UNIDAD IV
ENGRANES Y TRENES DE ENGRANAJES

4.1 NOMENCLATURA, CLASIFICACIÓN Y APLICACIÓN DE LOS ENGRANES (RECTOS, CÓNICOS Y HELICOIDALES).

Los engranes son elementos mecánicos que se utilizan para transmitir movimiento de rotación entre ejes. Los engranes pueden ser de diferentes tipos:

- ✓ Engranes rectos.
- ✓ Engranes helicoidales.
- ✓ Engranes cónicos.
- ✓ Corona y tornillo sinfín.

ENGRANES RECTOS.- Se emplean para transmitir movimiento de rotación entre ejes paralelos. Su contorno es de forma cilíndrica circular y sus dientes son paralelos al eje de rotación.

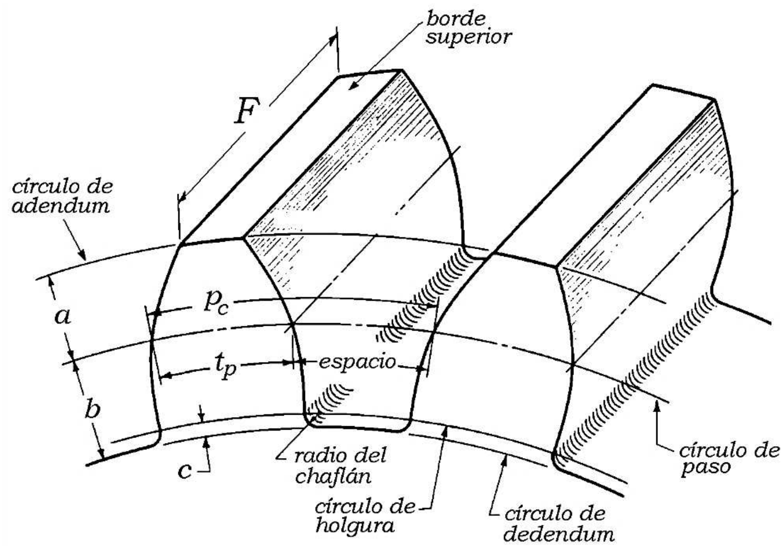


Figura 4.1 Terminología.

***Ancho de cara F*.-** Representa el espesor del diente en dirección paralela al eje.

***Círculo de paso*.-** Es un círculo teórico sobre el que generalmente se basan todos los cálculos. Los círculos de paso de dos engranes acoplados son tangentes entre sí.

***Piñón*.-** Es el más pequeño de los dos engranes acoplados; el más grande se denomina simplemente engrane.

Paso circular p_c **.-** Es la distancia, en pulgadas o **mm** , medida sobre el círculo de paso, que va desde un punto sobre uno de los dientes hasta un punto correspondiente sobre uno adyacente.

Paso diametral P **.-** Es el número de dientes en el engrane por pulgada de diámetro de paso. El paso diametral con las unidades comúnmente utilizadas en Estados Unidos.

$$\boxed{P = \frac{N}{d}}$$

El paso circular p_c y el paso diametral P se relacionan mediante la expresión

$$\boxed{p_c P = \pi}$$

Módulo m **.-** Es la razón del diámetro de paso al número de dientes El módulo es el índice del tamaño del diente en el **SI**.

$$\boxed{m = \frac{d}{N}}$$

$$\boxed{p_c = \pi m}$$

Cabeza o adendum (o adendo) a **.-** Es la distancia radial entre el borde superior y el círculo de paso.

Raíz o dedendum (o dependo) b **.-** Es la distancia radial que va desde el borde inferior hasta el círculo de paso.

Altura total h_t **.-** Es la suma del adendo y el dedendo.

$$\boxed{h_t = a + b}$$

***Círculo de holgura*.-** Es un círculo tangente al del dedendo del engrane conectado.

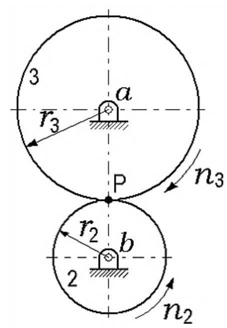
4.2 DISEÑO DE ENGRANES (RECTOS, CÓNICOS Y HELICOIDALES).
4.3 ESTANDARIZACIÓN Y NORMALIZACIÓN DE ENGRANES.

LEY FUNDAMENTAL DEL ENGRANAJE:

La acción de un solo par de dientes acoplados conforme recorren toda una fase de acción debe ser tal que la razón de la velocidad angular del engrane impulsor a la del engrane impulsado se mantenga constante. Este es el criterio fundamental que rige la selección de los perfiles del diente. Si esto no se cumpliera, se tendrían vibraciones muy serias y problemas de impacto, incluso a velocidades muy bajas.

Cuando a los perfiles del diente se les da una forma tal para que produzcan una razón constante entre las velocidades angulares durante el endentamiento, se dice que las superficies son *conjugadas*.

La figura siguiente muestra las circunferencias de paso de dos engranes que se encuentran en contacto.



En la figura anterior **P** recibe el nombre de punto de paso, en el cual la velocidad tangencial es la misma para los dos engranes, por lo tanto

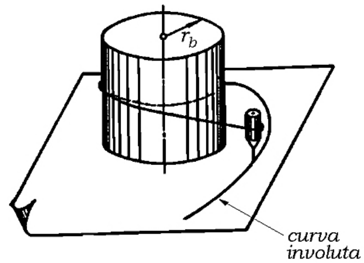
$$\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3 \therefore n_2 r_2 = n_3 r_3 \therefore \frac{n_2}{n_3} = \frac{r_3}{r_2} \therefore$$

$$\boxed{m_G = \frac{n_2}{n_3} = \frac{d_3}{d_2} = \frac{N_3}{N_2}}$$ (Ley fundamental de engranes)

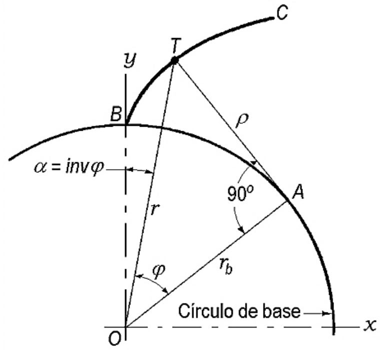
En donde m_G = relación de engranes (constante)

Dos formas que cumplen con la ley fundamental son la *cicloide* y la *involuta*. La *cicloide* se empleó inicialmente para fabricar engranes, aunque ahora se ha remplazado por la *involuta* debido a la facilidad de la fabricación y el hecho que la distancia entre centros entre dos engranajes puede variar sin cambiar la relación de velocidades.

Círculos base.- Son los que se emplean como base para trazar las *involutas.* El radio del círculo de base es r_b.



Función de envolvente (involuta).
Esta función se representa de la siguiente manera:



De la figura se tiene que: $\alpha = inv\varphi$ (función de involuta)

α = ángulo comprendido entre los radios vectores que definen el origen de la involuta y un punto cualquiera ***T***.

ρ = radio instantáneo de curvatura de la involuta

r = radio de cualquier punto ***T*** de la curva

$r_b = r\cos\varphi$ = radio del círculo de base

φ = ángulo de presión en el punto ***T***

BC = involuta

ρ = longitud de ***TA*** = longitud de ***AB***

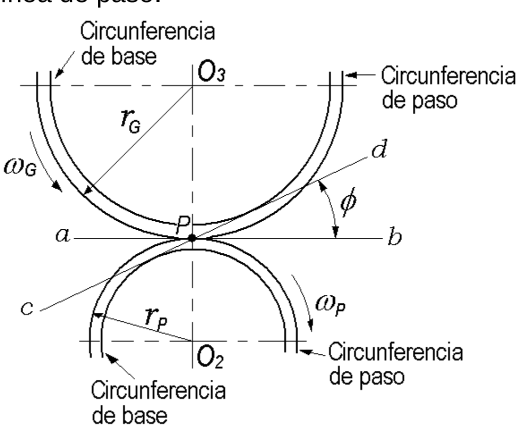
$$\rho = r_b(\phi + \alpha) = r_b \tan\phi$$

$$\boxed{inv\varphi = \tan\varphi - \varphi}$$

φ = ángulo de presión variable de la involuta en radianes.

Ángulo de presión ϕ.

Es el ángulo formado por la línea ab y la línea tangente a las circunferencias de base de los engranes, tal y como se muestra en la siguiente figura. De hecho el ángulo ϕ es el ángulo de presión de la involuta en la línea de paso.



Interferencia.

Para ciertas combinaciones de números de dientes en un engrane, se presenta interferencia entre la punta del diente en el piñón y el chaflán o raíz del diente del engrane. La probabilidad de que se presente interferencia es mayor cuando un piñón pequeño impulsa a un engrane grande.

El número mínimo de dientes de profundidad total que se requiere para evitar interferencias en los engranes rectos, se obtiene a partir de

$$\boxed{N_{mín} = \frac{2}{sen^2\varphi}}$$

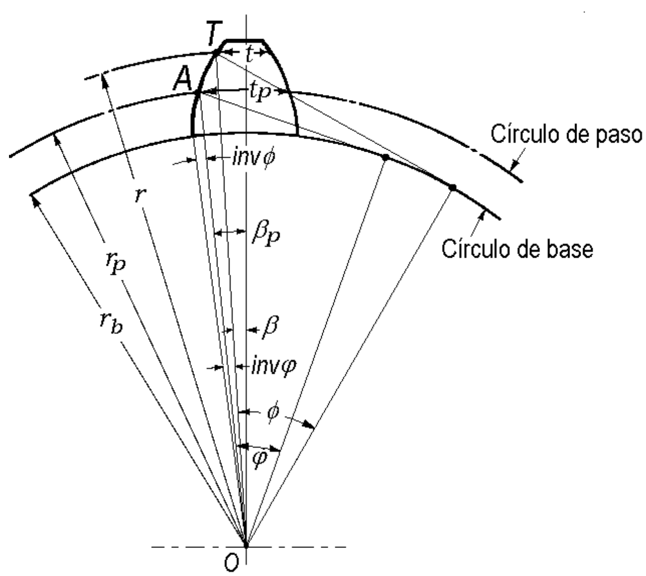
La siguiente tabla muestra el número de dientes en función del ángulo de presión:

Ángulo de presión (ϕ)	Número mínimo de dientes
14.5^o	32
20^o	18
25^o	12

La siguiente tabla muestra el número mínimo de dientes de piñón de profundidad total utilizables en una selección de engranes de profundidad total de varios tamaños para $\phi = 20^o$. Conforme el engrane acoplado se hace más pequeño, el piñón puede tener menos dientes, para evitar que aparezca interferencia.

Número de dientes del piñón	Número máximo de dientes en el engrane
13	16
14	26
15	45
16	101
17	1309

<u>PARÁMETROS BÁSICOS DEL ENGRANE ESTÁNDAR TIPO ENVOLVENTE.</u>



r_b = radio del círculo de base

r_p = radio del círculo de paso

r = radio en que se va a determinar el espesor del diente
t_p = espesor del diente a lo largo del arco en el círculo de paso
t = espesor del diente a lo largo del arco en el círculo de radio r
ϕ = ángulo de presión correspondiente al punto A de radio r_p
φ = ángulo de presión correspondiente a cualquier punto T de radio r
β_p =espesor angular de medio diente en el círculo de paso
β = espesor angular de medio diente en cualquier punto T
Los espesores de medio diente en los puntos *A* y *T* son:

$$\frac{t_p}{2} = \beta_p r_p \quad \Rightarrow \quad \beta_p = \frac{t_p}{2r_p} \quad \text{--- (a)}$$

$$\frac{t}{2} = \beta r \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{t}{2r} \quad \text{----- (b)}$$

De acuerdo con la figura anterior, se puede escribir lo siguiente:

$$inv\phi - inv\varphi = \beta_p - \beta = \frac{t_p}{2r_p} - \frac{t}{2r}$$

$$\boxed{t = 2r\left(\frac{t_p}{2r_p} + inv\phi - inv\varphi\right)}$$

Para dos puntos cualquiera ***A*** y ***B*** de la involuta, se tiene:

$$t_B = 2r_B\left(\frac{t_A}{2r_A} + inv\phi_A - inv\phi_B\right)$$

En el círculo de base $inv\varphi_b = 0$.

<u>SISTEMA DE DIENTES ESTÁNDAR AGMA Y ANSI PARA ENGRANES RECTOS:</u>

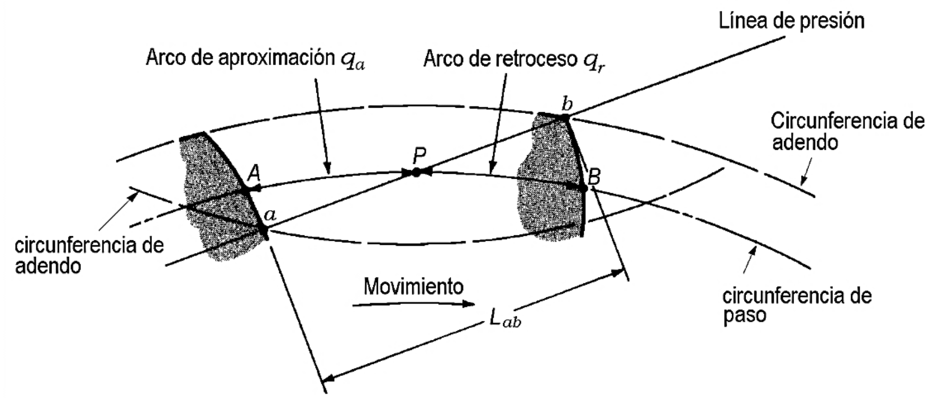
Término	Paso grueso (< 20P o m > 5 mm) Profundidad total
Angulo de presión ϕ (grados)	20^o y 25^o
Adendo a	$\frac{1.000}{P}$ o $1m$
Dedendo b	$\frac{1.250}{P}$ o $1.25m$
Profundidad de trabajo h_k	$\frac{2.000}{P}$ o $2m$
Profundidad total h_t	$\frac{2.250}{P}$ o $2.25m$
Espesor circular del diente t_p	$\frac{\pi}{2P}$
Holgura básica *c*, mínima	$\frac{0.250}{P}$

Si los engranes se cortan con cortadoras estándar, es posible cortarlos de manera que sean intercambiables. Para que esto sea posible, se requiere cumplir determinadas condiciones:

1.- Los pasos diametrales deben ser los mismos.
2.- Los ángulos de presión deben ser iguales.

3.- Los engranes deben tener los mismos adendas y los mismos dedendos.
4.- el espesor del diente debe ser igual a la mitad del paso circular.

***Relación de contacto*.**
La siguiente figura muestra la acción de dos dientes conectados, desde que entran en contacto hasta que se separan. El contacto de los dientes principia y termina en las intersecciones de las dos circunferencias de *adendo* con la línea de presión, esto es, el contacto inicial se produce en a y el contacto final ocurre en b. Como se indica, ***AP*** recibe el nombre de *arco de aproximación* q_a, y *PB*, el de *arco de retroceso* q_r. La suma recibe el nombre de *arco de acción* q_t.



La relación de contacto m_C indica el promedio de dientes en contacto, y se representa por:

$$\boxed{m_C = \frac{q_t}{p}} \text{ ------- (a)}$$

Una manera fácil de determinar la relación de contacto consiste en medir la línea de acción ab, en vez del arco *AB*. Como ab es tangente a la circunferencia de base, al prolongarla debe emplearse el paso de base p_b para calcular m_C en vez del paso circular p. Designando por L_{ab} a la longitud de la línea de acción, la relación de contacto es:

$$m_C = \frac{L_{ab}}{p_b} = \frac{Z}{p\cos\phi}$$

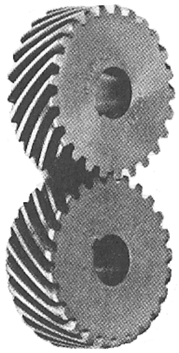
L_{ab} se determina por:

$$\boxed{L_{ab} = Z = \sqrt{(r_P + a)^2 - r_{b_P}^2} + \sqrt{(r_G + a)^2 - r_{b_G}^2} - (r_P + r_G)sen\phi}$$

En donde: r_P = radio de paso del piñón
r_G = radio de paso del engrane
$r_{b_P} = r_P \cos\phi$ = radio de base del piñón
$r_{b_G} = r_G \cos\phi$ = radio de base del engrane
ϕ = ángulo de presión

Por lo general, los engranes no deben diseñarse con relaciones de contacto menores de 1.2, aproximadamente.

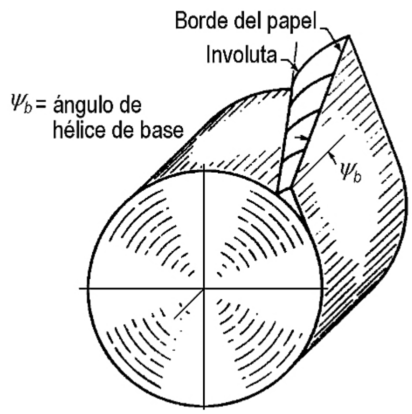
***<u>ENGRANES HELICOIDALES</u>*.**
Los engranes helicoidales se usan para transmitir movimiento entre ejes paralelos y no paralelos. Cuando se emplean con ejes no paralelos reciben el nombre de engranes helicoidales cruzados.



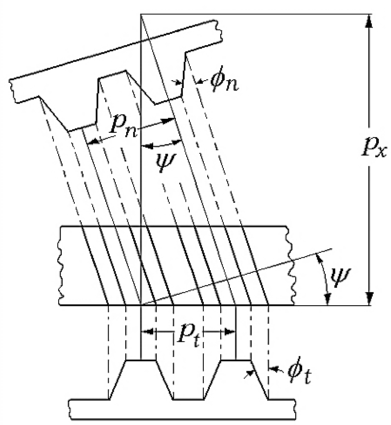
Engranes helicoidales
de ejes paralelos.

Engranes helicoidales
cruzados.

La forma de los dientes de un engrane helicoidal es un helicoide de involuta, como se ilustra en la figura siguiente:



Los dientes de un engrane helicoidal se relacionan de acuerdo con la siguiente figura:



De la figura anterior se tiene:

p_n = paso circular normal

p_t = paso circular transversal

p_x = paso axial

ϕ_n = ángulo de presión normal

ϕ_t = ángulo de presión transversal

ψ = ángulo de la hélice

$$\boxed{p_n = p_t \cos\psi}$$

$$p_x = \frac{p_n}{sen\,\psi}$$

Introduciendo el paso diametral normal P_n y paso diametral transversal P_t se tiene que

$$P_t = P_n \cos\psi$$

Los ángulos ϕ_n , ϕ_t y ψ se relacionan mediante la expresión

$$\phi_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\phi_n}{\cos\psi}\right)$$

Los diámetros de paso se obtienen a partir de la expresión $d = \dfrac{N}{P_t}$

Relaciones de contacto de los dientes en los engranes helicoidales.

Existen varias clases de contacto que se utilizan para evaluar el desempeño o rendimiento de los engranes helicoidales.

Razón de contacto transversal **(** m_t **).-** Es la razón de contacto en el plano transversal, y se determina de la misma forma que para los engranes rectos; esto es

$$m_t = \frac{Z}{p_t \cos\phi_t}$$

$$Z = \sqrt{(r_P + a)^2 - r_{b_P}^2} + \sqrt{(r_G + a)^2 - r_{b_G}^2} - (r_P + r_G)sen\phi_t$$

Razón de contacto normal **(** m_n **).-** Es la razón de contacto en el plano normal, y se determina por

$$m_n = \frac{m_t}{\cos^2\psi_b}$$

El ángulo de la hélice de base ψ_b se relaciona con el ángulo de presión transversal y el ángulo de la hélice como sigue:

$$\psi_b = \tan^{-1}(\tan\psi\cos\phi_t)$$

Razón de contacto axial **(** m_x **).-** Es la razón de la anchura de la cara del engrane al paso axial, y está dada por:

$$m_x = \frac{F}{p_x} = \frac{F\tan\psi}{p_t}$$

<u>ENGRANES HELICOIDALES CRUZADOS.</u>

Para que dos engranes helicoidales cruzados se engranen adecuadamente solo se necesita cumplir un requisito, que tengan los mismos pasos diametrales normales. Sus pasos en el plano de rotación no son necesariamente iguales. Sus ángulos de hélice pueden ser iguales o no y los engranes pueden ser del mismo sentido o sentido opuesto. La reducción de velocidad es

$$\frac{n_P}{n_G} = \frac{N_G}{N_P} = \frac{d_G\cos\psi_G}{d_P\cos\psi_P}$$

Si Σ es el ángulo entre las dos flechas conectadas por engranes helicoidales cruzados y ψ_P y ψ_G son los ángulos de hélice de los engranes, entonces

$$\Sigma = \psi_P \pm \psi_G$$

Los signos positivo y negativo se aplican respectivamente considerando si los engranes tienen el mismo sentido o no.

PROPORCIONES DE DIENTES ESTÁNDAR PARA ENGRANES HELICOIDALES.

Término	Fórmula
Adendo	$\frac{1}{P_n}$
Dedendo	$\frac{1.25}{P_n}$
Diámetro de paso del piñón (d_P)	$\frac{N_P}{P_n \cos\psi}$
Diámetro de paso del engrane (d_G)	$\frac{N_G}{P_n \cos\psi}$
Diámetro de base del piñón	$d_P \cos\phi_t$
Diámetro de base del engrane	$d_G \cos\phi_t$

Número mínimo de dientes.

Es importante considerar el número mínimo de dientes que se pueden fresar en un engrane helicoidal, sin que se tengan puntas o rebaje. Este valor se determina por la expresión

$$\boxed{N_{mín} = \frac{2\cos\psi}{sen^2\phi_t}}$$

Lo anterior puede observarse en la siguiente tabla para diferentes un ángulo de presión normal de 20^o:

Angulo de la hélice (ψ) (grados)	ϕ_n (grados)
0	18
5	17
10	17
15	16
20	15
23	14
25	14
30	12
35	10
40	9
45	7

<u>ENGRANES CÓNICOS</u>.

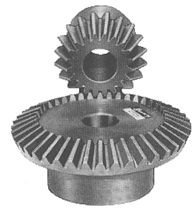
Los engranes cónicos se usan para transmitir movimiento entre flechas cuyos ejes se intersecan. Con frecuencia se fabrican para un ángulo entre los ejes de **90^o**; sin embargo se pueden producir para cualquier ángulo. Los dientes más exactos se obtienen por generación.

Se tienen cuatro tipos importantes:

a).- Engranes cónicos rectos
b).- Engranes cónicos espirales
c).- Engranes cónicos zerol
d).- Engranes hipoidales

***Engranes cónicos rectos*.**

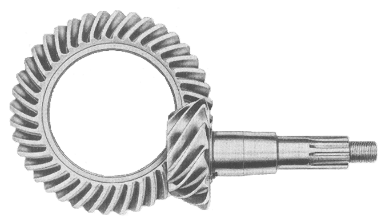
Un engrane cónico recto está provisto de dientes con borde rectilíneo que apuntan hacia una misma posición en su eje.



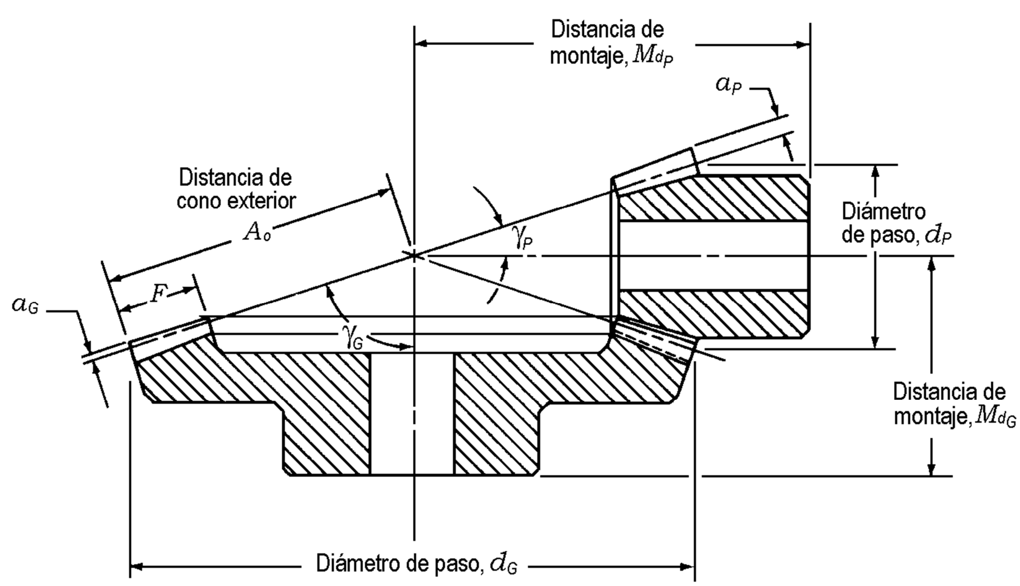
***Engranes cónicos espirales*.**
Son engranes con dientes curvos. Los ejes de los conos también deben cortarse y coincidir sus ejes. La ventaja de este tipo de engranes es que son silenciosos; sin embargo son muy costosos.

Engrane cónico Zerol.
Es un engrane con dientes curvos pero con un ángulo de espiral de cero grados. Por lo que respecta a la acción de los dientes, no tiene ventaja alguna sobre el engrane cónico recto y se ha diseñado simplemente para aprovechar la maquinaria cortadora que se usa para producir engranes cónicos espirales.

***Engranes hipoidales*.**
Son engranes cónicos en los cuales el eje de rotación no son paralelos ni se cortan. Este tipo de engranes se utiliza en la transmisión final de un automóvil.



PARÁMETROS DE LOS ENGRANES CÓNICOS:



De la figura se tiene que: a_G = adendo del engrane

a_P = adendo del piñón

F = ancho de la cara
d_P = diámetro de paso del piñón
d_G = diámetro de paso del engrane
A_o = distancia del cono exterior
γ_P = ángulo de paso del piñón
γ_G =ángulo de paso del engrane

La razón de velocidades se obtiene de la misma manera que en los engranes rectos, esto es

$$\frac{n_2}{n_3} = \frac{N_3}{N_2}$$

Los diámetro de paso se determinan por

$$\boxed{d_P = \frac{N_P}{P}}$$

$$\boxed{d_G = \frac{N_G}{P}}$$

N_P y N_G son el número de dientes del piñón y el engrane respectivamente.

De la figura anterior se obtiene la relación

$$\frac{r_P}{r_G} = \frac{sen\gamma_P}{sen\lambda_G}$$

De acuerdo con la figura anterior $\gamma_P + \gamma_G = \Sigma$, por lo que en la ecuación anterior se tiene

$$sen\gamma_P = \tfrac{r_P}{r_G} sen(\Sigma - \gamma_P)$$

$$sen\gamma_P = \frac{r_P}{r_G}(sen\Sigma \cos\gamma_P - sen\gamma_P \cos\Sigma)$$

Dividiendo ambos miembros por $\cos\gamma_P$ y reacomodando los términos, se obtiene

$$\boxed{\tan\gamma_P = \frac{sen\Sigma}{(N_G/N_P)+\cos\Sigma}}$$

De manera análoga se obtiene:

$$\boxed{\tan\gamma_G = \frac{sen\Sigma}{(N_P/N_G)+\cos\Sigma}}$$

Si $\Sigma = 90^o$,

$$\boxed{\tan\gamma_P = \frac{N_P}{N_G}}$$

$$\boxed{\tan\gamma_G = \frac{N_G}{N_P}}$$

Proporciones de dientes en los engranes Gleason cónicos rectos.

Estas proporciones se dan para engranes cónicos rectos con ejes perpendiculares y 13 o más dientes del piñón.

1.- Números de dientes.
  16 o más dientes en el piñón
  15 dientes en el piñón y 17 o más en la corona

14 dientes en el piñón y 20 o más en la corona
13 dientes en el piñón y 30 o más en la corona

2.- ángulo de presión, $\phi = 20^{o}$

3.- Profundidad de trabajo, $\boxed{h_k = \dfrac{2.000}{P}}$

4.- Profundidad total, $\boxed{h_t = \dfrac{2.188}{P} + 0.002}$

5.- Adendos:

De la corona: $\boxed{a_G = \dfrac{0.540}{P} + \dfrac{0.460}{P(N_G / N_P)^2}}$

Del piñón: $\boxed{a_P = \dfrac{2.000}{P} - a_G}$

6.- Dedendos:

De la corona: $\boxed{b_G = \dfrac{2.188}{P} - a_G}$

Del piñón: $\boxed{b_P = \dfrac{2.188}{P} - a_P}$

7.- Espesor circular (espesor del diente en el círculo de paso):

Corona: $\boxed{t_G = \dfrac{p}{2} - (a_P - a_G)\tan\phi}$

Piñón: $\boxed{t_P = p - t_G}$

en donde *p* es el paso circular.

Si $\Sigma \neq 90^{o}$, entonces

$$\boxed{a_G = \frac{0.540}{P} + \frac{0.460}{P(m_{90})^2}}$$

$$\boxed{m_{90} = \sqrt{m_G \frac{\cos\gamma_P}{\cos\gamma_G}}}\ , \qquad \boxed{m_G = \frac{N_G}{N_P}}$$

El ancho de la cara es el menor valor de: $\boxed{F = \dfrac{A_o}{3}}$ o $\boxed{F = \dfrac{10}{P}}$.

PROBLEMA 1. Los radios de paso de dos engranes rectos estándar que se encuentran conectados entre si son de 2.00 pul y 2.50 pul, y los radios exteriores son de 2.25 pul y 2.75 pul respectivamente. Si el ángulo de presión en la circunferencia de paso es de 20^{o}, determinar: a) El número de dientes de cada engrane y b) la relación de contacto.

Solución:

$$a = 2.25 - 2.00 = 0.25\,pul$$

$$a = \frac{1}{P} \therefore P = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ dientes/pul}$$

Piñón: $N_P = Pd_P = 4\times(2\times2) = 16 \therefore$ $\boxed{N_P = 16\,dientes}$

Engrane: $N_G = Pd_G = 4\times(2\times2.25) = 20 \therefore$ $\boxed{N_G = 20\,dientes}$

$$r_{P_O} = 2.25 \rightarrow r_{P_O}^2 = 5.0625$$

$$r_{G_O} = 2.75 \rightarrow r_{P_G}^2 = 7.5625$$

$$r_{b_P} = 2\times\cos 20^o = 1.879 \rightarrow r_{b_P}^2 = 3.532$$

$$r_{b_G} = 2.5\times\cos 20^o = 2.349 \rightarrow r_{b_G}^2 = 5.5188$$

$$Z = \sqrt{5.0625 - 3.532} + \sqrt{7.5625 - 5.5188} - (2+2.5)sen20^o = 1.127623$$

$$m = \frac{Z}{p\cos\phi} = \frac{1.127623}{\frac{\pi}{4}(\cos 20^o)} = 1.527 \therefore \boxed{m = 1.527}$$

PROBLEMA 2. Se conectan dos flechas cruzadas con engranes helicoidales, con reducción de 3:1, ángulo de flecha de 60^o y distancia entre centros igual a 10.00 pul. Si el piñón tiene 35 dientes y un paso diametral normal de 8, calcular los ángulos de hélice y los diámetros de paso si los engranajes son del mismo sentido.

Solución:

$$d_P = \frac{N_P}{P_n\cos\psi_P} \qquad \text{--------- (a)}$$

$$d_G = \frac{N_G}{P_n\cos\psi_G} \qquad \text{--------- (b)}$$

$$d_P + d_G = 20 \qquad \text{---------- (c)}$$

$$\psi_P = 60 - \psi_G \qquad \text{---------- (d)}$$

Sustituyendo (a), (b) y (d) en (c) se obtiene la expresión

$$\frac{35}{8\cos(60-\psi_G)} + \frac{105}{8\cos\psi_G} = 20 \therefore$$

$$\frac{0.21875}{\cos(60-\psi_G)} + \frac{0.65625}{\cos\psi_G} = 1$$

Si hacemos $F = \frac{0.21875}{\cos(60-\psi_G)} + \frac{0.65625}{\cos\psi_G}$, entonces por tanteos se obtiene lo siguiente:

ψ_G	F
25	0.99113
26	0.99400
27	0.00735
27.5	0.99921
27.6	0.99960
27.7	0.99999

De la tabla tenemos que $\boxed{\psi_G = 27.7^o}$

y de (d) tenemos que $\boxed{\psi_P = 32.3^o}$

$$d_P = \frac{35}{8\cos 32.3^o} = 5.176 \therefore \quad \boxed{d_P = 5.176 pul}$$

$$d_G = \frac{105}{8\cos 27.7^o} = 14.824 \therefore \quad \boxed{d_G = 14.824 pul}$$

4.4 ANÁLISIS CINEMÁTICO DE TRENES DE ENGRANES (SIMPLES, COMPUESTOS Y PLANETARIOS).

TRENES DE ENGRANES Y ANÁLISIS DE SISTEMAS.

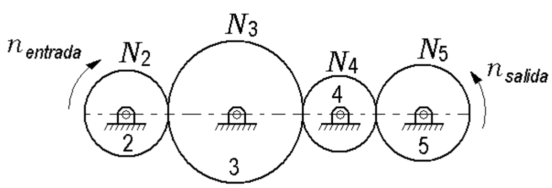
Un tren de engranes es un conjunto de dos o más engranes conectados, y puede ser de tipo simple o de tipo compuesto.

TREN DE ENGRANES SIMPLE.

Un tren del tipo simple es aquel en el que cada eje tiene un solo engrane. La relación de velocidad (algunas veces llamada valor del tren e) del engranaje se obtiene desarrollando la ecuación

$$\boxed{m_v = e = \pm \frac{n_{salida}}{n_{entrada}} = \pm \frac{d_{entrada}}{d_{salida}} = \pm \frac{N_{entrada}}{N_{salida}}}$$

En la siguiente figura se muestra un tren del tipo simple con cuatro elementos.

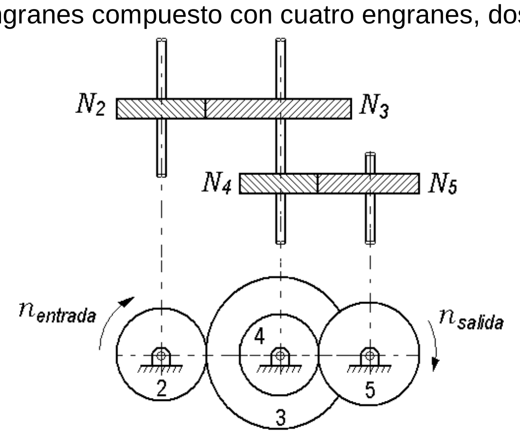


El valor del tren es

$$\boxed{e = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_3}{N_4}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right) = -\frac{N_2}{N_5}}$$

TREN DE ENGRANES COMPUESTO.

Un tren de engranes compuesto es aquel en el que al menos un eje tiene más de un engrane. Este tipo de mecanismo se utiliza para obtener un valor del tren mayor que 10:1. En la siguiente figura se muestra un tren de engranes compuesto con cuatro engranes, dos de los cuales 3 y 4.



El valor del tren es

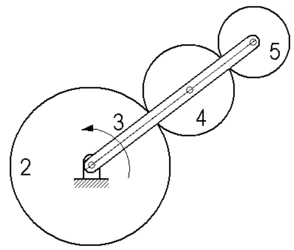
$$\boxed{e = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right)}$$

Esta puede generalizarse para cualquier número de engranes en el tren como:

$$\boxed{e = \pm \frac{\text{producto del número de dientes en engranes impulsores}}{\text{producto del número de dientes en engranes impulsados}}}$$

***TREN DE ENGRANES PLANETARIO O EPICÍCLICO*.**

Este tipo de trenes de engranes tiene un engrane central llamado sol, con respecto al cual giran otros engranes llamados planetas, impulsados por un brazo al cual se encuentran conectados, mismo que está articulado al eje del engrane sol. Lo anterior puede observarse en la siguiente figura:



En la figura se tiene que

n_2 = rpm del engrane sol

n_3 = rpm del brazo llamado también "*soporte planetario*"

n_4 y n_5 = rpm de los engranes planetarios 4 y 5 respectivamente

***Solución de trenes planetarios mediante fórmula*.**

En un tren de engranes planetario, el valor del tren e se determina dividiendo la velocidad de salida relativa al brazo entre la velocidad de entrada relativa al brazo; esto es, si $n_2 = n_F$, $n_5 = n_L$, $n_3 = n_A$, entonces

$$\boxed{e = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3} = \frac{n_{L/A}}{n_{F/A}} = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A}}$$

Es importante enfatizar que cuando se usa la ecuación anterior, el primer engrane y el último deben acoplar con el engranaje o engranajes que tienen movimiento planetario. Además, el primero y el último engrane deben estar montados en flechas paralelas debido a que las velocidades angulares no se pueden tratar algebraicamente a menos que los vectores que representan estas velocidades sean paralelas.

***Análisis tabular de engranes planetarios*.**

El método de tabulación es otra forma conveniente de resolver problemas de engranes planetarios. Este análisis se lleva a cabo en los tres pasos siguientes:

1.- Se fijan todos los engranes al brazo y se da a este una vuelta (si se desconocen sus rpm) o las rpm del brazo (si estas se conocen). Tabular las vueltas resultantes del brazo y de cada engrane.

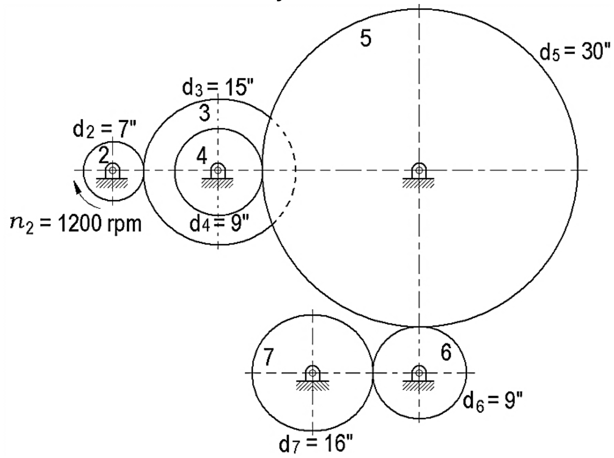
2.- Se fija el brazo y se desconectan los engranes, estableciendo la relación de velocidad entre ellos, tabulando las vueltas resultantes de cada engrane. Si éste tren tuviera un engrane fijo, deberá ser desconectado en este paso, para poder obtener la relación de velocidades de todos los engranes. Es importante que la velocidad total del engrane fijo es igual con cero.

3.- Súmense las vueltas de cada engrane en los pasos 1 y 2, de tal manera que satisfagan las condiciones dadas.

Los pasos anteriores se representan en la tabla siguiente:

Número de paso	Brazo	Engrane 1	Engrane 2	……………
1.- Engranes fijos				
2.- Brazo fijo				
3.- Paso 1 + Paso 2				

PROBLEMA 3. La figura que se indica da los diámetros de paso de un juego de engranes rectos que forman un tren. Determinar la velocidad y dirección de rotación de los engranes 5 y 7.



Solución:

Para el engrane 5 como salida:

$$\frac{n_L}{n_F} = e \therefore \frac{n_5}{n_2} = \left(-\frac{d_2}{d_3}\right)\left(-\frac{d_4}{d_5}\right) = \frac{7\times 9}{15\times 30} = \frac{7}{50} \therefore$$

$$n_5 = 1200 \times \frac{7}{50} = 168\,\text{rpm} \therefore$$

$\boxed{n_5 = 168\,\text{rpm}}$ en el mismo sentido que n_2

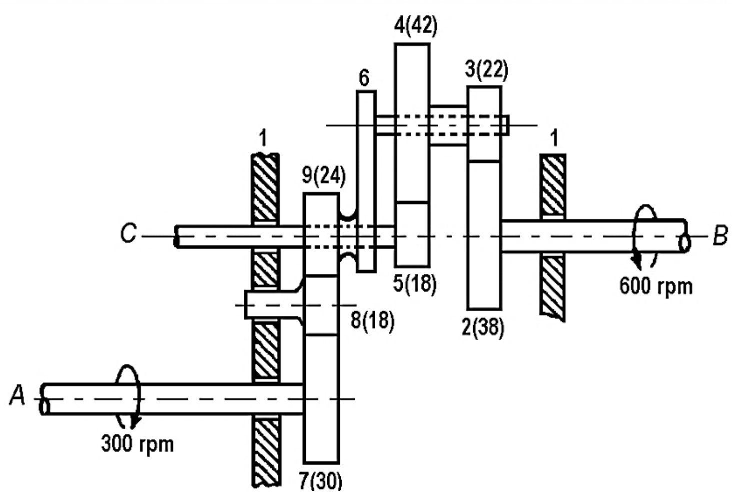
Para el engrane 7 como salida:

$$\frac{n_7}{n_2} = \left(-\frac{d_2}{d_3}\right)\left(-\frac{d_4}{d_5}\right)\left(-\frac{d_5}{d_6}\right)\left(-\frac{d_6}{d_7}\right) = \frac{d_2 d_4}{d_3 d_7} = \frac{7\times 9}{15\times 16} = \frac{21}{80} \therefore$$

$$n_7 = 1200 \times \frac{21}{80} = 315\,\text{rpm} \therefore$$

$\boxed{n_7 = 315\ \text{rpm}}$ en el mismo sentido que n_2

PROBLEMA 4. Para el tren de engranes que se muestra en la figura, la flecha *A* gira a 300 rpm y la flecha *B* a 600 rpm en las direcciones mostradas. Determinar la velocidad y dirección de rotación de la flecha *C.*



Solución: Suponiendo que el giro del eje A y B son positivos de +300 rpm y +600 rpm respectivamente, entonces

$$\frac{n_8}{n_7} = -\frac{N_7}{N_8} \therefore n_8 = +300 \times \left(-\frac{30}{18}\right) = -500 \text{ rpm}$$
$$\frac{n_9}{n_8} = -\frac{N_8}{N_9} \therefore n_9 = (-500) \times \left(-\frac{18}{24}\right) = +325 \text{ rpm}$$
$$n_6 = n_9 = +325 \text{ rpm}$$

Método analítico:

$$e = \frac{n_{L/A}}{n_{F/A}} = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A} = \frac{n_2 - n_6}{n_5 - n_6} = \left(-\frac{18}{42}\right)\left(-\frac{22}{38}\right) \therefore$$
$$\frac{600 - 375}{n_5 - 375} = \frac{18 \times 22}{42 \times 38} \therefore n_5 = 375 + \frac{225 \times 42 \times 38}{18 \times 22} = 1281.8 \therefore$$

$$\boxed{n_5 = 1281.8 \text{ rpm}}$$

Método tabular:

Pasos	E2	E3	E4	E5	E9	Brazo 6
I	375	375	375	375	375	375
II	225	-388.6	-388.6	906.8	0	0
III	600	-13.6	-13.6	1281.8	375	375

Resumen de los pasos II y III:

Paso II:

$$n_2 = 600 - 375 = 225 \text{ rpm}$$
$$n_7 = 300 - 375 = -75 \text{ rpm}$$
$$\frac{n_3}{n_2} = -\frac{N_2}{N_3} \therefore n_3 = 225 \times \left(-\frac{38}{22}\right) = -388.6 \text{ rpm}$$
$$n_4 = n_3 = -388 \text{ rpm}$$
$$\frac{n_5}{n_4} = -\frac{N_4}{N_5} \therefore n_5 = 388.6 \times \left(-\frac{42}{18}\right) = 906.8 \text{ rpm}$$

Paso III:

$$n_3 = 375 - 388.6 = -13.6 \text{ rpm}$$
$$n_4 = n_3 = -13.6 \text{ rpm}$$

$$\boxed{n_5 = 375 + 906.8 = 1281.8 \text{ rpm}}$$

4.5 DISEÑO DE ENGRANES POR MEDIO DE SOFTWARE.

En este tema se usa durante el desarrollo de la unidad el software libre “Working Model 2005” del libro: Diseño de Maquinaria, Robert L. Norton, 3ª Edición.