ANALÍZIS III. TÉTELSOR

BSC MATEMATIKATANÁR SZAKIRÁNY
2008/2009. ŐSZI FÉLÉV

Tudnivalók a vizsgáról: a vizsga írásban fog történni. Csak indexet, diákigazolványt (vagy személyit), tiszta papírt, írószerszámot és enni-innivalót hozhatnak be a terembe. A vizsga anyaga: ami előadáson elhangzott, kiegészítve azzal, amire utaltam, hogy a jegyzetben találhatják meg. Bizonyítást csak ott kell tudni, ahol alább jelzem. Ha egy ilyen bizonyítás hivatkozik olyan tételre, aminek nem kértem a bizonyítását, azt természetesen itt sem kell bizonyítani (csak kimondani és értelmezni, hogyan alkalmazható). A tételsor összeállításában elsősorban a fő témakörökre és az azokhoz tartozó állításokra, tételekre koncentráltam – a definíciókat természetesen mindenütt kell tudni, ott is, ahol külön nem jeleztem.

1. Függvénysorozatok, függvénysorok

Pontonkénti és egyenletes konvergencia. Példa pontonként, de nem egyenletesen konvergens függvénysorozatra. Folytonosság, Riemann-integrálhatóság és differenciálhatóság öröklődése a limeszfüggvényre *(bizonyítással, Riemann-integrálhatóság esetén csak a folytonos esetre)*. Példák. Függvénysor pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Folytonosság, Riemann-integrálhatóság és differenciálhatóság öröklődése a összegfüggvényre *(bizonyítással, Riemann-integrálhatóság esetén csak a folytonos esetre)*. Függvénysor egyenletes konvergenciájának Cauchy-féle feltétele. Weierstrass-kritérium függvénysor egyenletes konvergenciájára *(bizonyítással)*.

2. Metrikus terek

Metrikus tér definicíója, fontos példák ($\mathbb{R}^n$-en, $b(H)$-n, diszkrét metrika). Metrikus térbeli alapfogalmak: gömbök, Cauchy-sorozat, konvergens sorozat, pontok osztályozása. Nyílt és zárt halmazok tulajdonságai. 4-4 példa nyílt és zárt halmazokra *(bizonyítással)*. Teljes metrikus tér, példák *(bizonyítással)*. Ekvivalens metrikák, tulajdonságok. $(\mathbb{R}^n, d_p)$ teljessége *(bizonyítással)*. Banach-féle fixponttétel *(bizonyítással)*. Korlátos halmaz, ekvivalens állítások. Sorozatkompakt halmaz. Példa korlátos és zárt, nem sorozatkompakt halmazra *(korlátosság és nem-sorozatkompaktság bizonyításával)*. $(\mathbb{R}^n, d_p)$-beli sorozatkompakt halmazok.

3. Normált terek

Normált tér definíciója, fontos példák ($\mathbb{R}^n$-en, $b(H)$-n). $\mathbb{R}^n$-en $\|\cdot\|_p$ norma *(bizonyítással)*. Norma által indukált metrika, ekvivalens normák. Banach tér, példák *(bizonyítással)*.

4. Határérték, folytonosság metrikus terekben

Metrikus terek között ható függvények határértéke és folytonossága, átviteli elvek, Lipschitz-tulajdonság. Példák *(bizonyítással)*. Koordinátafüggvények határértéke és folytonossága. Kompozíciófüggvény határértéke és folytonossága. (Általánosított) Weierstrass-tétel *(bizonyítással)*. Egyenletes folytonosság. (Általánosított) Heine-tétel *(bizonyítással)*.

5. Jordan-mérték $\mathbb{R}^n$-en

Jordan-mérték bevezetése ($\mathbb{R}^2$-en és $\mathbb{R}^n$-en). Tulajdonságok. Ha $f \in C[a, b]$, akkor $\mathrm{graph}(f)$ nullmértékű *(bizonyítással)*.

6. Riemann-integrál $\mathbb{R}^n$-en

Az n dimenziós integrál bevezetése. Tulajdonságok, integrálhatóság leghasznosabb kritériuma. Folytonos függvény integrálhatósága *(bizonyítással)*. Halmaz mérhetősége és az integrál kapcsolata. Fubini-tétel *(bizonyítással)*. Alkalmazások: Normáltartományon vett integrál, Cavalieri-elv *(bizonyításokkal)*. Parciális deriváltak, derivált- (Jacobi-) mátrix. Integráltranszformáció.

7. Differenciálegyenletek

Radiaktív anyag bomlása *(bizonyítással)*. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása *(bizonyítással)*. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása *(bizonyítással)*.