy gátolt csavarás esetén a fajlagos elcsavarodás változik a rúdelem mentén:

$$\vartheta(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (11)$$

A keresztmetszeti pontok síkból való kilépése (öblösödés) a (11) alapján kifejezhető:

$$u(x) = \omega \cdot \vartheta(x) = \omega \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (12)$$

Az öblösödés megváltozása a keresztmetszettől  $dx$  távolságban:

$$du = \omega \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot dx \quad (13)$$

Az alkotó fajlagos nyúlása kifejezhető a (13) kifejezéssel:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \omega \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (14)$$

A (14) fajlagos nyúlásból **öblösödési normálfeszültség** keletkezik:

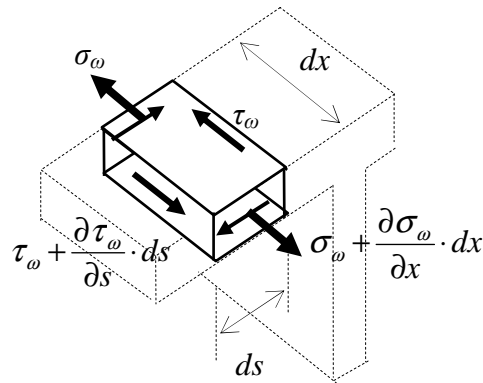
$$\sigma_\omega = E \cdot \varepsilon = E \cdot \omega \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (15)$$

Az öblösödési normálfeszültség az alkotó mentén változik. A növekményt a  $\tau_\omega$  **öblösödési nyírófeszültség** ellensúlyozza (7. ábra):

$$\tau_\omega = -\frac{1}{t} \cdot \int_s \frac{d\sigma_\omega}{dx} \cdot t \cdot ds = -E \cdot \frac{d^3\varphi}{dx^3} \cdot \frac{1}{t} \cdot S_\omega \quad (16)$$

ahol

$$S_\omega = \int_s \omega \cdot t \cdot ds \quad (17)$$



7. ábra. Az öblösödési normálfeszültség változását ellensúlyozó nyírófeszültség ábrázolása.

A (17) keresztmetszeti jellemzőt öblösödési statikai nyomatéknak nevezzük. A (16) öblösödési nyírófeszültség a falvastagság mentén állandó, és párhuzamos a lemez középfelületével. Kimutatható, hogy az öblösödési nyírófeszültségek eredője a  $T_\omega$  **öblösödési csavarónyomaték**:

$$T_\omega = \int_s \tau_\omega \cdot t \cdot p \cdot ds \quad (18)$$

A (18) kifejezésben  $p$  a nyírófeszültség karja a csavarási tengelyre vonatkoztatva (5.a ábra). A (5) és a (16) felhasználásával a (18) alábbi alakban írható:

$$T_\omega = -E \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot \int_s \omega^2 \cdot t \cdot ds \quad (19)$$

Vezessük be az **öblösödési inercianyomatékokat**:

$$I_\omega = \int_s \omega^2 \cdot t \cdot ds \quad (20)$$

A (20) felhasználásával az **öblösödési csavarónyomaték**:

$$T_\omega = -E \cdot I_\omega \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \quad (21)$$

Vezessük be a **bimoment** („kettős” nyomaték) fogalmát:

$$B(\equiv m_\omega) = \int_s \sigma_\omega \cdot \omega \cdot t \cdot ds = E \cdot I_\omega \cdot \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (22)$$

A (21) és (22) felhasználásával írjuk fel az **öblösödési feszültségek** gyakorlatban alkalmazott alakjait:

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega \quad \text{és} \quad \tau_\omega = \frac{T_\omega \cdot S_\omega}{I_\omega \cdot t} \quad (23)$$

Emellett vegyük észre az öblösödési csavarónyomaték és a bimoment kapcsolatát:

$$T_\omega = -\frac{dB}{dx} \quad (24)$$

A térbeli stabilitásvesztési módok vizsgálatában a (21) kifejezésnek fontos szerepe lesz.

Láttuk, hogy az  $\omega$  öblösödési mérték függ a csavarási tengely helyétől, amit eddig adottnak feltételeztünk. Azt is láttuk, hogy a gátolt csavarásból keletkező  $\sigma_\omega$  öblösödési normálfeszültség eloszlása azonos az  $\omega$  öblösödési mérték eloszlásával. Mivel a rúdelemre csak csavarónyomaték hat, ezért az öblösödési normálfeszültségeknek egyensúlyban lévő erőrendszert kell alkotniuk. Ebből következően szükséges, hogy az öblösödési normálfeszültségek **eredője** és célszerűen az  $y$  és  $z$  tengelyekre vett **nyomatéka** zérus nagyságú legyen:

$$\begin{aligned} \int_s \sigma_\omega \cdot t \cdot ds &= 0 \\ \int_s \sigma_\omega \cdot y \cdot t \cdot ds &= 0 \\ \int_s \sigma_\omega \cdot z \cdot t \cdot ds &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

A (25) kifejezéseket a keresztmetszeti állandók kiemelésével egyszerűsíthetjük:

$$\begin{aligned} \int_s \omega \cdot t \cdot ds &= 0 \\ \int_s \omega \cdot y \cdot t \cdot ds &= 0 \\ \int_s \omega \cdot z \cdot t \cdot ds &= 0 \end{aligned} \quad (3-26)$$

Keressük azt a kitüntetett keresztmetszeti pontot (csavarási tengelyt), amelyhez tartozó  $\omega$  eloszlás kielégíti a (26) feltételi egyenleteket. Ehhez vegyünk fel a tetszőleges  $(y_1; z_1)$  keresztmetszeti ponthoz tartozó  $D_1$  csavarási tengelyt, és határozzuk meg a hozzá tartozó  $\omega_1$  eloszlást. Ismert, hogy ha az  $(y_1; z_1)$  pont által meghatározott tengelyről áttérünk az  $(y_\omega; z_\omega)$  pont által meghatározott  $D$  tengelyre, akkor az ahhoz tartozó  $\omega$  öblösödési mérték az alábbi kifejezéssel határozható meg:

$$\omega(y, z) = \omega_1 + (y_\omega - y_1) \cdot z - (z_\omega - z_1) \cdot y + \omega_0 \quad (27)$$

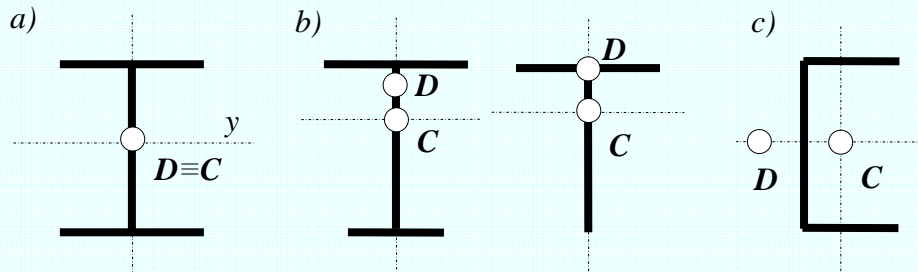
Mivel a (27) három ismeretlent ( $y_\omega, z_\omega$  és  $\omega_0$ ) tartalmaz, ezért a (36) szerinti három független feltétel elegendő az ismeretlenek meghatározására.

A fentiek szerint meghatározott  $(y_\omega; z_\omega)$  pont a keresztmetszet **csavarási** (vagy másképpen *nyírási*) **középpontja**. A csavarási középpont által meghatározott **D** tengely a rúdelem **csavarási tengelye**. A **D** tengely az egyetlen olyan alkotó, amely a csavarás folyamán egyenes marad.

A gátolt csavarással összefüggő keresztmetszeti jellemzőket és feszültségeket a keresztmetszet csavarási középpontjához tartozó **D** csavarási tengelyre meghatározott  $\omega$  öblösödési eloszlás alapján kell kiszámítani.

A csavarási középpont helye a gyakorlatban előforduló keresztmetszetek többségénél előre ismert, vagy részben ismert:

- **kétszeresen** szimmetrikus keresztmetszetek esetén a **D** csavarási középpont egybeesik a **C** súlyponttal (8a. ábra);
- **egyszeresen** szimmetrikus keresztmetszetek esetén a **D** csavarási középpont a szimmetriatengelyen helyezkedik el; a keresztmetszeti alaktól függően a **D** pont a keresztmetszeten belül (8b. ábra), vagy azon kívül található (8c. ábra).



8. ábra. A csavarási középpont helye a leggyakoribb keresztmetszetek esetében.

A tetszőleges kialakítású vékonyfalú szelvények csavarási keresztmetszeti jellemzőinek számítására a szakirodalomból ismert eljárások és képletek alapján történhet. Ezek közül kiemeljük *Kolbrunner* és *Basler* könyvét, ahol számítógépes programozásra is alkalmas „kézi” algoritmust találunk (KOLBRUNNER F.C. BASLER K. 1966), illetve *Csellár*, *Halász* és *Réti* magyar nyelvű könyvét, ahol táblázatokba gyűjtött képleteket közöltek a keresztmetszeti jellemzők számítására.

### 3.1.3 A gátolt csavarás differenciálegyenlete

Gátolt csavarás esetén az  $M_x$  külső csavaró nyomatékot az **egyszerű** csavaráshoz tartozó  $T_{SV}$  belső csavaró nyomaték és a **gátolt** csavaráshoz tartozó  $T_\omega$  öblösödési belső csavaró nyomaték együttesen ellensúlyozza:

$$M_x = T_{SV} + T_\omega \quad (28)$$

A (7) és a (21) figyelembe vételével a külső és a belső csavaró nyomatékok egyensúlyát kifejező differenciálegyenlet az alábbi alakban írható:

$$M_x = G \cdot I_{SV} \cdot \varphi' - E \cdot I_\omega \cdot \varphi''' \quad (29)$$

A (29) egyenletben  $\varphi = \varphi(x)$  a csavarási tengely elcsavaródását leíró elmozdulási függvény, és  $(\cdot)$  az  $x$  szerinti deriváltat jelzi.

A (29) harmadrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásával számos szakirodalom foglalkozik. Ezek közül ki kell emelnünk *Kollbrunner* és *Hajdin* könyvét, ahol a megoldásokat megbízható formában találjuk meg (KOLLBRUNNER F.C. - HAJDIN N. 1992). A továbbiakban számunkra a (29) egyenletnek lesz kiemelt szerepe.