

# 几何与对称

李思

2018 年秋 @ 清华大学

## 摘要

这不是一本完整的书或者讲义，也没有经过什么修饰。它粗略记录下了 2018 年秋在清华给大一学生首次开设的《几何与对称》课程的笔记，其本身并没有什么原创性。没有修饰或者重写的原因，一个是由于这门课我只上过一次，而这门课并没有实质意义上的固定内容，具有较强的量子涨落；另一个更本质的原因是由于我可能太懒。希望这份笔记能够对读者有所帮助。

这份笔记是完全开源的，也不确定以后是否会更新内容，一切随缘。欢迎读者来信交流，我想既然你能找到这份讲义，一定也能找到我的个人主页和联系方式。如果你觉得这份讲义有些帮助，并且有兴趣请我吃糖或者喝咖啡的话，我个人以及如下二维码都是非常欢迎的。



“知足常乐，厚积薄发”

## 目录

1	群的概念	2
1.1	群的定义	2
1.2	子群	8
1.3	群同态和同构	13
1.4	群作用和轨道	17
1.5	有限旋转群与多面体	23

<b>2</b>	<b>矩阵群</b>	<b>26</b>
2.1	一般线性群 . . . . .	26
2.2	正交群与等距同构 . . . . .	28
2.3	酉空间与酉矩阵 . . . . .	32
2.4	仿射变换 . . . . .	34
2.5	离散等距同构和壁纸图案 . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Möbius 群</b>	<b>49</b>
3.1	黎曼球面 . . . . .	49
3.2	Möbius 变换 . . . . .	50
3.3	交比 . . . . .	54
3.4	共轭类 . . . . .	56
3.5	双曲平面 . . . . .	59
<b>4</b>	<b>基本群</b>	<b>62</b>
4.1	路径和连通分支 . . . . .	62
4.2	路径同伦和基本群 . . . . .	64
4.3	$S^1$ 的基本群 . . . . .	67
4.4	复叠空间 . . . . .	70
4.5	一些例子和应用 . . . . .	76
4.6	复叠分类和曲面 . . . . .	81

# 1 群的概念

## 1.1 群的定义

**定义 1.1.** 设  $S$  是一个集合。 $S$  上一个二元运算指的是一个集合的映射 (记为  $\circ$ )

$$\circ : S \times S \rightarrow S.$$

1) 二元运算  $\circ$  称为是结合的 (associative), 如果

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in S.$$

2) 二元运算  $\circ$  称为是交换的 (commutative), 如果

$$a \circ b = b \circ a, \quad \forall a, b \in S.$$

3) 元素  $e \in S$  称为是单位元 (或称恒等元)(identity element), 如果

$$e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in S.$$

在研究具体的例子时, 我们常常用其他符号例如  $+$ ,  $\cdot$  代替  $\circ$ .

**命题 1.2.** 设  $(S, \circ)$  是一个集合上的二元运算。则  $S$  中最多只有一个单位元。

**例子 1.3.** 实数上的加法运算  $(\mathbb{R}, +)$  和乘法运算  $(\mathbb{R}, \cdot)$  都是交换和结合的。其中加法的单位元是  $e = 0$ , 乘法的单位元是  $e = 1$ 。

**例子 1.4.** 考虑向量空间  $\mathbb{R}^3$ , 叉积  $\times$  定义了一个二元运算

$$\vec{v}, \vec{w} \rightarrow \vec{v} \times \vec{w}, \quad \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$$

可以验证, 这个二元运算不是结合的。

**定义 1.5.** 带二元运算的集合  $(G, \cdot)$  称为一个群 (group), 如果以下条件满足

- 1) 结合律: 二元运算  $\cdot$  是结合的。
- 2) 单位元:  $G$  中存在单位元, 记为  $1_G$ , 或简写为  $1$ 。
- 3) 可逆性: 对  $G$  中任一元素  $a$ , 存在  $b$  使得  $a \cdot b = b \cdot a = 1$ 。  $b$  称为  $a$  的逆元 (inverse)。

二元运算  $\cdot$  称为群  $G$  中的乘积 (product)。

- 如果  $\cdot$  是交换的, 称  $G$  为一个 Abel 群 (Abelian group)。
- 记  $|G|$  为  $G$  中元素个数, 称为  $G$  的阶 (order)。如果阶有限, 称  $G$  为有限群。否则称无限群。

**命题 1.6.** 设  $(G, \cdot)$  是一个群, 则  $G$  中任一元素的逆元是唯一的。

我们把  $a$  的逆元记为  $a^{-1}$ 。由上述命题, 这个记号是没有歧义的。

**例子 1.7.** 设  $k = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  或者  $\mathbb{C}$ ,  $+$  为  $k$  上的加法,  $\cdot$  为  $k$  上的乘法。  $k^* = k - \{0\}$ 。

- $(k, +)$  是一个 Abel 群, 单位元是  $0$ 。
- $(k, \cdot)$  不是一个群。若  $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  或者  $\mathbb{C}$ , 则  $(k^*, \cdot)$  是一个 Abel 群, 单位元是  $1$ 。

**例子 1.8.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  模  $n$  同余类。设  $k \in \mathbb{Z}$ , 记  $\bar{k}$  为  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  中的同余等价类。加法  $+$  和乘法  $\cdot$  定义为

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}.$$

其中  $a + b$  与  $a \cdot b$  为  $a, b$  在  $\mathbb{Z}$  中的加和乘积。

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  为 Abel 群, 阶为  $n$ , 称为  $n$  阶循环群。我们熟知的一个例子是  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$



- 记  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  为  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  在乘法运算  $\cdot$  下可逆元的集合。易知

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid (m, n) = 1\}.$$

其中  $(m, n)$  为  $m, n$  的最大公约数。  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  在乘法运算  $\cdot$  是一个 Abel 群，阶为欧拉函数  $\varphi(n)$ 。特别，如果  $n = p$  为质数，则  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}$  是阶为  $p - 1$  的有限 Abel 群。做为一个简单的应用，考虑把  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  中所有元素乘起来，并把逆元相互配对，我们得到

$$(p - 1)! \equiv p - 1 \pmod{p}$$

即  $p$  总是整除  $(p - 1)! + 1$  这个并不是很显然的结论。

**例子 1.9.** 四元群 (quaternion group)  $Q_8$  由八个元素组成  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 。乘法结构由

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

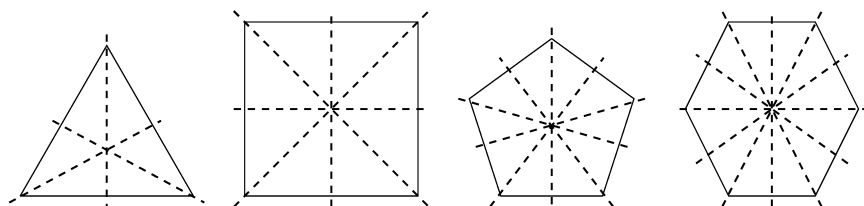
完全决定。可以推出  $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$ 。  $Q_8$  是非 Abel 群。

**例子 1.10.** 二面体群 (dihedral group) 是平面上正  $n$  边形 ( $n > 2$ ) 的对称群。它由  $n$  个旋转和  $n$  个反射所组成，几何上通常记为  $D_n$ <sup>1</sup>。

正  $n$  边形的  $n$  个旋转如下图所示 (其中第一个为恒等元，我们把它视作一个平凡的转动)

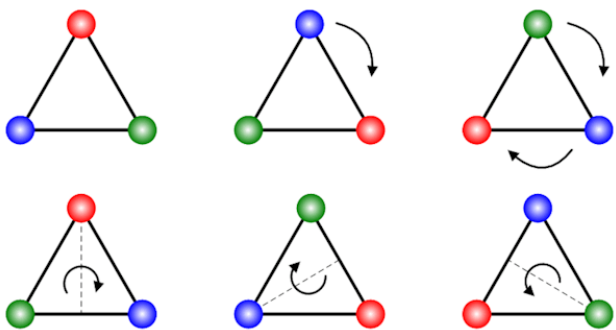


正  $n$  边形的  $n$  个反射如下图所示，其中虚线轴为反射轴。



$D_n$  共有  $2n$  个元素。例如，  $D_3$  的 3 个旋转和 3 个反射如下图所示

<sup>1</sup>代数上有时候也记为  $D_{2n}$ 。本书采用几何上的记号。



现在我们说明  $D_n$  在变换的复合下形成一个  $2n$  阶的群。记  $r$  为逆时针旋转  $\frac{2\pi}{n}$  度，则  $r^n = 1$  且

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$$

标记了所有的旋转。选定一个反射轴，记  $s$  为对应的反射， $s^2 = 1$ 。可以验证，如下复合

$$\{s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\}$$

标记了所有的反射。于是  $D_n$  的  $2n$  个元素为如下的变换

$$D_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\}.$$

我们说明复合  $sr$  也是  $D_n$  中的元素。实际上，通过图形可以验证

$$srs = r^{-1}, \quad \text{或} \quad sr = r^{n-1}s.$$

由此可以证明  $D_n$  在变换的复合下封闭，于是形成一个群。比如

$$(r^a s)(r^b s) = r^a r^{-b} s s = r^{a-b}$$

再利用关系  $r^n = 1$ ，即  $r^{-1} = r^{n-1}$ ，将  $r^{a-b}$  简化为  $D_n$  中标准元素的样子。我们通常记为

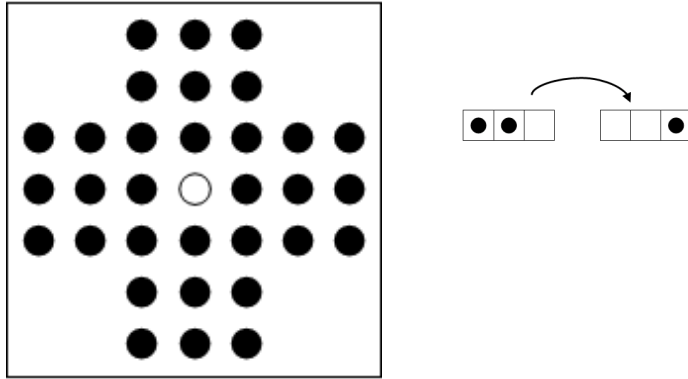
$$D_n = \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, sr = r^{n-1}s \rangle$$

表示  $D_n$  是由两个元素  $r, s$  生成，满足关系  $r^n = 1, s^2 = 1, sr = r^{n-1}s$ 。

**例子 1.11.** Klein 群  $V$  由四个元素组成  $V = \{1, a, b, c\}$  的 Abel 群，其乘法结构为

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1, \quad ab = c, bc = a, ca = b.$$

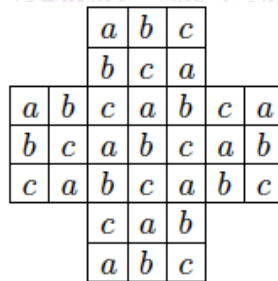
作为一个有趣的应用，考虑一个古老的游戏 (Peg Solitaire):



在如上左图的棋盘中，除去正中位置外摆满黑子。游戏的规则为：每次可以把一个黑子隔着相邻（水平或者垂直）的另一个黑子跳到空白处，同时移除被跳过的黑子。如上右图示。

**问题：**是否可以使得棋盘上最后只剩下一个黑子？如果可以，这个黑子落在哪里？

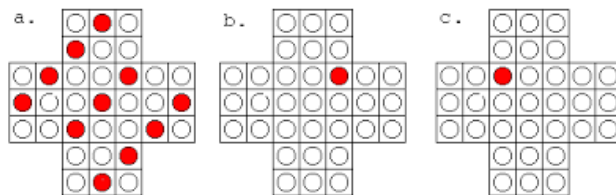
这个问题第一问的答案是肯定的，有兴趣的读者可以自己设计一个走法来实现。这里我们利用群论方法来分析第二问。考虑把 Klein 四元数如下标记到棋盘中。



这个标记保证了直线上任意三个相邻元素的乘积都是单位元 1。

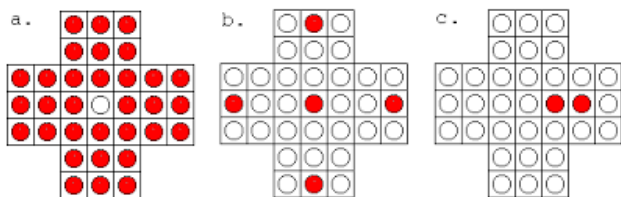
设  $C$  是一个棋盘上黑子的分布。令  $[C] \in V$  代表  $C$  中所有的黑子位置上的群元素标记乘起来得到的某个 Klein 四元数，称为  $C$  的权。由于  $V$  是 Abel 群，权和乘积的顺序选取无关。容易验证，如果  $C$  走一步得到  $C'$ ，则  $[C] = [C']$  具有相同的权。于是权为游戏过程中的一个不变量。

由于起始黑子分布的权为  $b$ ，最终分布的权为最后一个黑子位置上的标记。我们知道最后一个黑子只可能落在标记为  $b$  的位置。如下图 a.。



由左右反射对称性，上图中 b. 和 c. 的位置是等价的。由于黑子最后不可能落在上图 c. 的位

置，我们可以排除最后一个黑子落在上图 b. 的可能性。用此方法我们可以再排除 6 种可能，最后一个黑子只能落在如下图 b. 中的某个位置



这 5 种可能性都可以达到，而且我们总可以使得最后一个黑子落在正中间。实际上，假如最后一个黑子落在上图 b. 中最右边的位置，则前一步一定如上图 c. 所示。我们可以改变走法使得黑子最后落在正中间。这样我们就完整地解决了这个问题。

**例子 1.12. 置换群。** 给定一个集合  $X$ ，它的一个置换指的是一个一一映射

$$f: X \rightarrow X.$$

记  $X$  上所有的置换的集合为  $S_X$ 。设  $f, g \in S_X$  为两个置换，则它们的复合映射

$$f \circ g: X \rightarrow X$$

也是一个置换，记  $f \circ g \in S_X$ 。 $S_X$  在映射的复合运算下形成一个群，称为  $X$  的置换群。其中  $f$  逆元  $f^{-1}$  为  $f$  的逆映射。若  $X$  为  $n$  个元素的集合，标记为

$$X = \{1, 2, \dots, n\},$$

我们把对应的置换群记为  $S_n$ 。我们记  $S_n$  中的一个元素  $\sigma$  为

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}.$$

$\sigma$  表示将  $k$  变成  $i_k$  的置换。乘积  $\alpha\beta$  表示先作用  $\beta$  置换，再作用  $\alpha$  置换。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$S_n$  的阶为  $n!$ 。

**命题 1.13.** 设  $G$  是一个群， $g \in G$ 。定义如下  $G$  到  $G$  的两个映射

$$L_g: G \rightarrow G, \quad h \rightarrow gh \quad \text{以及} \quad R_g: G \rightarrow G, \quad h \rightarrow hg.$$

则  $L_g, R_g$  分别是两个  $G$  上的置换。 $G$  是 *Abel* 群当且仅当  $\forall g \in G, L_g = R_g$ 。

## 1.2 子群

**定义 1.14.** 设  $G$  是一个群。  $G$  的一个子集  $H$  称为  $G$  的一个子群 (subgroup), 如果满足下述条件

- 1) 乘法封闭: 对任意  $a, b \in H$  都有  $ab \in H$ 。
- 2) 求逆封闭: 对任意  $a \in H$  都有  $a^{-1} \in H$ 。

**例子 1.15.**  $H = \{e\}$  或者  $G$  称为  $G$  的平凡子群。

**例子 1.16.** 设  $m$  为正整数, 则  $m\mathbb{Z}$  是  $\mathbb{Z}$  的子群。

**命题 1.17.** 设  $H_i$  是  $G$  的子群,  $i \in I$ 。 则  $\bigcap_{i \in I} H_i$  是  $G$  的子群。

**定义 1.18.** 设  $G$  是群,  $H$  是  $G$  的子群。 给定  $g \in G$ , 定义它关于  $H$  的左陪集 (left coset) 为

$$gH := \{g \cdot h | h \in H\} \subset G.$$

所有左陪集的集合记为  $G/H$ 。 类似, 定义其关于  $H$  的右陪集 (right coset) 为

$$Hg := \{h \cdot g | h \in H\} \subset G.$$

所有右陪集的集合记为  $H \backslash G$ 。

**命题 1.19.** 设  $H$  是群  $G$  的子群。 则任意两个左陪集  $aH, bH$  必定满足如下两个条件之一:

- $aH \cap bH = \emptyset$
- $aH = bH$

该命题对右陪集类似成立。

**证明.** 假设  $aH \cap bH$  非空。 存在  $h_1, h_2 \in H$  使得  $ah_1 = bh_2$ 。 则  $\forall h \in H$ ,

$$ah = ah_1h_1^{-1}h_2 = bh_2h_1^{-1}h_2 \in bH.$$

因此  $aH \subset bH$ 。 同理可证  $bH \subset aH$ 。 由此知  $aH = bH$ 。 □

**定理 1.20 (Lagrange).**  $G$  是一个有限群,  $H$  是  $G$  的子群。 则  $|H|$  整除  $|G|$  且  $|G| = |H||G/H|$ 。

**证明.** 由于  $g \in gH$ ,  $G$  中任一元素都属于  $H$  的一个左陪集。 由上述命题知,  $G$  可以表示为互不相交的左陪集的并, 而每个左陪集的元素个数都是  $|H|$ 。 因此  $|G| = |H||G/H|$ 。 □

**定义 1.21.** 设  $g$  为群  $G$  中的一个元素。 若存在正整数  $n$  使得  $g^n = 1$ , 则满足此式的最小正整数叫做  $g$  的阶 (order), 称  $g$  是有限阶元素。 如果不存在这样的正整数, 称  $g$  是无限阶元素。

**定义 1.22.** 记  $\langle g \rangle$  是群  $G$  中包含  $g$  的最小子群。



- 若  $g$  是阶为  $n$  的有限阶元素, 则  $\langle g \rangle = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ 。
- 若  $g$  是无限阶元素, 则  $\langle g \rangle = \{1, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \dots\}$  为无限群。

特别的, 如果  $G$  是有限群, 则  $G$  中任一元素均为有限阶元素。

如果存在元素  $g$  使得  $G = \langle g \rangle$ , 我们称  $G$  是一个循环群 (cyclic group),  $g$  是  $G$  的一个生成元 (generator)。

这个定义可以推广如下: 设  $A$  是群  $G$  的一个子集, 记  $\langle A \rangle$  是群  $G$  中包含  $A$  的最小子群。容易验证,  $\langle A \rangle$  由所有可以表达为如下乘积

$$a_1 a_2 \cdots a_k, \quad a_i \in A \text{ 或 } a_i^{-1} \in A$$

的元素构成。如果  $\langle A \rangle = G$ , 我们称群  $G$  是由  $A$  中的元素生成的。

**命题 1.23.** 设  $G$  是有限群。则  $G$  中任一元素  $g$  的阶都是  $|G|$  的因子, 即  $g^{|G|} = 1$ 。

**例子 1.24.** 设  $a, n$  为互素的两个正整数,  $\varphi$  为 Euler 函数。则 Euler 定理给出

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

一个证明方法如下: 考虑群  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , 则  $|G| = \varphi(n)$ 。由条件,  $\bar{a} \in G$ 。我们推出

$$(\bar{a})^{\varphi(n)} = \bar{1}, \quad \text{即 } a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

**例子 1.25.** 二面体群  $D_n = \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, sr = r^{n-1}s \rangle$  是由两个元素  $r, s$  生成的。 $r$  生成了一个  $n$  阶的循环子群,  $s$  生成了一个 2 阶循环子群。

**命题 1.26.** 循环群的子群是循环群。

**例子 1.27.** 交错群  $A_n$  (Alternating group)。

设  $\sigma \in S_n$  是置换群的某个元素。如果  $\sigma$  把其中  $k$  个元素  $i_1, i_2, \dots, i_k$  映射成  $i_2, i_3, \dots, i_k, i_1$ , 而保持其他元素不动, 我们称  $\sigma$  是一个长度为  $k$  的轮换, 并把  $\sigma$  标记为另外一种简化方式

$$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_k).$$

例如  $\sigma = (123)$  表示为  $1, 2, 3 \rightarrow 2, 3, 1$ , 其他元素不变的一个置换。 $\sigma$  的标记方法不唯一, 易知

$$(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_2 \cdots i_k i_1).$$

任意一个置换总可以表示为一些轮换的乘积, 如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = (1)(24)(365) = (24)(365).$$

其中 (1) 表示的是一个恒等置换, 我们可以省略不记。置换的逆通过轮换也可以很容易的表达。容易看出, 群元素乘积的逆是各个元素的逆的乘积, 但是改变乘积的先后顺序

$$g = g_1 g_2 \cdots g_k, \quad g^{-1} = g_k^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}.$$

因此我们只需要计算一个轮换的逆。可以验证，

$$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_k), \quad \sigma^{-1} = (i_k i_{k-1} \cdots i_2 i_1).$$

例如，对  $g = (24)(365)$ ，我们有  $g^{-1} = (563)(42) = (356)(24)$ 。

长度为 2 的轮换称为一个对换。例如， $(34)$  表示把 3 和 4 对换，其他元素不变。

一个重要的观察是每个轮换均可以表示为一些对换的乘积。例如

$$(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_1 i_k)(i_1 i_{k-1}) \cdots (i_1 i_2).$$

但是这种表达方式是不唯一的，例如

$$(123) = (13)(12) = (12)(23).$$

总而言之， $S_n$  中的元素总是可以表示成一些对换的乘积。虽然这个表达法不是唯一的，但是这个表达法里包含的对换个数的奇偶性是确定不变的，称为该置换的奇偶性 (parity)。这个关于奇偶性的结论可以证明如下：定义一个映射

$$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}, \quad \sigma \rightarrow \prod_{i < j} \text{sgn}(\sigma(j) - \sigma(i)).$$

这里我们重复用了同一个记号  $\text{sgn}$ 。其中上式右边里对一个非零实数

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

一个等价的描述如下：考虑  $n$  个变元的多项式

$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

对  $\sigma \in S_n$  和一个  $n$  元多项式  $f(x_1, \cdots, x_n)$ ，我们定义  $\sigma(f)$  为如下  $n$  元多项式

$$\sigma(f) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}).$$

则

$$\text{sgn}(\sigma) = \frac{\sigma(P)}{P}.$$

对任意的两个置换  $\alpha, \beta$ ，由

$$\text{sgn}(\alpha\beta) = \frac{\alpha(\beta(P))}{P} = \frac{\alpha(\beta(P))}{\beta(P)} \frac{\beta(P)}{P} = \frac{\alpha(P)}{P} \frac{\beta(P)}{P}$$

在上面的推导中，我们利用了  $\frac{\alpha(\beta(P))}{\beta(P)} = \frac{\alpha(P)}{P}$  (容易验证)。我们得出映射  $\text{sgn}$  的如下关键性质

$$\text{sgn}(\alpha\beta) = \text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in S_n.$$

观察到，若  $\sigma = (ij)$  是一个对换，则  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ 。因此，对一般的元素  $\sigma$ ，假设  $\sigma$  表达为

$$\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_k$$

其中  $\alpha_i$  均为对换。则由  $\text{sgn}$  的性质知

$$\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma_1) \cdots \text{sgn}(\sigma_k) = (-1)^k,$$

即  $k$  的奇偶性与  $\sigma$  的表达方式无关。

**定义 1.28.** 我们定义交错群  $A_n$  为  $S_n$  中所有的偶置换。

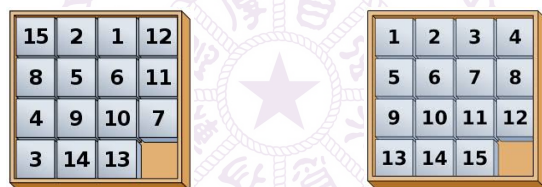
$A_n$  是  $S_n$  的一个子群，并且  $S_n$  关于  $A_n$  只有两个左陪集（或者右陪集）：偶置换和奇置换。

**数字推盘游戏 (n-Puzzle)** 由一块有凹槽的板和写有数字的方块所组成，如下图所示



游戏者要移动板上的方块使得数字移动到一个指定的位置。

问题：是否可以由如下图左移动还原到如下图右的位置？

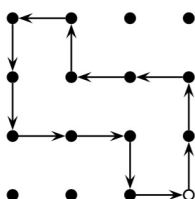


这个问题可以转化为置换群的性质。每一个右下角空出的棋盘对应于一个  $S_{15}$  中的元素，例如上图右的原始棋盘对应于恒等置换，上图左对应于

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 2 & 13 & 9 & 6 & 7 & 12 & 5 & 10 & 11 & 8 & 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

它表示把 1 放到原始 3 的位置，2 放到原始 2 的位置，3 放到原始 13 的位置，等等。注意到中间状态的右下角不一定是空白，从而不能直接对应到一个  $S_{15}$  中的元素。我们这里将要考察的是最初态和最末态，以及对于它们定义的不变量。

我们考察一下，如果棋盘的布置可以从原始的位置（上图右）移动得到，那么它对应的置换  $\sigma$  应该满足什么样的性质。整个移动的过程可以通过记录空白位置的走动来标志，例如下图



我们可以把每个移动表示为  $S_{16}$  中关于 16 个数字的一个对换 (空白标志为 16), 而最终到达的位置可以看作是我们如上描述的  $S_{15}$  中的元素 (因为 16 还是回到自己)。观察到, 如果需要将空白移回到出发点, 往上走的步数 = 往下走的步数, 往左走的步数 = 往右走的步数, 总共要移动偶数步! 因此, 如果棋盘的数字分布可以还原到原始状态, 则它对应的置换一定是偶置换, 即交错群  $A_{15}$  中的元素! 回到我们一开始的问题, 它对应的置换可以表达为如下轮换的乘积

$$\sigma = (1\ 3\ 13\ 15)(4\ 9\ 10\ 11\ 8\ 5\ 6\ 7\ 12).$$

容易看出  $\sigma$  是一个奇置换, 所以它对应的棋盘不可能还原到原始状态!

进一步我们可以问, 如果给出棋盘的布置对应于一个偶置换, 是否一定可以还原? 即是否  $A_{15}$  中的所有元素都可以通过移动棋盘来实现? 这个问题的答案是肯定的, 我们这里不详细讨论, 具体的证明将留在作业中。

### 例子 1.29. 欧式空间的等距同构群。

$\mathbb{R}^n$  表示为  $n$  维的欧式空间, 空间中一个点  $\vec{x}$  可以通过  $n$  个实数 (坐标) 来表示

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}$$

例如:  $\mathbb{R}^2$  表示的是 2 维平面,  $\mathbb{R}^3$  表示的是 3 维立体空间。 $\mathbb{R}^n$  上两点间的距离定义为

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

它满足如下的基本性质:

- $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$  当且仅当  $\vec{x} = \vec{y}$
- $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$  (三角不等式)

**定义 1.30.**  $\mathbb{R}^n$  的一个等距同构 (isometry) 指的是一个一一映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  且保持距离不变, 即

$$d(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{R}^n$  的所有等距同构在复合下形成一个群, 称为  $\mathbb{R}^n$  的等距同构群, 记为  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ .

我们可以把  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  看作是  $\mathbb{R}^n$  这个集合的置换群  $S_{\mathbb{R}^n}$  (无限群!) 的一个子群。

我们考虑  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  中的几类变换。设  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , 我们定义

$$T_{\vec{v}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{v}.$$

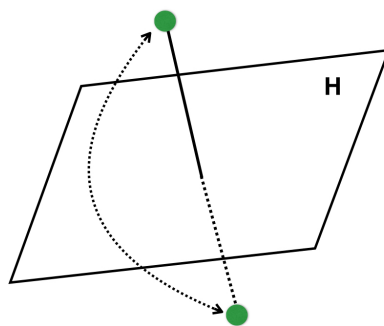
则  $T_{\vec{v}} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ , 称为沿  $\vec{v}$  的平移 (translation)。在物理中, 平移对应于动量。

给定一个  $\mathbb{R}^n$  中过原点的一个二维平面, 我们可以定义  $\mathbb{R}^n$  沿着二维平面方向绕原点的旋转。这个旋转保持  $\mathbb{R}^n$  中与该平面垂直的向量不动。在  $\mathbb{R}^3$  的情形, 这个二维平面可以通过其垂直的轴来确定, 对应于绕该轴的旋转, 如下图



这个旋转是一个等距同构，称为一个过原点的转动 (rotation)。在物理中，转动对应于角动量。如果将过原点的转动和一个平移复合，我们可以得到一个一般的转动。

给定  $\mathbb{R}^n$  中的一个超平面  $H$ ，我们定义  $\sigma_H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为沿着  $H$  的镜像反射，如下图



则  $\sigma_H$  也是一个等距同构，称为一个反射。

**命题 1.31.** 每一个等距同构  $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  可以写成乘积  $g = T_{\vec{v}} \circ \sigma$ 。其中  $T_{\vec{v}}$  是沿着  $\vec{v}$  的平移， $\sigma$  是一个保持原点不动的等距同构。

**定义 1.32.** 我们把  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  中保持原点不变的子集记为  $O_n(\mathbb{R})$ 。

我们将会证明，平移，转动和反射生成了整个群  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ，而过原点的转动和反射生成了  $O_n(\mathbb{R})$ 。这两个群将是联系几何和对称性的重要工具。

### 1.3 群同态和同构

**定义 1.33.** 设  $G$  和  $H$  是两个群。映射  $f : G \rightarrow H$  称为一个群同态 (homomorphism)，如果

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in G.$$

即  $f$  保持群之间的乘法结构。此外，如果  $f$  为单射或满射，则  $f$  分别称为单同态或满同态。如果  $f$  既是单同态又是满同态，则称  $f$  是同构 (isomorphism)。

两个群称为是同构的，如果它们之间存在一个同构的映射。容易验证，群的同构是一个等价关系。同构的群可以看成是同一个结构给出的不同标记，通常可以理解为是同样的群。观察到，

**命题 1.34.** 设  $f : G \rightarrow H$  是一个群同态。则

- $f$  保持单位元:  $f(1_G) = 1_H$ 。
- $f$  保持逆元:  $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}, \forall g \in G$ 。

例子 1.35. 嵌入映射  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  定义了一个实数加法群到复数加法群的同态。

例子 1.36. 指数映射

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad r \rightarrow e^r$$

给出了加法群  $(\mathbb{R}, +)$  到乘法群  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  的同态。利用欧拉公式, 这个指数映射可以推广到复数

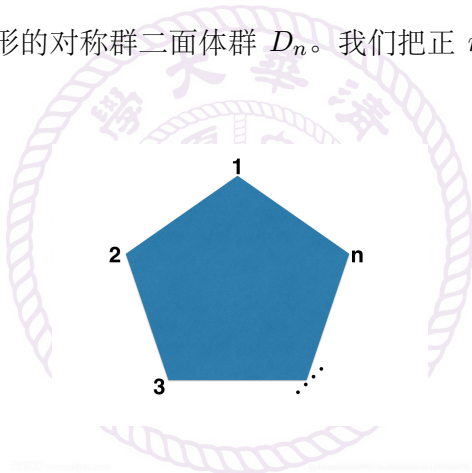
$$\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad z \rightarrow e^z.$$

例子 1.37. 设  $G$  是一个循环群, 则  $G$  同构与  $\mathbb{Z}$  或者  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $n$  为某个正整数。

例子 1.38. 乘法群  $\{\pm 1\}$  与加法群  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  同构。

例子 1.39.  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  定义了置换群  $S_n$  到乘法群  $\{\pm 1\}$  的满同态。

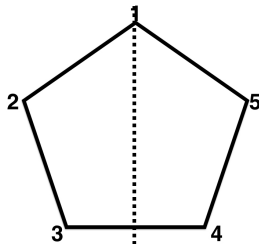
例子 1.40. 考虑平面正  $n$  边形的对称群二面体群  $D_n$ 。我们把正  $n$  边形的  $n$  的顶点分别标记为  $\{1, 2, \dots, n\}$ , 如下图示



对  $D_n$  中的每个元素  $g$ ,  $g$  的作用给出了顶点的一个置换, 于是定义了置换群  $S_n$  中的一个元素, 记为  $\rho(g)$ 。例如, 对于  $r$  逆时针旋转  $\frac{2\pi}{n}$ , 我们有

$$\rho(r) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{bmatrix}.$$

又例如, 对沿着如下虚线的反射  $\sigma$



我们有

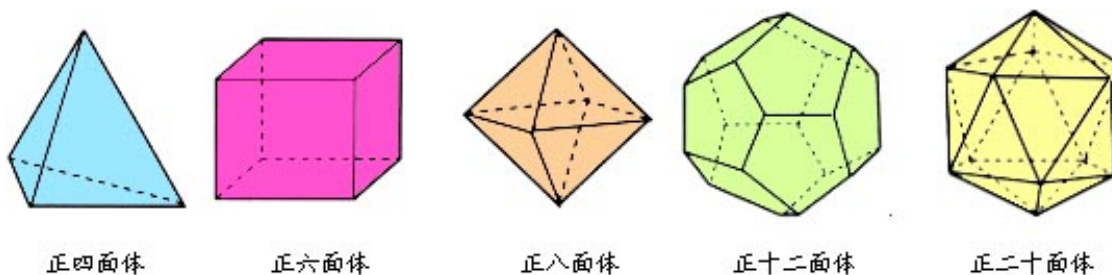
$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

可以验证,

$$\rho: D_n \rightarrow S_n$$

定义了一个单同态, 于是  $D_n$  可以看作是  $S_n$  的子群。当  $n = 3$  时,  $\rho: D_3 \rightarrow S_3$  是一个群同构。

**例子 1.41.** 柏拉图多面体是三维空间中的正凸多面体, 可以证明共有如下五种



正四面体

正六面体

正八面体

正十二面体

正二十面体

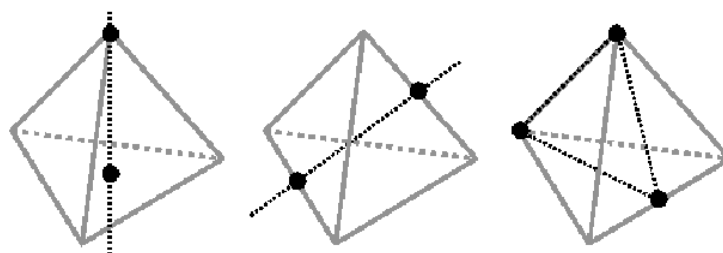
设  $X_N$  是柏拉图正凸  $N$  面体, 重心在原点。记  $SO_3(\mathbb{R})$  为  $O_3(\mathbb{R})$  中所有的旋转生成的子群。定义

$$\text{Aut}(X_N) = \{g \in O_3(\mathbb{R}) | g(X) = X\}, \quad \text{Aut}^+(X) = \{g \in SO_3(\mathbb{R}) | g(X) = X\}$$

分别为  $O_3(\mathbb{R}), SO_3(\mathbb{R})$  中将  $X_N$  映到  $X_N$  的变换组成的子群。 $\text{Aut}(X_N)$  称为该正多面体的自同构群 (或对称群),  $\text{Aut}^+(X_N)$  称为转动自同构群 (或转动对称群)。

与二维的情况类似, 我们可以考虑所有顶点构成的集合的置换群。容易看出  $\text{Aut}^+(X_N)$  为  $SO_3(\mathbb{R})$  的有限子群。我们将会证明,  $SO_3(\mathbb{R})$  的任一有限子群必定同构于循环群, 二面体群, 或者 5 个  $\text{Aut}^+(X_N)$  中的某一个。于是柏拉图多面体作为几何的分类, 同时给出了  $SO_3(\mathbb{R})$  的有限子群的分类。这给出了另一个几何, 对称性和群相对应的例子。

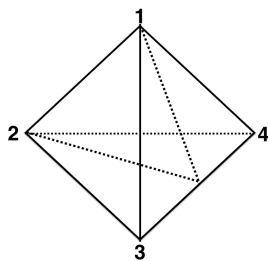
这里我们举例看一下柏拉图多面体的对称群的具体样子。



正四面体的对称群由以上三类变换组成: 绕过某定点的对称轴旋转  $\frac{2\pi}{3}$  (上图左), 绕过相对的边的对称轴旋转  $\pi$  (上图中), 以及绕对称面的一个反射 (上图右)。如果将正四面体的顶点标记为  $\{1, 2, 3, 4\}$ , 则我们可以定义一个群同态

$$\rho: \text{Aut}(X_4) \rightarrow S_4.$$

其中  $\rho(g)$  表示对称变换  $g$  作用在定点上给出的置换。 $\rho$  是一个单同态 (为什么? )。另一方面,  $S_4$  中的任意一个对换均可以通过一个平面反射得到。例如, 对于如下平面反射  $\sigma$



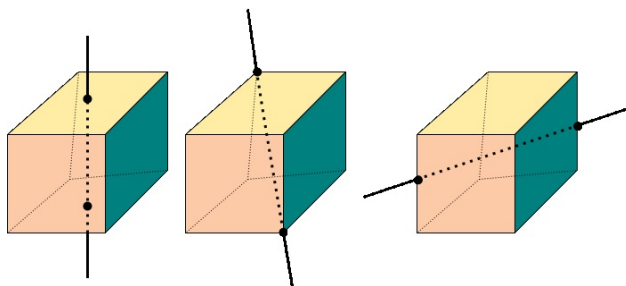
$\rho(\sigma) = (34)$  对应于 3 和 4 的对换。由于所有的对换生成了整个  $S_4$ ，我们得到  $\rho$  也是一个满射。于是  $\rho$  给出了群同构

$$\text{Aut}(X_4) \cong S_4.$$

类似的讨论得到群同构

$$\text{Aut}^+(X) \cong A_4.$$

我们考虑正六面体  $X_6$  的转动自同构群  $\text{Aut}^+(X_6)$ 。它包含以下三种对称轴的旋转



第一类的转动 (上图左) 共有 3 个对称轴，每个对称轴可以转动  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ；第二类的转动 (上图中) 共有 4 个对称轴，每个对称轴可以转动  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ；第三类的转动共有 6 个转动轴，每个转动轴可以转动  $\pi$ 。加上恒等变换， $\text{Aut}^+(X_6)$  中共有 24 个元素。

把上面中间的图中的轴称为主对称轴，共有四个。把这四个主对称轴标记为  $\{1, 2, 3, 4\}$  (这一步很有技巧性)。 $\text{Aut}^+(X_6)$  中的每个元素给出了四个主对称轴的置换，由此定义了一个群同态

$$\rho : \text{Aut}^+(X_6) \rightarrow S_4.$$

$\rho$  是一个单同态 (为什么?)。由于  $S_4$  中总共有 24 个元素，于是  $\rho$  是一个一一映射，给出群同构

$$\text{Aut}^+(X_6) \cong S_4.$$

其他的正多面体的对称群结果如下。

正六面体和正八面体是相互对偶的，具有相同的对称

$$\text{Aut}^+(X_6) \cong \text{Aut}^+(X_8).$$

正十二面体和正二十面体是相互对偶的，它们的转动对称群为

$$\text{Aut}^+(X_{12}) \cong \text{Aut}^+(X_{20}) \cong A_5.$$



## 群同态基本定理

### 1.4 群作用和轨道

#### 群在集合上的作用

**定义 1.42.** 设  $X$  是一个集合,  $S_X$  是  $X$  的置换群. 群  $G$  在集合  $X$  上一个作用 (action) 指的是一个群同态

$$\rho : G \rightarrow S_X.$$

如果  $\rho$  是单同态, 称群作用是忠实的 (faithful)。

给定一个群  $G$  在集合  $X$  上的作用  $\rho : G \rightarrow S_X$ , 则  $G$  中的每一个元素  $g$  给出一个置换

$$\rho(g) : X \rightarrow X.$$

群同态的条件可以表示为

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

为了简化记号方便, 给定  $g \in G, x \in X$ , 我们用

$$g \cdot x \quad \text{或} \quad gx$$

表示  $X$  上的置换  $\rho(g)$  作用在元素  $x$  上得到的  $X$  中的元素。

群在集合上的作用可以等价地描述为一个集合的映射

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \rightarrow g \cdot x$$

满足如下的群同态条件 (“结合律”)

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 (g_2 \cdot x), \quad \forall g_1, g_2 \in G, x \in X.$$

**例子 1.43.** 置换群  $S_n$  及交错群  $A_n$  作用在集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  上。

**例子 1.44.** 欧式空间等距同构群  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  自然地作用在  $\mathbb{R}^n$  上 (群作用的结合律为什么成立?)。

**例子 1.45.** 3 维空间中转动生成的群  $SO_3(\mathbb{R})$  作用在以原点为圆心的单位球面上。

**例子 1.46.** 几何图形的对称群自然给出一个群作用到几何对象上, 例如

- 二面体群  $D_n$  作用在平面正  $n$  变形的顶点集上, 给出群同态  $D_n \rightarrow S_n$ 。
- 设  $X_N$  是柏拉图正  $N$  多面体, 则  $\text{Aut}(X_N)$  作用在  $X_N$  的顶点集上。

**例子 1.47.** 考虑群的左乘作用  $L : G \rightarrow S_G, g \rightarrow L_g$ 。这里  $L_g$  对应于  $G$  上的置换

$$Lg : G \rightarrow G, \quad h \rightarrow gh.$$

$L$  给出了一个群同态:

$$L_{g_1}(L_{g_2}h) = L_{g_1g_2}h, \quad \forall g_1, g_2 \in G, h \in H$$

等价于群乘法的结合律

$$g_1(g_2h) = (g_1g_2)h, \quad \forall g_1, g_2 \in G, h \in H.$$

于是  $L$  给出了群  $G$  在其自身集合  $G$  上的作用, 称为  $G$  的左正则表示。

类似的, 群的右作用  $R_{g^{-1}} : G \rightarrow G, h \rightarrow hg^{-1}$  也给出了群  $G$  在其自身集合上的作用 (为什么需要  $g^{-1}$ ?), 称为  $G$  的右正则表示。

**例子 1.48.** 设  $G$  为一个群。给定  $g \in G$ , 我们定义  $g$  的共轭作用为

$$\text{Ad}_g : G \rightarrow G, \quad h \rightarrow ghg^{-1}.$$

$\text{Ad}_g$  是一个  $G$  的置换。我们得到一个映射

$$\text{Ad} : G \rightarrow S_G, \quad g \rightarrow \text{Ad}_g.$$

对任意的元素  $g_1, g_2 \in G, h \in G$

$$\text{Ad}_{g_1}(\text{Ad}_{g_2}h) = \text{Ad}_{g_1}(g_2hg_2^{-1}) = g_1g_2hg_2^{-1}g_1^{-1} = (g_1g_2)h(g_1g_2)^{-1} = \text{Ad}_{g_1g_2}h$$

即

$$\text{Ad}_{g_1}\text{Ad}_{g_2} = \text{Ad}_{g_1g_2}, \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

这说明  $\text{Ad}$  是一个群同态, 给出了  $G$  在其自身集合上的作用, 称为  $G$  的共轭表示。

共轭作用有另一个好的性质: 给定  $g \in G$ , 其给出的共轭作用

$$\text{Ad}_g : G \rightarrow G, \quad h \rightarrow ghg^{-1}$$

是群  $G$  到  $G$  本身的一个同态 (为什么? )。特别的, 如果  $H$  是  $G$  的一个子群, 则

$$\text{Ad}_g(H) = gHg^{-1}$$

也是  $G$  的一个子群, 称为与  $H$  共轭的子群。

## 群作用的轨道

**定义 1.49.** 设群  $G$  作用在集合  $X$  上,  $x \in X$  为  $X$  中的一个元素。  $X$  中的如下子集

$$\text{orb}(x) := \{g \cdot x | g \in G\} \subset X$$

称为  $G$  过  $x$  的轨道 (orbit), 记为  $\text{orb}(x)$ 。我们也简记为  $Gx$ 。  $G$  的子集

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G | gx = x\}$$

组成  $G$  的一个子群, 称为  $x$  的稳定子群 (stabilizer)。

$\text{orb}(x)$  收集了  $X$  中可以用群  $G$  的元素从  $x$  置换得到的元素，而  $\text{Stab}(x)$  收集了  $G$  中保持  $x$  不动的  $G$  中的群元素。

**引理 1.50.** 设群  $G$  作用在集合  $X$  上，则  $G$  的任意两个轨道或者完全重合，或者完全不相交。

由上述引理知，群作用将集合  $X$  拆分成了不相交的轨道的并。记

$$X/G = \{X \text{ 在 } G \text{ 作用下的轨道}\}.$$

**例子 1.51.** 群  $G$  在自身集合的左正则表示  $L$  下，只有一个轨道。所有的稳定子群都是平凡群。

**例子 1.52.** 考虑  $\mathbb{R}^2$  上由旋转组成的群  $S^1$ ：它的每个元素对应于单位圆  $S^1$  上的一个点，代表逆时针旋转相应的角度。 $\mathbb{R}^2$  在这个群作用下的轨道为

$$S_r := \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \mid |z| = r\}, \quad r \geq 0.$$

- 当  $r > 0$  时， $S_r$  为半径为  $r$  的圆周，圆周上任意点的稳定子群是平凡的。
- 当  $r = 0$  时，轨道只有一个原点，原点的稳定子群是整个  $S^1$ 。

**例子 1.53.** 考虑乘法群  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ 。考虑如下的群作用在  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  上

$$\rho(r)\vec{x} := r\vec{x}, \quad r \in \mathbb{R}^*, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}.$$

这个群作用表示的是欧式空间上的伸缩变换。两个非零向量  $\vec{x}, \vec{y}$  在同一个轨道上当且仅当  $\vec{x}, \vec{y}$  和原点共线。于是该群作用所有的轨道的集合等于所有过原点的直线的集合，这个集合称为  $n$  维的实射影空间，记为  $\mathbb{R}P^n$ 。

例如，实射影平面  $\mathbb{R}P^2$  表示 3 维空间中所有过原点的直线。这样的直线可以通过单位球面  $S^2$  上的一对对径点给出。这实际上给出了  $\mathbb{R}P^2$  的另外一个描述方法。考虑二元群  $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$  作用在单位球面  $S^2$ ，其中  $\mathbb{Z}_2$  中的非平凡元素  $-1$  将球面上的点映射到它的对径点。则  $\mathbb{R}P^2$  也可以看作是  $\mathbb{Z}_2$  在  $S^2$  上作用的轨道的集合，即  $\mathbb{R}P^2 \cong S^2/\mathbb{Z}_2$ 。这个描述对一般维数也成立

$$\mathbb{R}P^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2.$$

其中  $S^n$  为  $n+1$  维空间的单位球面。

**定义 1.54.** 群  $G$  在自身上的共轭作用的一个轨道称为一个共轭类。包含  $g$  的共轭类记为  $[g]$ 。

给定两个元素  $g_1, g_2 \in G$ ，由定义

$$[g_1] = [g_2] \iff \text{存在某个 } g \in G \text{ 使得 } g_1 = gg_2g^{-1}.$$

此时我们称  $g_1$  与  $g_2$  共轭。 $g$  对应的稳定子群是  $G$  中所有与  $g$  可交换的群元素。

**例子 1.55.** 置换群  $S_n$  的共轭类。设  $\sigma \in S_n$ 。将  $\sigma$  表示成轮换的乘积，设其中长为  $r$  的轮换有  $\lambda_r$  个 ( $1 \leq r \leq n$ )。我们称置换  $\sigma$  的型为  $[\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n]$ 。由定义，

$$\sum_{i=1}^n i\lambda_i = n.$$

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = (1)(24)(365)$$

的型为  $[111000]$ 。又例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} = (123456)$$

的型为  $[000001]$ 。

**定理 1.56.**  $S_n$  中的两个置换共轭的充要条件是它们有相同的型。

证明. 设  $\sigma_1, \sigma_2$  为两个相同型的置换，按照同样的型的顺序表达为轮换的乘积

$$\sigma_1 = (i_1 \cdots) \cdots (\cdots i_n), \quad \sigma_2 = (j_1 \cdots) \cdots (\cdots j_n).$$

考虑置换

$$g = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

$g$  将  $i_k$  置换为  $j_k$ 。容易验证

$$\sigma_2 = g\sigma_1g^{-1}$$

即  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  共轭。类似可以证明，共轭的置换具有相同的型。 □

**例子 1.57.** 设  $H$  是群  $G$  的子群。考虑  $H$  左作用在  $G$  上：

$$h : G \rightarrow G, \quad g \rightarrow hg.$$

元素  $g \in G$  对应的轨道  $Hg$  即是  $H$  的一个右陪集。此时

$$G \text{ 关于 } H \text{ 左作用的轨道分解} = G \text{ 关于 } H \text{ 的右陪集分解}.$$

类似的我们可以定义  $H$  在集合  $G$  上的右作用，其轨道分解对应于  $H$  的左陪集分解。

**定理 1.58** (群作用的基本定理). 设群  $G$  作用在集合  $X$  上。

- 1) 设  $g \in G, x \in X$ ，则  $\text{Stab}(gx) = \text{Ad}_g \text{Stab}(x) = g\text{Stab}(x)g^{-1}$ 。即同一轨道上不同点的稳定子群之间是相互共轭的。
- 2) 设  $x \in X$ ，则我们有集合的同构

$$\text{orb}(x) \cong G/\text{Stab}(x)$$

即  $x$  的轨道上的点与其稳定子群的左陪集一一对应。

3) 设  $G$  为有限群,  $x \in X$ , 则

$$|G| = |\text{Stab}(x)| |\text{orb}(x)|.$$

证明. 由

$$h \in \text{Stab}(gx) \iff hgx = gx \iff g^{-1}hgx = x \iff g^{-1}hg \in \text{Stab}(x) \iff h \in g \text{Stab}(x)g^{-1}.$$

我们推出 1)。考虑映射

$$\rho: G \rightarrow \text{orb}(x), \quad g \rightarrow gx.$$

$\rho$  显然是一个满射。设  $y = gx$ , 我们考虑  $y$  的原像  $\rho^{-1}(y)$

$$h \in \rho^{-1}(y) \iff hx = gx \iff g^{-1}h \in \text{Stab}_x \iff h \in g \text{Stab}(x)$$

即  $\rho^{-1}(gx) = g \text{Stab}(x)$ 。由此我们推出 2)。3) 是 2) 的直接推论 (Lagrange 定理)。□

**例子 1.59.** 一个骰子有六个面, 标记为 1, 2, 3, 4, 5, 6。



问题: 总共可以制造多少种不同的筛子?

我们把骰子的六个面刻为六个不同数字称为一个标记。一个标记如果通过旋转变成另一个标记, 则这两个标记对应于同一个骰子。记所有不同标记的集合为  $\Sigma$ , 共有  $6!$  个元素。记正六面体的旋转对称群为  $G = \text{Aut}^+(X_6)$ 。则  $G$  作用在  $\Sigma$  上, 不同的骰子对应于不同轨道。由例 1.41 知  $|G| = 4!$ 。

容易观察, 对于任意一个标记  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\text{Stab}(\sigma) = 1$ 。因此群的每个轨道元素个数均为  $|G|$ 。于是

$$|\Sigma/G| = \frac{|\Sigma|}{|G|} = \frac{6!}{4!} = 30,$$

即总共可以制造 30 种不同的筛子。

## Burnside 引理

**定理 1.60** (Burnside 引理). 设有限群  $G$  作用在有限集合  $X$  上。记  $X/G$  为所有轨道的集合。对于  $g \in G$ , 记  $X^g = \{x \in X | gx = x\}$  为  $X$  中  $g$  作用的不动点。则

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

证明. 考虑  $X \times G$  的子集  $Z = \{(x, g) \in X \times G | gx = x\}$ 。我们有两个映射

$$\pi_X: Z \rightarrow X, (x, g) \rightarrow x, \quad \text{以及} \quad \pi_G: Z \rightarrow G, (x, g) \rightarrow g.$$

易知  $\pi_X^{-1}(x) = \text{Stab}(x), \pi_G^{-1}(g) = X^g$ 。我们可以有两种方法 (利用  $\pi_X$  或者  $\pi_G$ ) 计算  $|Z|$

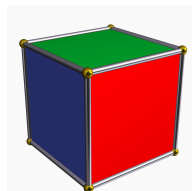
$$|Z| = \sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|.$$

另一方面, 由定理1.58知

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = \sum_{X/G} |G| = |G||X/G|.$$

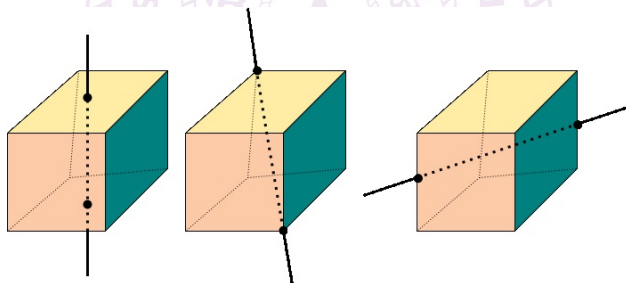
由此我们得到 Burnside 引理。 □

**例子 1.61** (染色问题). 把一个正六面体每个面染成红色, 绿色或者蓝色。问有多少种染色方法?



我们把六个面各染上一个颜色称为一个标记。一个标记如果通过旋转变成另一个标记, 则这两个标记对应于同一个染色方法。记所有不同标记的集合为  $\Sigma$ 。记正六面体的旋转对称群为  $G = \text{Aut}^+(X_6)$ 。则  $G$  作用在  $\Sigma$  上, 不同的染色方法对应于不同轨道。我们需要计算  $|\Sigma/G|$ 。

$G$  中共有如下三种旋转 I(下图左), II(下图中), III(下图右)



我们考虑群  $G$  中的元素  $g$  的不动点集合  $\Sigma^g$ 。

- $g =$  恒等变换 (1 个):  $|\Sigma^g| = 3^6$
- $g =$  旋转 I 转动  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  (6 个):  $|\Sigma^g| = 3^3$
- $g =$  旋转 I 转动  $\pi$  (3 个):  $|\Sigma^g| = 3^4$
- $g =$  旋转 II 转动  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  (共 8 个):  $|\Sigma^g| = 3^2$
- $g =$  旋转 III 转动  $\pi$  (6 个):  $|\Sigma^g| = 3^3$

由 Burnside 引理知

$$|X/G| = \frac{1}{4!} (1 \times 3^6 + 6 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + 8 \times 3^2 + 6 \times 3^3) = 57$$

即总共有 57 种不同的染色方法。

## 1.5 有限旋转群与多面体

**定理 1.62.**  $O_2(\mathbb{R})$  的有限子群同构与有限阶循环群或者二面体群。特别的,  $SO_2(\mathbb{R})$  的有限子群同构与有限阶循环群。

*证明.*  $O_2(\mathbb{R})$  由平面旋转和反射生成。容易看出, 有限阶循环群和二面体群都是  $O_2(\mathbb{R})$  的子群。我们需要证明  $O_2(\mathbb{R})$  的有限子群只有这些。容易验证, 平面上两个旋转的复合是旋转, 两个反射的复合是旋转, 一个旋转和一个反射的复合是一个反射。于是  $O_2(\mathbb{R})$  中的元素只有旋转和反射两种, 并不会生成更多的元素。设  $G$  是  $O_2(\mathbb{R})$  的一个有限子群。

首先假设  $G$  中全部元素都是由旋转构成。设  $|G| = m$ 。记  $r$  为逆时针旋转  $\frac{2\pi}{m}$ , 则  $r$  生成一个  $O_2(\mathbb{R})$  的循环子群

$$C_m = \{1, r, r^2, \dots, r^{m-1}\}.$$

设  $g$  是  $G$  中的一个元素。由 Lagrange 定理,  $g^m = 1$ 。由于  $g$  是一个旋转, 我们有  $g \in C_m$ 。因此

$$G \subset C_m$$

即  $G$  是  $C_m$  的一个子群。由命题 1.26,  $G$  是一个循环群。

下面考虑  $G$  中包括反射的情况。设  $G^+$  是  $G$  中所有的旋转组成的子群,  $|G^+| = m$ 。由于两个反射的复合是一个旋转, 易知  $G$  关于  $G^+$  的右陪集正好有两个, 即  $G$  中有  $m$  个旋转和  $m$  个反射。设  $s$  是  $G$  中的某一个反射, 则

$$G = G^+ \cup G^+s.$$

由上述知  $G^+$  是阶为  $m$  的循环群, 由此易得  $G = D_m$  为二面体群。

□

**定理 1.63.** 设  $G$  是 3 维欧式空间旋转群  $SO_3(\mathbb{R})$  非平凡的有限子群。则  $G$  必定同构于有限阶循环群, 二面体群, 或者某个柏拉图多面体的旋转对称群。

*证明.*  $SO_3(\mathbb{R})$  是由旋转生成的。容易验证, 3 维空间中的两个旋转的复合还是旋转。因此  $SO_3(\mathbb{R})$  中的元素实际上都是旋转。设  $S$  是单位球面, 则  $SO_3(\mathbb{R})$  作用在  $S$  上。 $SO_3(\mathbb{R})$  中的任一个非单位元  $g$ , 它作用在  $S$  上的不动点  $S^g$  恰好有两个, 即旋转轴与球面的交点。考虑集合

$$X = \bigcup_{g \in G, g \neq 1} S^g.$$

$X$  收集了所有  $G$  中非恒等变换的不动点。由于  $G$  是有限群,  $X$  为有限集 ( $|X| \leq 2(|G| - 1)$ )。

任取  $x \in X, g \in G$ 。设  $x$  为  $h \in G$  的不动点, 则  $gx$  为  $ghg^{-1} \in G$  的不动点。所以  $gx$  仍为  $X$  中的元素。这说明集合  $X$  上有群  $G$  的一个作用。假设  $G$  在  $X$  上共有  $N$  个不同的轨道,  $x_1, \dots, x_N$  为每个轨道中的一个代表元。 $G$  中每个非单位元在  $X$  上恰好有两个不动点, 而单位元的不动点为整个  $X$ 。由 Burnside 引理

$$N = \frac{1}{|G|}(2(|G| - 1) + |X|) = \frac{1}{|G|} \left( 2(|G| - 1) + \sum_{i=1}^N \text{orb}(x_i) \right) = \frac{1}{|G|} \left( 2(|G| - 1) + \sum_{i=1}^N \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|} \right)$$

整理得

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{|\text{Stab}(x_i)|}\right).$$

每个  $x_i$  至少是某个非单位元的不动点, 即  $|\text{Stab}(x_i)| \geq 2$ 。于是

$$\frac{1}{2} \leq \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) < 1, \quad \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{|\text{Stab}(x_i)|} < 1, \forall x_i.$$

由此可以得出  $N = 2$  或者  $N = 3$ 。

如果  $N = 2$ , 则  $|G| = |\text{Stab}(x_1)| = |\text{Stab}(x_2)|$ 。易知  $X = \{x_1, x_2\}$  只有两个点, 且为  $G$  中所有元素的不动点。于是  $x_1, x_2$  为对径点, 且  $G$  中元素均为绕过  $x_1, x_2$  的直线的旋转。 $G$  可以看作是平面旋转的有限子群, 于是必同构与某个循环群。

如果  $N = 3$ , 则

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{|\text{Stab}(x_1)|} + \frac{1}{|\text{Stab}(x_2)|} + \frac{1}{|\text{Stab}(x_3)|}.$$

左边  $> 1$ ,  $|\text{Stab}(x_i)|$  中至少有一个是 2, 不妨设  $|\text{Stab}(x_1)| = 2$ 。则

$$\frac{1}{|\text{Stab}(x_2)|} + \frac{1}{|\text{Stab}(x_3)|} = \frac{1}{2} + \frac{2}{|G|}.$$

- 如果  $|\text{Stab}(x_2)|, |\text{Stab}(x_3)|$  有一个为 2, 不妨设  $|\text{Stab}(x_2)| = 2$ , 则  $G = 2|\text{Stab}(x_3)|$ ;
- 如果  $|\text{Stab}(x_2)|, |\text{Stab}(x_3)|$  都  $\geq 3$ , 则其中必定有一个是 3, 不妨设  $|\text{Stab}(x_2)| = 3$ 。则

$$\frac{1}{|\text{Stab}(x_3)|} = \frac{2}{|G|} + \frac{1}{6}.$$

于是  $|\text{Stab}(x_3)| < 6$ , 只能为 3, 4 或 5。

综上知  $(|G|, |\text{Stab}(x_1)|, |\text{Stab}(x_2)|, |\text{Stab}(x_3)|)$  有如下四种可能

1)  $(2n, 2, 2, n), n \geq 2$ 。

当  $n = 2$  时,  $G$  中有三个阶为 2 的子群, 易知  $G$  为 Klein 群  $= D_2$ 。

当  $n > 2$  时,  $x_3$  与  $-x_3$  的稳定子群共轭, 都有  $n$  个元素, 于是  $x_3$  与  $-x_3$  在同一个轨道上。由于  $|\text{orb}(x_3)| = \frac{2n}{n} = 2$ , 故  $\text{orb}(x_3) = \{x_3, -x_3\}$ 。设  $x \in X$  为不同于  $\pm x_3$  的任一点, 设它是  $g \in G$  的不动点。由于  $\text{orb}(x_3) = \{x_3, -x_3\}$ ,  $g$  一定交换  $x_3$  和  $-x_3$ 。由此知  $x$  落在与过  $x_3, -x_3$  的轴  $l$  垂直的平面  $P$  上, 且  $g$  为旋转  $\pi$ , 即满足  $g^2 = 1$ 。因此  $X - \{x_3, -x_3\}$  均落在  $P$  上。

$\text{Stab}_{x_3}(G)$  是绕  $l$  的旋转, 因此是一个有限循环群。记  $r$  为  $\text{Stab}(x_3)$  的一个生成元。而  $\text{Stab}(x_3)$  外任一元素  $g$  满足  $g^2 = 1$ , 它作用在  $P$  上是一个反射。

由此知  $G$  为二面体群  $D_n$ 。



2) (12, 2, 3, 3)。

$x_3$  的轨道共有 4 个点。Stab( $x_3$ ) 为 3 阶循环群，设  $r$  为一个生成元。设  $y$  为 orb( $x_3$ ) 中不同于  $x_3$  的点，则  $y, ry, r^2y$  为 orb( $x_3$ ) 中不同的点。由此知 orb( $x_3$ ) =  $\{x_3, y, ry, r^2y\}$ ，且  $\{y, ry, r^2y\}$  组成一个等边三角形。把  $x_3$  换成同一轨道其它点有类似的讨论。由此知 orb( $x_3$ ) 组成一个正四面体，且  $G$  包含了正四面体旋转对称群中所有阶为 3 的旋转。

设  $\sigma$  为 Stab( $x_1$ ) 的非单位元，则  $\sigma^2 = 1$ 。 $\sigma$  作用在 orb( $x_3$ ) 给出了一个阶为 2 的置换，易知其是某个绕正四面体对角中心旋转  $\pi$ 。 $\sigma$  和正四面体的所有 3 阶旋转生成了整个正四面体的旋转对称群，它的阶 12 与  $G$  相同。

由此知  $G$  为正四面体的旋转对称群。 $x_3$  的轨道为正四面体的 4 个顶点。我们也可以考虑  $x_2$  的轨道，它们组成了对偶的正四面体。

3) (24, 2, 3, 4)。

$x_3$  的轨道有 6 个点。Stab( $x_3$ ) 为 4 阶循环群，设  $r$  为一个生成元。由于 Stab( $-x_3$ ) 的阶也是 4，故  $-x_3$  和  $x_3$  在同一个轨道上。设  $y$  为 orb( $x_3$ ) 中不同于  $x_3, -x_3$  的点，则 orb( $x_3$ ) =  $\{x_3, -x_3, y, ry, r^2y, r^3y\}$ ，且  $\{y, ry, r^2y, r^3y\}$  组成为正四边形。对 orb( $x_3$ ) 中所有的点做类似讨论，易知 orb( $x_3$ ) 组成了一个正八面体的 6 个顶点。3 个相对应的 4 阶循环群中共包含 9 个非平凡的元素。

设  $\sigma$  为 Stab( $x_1$ ) 的非单位元，则  $\sigma^2 = 1$ 。可以说明其转动轴必定为连接正八面体的对边中点的连线。由对称性易知，所有对边中点连线为轴的旋转  $\pi$  都为  $G$  中的元素，共 6 个。

类似可以说明，阶为 3 的稳定子群表示为正八面体中绕相对面中心连线的旋转。这样的非平凡的群元素共有 8 个。

加上单位元，我们总共找到了  $9 + 6 + 8 + 1 = 24$  个群元素。而  $|G| = 24$ 。

因此  $G$  为正八面体的旋转对称群， $x_3$  的轨道为正八面体的 6 个顶点。如果我们考虑  $x_2$  的轨道，则  $x_2$  的轨道为正六面体的 8 个顶点， $G$  也可以看作是正六面体的旋转对称群。

4) (60, 2, 3, 5)。

$G$  为正十二面体和正二十面体的旋转对称群。 $x_2$  的轨道为正十二面体的 20 个顶点， $x_3$  的轨道为正二十面体的 12 个顶点。证明方法类似，但更为复杂一些。

□

这些定理给出了一个联系几何对象，对称性和群结构的方法。后面我们将会讨论更多的例子。

## 2 矩阵群

### 2.1 一般线性群

在这一节中, 我们用  $K$  表示一个实数  $\mathbb{R}$  或者复数  $\mathbb{C}$ , 用  $K^*$  表示其中非零元素组成的乘法群。我们用  $K^n$  表示取值在  $K$  中的  $n$  维向量空间, 其中  $K^n$  中的一个点  $\vec{x}$  用  $n$  个坐标来表示

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in K.$$

$x_i$  称为  $\vec{x}$  的第  $i$  个坐标。这里我们用列向量表示  $K^n$  中的点。我们用  $\vec{x}^t$  表示  $\vec{x}$  的转置, 即行向量

$$\vec{x}^t = (x_1, \dots, x_n).$$

向量空间  $K^n$  上有如下自然的运算

1) 加法: 对两个向量  $\vec{x}^t = (x_1, \dots, x_n), \vec{y}^t = (y_1, \dots, y_n)$ , 我们可以定义它们的和为向量

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

$K^n$  在加法运算下成为一个 Abel 群。

2) 数乘: 对一个向量  $\vec{x}^t = (x_1, \dots, x_n)$  和一个数  $\lambda \in K$ , 我们可以定义它们的乘积为向量

$$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

容易验证,  $K^n$  上的加法和数乘满足如下的分配律

$$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = (\lambda\vec{x}) + (\lambda\vec{y}), \quad \forall \lambda \in K, \vec{x}, \vec{y} \in K^n.$$

带这样乘法和数乘结构的向量空间又称为线性空间。因此  $K^n$  又称为一个  $n$  维  $K$ -线性空间。

我们记  $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t, i = 1, 2, \dots, n$  为  $K^n$  中第  $i$  个坐标为 1, 其它坐标为 0 的向量。 $K^n$  中的任意一个向量  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  可以用  $\vec{e}_i, i = 1, 2, \dots, n$  唯一的表示为

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  称为  $K^n$  的标准基。

**定义 2.1.** 一个映射  $\varphi: K^n \rightarrow K^n$  称为线性变换, 如果对任意的  $\vec{x}, \vec{y} \in K^n, \lambda \in K$

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}), \quad \varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}).$$

即  $\varphi$  保持加法和数乘运算。

一个  $K$  取值的  $n \times n$  的矩阵可以写为  $A = (a_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in K.$$

所有  $K$  取值的  $n \times n$  的矩阵的集合记为  $M_n(K)$ 。

给定  $A \in M_n(K)$ , 它定义了如下一个映射:

$$\rho_A : K^n \rightarrow K^n, \quad \rho_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}.$$

这里我们把列向量  $\vec{x}$  看作是  $n \times 1$  的矩阵, 则  $A \cdot \vec{x}$  是矩阵的乘法。由定义  $\rho_A(\vec{x})$  的第  $i$  个坐标为

$$\rho_A(\vec{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

有时候为了简化记号, 我们也直接把  $\rho_A$  写作  $A : K^n \rightarrow K^n$ 。

**命题 2.2.** 设  $A \in M_n(K)$ , 则  $\rho_A : K^n \rightarrow K^n$  是一个线性变换。反之, 对任意的线性变换  $\varphi : K^n \rightarrow K^n$ , 存在  $A \in M_n(K)$  使得  $\varphi = \rho_A$ 。因此我们有集合的一一对应

$$M_n(K) \iff \{K^n \text{ 到 } K^n \text{ 的线性变换}\}.$$

对于两个矩阵  $A, B \in M_n(K)$ , 我们记  $A \cdot B$  或者  $AB$  为矩阵的乘法。记

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

为  $M_n(K)$  中的单位矩阵。对于矩阵  $A$ , 如果存在另一个矩阵  $B$  使得

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

我们称  $A$  为可逆矩阵,  $B$  称为  $A$  的逆, 记为  $A^{-1}$ 。由线性代数知

$$A \text{ 可逆} \iff \det(A) \neq 0.$$

这里  $\det(A)$  是  $A$  的行列式。

**定理/定义 2.1.** 我们定义  $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) | A \text{ 可逆}\}$  为  $M_n(K)$  中可逆矩阵的集合。 $GL_n(K)$  在矩阵的乘法运算下形成一个群, 称为  $n$  维一般线性群 (*general linear group*)。

**命题 2.3.** 行列式是一个群同态

$$\det : GL_n(K) \rightarrow K^*.$$

**定义 2.4.** 线性变换  $\varphi: K^n \rightarrow K^n$  称为可逆的, 如果  $\varphi$  是一个一一映射。此时  $\varphi$  的逆映射记为  $\varphi^{-1}: K^n \rightarrow K^n$ 。

**命题 2.5.** 假设  $\varphi$  是一个可逆线性变换。则  $\varphi^{-1}$  也是一个线性变换。若  $\varphi = \rho_A$ , 则  $A$  是可逆矩阵, 并且  $\varphi^{-1} = \rho_{A^{-1}}$ 。

因此我们得到如下的对应关系

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &\iff \{K^n \text{ 到 } K^n \text{ 的可逆线性变换}\} \\ \text{逆矩阵} &\iff \text{逆变换} \end{aligned}$$

## 2.2 正交群与等距同构

**定义 2.6.** 给定两个欧式空间中的向量  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , 我们定义它们的内积为

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \vec{x}^t \vec{y}.$$

一个向量的长度定义为

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

上述定义中长度是由内积表达的。反之, 对任意的  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , 我们有

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \left( \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \right).$$

于是内积也可以由长度表达。欧式空间中两点间的距离可以表达为

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

两个向量  $\vec{x}, \vec{y}$  之间的夹角  $\theta$  由如下关系给出

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta.$$

- 1) 若  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ , 我们称  $\vec{x}$  与  $\vec{y}$  垂直, 记为  $\vec{x} \perp \vec{y}$ 。
- 2) 若  $\vec{x} = \lambda \vec{y}, \lambda \in \mathbb{R}^*$ , 我们称  $\vec{x}$  与  $\vec{y}$  平行, 记为  $\vec{x} // \vec{y}$ 。

**例子 2.7.** 欧式空间  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  相互垂直:  $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ 。

由此, 对于任一向量  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , 它的第  $i$  个坐标可以表示为

$$x_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle, \quad \text{即} \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i.$$

**定义 2.8.** 矩阵  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  称为一个正交矩阵, 如果

$$A^t \cdot A = \mathbf{I}_n.$$

这里  $A^t$  是  $A$  的转置矩阵。所有正交矩阵组成的集合记为  $\text{O}_n(\mathbb{R})$ 。

若  $A \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ , 则  $\det(A^t A) = (\det A)^2 = 1$ , 于是  $\det(A) = \pm 1$ 。若  $\det(A) = 1$ , 我们称  $A$  为偶正交矩阵; 若  $\det(A) = -1$ , 我们称  $A$  为奇正交矩阵。

**定义 2.9.**  $\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ 。

**命题 2.10.**  $\text{O}_n(\mathbb{R}), \text{SO}_n(\mathbb{R})$  是  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  的子群。 $\text{O}_n(\mathbb{R})$  称为正交群 (*orthogonal group*),  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  称为特殊正交群 (*special orthogonal group*)。

**定理 2.11.** 设  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是  $\mathbb{R}^n$  上保持原点的等距同构, 则存在正交矩阵  $A \in \text{O}_n(\mathbb{R})$  使得

$$\varphi = \rho_A.$$

特别的,  $\varphi$  是一个线性变换。反之, 对任意  $A \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ ,  $\rho_A$  是一个等距同构。

证明. 由于  $\varphi$  是保持原点的等距同构并且

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \left( \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left( d(\vec{x}, 0)^2 + d(\vec{y}, 0)^2 - d(\vec{x}, \vec{y})^2 \right).$$

我们知  $\varphi$  保持内积

$$\langle \varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

特别地,  $\varphi$  保持向量的长度。对任意的非零向量  $\vec{x}$  和非零实数  $\lambda$ , 我们知道  $0, \varphi(\vec{x}), \varphi(\lambda\vec{x})$  之间的距离与  $0, \vec{x}, \lambda\vec{x}$  一样。由此易知  $0, \varphi(\vec{x}), \varphi(\lambda\vec{x})$  在一条直线上并且

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}),$$

即  $\varphi$  保持数乘。对任意两个向量  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(\vec{x} + \vec{y})$  的第  $i$  个坐标为

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y})_i = \langle \varphi(\vec{x} + \vec{y}), e_i \rangle = \langle \vec{x} + \vec{y}, \varphi^{-1}(e_i) \rangle = \langle \vec{x}, \varphi^{-1}(e_i) \rangle + \langle \vec{y}, \varphi^{-1}(e_i) \rangle.$$

$\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$  的第  $i$  个坐标为

$$\langle \varphi(\vec{x}), e_i \rangle + \langle \varphi(\vec{y}), e_i \rangle = \langle \vec{x}, \varphi^{-1}(e_i) \rangle + \langle \vec{y}, \varphi^{-1}(e_i) \rangle.$$

由此知  $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ , 即  $\varphi$  保持加法。于是  $\varphi$  是一个线性变换。

设  $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$ 。由于  $\varphi$  保持内积,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle A\vec{x}, A\vec{y} \rangle, \quad \text{即} \quad \vec{x}^t A^t A \vec{y} = \vec{x}^t \vec{y}$$

对任意  $\vec{x}, \vec{y}$  成立。由此知  $A^t A = \mathbf{I}_n$ , 即  $A \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ 。

反之, 若  $A \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ , 则  $\rho_A$  为保持内积的线性变换。由内积和长度的关系知  $\rho_A$  为等距同构。 □

**例子 2.12.** 反射变换。设  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  是非零向量。考虑

$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = 0\}$$

为所有与  $\vec{u}$  垂直的向量的集合。 $H$  可以看作是  $\mathbb{R}^n$  中的一个  $n-1$  维的超平面， $\vec{u}$  是  $H$  的法向量。我们考虑  $\mathbb{R}^n$  上关于  $H$  的反射变换  $P_{\vec{u}}$ 。易知这是一个等距变换，对应于一个正交矩阵。我们有

$$P_{\vec{u}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}.$$

可以验证， $P_{\vec{u}}$  是一个线性变换，将  $\vec{u}$  变为  $-\vec{u}$ ，并且保持超平面  $H$  不动。

为简化讨论，不妨设  $\vec{u}$  为单位向量，即  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1$ 。容易验证，此时  $P_{\vec{u}}$  对应的正交矩阵为

$$I_n - 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2u_1u_1 & -2u_1u_2 & \cdots & -2u_1u_n \\ -2u_2u_1 & 1 - 2u_2u_2 & \cdots & -2u_2u_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ -2u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & 1 - 2u_nu_n \end{pmatrix}$$

特别的，如果  $\vec{u} = \vec{e}_i$  为第  $i$  个坐标方向的单位向量，则

$$P_{\vec{e}_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

其中第  $i$  行  $i$  列的元素为  $-1$ ，其它对角元为  $1$ 。

**例子 2.13.** 我们考虑平面上的正交群  $O_2(\mathbb{R})$ 。设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

由

$$A^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

我们得到方程组

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

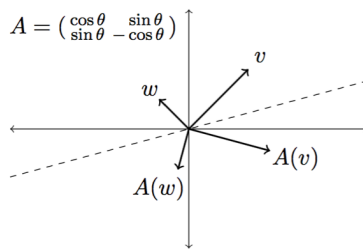
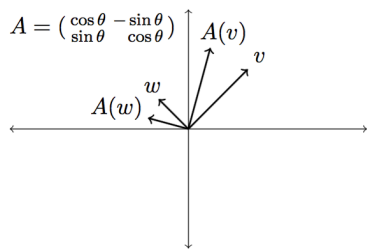
第一组方程的解为

$$(a, c) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad (b, d) = (\sin \phi, \cos \phi).$$

代入第二组方程，我们得到  $\phi = -\theta, -\theta + \pi$ 。所以我们得到解

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{或} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

容易看出，前者为偶正交矩阵，表示为逆时针转  $\theta$  的旋转；后者为奇正交矩阵，表示为与  $x$  轴夹角为  $\theta/2$  的直线的反射。由矩阵的行列式我们很容易知道两个平面反射的复合为一个旋转。



例子 2.14. 我们考虑 3 维空间上的正交群  $O_3(\mathbb{R})$ 。 $O_3(\mathbb{R})$  中的元素有如下三种

1) 绕某个轴的转动。如

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为绕  $z$ -轴逆时针旋转  $\theta$ 。

2) 关于某个平面的反射。如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

为关于  $xy$  平面的反射。

3) 一个绕轴的转动和一个与旋转轴垂直平面的反射的复合。如

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

为  $z$ -轴转动和  $xy$ -平面反射的复合。

这三种分类可以通过如下的几何结论得到。

命题 2.15.  $O_3(\mathbb{R})$  中的任一个元素可以写成至多 3 个反射的乘积。

证明. 设  $A \in O_3(\mathbb{R})$ ,  $\rho_A$  为对应的等距变换。不妨设  $A \neq I_n$ , 于是存在非零向量  $\vec{x}$  使得  $\rho_A(\vec{x}) \neq \vec{x}$ 。我们不妨设  $\vec{x} = \vec{e}_3$  为第 3 个标准基向量。

令  $\vec{u} = \rho_A(\vec{e}_3) - \vec{e}_3$ 。考虑沿与  $\vec{u}$  垂直平面的反射  $P_{\vec{u}}$ , 易知

$$P_{\vec{u}}(\rho_A(\vec{e}_3)) = \vec{e}_3.$$

考虑复合  $\varphi = P_{\vec{u}} \circ \rho_A$ , 它对应的矩阵为  $B$ 。由于  $\varphi(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$ , 易知  $B$  形如

$$B = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

由正交性  $B^t B = I_n$  可以得到

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

我们已知  $O_2(\mathbb{R})$  中的元素可以写成不超过两个反射的乘积, 于是  $B$  可以写成不超过两个反射的乘积。因此  $\rho_A = P_{\vec{u}}^{-1} \circ \varphi = P_{\vec{u}} \circ \varphi$  可以写成不超过 3 个反射的复合。□

这个命题可以推广到  $n$  维欧式空间, 称为 Cartan–Dieudonné 定理。

**定理 2.16** (Cartan–Dieudonné 定理),  $n$  维欧式空间上任意一个保持原点的等距同构都可以写成至多  $n$  个反射的复合。

这个定理可以通过对  $n$  做归纳证明, 证明方法和上述  $n = 3$  的情况类似。

将  $O_3(\mathbb{R})$  中的元素分类为 1, 2 或 3 个反射的乘积, 分别对应于上述的三种分类。第 1), 2) 种情况比较显然, 我们这里说明一下第 3) 种情况。设

$$A = P_{\vec{u}_1} P_{\vec{u}_2} P_{\vec{u}_3}$$

为 3 个反射的乘积, 其中  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  不共面。由于  $P_{\vec{u}_2} P_{\vec{u}_3}$  为绕着  $\vec{u}_2, \vec{u}_3$  张成的平面的旋转, 旋转角度为  $\vec{u}_2, \vec{u}_3$  夹角的两倍, 我们可以同时旋转  $\vec{u}_2, \vec{u}_3$  得到  $\vec{w}, \vec{v}_3$  使得

$$P_{\vec{u}_2} P_{\vec{u}_3} = P_{\vec{w}} P_{\vec{v}_3}$$

并且  $\vec{u}_1 \perp \vec{w}$ 。同理, 我们可以旋转  $\vec{u}_1, \vec{w}$  得到  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  使得

$$P_{\vec{u}_1} P_{\vec{w}} = P_{\vec{v}_1} P_{\vec{v}_2}$$

并且  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2, \vec{v}_1 \perp \vec{v}_3$ 。于是  $A = P_{\vec{v}_1} P_{\vec{v}_2} P_{\vec{v}_3}$  是绕与  $v_1$  垂直的平面的旋转以及沿该平面反射的复合。

### 2.3 酉空间与酉矩阵

这一节我们考虑复数上的  $n$  维线性空间  $\mathbb{C}^n$ 。我们知道, 如果把复数  $\mathbb{C}$  和平面  $\mathbb{R}^2$  对应起来, 则一个复数  $z$  对应的 2 维向量的长度可以表述为

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

这里  $\bar{z}$  是  $z$  的复共轭: 若  $z = x + yi$ , 则  $\bar{z} = x - yi$ 。这个定义可以推广到  $\mathbb{C}^n$ 。

**定义 2.17.** 我们定义  $n$  维复线性空间  $\mathbb{C}^n$  上的 (标准)Hermitian 内积为

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i.$$

这里黑体  $\mathbf{z}$  表示一个分量为  $z_1, \dots, z_n$  的列向量。



我们用了和欧式空间上一样的符号。实际上, 如果向量  $\mathbf{z}, \mathbf{w}$  中的元素都是实数的话, 则上述的内积与对应的欧式内积一样。为方便起见, 我们采用同样的记号, 在  $\mathbb{R}^n$  的情况表示欧式内积, 在  $\mathbb{C}^n$  的情况表示 Hermitian 内积。

**命题 2.18.**  $\mathbb{C}^n$  上的标准 Hermitian 内积  $\langle -, - \rangle$  满足如下的性质

1. 共轭对称性:  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$

2. 共轭双线性: 对  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

$$\langle \mathbf{w}, \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$$

3. 正定性:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ , 等号成立等且仅当  $\mathbf{u} = 0$ 。

对于  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ , 我们记它的长度为

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}.$$

通常我们把一个复线性空间以及一个满足上述命题中所述性质的内积称为一个酉空间。因此  $\mathbb{C}^n$  是一个标准的  $n$  维酉空间。

**命题 2.19.** 对任意的  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ,

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

证明. Cauchy-Schwarz 不等式。 □

**定义 2.20.** 设  $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  是一个复线性变换。 $\varphi$  称为一个酉变换 (unitary transformation), 如果

$$\langle \varphi(\mathbf{z}), \varphi(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n.$$

即  $\varphi$  保持 Hermitian 内积。

复线性变换  $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  可以表达为一个取值在  $\mathbb{C}$  中的矩阵  $A \in M_n(\mathbb{C})$ 。记  $\bar{A}$  为  $A$  的共轭: 如果  $A = (a_{ij})$ , 则  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ 。 $\mathbb{C}^n$  上的 Hermitian 内积可以表达为

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{z}^t \bar{\mathbf{w}}.$$

$\varphi$  是一个酉变换的条件可以通过矩阵表达为:  $\mathbf{z}^t A^t \bar{A} \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{z}^t \bar{\mathbf{w}}, \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ , 即

$$A^t \bar{A} = I_n, \quad \text{或} \quad \bar{A}^t A = I_n.$$

**定义 2.21.** 定义

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | \bar{A}^t A = I_n\}, \quad SU(n) = \{A \in U(n) | \det A = 1\}.$$

$U(n)$  中的矩阵称为  $n$  阶酉矩阵。 $U(n)$  是  $GL_n(\mathbb{C})$  的子群, 称为  $n$  阶酉群 (unitary group)。 $SU(n)$  是  $U(n)$  的子群, 称为  $n$  阶特殊酉群 (special unitary group)。

如果把矩阵的元素取为实数，则对应的酉矩阵为一个  $n$  阶正交矩阵。于是我们有如下的子群

$$O_n(\mathbb{R}) \subset U(n), \quad SO_n(\mathbb{R}) \subset SU(n).$$

**例子 2.22.**  $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  对应于平面上的单位圆周。

$$\rho: U(1) \rightarrow SO_2(\mathbb{R}), \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

给出了一个群同构  $U(1) \cong SO_2(\mathbb{R})$ 。

**例子 2.23.**  $SU(2)$  为如下的 2 阶复矩阵

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

## 2.4 仿射变换

**定义 2.24.** 映射  $\varphi: K^n \rightarrow K^n$  称为仿射变换 (affine transformation)，如果存在矩阵  $A \in M_n(K)$  和向量  $\vec{u} \in K^n$  使得

$$\varphi(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{u}, \quad \forall \vec{x} \in K^n.$$

如果  $\varphi$  是一个一一映射，我们称仿射变换  $\varphi$  是可逆的。

**例子 2.25.** 平移变换  $T_{\vec{u}}: \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{u}$  是一个可逆的仿射变换，并且

$$T_{\vec{u}}^{-1} = T_{-\vec{u}}.$$

线性变换  $\rho_A: \vec{x} \rightarrow A\vec{x}$  也是一个仿射变换，并且  $\rho_A$  可逆当且仅当  $A$  是可逆矩阵。

容易看出，一般的仿射变换可以唯一的写成复合

$$\varphi = T_{\vec{u}} \circ \rho_A.$$

**命题 2.26.** 两个仿射变换的复合是仿射变换。

**证明.** 设  $\varphi_1, \varphi_2$  是两个仿射变换， $\varphi_1(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{u}, \varphi_2(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{v}$ 。则

$$\varphi_1 \varphi_2(\vec{x}) = \varphi_1(B\vec{x} + \vec{v}) = A(B\vec{x} + \vec{v}) + \vec{u} = AB\vec{x} + (A\vec{v} + \vec{u})$$

也是仿射变换。 □

**命题 2.27.** 仿射变换  $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{u}$  是可逆的当且仅当  $A$  是可逆矩阵。 $\varphi$  的逆映射  $\varphi^{-1}$  为

$$\varphi^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x} - A^{-1}\vec{u}.$$

特别的， $\varphi^{-1}$  也是仿射变换。

证明. 我们把仿射变换写成线性变换和平移的复合  $\varphi = T_{\vec{u}} \circ \rho_A$ . 由于  $T_{\vec{u}}$  是可逆映射, 因此  $\varphi$  可逆当且仅当  $\rho_A$  可逆, 即  $A$  是可逆矩阵. 此时  $\varphi$  的逆映射为

$$\varphi^{-1} = \rho_A^{-1} \circ T_{\vec{u}}^{-1} = \rho_{A^{-1}} \circ T_{-\vec{u}}.$$

直接计算知

$$\varphi^{-1}(\vec{x}) = \rho_{A^{-1}} \circ T_{-\vec{u}}(\vec{x}) = \rho_{A^{-1}}(\vec{x} - \vec{u}) = A^{-1}\vec{x} - A^{-1}\vec{u}.$$

□

由以上两个命题, 我们可以得到

**定义 2.28.**  $K^n$  上的可逆仿射变换在映射复合下形成一个群, 称为仿射变换群, 记为  $\text{Aff}_n(K)$ .

如果我们把一个仿射变换  $\rho$  标记为  $\rho = (A, \vec{u}) : \vec{x} \rightarrow A\vec{x} + \vec{u}$ , 则仿射变换的乘法为

$$(A, \vec{u}) \cdot (B, \vec{v}) = (AB, A\vec{v} + \vec{u}).$$

仿射变换的逆公式为

$$(A, \vec{u})^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}\vec{u}).$$

我们可以把一个  $n$  维仿射变换用一个  $(n+1)$  阶的矩阵来表示. 例如, 给定  $(A, \vec{u})$ , 我们定义

$$\Sigma(A, \vec{u}) = \begin{pmatrix} A & \vec{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K).$$

容易验证, 仿射变换的复合对应于这个矩阵的乘法

$$\Sigma((A, \vec{u}) \cdot (B, \vec{v})) = \Sigma(A, \vec{u})\Sigma(B, \vec{v}).$$

因此我们得到一个群的单同态

$$\Sigma : \text{Aff}_n(K) \rightarrow \text{GL}_{n+1}(K)$$

即  $\text{Aff}_n(K)$  可以看作  $\text{GL}_{n+1}(K)$  的子群.

**定理 2.29.**  $\mathbb{R}^n$  上的等距同构都是可逆仿射变换. 因此  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  是  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$  的子群.

证明. 设  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个等距同构. 设  $\vec{u} = \varphi(0)$ . 易知  $T_{-\vec{u}} \circ \varphi$  是一个保持原点的等距同构. 由定理 2.11 知存在正交矩阵  $A$  使得  $T_{-\vec{u}} \circ \varphi = \rho_A$ . 因此  $\varphi = T_{\vec{u}} \circ \rho_A \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$ .

□

我们令  $T_n(K)$  表示  $K^n$  上所有平移变换的集合, 它是  $\text{Aff}_n(K)$  的子群.  $T_n(K)$  同构于加法群  $K^n$ , 其中向量  $\vec{u} \in K^n$  对应于平移  $T_{\vec{u}}$ . 另一方面, 映射

$$A \rightarrow (A, 0)$$

是  $\text{GL}_n(K)$  到  $\text{Aff}_n(K)$  的单同态, 因此  $\text{GL}_n(K)$  也可以看作是  $\text{Aff}_n(K)$  的子群.

**命题 2.30.** 令  $\pi : \text{Aff}_n(K) \rightarrow \text{GL}_n(K), (A, \vec{u}) \rightarrow A$ 。则  $\pi$  是一个群的满同态，并且

$$\ker(\pi) = T_n(K).$$

特别的， $T_n(K)$  是  $\text{Aff}_n(K)$  的正规子群，并且我们有群同构

$$\text{Aff}_n(K)/T_n(K) \cong \text{GL}_n(K).$$

注意到，类似定义的映射  $\text{Aff}_n(K) \rightarrow T_n(K), (A, \vec{u}) \rightarrow T_{\vec{u}}$  不是一个群同态 (为什么?)。相对应， $\text{GL}_n(K)$  不是  $\text{Aff}_n(K)$  的正规子群。类似地，

**命题 2.31.**  $T_n(\mathbb{R})$  是  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  的正规子群，并且我们有群同构

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n)/T_n(\mathbb{R}) \cong \text{O}_n(\mathbb{R}).$$

**定理 2.32.**  $\mathbb{R}^n$  上的任意一个等距同构都可以表达为至多  $n+1$  个反射的复合。

证明. 设  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ 。如果  $\varphi(0) = 0$ ，则由 Cartan-Dieudonné 定理知  $\rho$  可以表达为至多  $n$  个反射的复合。如果  $\varphi(0) \neq 0$ ，令  $\vec{u} = \frac{1}{2}\varphi(0)$ ， $P_{\vec{u}}$  为相应的反射。则  $P_{\vec{u}} \circ \varphi$  保持原点不动，于是可以写成至多  $n$  个反射的复合。因此  $\varphi = P_{\vec{u}} \circ P_{\vec{u}} \circ \varphi$  可以表达为至多  $n+1$  个反射的复合。

□

**例子 2.33.**  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ 。设  $l$  是一个  $\mathbb{R}^2$  上的直线 (不一定过原点)，记  $P_l$  为以  $l$  为镜面的反射。对任意的  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ ，它可以分为以下几种情况。

a)  $\varphi = P_l$  是 1 个反射。

b)  $\varphi = P_{l_1}P_{l_2}$  为 2 个反射的复合。

- 若  $l_1 \parallel l_2$ ，则  $\varphi$  是一个平移
- 否则， $\varphi$  是一个以  $l_1 \cap l_2$  为原点的旋转。

c)  $\varphi = P_{l_1}P_{l_2}P_{l_3}$  为 3 个反射的复合。

- 若  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，则  $\varphi$  是 1 个反射。
- 若  $l_1 \parallel l_2$  但是与  $l_3$  不平行。则  $P_{l_1}P_{l_2} = T_{\vec{u}}$  是一个平移。设  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ ，其中  $\vec{u}_1 \parallel l_3, \vec{u}_2 \perp l_3$ 。由上述讨论知  $T_{\vec{u}_2}P_{l_3} = P_l$ ，其中  $l$  是一条与  $l_3$  平行的直线。于是

$$\varphi = T_{\vec{u}_1}P_l, \quad \vec{u}_1 \parallel l$$

是一个以  $l$  为镜像的反射复合一个沿着  $l$  方向的平移。这个称为一个滑移反射。

- 若  $l_1, l_2, l_3$  相互不平行。由于  $P_{l_2}P_{l_3}$  是一个旋转，我们同时绕着  $l_2 \cap l_3$  旋转  $l_2, l_3$  而不改变它们的反射复合。特别的，我们可以使得  $l_2 \parallel l_1$ 。这化为上述情形，是一个滑移反射。

综上所述，我们知  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  中的元素有以下四种

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^2) = \{\text{反射}, \text{旋转}, \text{平移}, \text{滑移反射}\}.$$

其中前两种变换有不动点，后两种没有不动点。

## 半直积

设  $T, H$  为两个群,  $\rho: H \rightarrow \text{Aut}(T), h \rightarrow \rho_h$  是  $H$  到  $T$  的自同构群的同态。我们定义集合  $T \times H$  上的一个乘法结构如下:

$$(t_1, h_1)(t_2, h_2) = (t_1 \rho_{h_1}(t_2), h_1 h_2), \quad t_i \in T, h_i \in H.$$

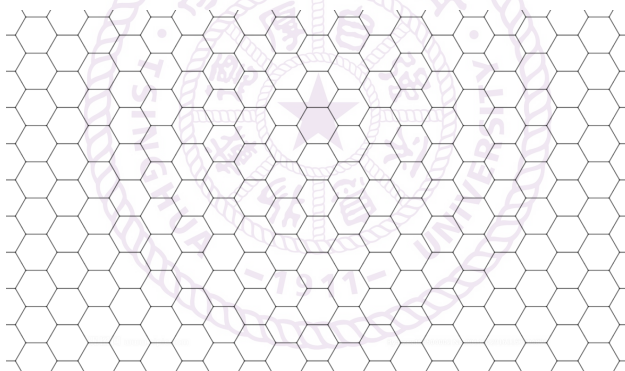
可以验证, 集合  $T \times H$  在上述乘法下成为一个群, 称为  $T$  和  $H$  关于  $\rho$  的半直积 (semi-direct product)。这个群记为  $T \rtimes_{\rho} H$ 。在不会引起歧义的时候, 有时候我们也省略  $\rho$  记做  $T \rtimes H$ 。注意到如果  $\rho$  是平凡同态, 则半直积变成为了群的直积。因此半直积是群的直积的推广。

**命题 2.34.** 仿射变换群同构于平移变换和线性变换的半直积:  $\text{Aff}_n(K) \cong K^n \rtimes GL_n(K)$ 。这里  $K^n$  是  $n$  维  $K$ -线性空间的加法群。给定  $A \in GL_n(K)$ ,  $\rho_A$  是线性变换  $K^n \rightarrow K^n, \vec{x} \rightarrow A\vec{x}$ 。

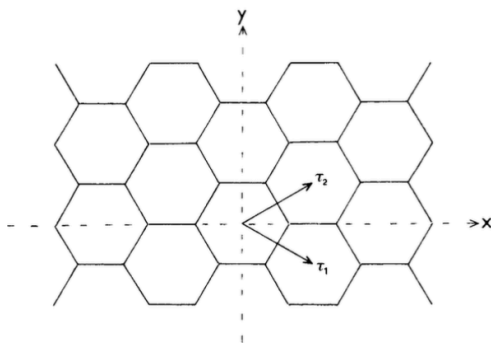
类似地, 我们有群同构  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$ 。

## 2.5 离散等距同构和壁纸图案

壁纸图案 (wallpaper pattern), 简单的说, 就是一个铺满整个平面的重复图形。例如



平面上那些保持壁纸图案不变的等距同构形成一个群, 称为壁纸图案的对称群。这样的群又叫壁纸群 (wallpaper group)。例如, 如下的两个方向的平移变换是上面壁纸图案的对称群的元素。



另外, 绕某个六边形的中心转动  $\frac{\pi}{3}$  或者沿着  $x, y$  轴的反射也是该对称群的元素。他们生成了该图案的壁纸群。这一节我们利用已有的群论工具来分类所有的壁纸图案和壁纸群。

## 点群及其作用

设  $G$  是  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  的子群。回顾我们有一个群的满同态

$$\pi : \text{Isom}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{O}_2(\mathbb{R}), \quad \text{并且} \quad \ker \pi = T_2(\mathbb{R}).$$

令  $\bar{G} = \pi(G)$  是  $G$  在  $\pi$  映射下的像, 它是  $\text{O}_2(\mathbb{R})$  的子群。我们有满同态

$$\pi_G : G \rightarrow \bar{G}.$$

记  $\ker(\pi_G) = T_G$ , 它是平移变换  $T_2(\mathbb{R})$  的子群。我们可以把  $T_2(\mathbb{R})$  与加法群  $\mathbb{R}^2$  对应起来

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow T_{\vec{u}} \in T_2(\mathbb{R}).$$

这样  $T_G$  对应于一个  $\mathbb{R}^2$  的子群, 记做  $L_G$ 。

**命题 2.35.** 考虑  $T_G$  在  $\mathbb{R}^2$  上的作用。则  $L_G$  是原点  $\vec{0}$  的轨道, 即  $L_G = T_G\vec{0}$ 。

**定义 2.36.**  $T_G$  或  $L_G$  称为  $G$  的平移子群 (translation subgroup),  $\bar{G}$  称为  $G$  的点群 (point group)。

我们来看一下三个群  $(G, \bar{G}, L_G)$  之间的关系。 $\bar{G}$  是  $\text{O}_2(\mathbb{R})$  的子群, 它自然地作用在  $\mathbb{R}^2$  上。

**命题 2.37.**  $\bar{G}$  把  $\mathbb{R}^2$  的子集  $L_G$  映射到  $L_G$  自己, 于是给出了  $\bar{G}$  在  $L_G$  上的一个作用。

**证明.** 任取  $A \in \bar{G}, \vec{l} \in L_G$ 。我们需要证明  $A\vec{l} \in L_G$ 。由定义, 存在  $g \in G$  使得  $\pi(g) = A$ 。记  $g = (A, \vec{u})$ 。 $T_{\vec{l}}$  对应于仿射变换  $(I_2, \vec{l})$ 。由于  $G$  是一个群, 复合  $gT_{\vec{l}}g^{-1}$  也是  $\text{Ker}(\pi_G)$  中的元素。

$$gT_{\vec{l}}g^{-1} = (A, \vec{u})(I_2, \vec{l})(A^{-1}, -A^{-1}\vec{u}) = (A, \vec{u})(A^{-1}, -A^{-1}\vec{u} + \vec{l}) = (I_2, A\vec{l}) = T_{A\vec{l}}.$$

于是仿射变换  $gT_{\vec{l}}g^{-1}$  对应于  $\mathbb{R}^2$  中的向量  $A\vec{l}$ 。即  $A\vec{l}$  也是  $L_G$  中的元素。  $\square$

**注 2.38.** 如果  $\bar{G}$  是  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  的有限子群 (即有限阶循环群), 可以证明  $G$  同构于半直积  $L_G \rtimes \bar{G}$ 。

## 等距同构的离散子群

**定义 2.39.**  $\mathbb{R}^n$  的子群  $L$  称为是离散的 (discrete), 如果存在  $\epsilon > 0$  使得

$$d(\vec{l}_1, \vec{l}_2) \geq \epsilon, \quad \forall \vec{l}_1 \neq \vec{l}_2 \in L.$$

由于  $L$  是一个子群,  $d(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = d(\vec{l}_1 - \vec{l}_2, \vec{0})$ , 易知上述条件等价于

$$\|\vec{l}\| \geq \epsilon, \quad \forall \vec{l} \neq \vec{0} \in L.$$

即  $L$  中的非零向量的长度有一个正的下界。

**定理 2.40.**  $\mathbb{R}^2$  中的离散子群只有如下几种可能

1) 平凡群:  $\{0\}$ 。

2) 秩为 1 的格点:  $\mathbb{Z}\vec{u}_1 = \{m\vec{u}_1\}_{m \in \mathbb{Z}}$ 。

3) 秩为 2 的格点:  $\mathbb{Z}\vec{u}_1 + \mathbb{Z}\vec{u}_2 = \{m\vec{u}_1 + n\vec{u}_2\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$ 。

这里  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  是  $\mathbb{R}^2$  中两个不平行的非零向量。

**定义 2.41.** 一个  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  的子群  $G$  称为是平面晶体群 (plane crystallographic group), 如果  $G$  的平移子群  $L_G$  是  $\mathbb{R}^2$  的离散子群, 并且  $G$  的点群  $\bar{G}$  是  $O_2(\mathbb{R})$  的有限子群。特别地, 如果  $L_G$  是秩为 2 的格点, 我们称  $G$  是一个壁纸群 (wallpaper group)。

为了研究壁纸群的分类, 我们需要研究秩为 2 的格点和点群的分类, 以及点群在格点上的作用。

**命题 2.42.** 设  $G$  是一个壁纸群,  $g \in \bar{G}$  是它的点群中的一个元素。则  $g$  的阶只能是 1, 2, 3, 4 或 6。因此  $\bar{G}$  只能是如下群之一:  $\{1\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, D_2, D_3, D_4, D_6$ 。

**证明.**  $g \in O_2(\mathbb{R})$ 。如果  $g$  是一个反射, 则  $g$  的阶是 2。我们只需要考虑  $g$  是一个旋转的情况。由于  $\bar{G}$  是有限群,  $g$  的阶是有限的, 设为  $q$ 。不妨假设  $g$  为逆时针旋转  $\frac{2\pi}{q}$  (若不然考虑某个  $g^k$ )。设  $\vec{u}$  是  $L_G$  中长度最短的非零向量。

- 若  $q > 6$ 。则  $g\vec{u} - \vec{u}$  是  $L_G$  的元素且长度比  $\vec{u}$  短, 矛盾。
- 若  $q = 5$ 。则  $g^2\vec{u} + \vec{u}$  是  $L_G$  的元素且长度比  $\vec{u}$  短, 矛盾。

由此易知命题成立。 □

**定理 2.43.** 设  $G_1, G_2$  是两个壁纸群,  $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  是一个群同构。则  $\varphi$  将  $G_1$  中的平移, 旋转, 反射和滑移反射分别映射到  $G_2$  中的平移, 旋转, 反射和滑移反射。特别地,  $\varphi$  诱导了一个关于  $G_1$  和  $G_2$  的平移子群以及点群之间的同构。

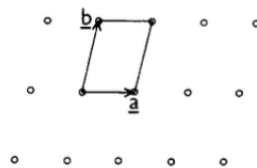
### 格点分类

设  $L = \mathbb{Z}\vec{a} + \mathbb{Z}\vec{b}$ , 其中  $\vec{a}$  是  $L$  中一个长度最短的非零向量。不妨设

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| \leq \|\vec{a} + \vec{b}\|.$$

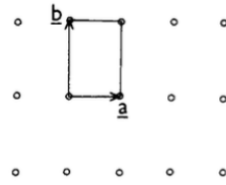
若不然, 我们可以把  $\vec{b}$  换做  $-\vec{b}$  使得上述条件满足而不改变格点  $L$ 。我们可以分为以下五种情况

- 斜角形 (Oblique):  $\|\vec{a}\| < \|\vec{b}\| < \|\vec{a} - \vec{b}\| < \|\vec{a} + \vec{b}\|$ 。



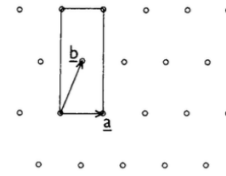
Oblique

- 矩形 (Rectangular):  $\|\vec{a}\| < \|\vec{b}\| < \|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$ .



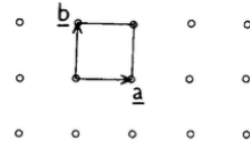
Rectangular

- 中心矩形 (Centered Rectangular):  $\|\vec{a}\| < \|\vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| < \|\vec{a} + \vec{b}\|$ .



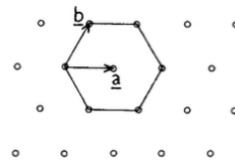
Centred Rectangular

- 方形 (Square):  $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| < \|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$ .



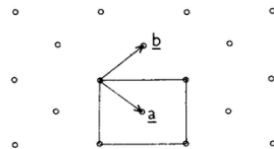
Square

- 六边形 (Hexagonal):  $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| < \|\vec{a} + \vec{b}\|$ .



Hexagonal

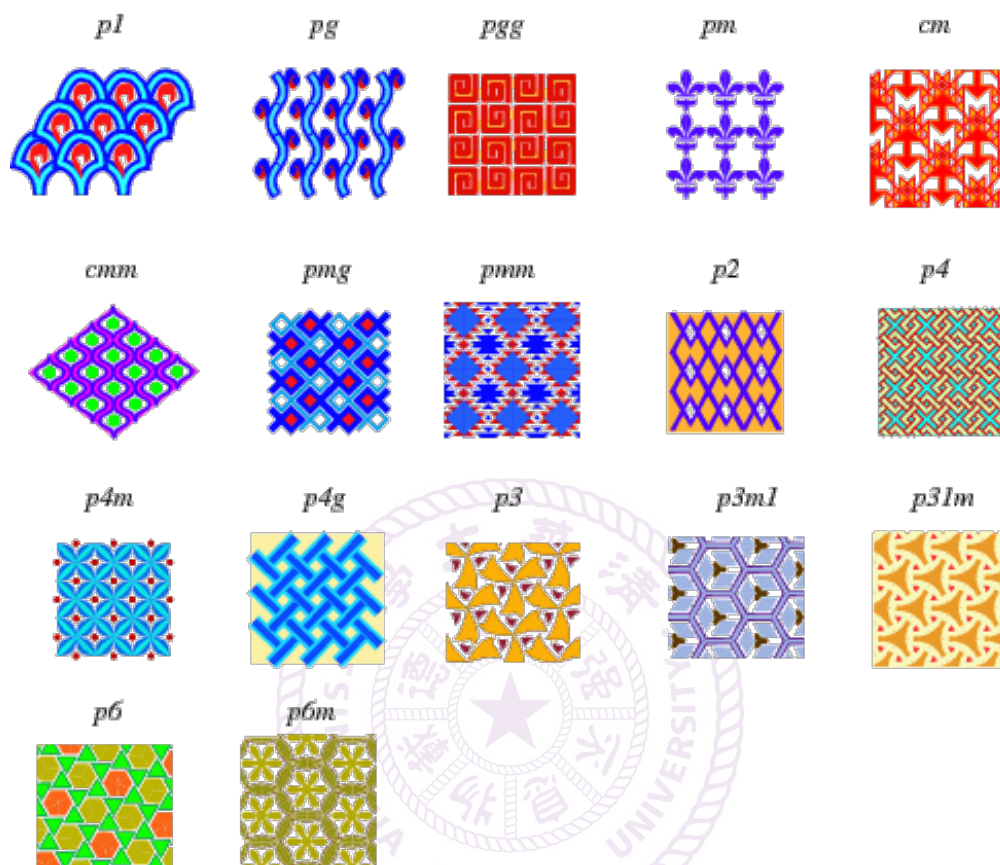
最后有一种没有讨论的情况  $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| < \|\vec{a} - \vec{b}\| < \|\vec{a} + \vec{b}\|$  (如下) 相对应的壁纸群同构于中心矩形的情形, 我们不另外单独讨论。





## 壁纸群分类

不同构的壁纸群总共有 17 种，记为  $p1$ ,  $p2$ ,  $pm$ ,  $pg$ ,  $cm$ ,  $pmm$ ,  $pmg$ ,  $pgg$ ,  $c2mm$ ,  $p4$ ,  $p4m$ ,  $p4g$ ,  $p3$ ,  $p3m1$ ,  $p31m$ ,  $p6$ ,  $p6m$ 。以下为壁纸样式的图例 (取自 Artlandia SymmetryWorks)



我们这里讨论一下这 17 种群是如何构造和分类的。首先我们介绍一下分类的记号。

- 第一个字母表示的是格点的信息。其中  $p$  表示 primitive，包括斜角形，矩形，方形和六边形。 $c$  表示 centered，包括中心矩形。
- 第一个字母后的数字表示的是点群中转动的最高阶数 1, 2, 3, 4, 6，如果不标记表示其为 1。
- 紧接的符号是  $m$ (mirror),  $g$ (glide) 或者 1，其中  $m(g)$  表示有一个以垂直于  $x$  轴的直线为镜面的反射 (平移反射)，1 表示不存在这样的反射。
- 第四个符号是  $m$ (mirror) 或者  $g$ (glide)，表示有一个与  $x$  轴平行 ( $n=2$ ) 或者夹角为  $\frac{\pi}{n}$  ( $n>2$ ) 的直线为镜面的反射或者平移反射。这里  $n$  是上面的第二个表示群元素阶数的数字。

例如

- $p2$  表示一个 primitive 的格点，点群是 2 阶的旋转。
- $p31m$  表示一个 primitive 的格点，3 阶的旋转群以及一个与  $x$  轴夹角为  $\frac{\pi}{3}$  为镜面的反射。

- c2mm 表示一个 centered 的格点, 1 个与 x 轴平行的镜面以及一个与 x 轴垂直的镜面的反射。
- pg 表示一个 primitive 的格点, 一个与 x 轴垂直的镜面的滑移反射。

下面我们来具体讨论一下相对应的分类。记  $R_\theta$  为逆时针旋转  $\theta$ ,  $M_\theta$  为与 x 轴夹角为  $\theta/2$  的镜面的反射。注意到  $R_\theta$  和  $M_\theta$  作用在 x 轴上的向量是一样的。

### 格点=斜角形

点群中的元素只能在  $\{\pm 1\} = \{I, R_\pi\}$  里。

(p1)  $\bar{G} = 1$ 。

$$G = \{(I, m\vec{a} + n\vec{b})\}_{m,n \in \mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^2.$$

如下为以 p1 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Artlandia)

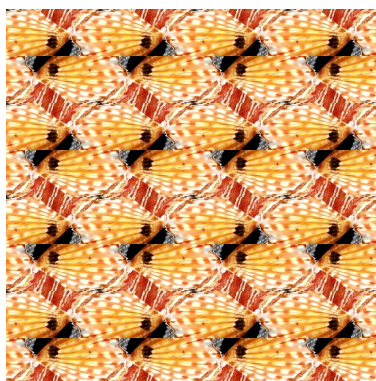


(p2)  $\bar{G} = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ 。

$$G = \{(I, m\vec{a} + n\vec{b}), (-I, m\vec{a} + n\vec{b})\}_{m,n \in \mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

这里的半直积中,  $\mathbb{Z}_2$  中的非单位元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用为  $(m, n) \rightarrow (-m, -n)$ 。

如下为以 p2 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Filter Forge)



## 格点=矩形

点群中的元素只能在  $\{I, -I, M_0, M_\pi\}$  里。与上述已讨论过的群不同构的有以下几种

(pm)  $\bar{G} = \{I, M_\pi\}$ 。

$$G = \left\{ (I, m\vec{a} + n\vec{b}), (M_\pi, -m\vec{a} + n\vec{b}) \right\}_{m,n \in \mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

这里的半直积中,  $\mathbb{Z}_2$  中的非单位元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用为  $(m, n) \rightarrow (-m, n)$ 。如果我们取  $\bar{G} = \{I, M_0\}$ , 得到的群  $G$  是同构的。

如下为以 pm 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Artlandia)



(pg)  $\bar{G} = \{I, M_\pi\}$ 。  $G$  中包含一个以垂直方向为镜片的滑移反射  $g = (M_\pi, \lambda\vec{b})$ 。由于

$$g^2 = (I, 2\lambda\vec{b}) \in T_G \implies 2\lambda\vec{b} \in L_G.$$

如果  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , 则  $T_{-\lambda\vec{b}}g \in G$  并且是一个镜面反射。我们把  $g$  换成  $T_{-\lambda\vec{b}}g$  则回到 (pm) 的情形。因此  $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ 。因此  $G$  的所有元素为

$$G = \left\{ (I, m\vec{a} + n\vec{b}), (M_\pi, -m\vec{a} + (n + \frac{1}{2})\vec{b}) \right\}_{m,n \in \mathbb{Z}}.$$

容易验证这是一个群。如果我们取  $\bar{G} = \{I, M_0\}$ , 得到的群  $G$  是同构的。

如下为以 pg 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Wikimedia Commons)

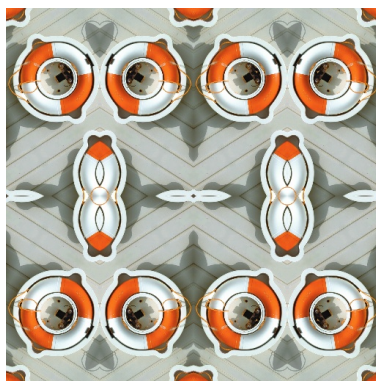


(p2mm)  $\bar{G} = \{I, -I, M_0, M_\pi\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 。  $G$  中包含一个垂直一个水平方向的镜面反射。

$$G = \mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

这里的半直积中,  $(\pm 1, \pm 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用为  $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$ 。

如下为以 p2mm 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Filter Forge)



(p2mg)  $\bar{G} = \{I, -I, M_0, M_\pi\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 。  $G$  中包含一个垂直镜面的反射和一个水平镜面的滑移反射。

如下为以 p2mg 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Pinterest)



(p2gg)  $\bar{G} = \{I, -I, M_0, M_\pi\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 。  $G$  中包含一个垂直一个水平方向的滑移反射。

如下为以 p2gg 为对称群的一个壁纸图例 (取自 JKU)



## 格点=中心矩形

点群中的元素只能在  $\{I, -I, M_0, M_\pi\}$  里。

(cm)  $\bar{G} = \{I, M_\pi\}$ 。

$$G = \left\{ (I, m\vec{a} + n\vec{b}), (M_\pi, (-m+n)\vec{a} + n\vec{b}) \right\}_{m,n \in \mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

这里的半直积中,  $\mathbb{Z}_2$  中的非单位元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用为  $(m, n) \rightarrow (-m+n, n)$ 。如果我们取  $\bar{G} = \{I, M_0\}$ , 得到的群  $G$  是同构的。

如下为以 cm 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Wikimedia Commons)



(c2mm)  $\bar{G} = \{I, -I, M_0, M_\pi\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 。  $G$  中包含一个垂直一个水平方向的镜面反射。

$$G \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

这里的半直积中, 两个  $\mathbb{Z}_2$  中的非单位元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用分别为  $(m, n) \rightarrow (-m+n, n)$  以及  $(m, n) \rightarrow (m, m-n)$ 。

如下为以 c2mm 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Pinterest)



## 格点=方形

点群是  $D_4$  的子群。

(p4)  $\bar{G} \cong \mathbb{Z}_4$  是由  $R_{\frac{\pi}{2}}$  生产的  $D_4$  的旋转子群。

$$G = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}_4$$

这里的半直积中,  $\mathbb{Z}_4$  中的生成元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用为  $(m, n) \rightarrow (-n, m)$ 。

如下为以 p4 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Wikimedia Commons)

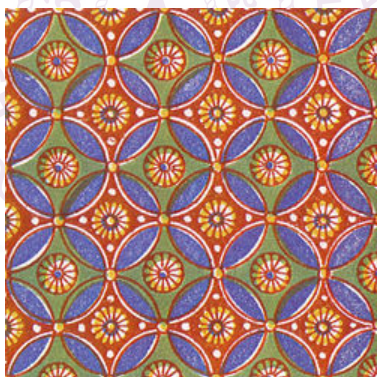


(p4m)  $\bar{G} = D_4$ 。

$$G = \mathbb{Z}^2 \rtimes D_4$$

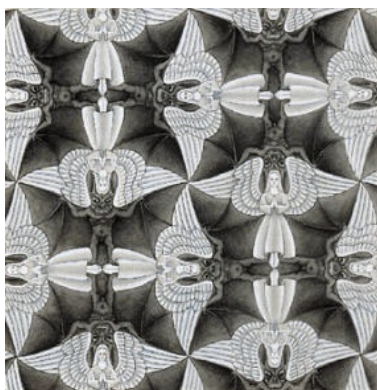
这里的半直积中, 二面体群  $D_4$  自然的作用在  $\mathbb{Z}^2$  上。

如下为以 p4m 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Wikipedia)



(p4g)  $\bar{G} = D_4$ 。  $G$  中包含  $R_{\frac{\pi}{2}}$ , 一个垂直方向镜面的滑移反射。

如下为以 p4g 为对称群的一个壁纸图例 (取自 SLU Math)



格点=六边形

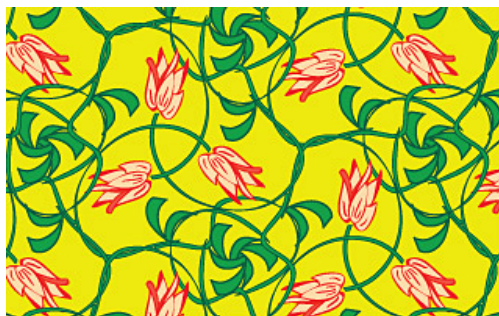
点群是  $D_6$  的子群。

(p3)  $\bar{G}$  是由  $R_{\frac{2\pi}{3}}$  生成的旋转。

$$\bar{G} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}_3.$$

这里的半直积中,  $\mathbb{Z}_3$  中的生成元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用为  $(m, n) \rightarrow (-m - n, m)$ 。

如下为以 p3 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Artlandia)

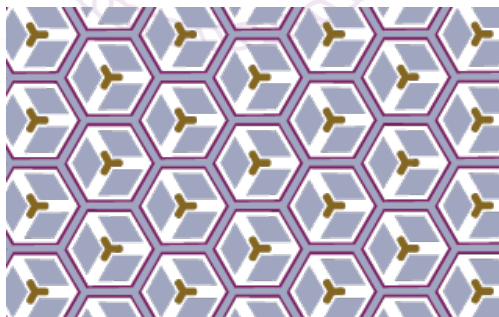


(p3m1)  $\bar{G} = D_3$  由  $R_{\frac{2\pi}{3}}, M_0$  生成。

$$\bar{G} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes D_3.$$

这里的半直积中,  $D_3$  中的旋转生成元和反射生成元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用分别为  $(m, n) \rightarrow (-m - n, m)$  和  $(m, n) \rightarrow (m + n, -n)$ 。

如下为以 p3m1 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Filter Forge)

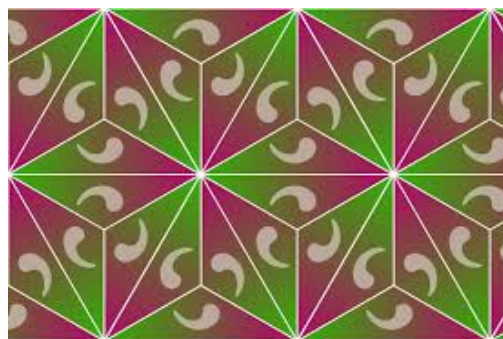


(p31m)  $\bar{G} = D_3$  由  $R_{\frac{2\pi}{3}}, M_{\frac{2\pi}{3}}$  生成。

$$\bar{G} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes D_3.$$

这里的半直积中,  $D_3$  中的旋转生成元和反射生成元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用分别为  $(m, n) \rightarrow (-m - n, m)$  和  $(m, n) \rightarrow (n, m)$ 。

如下为以 p31m 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Mathigon)



(p6)  $\bar{G}$  是由  $R_{\frac{\pi}{3}}$  生成的旋转。

$$\bar{G} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}_6.$$

这里的半直积中,  $\mathbb{Z}_6$  中的生成元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用为  $(m, n) \rightarrow (-n, m + n)$ 。

如下为以 p6 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Filter Forge)

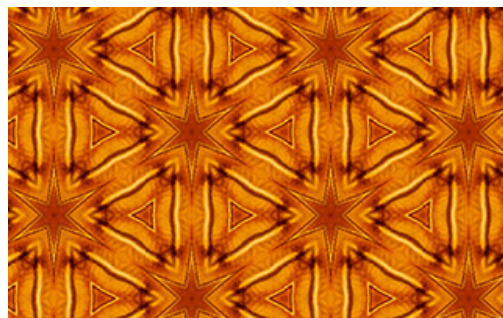


(p6m)  $\bar{G} = D_6$ 。

$$\bar{G} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes D_6$$

这里的半直积中,  $D_3$  中的旋转生成元和反射生成元在  $\mathbb{Z}^2$  上的作用分别为  $(m, n) \rightarrow (-n, m + n)$  和  $(m, n) \rightarrow (m + n, -n)$ 。

如下为以 p6m 为对称群的一个壁纸图例 (取自 Artlandia)



可以证明, 以上 17 种壁纸群互不同构, 给出了壁纸群的完整分类。



### 3 Möbius 群

Möbius 变换, 或 Möbius 群, 是黎曼球面上的保角自同构群, 即球面上保持曲线间夹角不变的光滑一一映射。它可以表达为复平面上的分式线性变换, 在复几何, 双曲几何, 图形学, 物理学等众多领域中有广泛的应用。这一章我们介绍 Möbius 变换的基本性质和结构。

#### 3.1 黎曼球面

在复平面  $\mathbb{C}$  上, 我们通常加入一个无穷远点  $\infty$ , 得到扩展的复平面记为

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

直觉上, 这个无穷远点  $\infty$  和复平面上其它点很不一样。黎曼将  $\hat{\mathbb{C}}$  与  $\mathbb{R}^3$  中的单位球面  $S^2$  一一对应起来, 说明  $\infty$  与其它复数并没有本质区别。

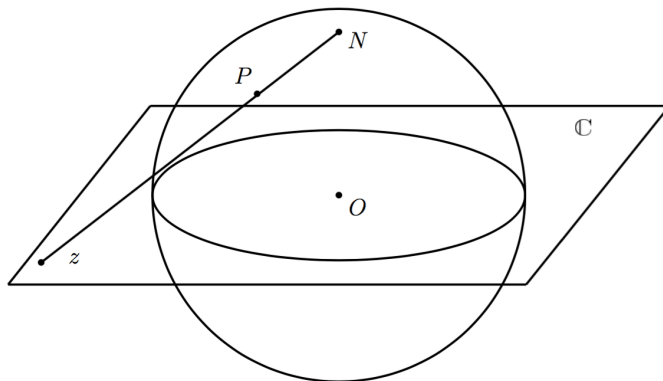
考虑单位球面  $S^2$

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

记北极点为  $N = (0, 0, 1)$ 。我们把复平面  $\mathbb{C}$  与  $\mathbb{R}^3$  中的平面  $x_3 = 0$  对应起来。

给定  $S^2$  上不同于  $N$  的点  $P$ , 过  $N, P$  的直线与平面  $\mathbb{C}$  交与一个点。这给出了  $S^2 - \{N\}$  与  $\mathbb{C}$  之间的一一映射, 称为球极投影 (stereographic projection), 记为  $SP$

$$SP : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}.$$



我们可以把这个映射延拓到北极点  $N$ , 仍然记为

$$SP : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad SP(N) = \infty.$$

因此  $\hat{\mathbb{C}}$  一一对应于  $S^2$  上的点, 故称为黎曼球面。

**命题 3.1.** 球极投影  $SP : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  的坐标表达式为

$$SP(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

SP 的逆映射  $SP^{-1}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow SP$  的坐标表达式为

$$SP^{-1}(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

这里  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  和  $\operatorname{Im}(z) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$  为  $z$  的实部与虚部。

容易看出, 上述公式对于  $N$  和  $\infty$  也是合理定义的, 并且把这两个点对应起来。

**定义 3.2.**  $S^2$  和  $\hat{\mathbb{C}}$  上的圆 (circle)。

- $\mathbb{R}^3$  中的一个二维平面与球面  $S^2$  相交且不相切, 则得到的交集称为球面上的一个圆。如果这个二维平面过原点, 则得到的圆称为球面上的大圆。
- $\mathbb{C}$  上的圆或者直线均称为  $\hat{\mathbb{C}}$  上的圆。

**定理 3.3.** 球极投影将  $S^2$  上的圆映射为  $\hat{\mathbb{C}}$  上的圆。

*证明.* 设  $C$  是  $S^2$  上的一个圆, 它是平面  $P$  与球面  $S^2$  的交。

若  $C$  经过  $N$ , 则  $N$  包含在平面  $P$  上。在球极投影下,  $SP(C)$  是平面  $P$  与平面  $\mathbb{C}$  的交线, 为  $\mathbb{C}$  上的直线。由定义,  $SP(C)$  是  $\hat{\mathbb{C}}$  上的一个圆。

若  $C$  不经过  $N$ 。设平面  $P$  的方程为  $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ , 则  $C + D \neq 0$ 。  $z = x + iy \in SP(C)$  当且仅当  $SP^{-1}(z)$  满足平面方程, 即

$$\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}A + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}B + \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}C + D = 0.$$

整理得

$$x^2 + y^2 + \frac{2A}{C+D}x + \frac{2B}{C+D}y + \frac{D-C}{C+D} = 0.$$

这个方程的解是  $\mathbb{C}$  上一个圆, 即  $SP(C)$  是一个圆。 □

## 3.2 Möbius 变换

我们回顾  $\mathbb{C}$  上的仿射变换

$$\varphi: z \rightarrow az + b, \quad a \in \mathbb{C}^*.$$

设  $a = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ , 则  $\varphi$  表示逆时针旋转  $\theta$ , 以  $r$  为比例做伸缩, 然后以  $b$  做平移的变换的复合。当  $r = 1$  时,  $\varphi$  是一个二维平面的等距同构。当  $r \neq 1$  时,  $\varphi$  把距离做了一个伸缩, 但是保持向量间的夹角不变, 因此称为一个共形变换或保角变换 (conformal transformation)。我们可以把  $\varphi$  延展为

$$\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

在  $\hat{\mathbb{C}}$  上还有另外一种共形变换, 称为反演变换。

**定义 3.4.**  $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, z \rightarrow \frac{1}{z}$  称为  $\hat{\mathbb{C}}$  上的反演变换。其中  $T(\infty) = 0, T(0) = \infty$ 。

**命题 3.5.** 仿射变换和反演变换将  $\hat{\mathbb{C}}$  上的圆变为  $\hat{\mathbb{C}}$  上的圆。

证明. 先考虑  $C = \{|z - z_0| = r\}$  为  $\mathbb{C}$  上的一个圆的情况, 其中  $z_0 \in \mathbb{C}$  为圆心,  $r > 0$  为半径。

设  $\varphi(z) = az + b$  是一个仿射变换, 则

$$\varphi(C) = \{|\varphi^{-1}(z) - z_0| = r\} = \{|z - (b + az_0)| = r|a|\}$$

是一个以  $(b + az_0)$  为圆心,  $r|a|$  为半径的圆。

我们再考虑反演变换  $T$ , 则

$$T(C) = \{|T^{-1}(z) - z_0| = r\} = \left\{ \left| \frac{1}{z} - z_0 \right| = r \right\} = \{(r^2 - |z_0|^2)|z|^2 + zz_0 + \bar{z}\bar{z}_0 - 1 = 0\}$$

若  $C$  不过原点, 即  $r \neq |z_0|$ , 则  $T(C)$  是  $\mathbb{C}$  上一个圆; 若  $C$  过原点, 则  $T(C)$  为  $\mathbb{C}$  上一条直线。

如果  $C$  是  $\mathbb{C}$  上一条直线, 类似的计算可以证明  $\varphi(C), T(C)$  是  $\hat{\mathbb{C}}$  中的圆。命题成立。  $\square$

**定义 3.6.** 一个 Möbius 变换指的是一个映射  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , 其中

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

$\hat{\mathbb{C}}$  上所有 Möbius 变换的集合记为  $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ 。

容易看出, 当  $c = 0$  时我们得到仿射变换, 当  $a = d = 0$  时我们得到反演变换。

**命题 3.7.** 任何一个 Möbius 变换都可以表示为仿射变换和反演变换的复合。特别地, Möbius 变换是  $\hat{\mathbb{C}}$  到  $\hat{\mathbb{C}}$  的一一映射, 且把圆映射成圆。

证明. Möbius 变换  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  可以写成

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}.$$

由此知  $f$  是仿射变换  $z \rightarrow cz + d$ , 反演  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ , 和仿射变换  $z \rightarrow (b - \frac{ad}{c})z + \frac{a}{c}$  三个映射的复合。  $\square$

**定理 3.8.** Möbius 变换在映射的复合和逆下形成一个群, 称为 Möbius 群。

**定理 3.9.** 映射

$$\rho: \text{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \rho_g, \quad \text{其中 } \rho_g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

是一个群的满同态, 并且  $\ker \rho = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \right\}_{r \in \mathbb{C}^*}$  同构与非零实数乘法群。

**定义 3.10.** 商群  $\text{GL}_n(K)/K^*$  称为射影线性群, 记为  $\text{PGL}_n(K)$ 。这里  $K = \mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ 。

因此 Möbius 群同构于  $\mathbb{C}^2$  上的射影线性群

$$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \cong \text{PGL}_2(\mathbb{C})$$

注意到对任何一个矩阵  $g \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , 我们总可以找到复数  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  使得  $\lambda g \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  (取  $\lambda$  使得  $\lambda^2 = \det(g)^{-1}$ )。于是  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  中的每个元素均可以找到一个代表元在  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  中。而两个  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  中的矩阵  $g_1, g_2$  代表  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  中的同一个元素, 即  $g_1 = \lambda g_2$ , 当且仅当  $\lambda = \pm 1$ 。因此有群同构

$$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \cong \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$$

即 Möbius 群中的每个元素恰好可以通过两个  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  中的矩阵来表示。

**命题 3.11.** 设  $R$  是球面  $S^2$  上的一个转动 (即  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  中的一个元素在  $S^2$  上的作用), 记

$$\varphi = \text{SP} \circ R \circ \text{SP}^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}.$$

则  $\varphi$  是一个 Möbius 变换。

**证明.** 考虑标准基的三个向量  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 。由于任何一个旋转都可以写成以  $e_1, e_2$  以及  $e_3$  为旋转轴的旋转的复合, 而 Möbius 变换是一个群, 我们只需要证明旋转轴为  $e_1, e_2, e_3$  的情况。记  $R_i(\theta)$  为绕轴  $e_i$  旋转  $\theta$  角。

首先考虑旋转轴为  $e_3$  的情况。由于  $e_3$  过北极点  $N$ , 容易看出,  $R_3(\theta)$  可以通过矩阵

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

对应的 Möbius 变换来实现。

其次考虑旋转轴为  $e_1$  的情况。由于

$$R_1(\theta) = R_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \circ R_3(\theta) \circ R_2^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

而  $R_3(\theta)$  是一个 Möbius 变换, 我们只需要说明  $R_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$  也是一个 Möbius 变换。由

$$R_2\left(\frac{\pi}{2}\right) : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_2, -x_1).$$

直接计算得到

$$\text{SP} \circ R_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \circ \text{SP}^{-1}(z) = \frac{|z|^2 - 1 - 2 \operatorname{Re} z + 2z}{|z|^2 + 2 \operatorname{Re} z + 1} = \frac{z - 1}{z + 1}$$

是一个 Möbius 变换。

旋转轴为  $e_2$  的情况证明类似。

□

如果我们把  $S^2$  与  $\hat{\mathbb{C}}$  通过球极投影等同起来, 把 Möbius 变换看作是球面  $S^2$  的变换, 则上述命题说明 Möbius 变换包含所有的转动。即  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  可以自然的看作是  $\text{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$  的子群。如下定理说明, 这个子群恰好是  $\text{SU}(2)/\{\pm I\}$ , 因此

$$\text{SO}_3(\mathbb{R}) \cong \text{SU}(2)/\{\pm I\}.$$

**定理 3.12.** 设  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ,  $\rho_g \in \mathrm{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  为对应的 Möbius 变换。记

$$\varphi_g = \mathrm{SP}^{-1} \circ \rho_g \circ \mathrm{SP} : S^2 \rightarrow S^2.$$

则  $\varphi_g$  是球面  $S^2$  的一个转动 (即  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  中的一个元素在  $S^2$  上的作用) 当且仅当  $g \in \mathrm{SU}(2)$ 。

**证明.** 给定  $p = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ ,  $-p = (-x_1, -x_2, -x_3)$  为  $P$  的对径点。容易验证,

$$\text{若 } \mathrm{SP}(p) = z, \text{ 则 } \mathrm{SP}(-p) = \frac{-1}{\bar{z}}.$$

假设  $\varphi_g$  是一个转动, 则  $\varphi_g$  将两个对径点映射到两个对径点。于是

$$\rho_g\left(\frac{-1}{\bar{z}}\right) = \frac{-1}{\rho_g(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

代入  $\rho_g$  的表达式, 整理得

$$\frac{b\bar{z} - a}{d\bar{z} - c} = -\frac{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

把  $\bar{z}$  换成  $z$ , 这说明两个  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  的矩阵  $\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\bar{c} & -\bar{d} \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix}$  表示的同一个 Möbius 变换, 因此

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\bar{c} & -\bar{d} \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix}$$

如果上式右边取负号, 即  $c = \bar{b}, d = -\bar{a}$ , 则  $\det(g) = ad - bc = -|a|^2 - |b|^2 \neq 1$  矛盾。如果上式右端取正号, 即  $c = -\bar{b}, d = \bar{a}$  且  $\det(g) = |a|^2 + |b|^2 = 1$ 。于是  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  为  $\mathrm{SU}(2)$  中的元素。

反之, 假设  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ , 我们说明  $\varphi_g$  一定是一个转动。设  $\rho_g(0) = z_0$ 。取  $R$  为一个  $S^2$  上的转动, 使得  $R(\mathrm{SP}^{-1}(z_0)) = \mathrm{SP}^{-1}(0)$ 。由命题 3.11 知  $R$  对应与一个 Möbius 变换。由上述证明知,  $R = \rho_h$ , 其中  $h \in \mathrm{SU}(2)$ 。我们考虑复合  $\tilde{g} = hg \in \mathrm{SU}(2)$ 。由构造:  $\tilde{g}(0) = 0$ , 于是

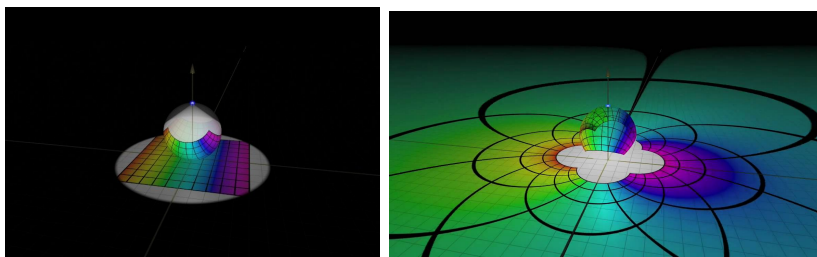
$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

容易看出,  $\varphi_{\tilde{g}}$  是绕过北极点  $N$  的旋转轴旋转  $2\theta$ 。于是

$$\varphi_g = \varphi_{h^{-1}} \varphi_{\tilde{g}} = R^{-1} \circ \varphi_{\tilde{g}}$$

是两个旋转的复合, 因此也是一个旋转。 □

**例子 3.13.** Möbius 反演变换对应与酉矩阵  $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ , 于是可以通过球面旋转来实现。如下图 (取自 Möbius Transformations Revealed)



### 3.3 交比

Möbius 群可以看作是黎曼球面上的对称群。研究它性质的一个重要方法是找到一些在群作用下不变的参量。我们这一节讨论其中一个重要的不变量，称为交比 (cross-ratio)。

**定义 3.14.** 给定  $\hat{\mathbb{C}}$  上的四个不同的点  $z_1, z_2, z_3, z_4$ ，它们的交比 (cross-ratio) 定义为

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

注意到，这个定义对于某个  $z_i = \infty$  的情况也是有意义的。例如

$$[z_1, z_2; z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}, \quad [z_1, \infty; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}, \quad [z, 1; 0, \infty] = z.$$

交比可以通过下面这个几何问题得到。我们已经知道，Möbius 将一个圆映射为一个圆。另一方面，给定  $\hat{\mathbb{C}}$  上的两个圆，是否存在一个 Möbius 变换将其中一个圆变为另一个？这个答案是肯定的。一个圆可以通过 3 个不同的点唯一决定，因此，给定  $\hat{\mathbb{C}}$  上 3 个不同的点  $z_1, z_2, z_3$  以及另外 3 个不同的点  $w_1, w_2, w_3$ ，我们只需要找到一个 Möbius 变换将  $z_i$  映射成  $w_i$ 。我们有如下定理。

**定理 3.15.** 给定  $\hat{\mathbb{C}}$  上 3 个不同的点  $z_1, z_2, z_3$  以及另外 3 个不同的点  $w_1, w_2, w_3$ ，存在一个唯一的 Möbius 变换  $\varphi$  使得  $\varphi(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$ 。特别的，一个 Möbius 变换由它在三个不同点的像唯一决定。

**证明.** 我们首先证明存在 Möbius 变换将  $z_1, z_2, z_3$  映射成  $0, 1, \infty$ 。实际上

$$\varphi(z) = [z, z_2; z_1, z_3] = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

满足要求。一般的，我们取 Möbius 变换  $\varphi_1, \varphi_2$  使得  $\varphi_1 : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, 1, \infty), \varphi_2 : (w_1, w_2, w_3) \rightarrow (0, 1, \infty)$ ，则  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  是一个将  $z_i$  映射为  $w_i$  的 Möbius 变换。

唯一性。假设有两个 Möbius 变换  $\varphi, \tilde{\varphi}$  将  $z_i$  映射为  $w_i$ 。考虑  $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ ，它有 3 个不动点  $z_1, z_2, z_3$ 。一个非恒等的 Möbius 变换最多只有两个不动点，因此  $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$  是恒等变换，即  $\tilde{\varphi} = \varphi$ 。

□

交比最重要的性质是它在 Möbius 变换下面保持不变。

**定理 3.16.** 对任意四个不同的点  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$  和任意一个 Möbius 变换，我们有

$$[\varphi(z_1), \varphi(z_2); \varphi(z_3), \varphi(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

证明. 设  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc = 1$ . 直接计算得到

$$\varphi(z_i) - \varphi(z_j) = \frac{(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}.$$

由此易知定理成立。 □

上述定理的逆命题也是成立的。

**定理 3.17.** 给定  $\hat{\mathbb{C}}$  上 4 个不同的点  $z_1, z_2, z_3, z_4$  以及另外 4 个不同的点  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , 则  $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [w_1, w_2; w_3, w_4]$  当且仅当存在 Möbius 变换  $\varphi$  使得  $\varphi(z_i) = w_i$ 。

证明. 考虑 Möbius 变换

$$\varphi_1(z) = [z, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)}, \quad \varphi_2(z) = [z, w_2; w_3, w_4] = \frac{(z - w_3)(w_2 - w_4)}{(z - w_4)(w_2 - w_3)}.$$

我们知道

$$\varphi_1 : (z_2, z_3, z_4) \rightarrow (1, 0, \infty), \quad \varphi_2 : (w_2, w_3, w_4) \rightarrow (1, 0, \infty).$$

因此  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  将  $z_2, z_3, z_4$  映射到  $w_2, w_3, w_4$ 。由定理 3.16, 存在 Möbius 变换  $\varphi$  使得  $\varphi(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3, 4$ , 当且仅当  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(z_1) = w_1$ , 即  $\varphi_1(z_1) = \varphi_2(w_1)$ 。 □

**例子 3.18.** 考虑两个区域

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

我们可以通过如下的方法找到一个 Möbius 变换  $\varphi$  使得  $\varphi(D) = H$ 。

$\varphi$  需要把圆  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  变成直线  $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\}$ 。取  $C$  上 3 个点  $(-1, -i, 1)$  和  $L$  上 3 个点  $(0, 1, \infty)$ 。我们找一个 Möbius 变换  $\varphi$  使得  $\varphi : (-1, -i, 1) \rightarrow (0, 1, \infty)$ 。则  $\varphi(z)$  满足的方程可以通过如下的交比给出

$$[\varphi(z), 0; 1, \infty] = [z, -1; -i, 1] \implies \varphi(z) = i \frac{1+z}{1-z}.$$

我们可以把如上 Möbius 变换的性质总结为一个群作用轨道的性质。我们定义如下的空间

$$X = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid z_i \neq z_j, \forall i \neq j\}.$$

$X$  上一个点表示  $\hat{\mathbb{C}}$  中 4 个互不相同的点。Möbius 群自然的作用在  $X$  上: 任取  $\varphi \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$

$$\begin{aligned} \varphi : X &\rightarrow X \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) &\rightarrow (\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)) \end{aligned}$$

我们利用交比定义映射

$$P : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad P(z_1, z_2, z_3, z_4) = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

由于 Möbius 变换保持交比不变, 这个映射在 Möbius 变换的同一个轨道取值相同。于是  $P$  给出了一个轨道空间上的函数

$$P : X / \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

**定理 3.19.** 映射  $P: X/\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C}$  是一个单射, 并且它的像为  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ 。即交比给出了  $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  作用在  $X$  上的轨道与  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  的一一对应。

空间  $X/\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  在代数几何中有一个专门的符号记为  $\mathcal{M}_{0,4}$ , 表示带 4 个标记点的黎曼球面的模空间 (moduli space)。类似的讨论可以推广到  $\mathcal{M}_{0,n} (n \geq 4)$ , 它是  $\hat{\mathbb{C}}$  上  $n$  个不同的点在 Möbius 变换下的等价类。这类空间在现代几何拓扑和数学物理中扮演着重要的角色。

### 3.4 共轭类

**定义 3.20.** 给定 Möbius 变换  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc = 1$ , 我们定义

$$\text{Tr}^2(\varphi) := \left( \text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^2.$$

容易看出,  $\text{Tr}^2(\varphi)$  与表达  $\varphi$  的  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  中的两个矩阵的选取无关, 于是给出了一个良好定义的映射

$$\text{Tr}^2: \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

**命题 3.21.** 如果  $\varphi$  与  $\phi$  是共轭的 Möbius 变换, 则  $\text{Tr}^2 \varphi = \text{Tr}^2 \phi$ 。

**例子 3.22.** 考虑平移变换  $P: z \rightarrow z + 1$ ;  $\text{Tr}^2 \varphi = 4$  和线性变换  $M_\lambda: z \rightarrow \lambda z$  ( $\lambda \neq 0, 1$ ), 则

$$\text{Tr}^2 P = 4, \quad \text{Tr}^2 M_\lambda = \lambda + \lambda^{-1} + 2.$$

**定理 3.23.** 设  $\varphi$  是一个非恒等的 Möbius 变换, 则  $\varphi$  有一个或者两个不动点。并且

- 如果  $\varphi$  有一个不动点, 则  $\varphi$  共轭于平移变换  $P: z \rightarrow z + 1$ ;  $\text{Tr}^2 \varphi = 4$ 。
- 如果  $\varphi$  有两个不动点, 则  $\varphi$  共轭于线性变换  $M_\lambda: z \rightarrow \lambda z$  ( $\lambda \neq 0, 1$ );  $\text{Tr}^2 \varphi = \lambda + \lambda^{-1} + 2$ 。

**证明.** 假设  $\varphi$  只有一个不动点  $z_1$ 。取  $\eta \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  使得  $\eta(z_1) = \infty$ , 则  $\eta\varphi\eta^{-1}$  与  $\varphi$  共轭且只有一个不动点  $\infty$ 。由于  $\eta\varphi\eta^{-1}$  保持  $\infty$ , 它只能是仿射变换  $\eta\varphi\eta^{-1}(z) = \lambda z + b$  且在  $\mathbb{C}$  上没有不动点, 即  $\lambda = 1, b \neq 0$ 。取  $\phi: z \rightarrow z/b$ , 则  $\phi\eta\varphi\eta^{-1}\phi^{-1}$  为平移  $z \rightarrow z + 1$  并且与  $\varphi$  共轭。

假设  $\varphi$  有两个不动点  $z_1, z_2$ 。取  $\eta \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  使得  $\eta(z_1) = 0, \eta(z_2) = \infty$ 。则  $\eta\varphi\eta^{-1}$  与  $\varphi$  共轭且保持  $0, \infty$  不动。易知  $\eta\varphi\eta^{-1}$  只能是线性变换  $M_\lambda: z \rightarrow \lambda z$  ( $\lambda \neq 0, 1$ )。

□

**定理 3.24.** 两个 Möbius 变换  $\varphi$  与  $\phi$  共轭当且仅当  $\text{Tr}^2 \varphi = \text{Tr}^2 \phi$ 。

**证明.** 只需证明如果  $\text{Tr}^2 \varphi = \text{Tr}^2 \phi$ , 则  $\varphi$  与  $\phi$  共轭。

共轭的 Möbius 变换具有相同的不动点个数。由前述定理, Möbius 变换只有一个不动点当且仅当  $\text{Tr}^2 = 4$ , 此时均共轭与平移变换。因此我们只需要考虑具有两个不动点的情况。



由前述定理, 不妨设  $\varphi = M_\lambda, \phi = M_\kappa$ 。由  $\text{Tr}^2 \varphi = \text{Tr}^2 \phi$  推出

$$\lambda + \lambda^{-1} = \kappa + \kappa^{-1}, \quad \kappa = \lambda \quad \text{或} \quad \kappa = \lambda^{-1}.$$

如果  $\kappa = \lambda$ , 则  $\varphi = \phi$ 。如果  $\kappa = \lambda^{-1}$ , 则  $\varphi = T\phi T^{-1}$ , 这里  $T: z \rightarrow z^{-1}$  是 Möbius 反演。  $\square$

**定义 3.25.** 我们分类 Möbius 群的共轭类如下: 一个非恒等的 Möbius 变换  $\varphi$  称为是

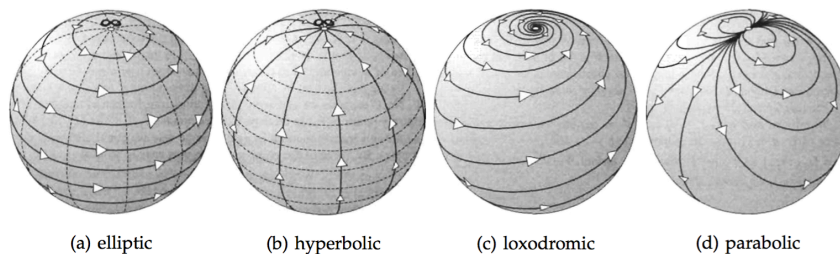
- 椭圆的 (elliptic):  $0 \leq \text{Tr}^2 \varphi < 4$
- 双曲的 (hyperbolic):  $\text{Tr}^2 \varphi > 4$
- 斜驶的 (loxodromic):  $\text{Tr}^2 \varphi < 0$  或  $\text{Tr}^2 \varphi \notin \mathbb{R}$
- 抛物的 (parabolic):  $\text{Tr}^2 \varphi = 4$

注 3.26. 关于上述抛物, 椭圆, 双曲的命名法。考虑  $e = \frac{1}{2}|\text{Tr} \varphi|$ , 上述的命名法与将  $e$  视为离心率对二次圆锥曲线的命名方式是一致的。

**定理 3.27.** 设  $\varphi$  是一个非恒等的 Möbius 变换。

- 如果  $\varphi$  是椭圆的,  $z$  不是  $\varphi$  的不动点, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z)$  不存在。
- 如果  $\varphi$  是双曲或者斜驶的, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n$  将  $\hat{\mathbb{C}}$  上的非不动点移动到其中一个不动点。
- 如果  $\varphi$  是抛物的, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = z_0, \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ 。这里  $z_0$  是  $\varphi$  的不动点。

它们对应的群作用如下图 (取自 Tristan Needham: Visual complex analysis)



**推论 3.28.** 设  $G$  是  $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  的有限子群, 则  $G$  中的元素都是椭圆的。

**定理 3.29.** 设  $G$  是  $\text{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \cong \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  的有限子群。则  $G$  共轭于  $\text{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$  的一个子群, 即存在  $\varphi \in \text{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$  使得  $\varphi G \varphi^{-1} \subset \text{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ 。

证明. 取一个  $g \in G$  非单位元, 则  $g$  是椭圆的。由定理 3.23 知存在  $\varphi \in \text{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$  使得  $\varphi g \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, |\lambda| = 1$ 。把  $G$  换成它的共轭  $\varphi G \varphi^{-1}$ , 我们不妨设  $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, |\lambda| = 1, \lambda \neq \pm 1$ 。

任取  $h$  为  $G$  中的一个元素, 不妨设  $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . 由于  $h, gh \in G$  是椭圆的,

$$-2 < a + d < 2, \quad -2 < \lambda a + \bar{\lambda}d < 2.$$

特别地,  $a + d$  与  $\lambda a + \bar{\lambda}d$  都是实数. 于是

$$\lambda a + \bar{\lambda}d = \bar{\lambda}\bar{a} + \lambda\bar{d} \implies \lambda(a - \bar{d}) = \bar{\lambda}(\bar{a} - d).$$

由于  $a - \bar{d} = a + d - (d + \bar{d})$  是实数, 而  $\lambda \neq 1$ , 我们得到  $a = \bar{d}$ . 于是  $G$  中的元素都形如  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}$ .

另一方面, 考虑

$$ghg^{-1}h^{-1} = \begin{pmatrix} ad - \lambda^2bc & (\lambda^2 - 1)ab \\ (\bar{\lambda}^2 - 1)cd & ad - \bar{\lambda}^2bc \end{pmatrix}.$$

如果  $c = 0$ , 则  $ghg^{-1}h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^2 - 1)ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  的  $\text{Tr} = 2$ , 因此  $ab = 0$ , 即  $b = 0$ . 类似的讨论, 我们知道如果  $b = 0$ , 则  $c = 0$ , 此时  $h$  为对角矩阵.

下面考虑  $b, c$  均不为 0. 由  $bc = |a|^2 - 1 \in \mathbb{R}$ , 存在实数  $r$  使得  $c = r\bar{b}$ . 考虑  $G$  中的两个元素

$$h_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ r_1\bar{b}_1 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ r_2\bar{b}_2 & \bar{a}_2 \end{pmatrix}$$

直接计算知  $h_1h_2$  的两个对角元素为

$$a_1a_2 + r_2b_1\bar{b}_2, \quad \bar{a}_1\bar{a}_2 + r_1b_2\bar{b}_1.$$

由  $h_1h_2 \in G$  知这两个元素互为共轭, 由此知  $r_1 = r_2$ .

因此  $G$  中的元素都形如  $\begin{pmatrix} a & b \\ r\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ , 其中  $r$  为一个取定的非 0 实数, 与  $G$  中的元素选取无关.

注意到这个也包含了上述  $b = c = 0$  的情况. 考虑  $SL_2(\mathbb{C})$  中的矩阵  $\varphi = \begin{pmatrix} |r|^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & |r|^{-1/4} \end{pmatrix}$ . 我们有

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ r\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \varphi^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b' \\ \bar{b}' & \bar{a} \end{pmatrix} & r > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b' \\ -\bar{b}' & \bar{a} \end{pmatrix} & r < 0 \end{cases} \quad b' = |r|^{1/2}b.$$

如果  $r < 0$ ,  $\begin{pmatrix} a & b' \\ -\bar{b}' & \bar{a} \end{pmatrix}$  代表  $SU(2)$  中的元素. 于是  $G$  共轭于  $\varphi G \varphi^{-1} \subset SU(2)/\mathbb{Z}_2$ .

我们只需要说明第一种情况 ( $r > 0$ ) 不可能. 将  $G$  换成  $\varphi G \varphi^{-1}$ , 并注意  $\varphi g \varphi^{-1} = g$ , 我们不妨设  $G$  中的元素形如  $\begin{pmatrix} a & b' \\ \bar{b}' & \bar{a} \end{pmatrix}$ , 且存在元素  $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$  和  $h = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  使得  $b \neq 0$ . 考虑

$$ghg^{-1}h^{-1} = \begin{pmatrix} |a|^2 - \lambda^2|b|^2 & (\lambda^2 - 1)ab \\ (\bar{\lambda}^2 - 1)\bar{a}\bar{b} & |a|^2 - \bar{\lambda}^2|b|^2 \end{pmatrix}$$

由于  $|a|^2 = 1 + |b|^2, |\lambda| = 1, \lambda \neq \pm 1$ , 我们知道

$$\operatorname{Tr} ghg^{-1}h^{-1} = 2|a|^2 - (\lambda^2 + \bar{\lambda}^2)|b|^2 > 2.$$

因此  $ghg^{-1}h^{-1}$  不可能是椭圆的, 与  $ghg^{-1}h^{-1} \in G$  矛盾。

□

**推论 3.30.** 设  $G$  是  $\operatorname{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$  的有限子群。则  $G$  同构于有限循环群, 二面体群, 或者某个帕拉图正多面体的对称群。

**证明.** 由前述定理,  $G$  同构于  $\operatorname{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$  的一个子群。我们知道  $\operatorname{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \operatorname{SO}_3(\mathbb{R})$ 。由  $\operatorname{SO}_3(\mathbb{R})$  的有限子群分类可得结论。

□

### 3.5 双曲平面

这一节我们讨论一个非欧式几何的例子: 双曲平面。在微分几何中, 平面是一种曲率为零的几何模型, 球面是一种曲率为正的几何模型, 而双曲空间是一种曲率为负的几何模型, 它们具有完全不一样的几何性质。

**定义 3.31.** 我们定义双曲平面的上半平面模型为

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

在这里  $\mathbb{H}$  暂时只是作为一个集合, 或者  $\hat{\mathbb{C}}$  的一个子集。下面我们将揭示  $\mathbb{H}$  上的一些几何性质。

**定理 3.32.** 一个 Möbius 变换  $\varphi$  将  $\mathbb{H}$  映射为  $\mathbb{H}$  自己当且仅当  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc > 0$ 。所有这样的 Möbius 变换在映射复合下形成一个群, 称为上半平面的 Möbius 变换, 记为  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ 。

**证明.** 记  $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 。如果  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1$ , 则  $\varphi$  将实轴映成实轴, 且

$$\operatorname{Im}(\varphi(z)) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}, \quad \text{即 } \varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}.$$

反之, 假设  $\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 。则  $\varphi: \mathbb{R}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ 。设  $r_1 = \varphi^{-1}(0), r_2 = \varphi^{-1}(1), r_3 = \varphi^{-1}(\infty)$ , 则

$$\varphi(z) = [\varphi(z), 1; 0, \infty] = [z, r_2; r_1, r_3], \quad r_i \in \mathbb{R}_\infty.$$

由此知  $\varphi$  可以表达为  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 。同上有  $\operatorname{Im}(\varphi(z)) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ 。由于  $\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , 我们得到  $ad-bc > 0$ 。 □

我们可以同时对  $a, b, c, d$  乘以一个非零实数, 使得  $ad-bc = 1$ 。类似于  $\operatorname{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ , 我们有

$$\operatorname{Möb}(\mathbb{H}) \cong \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}.$$

**命题 3.33.** Möb(H) 在 H 上的作用是传递的。

下面我们说明, H 上可以定义一种距离 (称为双曲度量), 使得 Möb(H) 正好是 H 上保持定向的等距变换。因此, 如果我们把双曲平面 H 类比与欧式平面  $\mathbb{R}^2$ , 则 Möb(H) 类比与  $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ 。

我们首先阐述一下距离和度量空间的概念。

**定义 3.34.** 一个集合  $X$  上的一个距离函数指的是一个映射

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}$$

使得下述条件满足

1. 正定性:  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ 。  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;
2. 对称性:  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ ;
3. 三角不等式:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$ 。

一个带距离函数的集合  $(X, d)$  称为度量空间 (metric space)。一个一一映射  $\varphi: X \rightarrow X$  称为度量空间  $(X, d)$  的等距同构, 如果  $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y), \forall x, y \in X$ 。度量空间  $(X, d)$  上所有的等距变换在映射复合下形成一个群, 称为其等距同构群, 记做  $\text{Isom}(X, d)$  或简记为  $\text{Isom}(X)$ 。

**例子 3.35.**  $\mathbb{R}^n$  及其欧式距离组成一个度量空间。

**定义 3.36.** 我们定义  $\rho: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  如下

$$\rho(z, w) := \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.$$

一个等价的公式可以写成

$$\sinh \left( \frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\text{Im } z \text{Im } w}}.$$

这里  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  是双曲正弦函数。我们将说明,  $\rho$  是  $\mathbb{H}$  上的一个距离函数。

为了解  $\rho$ , 我们先考察几个特殊的例子。

**例子 3.37.** 若  $z = iu, w = iv, u, v > 0$  为 H 中  $y$  轴上的两个点, 则

$$\rho(iu, iv) = \left| \log \frac{u}{v} \right|.$$

并且,  $\rho$  定义了  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) = 0\}$  上的一个距离函数。一般的, 对于具有相同  $x$  坐标的两点

$$\rho(x + iu, x + iv) = \left| \log \frac{u}{v} \right|.$$

**例子 3.38.** 考虑 H 上具有相同  $y$  坐标的两点  $u + iy, v + iy$ , 则

$$\rho(u + iy, v + iy) = 2 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{|u - v|}{2y} \right).$$

**命题 3.39.**  $\rho$  在  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  下保持不变, 即

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) = \rho(z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}, \varphi \in \text{Möb}(\mathbb{H}).$$

**定理 3.40.**  $(\mathbb{H}, \rho)$  是一个度量空间。特别地,  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  中的元素都是  $(\mathbb{H}, \rho)$  的等距同构。

**证明.** 正定性和对称性很容易验证, 如下我们证明三角不等式  $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$ 。

首先, 我们考虑  $z_1 = iu, z_3 = iv, u, v > 0$  落在  $y$  轴上的情况。设  $z_2 = x + iy$ , 则

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z_1, z_2)\right) &= \frac{|x + iy - iu|}{2\sqrt{uy}} \geq \frac{|iy - iu|}{2\sqrt{uy}} = \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z_1, iy)\right) \\ \implies \rho(z_1, x + iy) &\geq \rho(z_1, iy). \quad \text{同理} \quad \rho(z_3, x + iy) \geq \rho(z_3, iy). \end{aligned}$$

结合例子3.37, 我们得到三角不等式  $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(iu, iy) + \rho(iy, iv) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$ 。

对于一般的情况, 设  $C$  为  $\hat{\mathbb{C}}$  过  $z_1, z_3$  且与  $x$  轴垂直的圆 (注意  $C$  也可能是  $\mathbb{C}$  中的一条直线)。设  $\alpha$  为  $C$  与  $x$  轴的一个交点。考虑  $\varphi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ ,  $\varphi(z) = -\frac{1}{z-\alpha} + \beta$ 。取适当的实数  $\beta$ , 我们可以使得  $\varphi$  将  $C$  变到  $y$  轴。由于  $\varphi$  保持  $\rho$  不变, 由上述已证明的情况知

$$\rho(z_1, z_3) = \rho(\varphi(z_1), \varphi(z_3)) \leq \rho(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) + \rho(\varphi(z_2), \varphi(z_3)) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3).$$

□

**注 3.41.** 我们知道, 在欧式空间中, 两点之间的连线以直线为最短。在微分几何中, 这样的最短连线称为测地线。在双曲空间  $\mathbb{H}$  中, 在上述定理的证明过程中不难发现, 如果两个点  $z_1, z_2$  都在  $y$  轴上, 则它们在  $y$  轴上的连线是最短路径 (证明中的特殊情况)。对于一般的情况, 由于  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  保持距离, 定理中的证明说明  $z_1, z_2$  之间的最短连接路径是过这两点且垂直于  $x$  轴的圆。因此, 平面上的直线, 在双曲空间  $\mathbb{H}$  中对应于垂直于  $x$  轴的圆或者直线。

实际上, 并不是所有的等距同构都由  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  给出。例如

$$J: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \rightarrow -\bar{z}.$$

我们有如下定理

**定理 3.42.**  $(\mathbb{H}, \rho)$  的等距同构都形如

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{或} \quad z \rightarrow \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

这里,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$ 。特别地,  $(\mathbb{H}, \rho)$  的等距同构群由  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  和  $J: z \rightarrow -\bar{z}$  生成。

**证明.** 设  $\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  是一个等距同构。则  $\varphi$  将测地线映射为测地线。存在一个  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  中的元素  $g$  使得  $g^{-1} \circ \varphi$  将正  $y$  轴映射成正  $y$  轴, 并且  $g^{-1} \circ \varphi$  保持  $0, i, \infty$  不动 (为什么?)。  $g^{-1} \circ \varphi$  是等距同构, 由  $\rho$  的表达式知,  $g^{-1} \circ \varphi$  一定保持整个正  $y$  轴不动。

设  $z = x + iy \in \mathbb{H}$ ,  $g^{-1} \circ \varphi(z) = u + iv$ 。设  $t > 0$ , 则

$$\rho(x + iy, it) = \rho(u + iv, it) \implies (x^2 + (y - t)^2)v = (u^2 + (v - t)^2)y.$$

此式对任意  $t > 0$  成立，由此得  $v = y, u = \pm x$ 。因此

$$g^{-1} \circ \varphi(z) = z \text{ 或 } -\bar{z}, \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

利用连续性易知  $g^{-1} \circ \varphi = 1$  或者  $g^{-1} \circ \varphi = J$ ，即  $\varphi = g$  或者  $\varphi = g \circ J, g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ 。□

另一个双曲空间的模型是单位圆盘

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

在例子3.18中，我们知道可以通过 Möbius 变换将  $D$  和  $\mathbb{H}$  等同起来，例如

$$\phi(z) = i \frac{1+z}{1-z}, \quad \phi(D) = \mathbb{H}.$$

因此我们可以通过  $\mathbb{H}$  上的距离函数  $\rho$ ，给出  $D$  上的距离函数  $\rho_D$ ：

$$\rho_D(z, w) := \rho(\phi(z), \phi(w)), \quad z, w \in D.$$

**定义 3.43.** 度量空间  $(D, \rho_D)$  称为 Poincaré 圆盘。

例如，Poincaré 圆盘  $D$  中任一点  $z$  到原点的距离为

$$\rho_D(0, z) = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

我们可以看出，当  $z$  走向圆盘的边界时，它距离原点的距离趋向于  $\infty$ 。类似的，Poincaré 圆盘  $D$  中的测地线为垂直于圆盘边界的圆弧。

双曲几何和通常的欧式几何有很大的不同。例如，欧式几何中的一条公理表明，给定欧式平面中的一条直线以及直线外一点，存在唯一一条过该点并且与该直线不交的直线。这个在双曲平面中不成立，容易看出可以找到无穷条这样的“直线”。

## 4 基本群

### 4.1 路径和连通分支

**定义 4.1.** 设  $(X, d)$  是一个度量空间，我们定义以  $x_0 \in X$  为球心， $r > 0$  为半径的球为

$$B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

我们称点列  $x_i \in X, i = 1, 2, \dots$  收敛于  $x \in X$ ，如果

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, x) = 0.$$

$x$  称为  $\{x_i\}$  的极限，记为  $x_i \rightarrow x$  或  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ 。

**定义 4.2.** 设  $X, Y$  是两个度量空间。映射  $f: X \rightarrow Y$  称为是连续的, 如果

$$\forall x_0 \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon).$$

连续性的概念对一般的拓扑空间都有定义。我们这里只讨论度量空间这一类拓扑空间, 它的开集是由所有的球生成的。度量空间包含了我们大部分熟知的几何例子。在以下的讨论中, 为避免引入过多的概念, 所有的空间都默认为度量空间。

**命题 4.3.** 设  $X, Y, Z$  是度量空间,  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  是连续映射。则  $g \circ f: X \rightarrow Z$  是连续的。

对于度量空间这一类拓扑空间, 映射的连续性可以通过点列的收敛性来描述。

**命题 4.4.** 两个度量空间之间的映射  $f: X \rightarrow Y$  是连续的当且仅当对任意  $X$  中收敛的点列  $x_i \rightarrow x$ , 它们在  $f$  下的像也收敛, 即  $f(x_i) \rightarrow f(x)$ 。

**例子 4.5.**  $\mathbb{R}^n$  中的子集是一个度量空间。特别的, 线段  $I = [0, 1]$ , 球面  $S^n$  是度量空间。

**定义 4.6.** 度量空间  $X$  上的一个路径 (path) 指的是一个连续的映射

$$\gamma: I \rightarrow X.$$

其中  $\gamma(0) = x_0$  称为路径的起点,  $\gamma(1) = x_1$  称为路径的终点。  $\gamma$  称为从  $x_0$  到  $x_1$  的一条路径。另外

- a)  $\gamma^{-1}: I \rightarrow X, \gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ , 称为  $\gamma$  的逆路径。
- b) 如果  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , 我们称  $\gamma$  为一个圈 (loop)。此时  $\gamma$  给出了一个连续映射  $S^1 \rightarrow X$ 。
- c) 如果  $\gamma(t) = x_0, \forall t \in I$ , 我们称  $\gamma$  为一个常值路径, 记为  $i_{x_0}$ 。
- d) 设  $\gamma_1, \gamma_2$  为两条路径, 并且  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ 。我们定义它们的乘积为

$$\gamma_2 \star \gamma_1: I \rightarrow X, \quad t \rightarrow \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**定义 4.7.** 给定度量空间  $X$ , 我们定义  $X$  上的一个关系如下:

$$x_0 \sim x_1 \iff \exists \text{从 } x_0 \text{ 到 } x_1 \text{ 的一条路径}$$

容易验证,  $\sim$  是一个等价关系。每一个等价类中的元素称为  $X$  的一个道路连通分支, 记

$$\pi_0(X) := X / \sim = \{\text{道路连通分支}\}$$

为  $X$  中所有道路连通分支的集合。如果  $X$  只有一个道路连通分支, 我们称  $X$  为道路连通的。

**命题 4.8.** 设  $f: X \rightarrow Y$  是一个连续映射, 则  $f$  将  $X$  中的道路连通分支映射到  $Y$  中的道路连通分支中。特别的,  $f$  诱导了一个集合的映射

$$f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y).$$

上述命题说明我们在讨论空间之间的连续映射时, 只需要独立考察在每个道路连通分支上的情形。因此, 我们通常假设空间是道路连通的。

**例子 4.9.** 球面  $S^n$  是道路连通的。立方体  $I^n$  是道路连通的。

## 4.2 路径同伦和基本群

**定义 4.10.** 设  $X, Y$  是两个度量空间,  $A \subset X$ 。设  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  为两个连续映射并且  $f_0|_A = f_1|_A$ 。我们称  $f_0, f_1$  是相对于  $A$  同伦的, 记为  $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$ , 如果存在连续映射  $F : X \times I \rightarrow Y$  使得

$$F|_{X \times \{0\}} = f_0, \quad F|_{X \times \{1\}} = f_1, \quad F|_{A \times \{t\}} = f_0|_A \quad \forall t \in I.$$

如果  $A = \emptyset$  为空集, 我们称  $f_0, f_1$  是同伦的, 记为  $f_0 \simeq f_1$ 。容易验证, 同伦关系是一个等价关系。 $X, Y$  之间的连续映射的同伦等价类记为

$$[X, Y] = \{X \rightarrow Y \text{ 连续映射}\} / \simeq.$$

**引理/定义 4.11.**  $x_0, x_1$  为  $X$  中给定两点。从  $x_0$  到  $x_1$  的道路  $\gamma_1, \gamma_2$  称为是同伦等价的, 如果

$$\gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ rel } \partial I, \quad \partial I = \{0, 1\}.$$

则同伦等价定义了集合 {从  $x_0$  到  $x_1$  的道路} 上的一个等价关系。路径  $\gamma$  的等价类记为  $[\gamma]$ 。

**命题 4.12.** 设  $x_1, x_2, x_3$  为  $X$  中三个点,  $\gamma_1, \gamma_2$  是从  $x_1$  到  $x_2$  的道路,  $\beta_1, \beta_2$  是从  $x_2$  到  $x_3$  的道路。如果  $\gamma_1, \gamma_2$  同伦等价,  $\beta_1, \beta_2$  同伦等价, 则  $\beta_1 \star \gamma_1$  与  $\beta_2 \star \gamma_2$  同伦等价

$$[\gamma_1] = [\gamma_2], \quad [\beta_1] = [\beta_2] \implies [\beta_1 \star \gamma_1] = [\beta_2 \star \gamma_2].$$

上述命题说明道路的乘积可以定义在同伦等价类上。我们还是记为  $\star$ :

$$[\beta] \star [\gamma] := [\beta \star \gamma].$$

**命题 4.13.** 设  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  为  $X$  上的三条路径, 并且  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0), \gamma_2(1) = \gamma_3(0)$ 。则

$$[\gamma_3] \star ([\gamma_2] \star [\gamma_1]) = ([\gamma_3] \star [\gamma_2]) \star [\gamma_1].$$

即道路的乘积在同伦等价类上满足结合律。

**注 4.14.** 如果不取同伦等价类, 则结合律  $\gamma_3 \star (\gamma_2 \star \gamma_1) = (\gamma_3 \star \gamma_2) \star \gamma_1$  不成立。

**命题 4.15.** 设  $\gamma$  是从  $x_0$  到  $x_1$  的路径, 则

$$\begin{aligned} [\gamma] \star [\gamma^{-1}] &= [i_{x_1}], & [\gamma^{-1}] \star [\gamma] &= [i_{x_0}]. \\ [\gamma] \star [i_{x_0}] &= [\gamma], & [i_{x_1}] \star [\gamma] &= [\gamma]. \end{aligned}$$

**证明.** 给定参数  $u \in I$ , 令  $\gamma_u : I \rightarrow X$  为路径  $\gamma_u(t) := \gamma(ut), 0 \leq t \leq 1$ 。考虑同伦  $F : I \times I \rightarrow X$

$$F(t, u) = (\gamma_u \star \gamma_u^{-1})(t).$$

则  $F|_{I \times \{u=1\}} = \gamma \star \gamma^{-1}, F|_{I \times \{u=0\}} = i_{x_1}$ 。因此  $F$  给出了  $\gamma \star \gamma^{-1}$  到  $i_{x_1}$  的同伦, 即  $[\gamma] \star [\gamma^{-1}] = [i_{x_1}]$ 。其它的证明类似, 留给读者练习。□



**定义 4.16.** 设  $x_0 \in X$ 。我们定义

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\gamma] \mid \gamma : I \rightarrow X, \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$

为所有从  $x_0$  到  $x_0$  的道路的同伦等价类。

由以上关于路径同伦类复合的命题，我们实际上证明了如下的定理。

**定理 4.17.**  $\pi_1(X, x_0)$  在道路的乘积下形成一个群，称为  $X$  上以  $x_0$  为基点的基本群 (*fundamental group*)。群中的单位元为常值映射  $[i_{x_0}]$ ，群元素的逆为  $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$ 。

**定理 4.18.** 设  $x_0, x_1$  在  $X$  的同一个道路连通分支上，则  $\pi_1(X, x_0)$  与  $\pi_1(X, x_1)$  同构。特别的，如果  $X$  是道路连通的，则  $\pi_1(X, x_0)$  的同构类与基点  $x_0$  的选取无关，称为  $X$  的基本群，记为  $\pi_1(X)$ 。

**证明.** 设  $\beta$  是从  $x_0$  到  $x_1$  的一条路径。考虑映射

$$\begin{aligned} \Phi_\beta : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1), & [\gamma] &\rightarrow [\beta] \star [\gamma] \star [\beta^{-1}] \\ \Phi_{\beta^{-1}} : \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0), & [\tilde{\gamma}] &\rightarrow [\beta^{-1}] \star [\tilde{\gamma}] \star [\beta] \end{aligned}$$

容易验证， $\Phi_\beta$  与  $\Phi_{\beta^{-1}}$  是互逆的群同态，因此为群同构。 □

**定理 4.19.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是连续映射，则它诱导了一个基本群之间的群同态

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)), \quad [\gamma] \rightarrow [f \circ \gamma].$$

**证明.** 容易验证  $\gamma \rightarrow f \circ \gamma$  保持同伦关系和路径复合，因此定义了一个群同态。 □

**定义 4.20.**  $X, Y$  称为是同伦等价的，如果存在连续映射  $f : X \rightarrow Y$  和  $g : Y \rightarrow X$  使得  $g \circ f \simeq id_X, f \circ g \simeq id_Y$ 。这里  $id_X$  是  $X$  到  $X$  的恒等映射。

容易验证这个空间的同伦等价是一个等价关系。

**定理 4.21.** 设  $X, Y$  是道路连通和同伦等价的，则它们的基本群同构  $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ 。

**证明.** 设连续映射  $f : X \rightarrow Y$  和  $g : Y \rightarrow X$  使得  $g \circ f \simeq id_X, f \circ g \simeq id_Y$ 。取定一个点  $x_0 \in X$ ，令

$$y_0 = f(x_0), \quad x_1 = g(y_0), \quad y_1 = f(x_1).$$

设  $F : X \times I \rightarrow X$  是  $g \circ f$  到  $id_X$  的同伦， $G : Y \times I \rightarrow Y$  是  $f \circ g$  到  $id_Y$  的同伦：

$$F|_{X \times \{0\}} = id_X, F|_{X \times \{1\}} = g \circ f, \quad G|_{Y \times \{0\}} = id_Y, G|_{Y \times \{1\}} = f \circ g.$$

定义两个群同态

$$\phi = f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \rightarrow [f \circ \gamma]$$

$$\eta : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad [\beta] \rightarrow [F|_{\{x_0\} \times I}^{-1}] \star [g \circ \beta] \star [F|_{\{x_0\} \times I}]$$

这里  $F|_{\{x_0\} \times I}$  是  $x_0$  到  $x_1$  的路径:  $t \rightarrow F(x_0, t)$ 。给定  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ , 利用同伦

$$I \times I \rightarrow X, \quad (t, u) \rightarrow F(\gamma(t), u)$$

我们可以构造一个从  $\gamma$  到  $F|_{\{x_0\} \times I}^{-1} \star (g \circ f \circ \gamma) \star F|_{\{x_0\} \times I}$  的同伦, 于是  $\eta \circ \phi = 1$ 。由此知

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \text{ 是单射,} \quad g_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \text{ 是满射} \quad (g_* \text{ 是为什么? )}$$

同理, 利用  $G$  这个同伦关系, 我们可以证明

$$g_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \text{ 是单射,} \quad f_* : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_1) \text{ 是满射.}$$

因此  $g_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$  是群同构。由于  $X, Y$  道路连通, 于是  $\pi_1(X)$  和  $\pi_1(Y)$  同构。□

**例子 4.22.**  $\mathbb{R}^n$  与一个点  $\text{pt}$  是同伦等价的。我们知道  $\pi_1(\text{pt}) = 1$  是平凡群, 于是

$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = 1.$$

一般的, 与  $\text{pt}$  同伦等价的空间称为可缩空间。类似知任意可缩空间的基本群都是平凡的。

**例子 4.23.**  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  与  $S^n$  是同伦等价的。实际上, 我们考虑映射

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n, \quad \vec{x} \rightarrow \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

以及自然的嵌入映射

$$j : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}.$$

则  $\pi \circ j = 1$ , 而

$$F : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \quad (\vec{x}, t) \rightarrow \frac{\vec{x}}{(1-t) + t\|\vec{x}\|}$$

给出了  $j \circ \pi$  到恒等映射的同伦。于是我们知道

$$\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \cong \pi_1(S^n).$$

**定理 4.24.** 设  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ , 则

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

**证明.** 观察到  $\gamma : I \rightarrow X \times Y$  的连续映射等价于两个独立的连续映射

$$\gamma_X : I \rightarrow X, \gamma_Y : I \rightarrow Y, \quad \text{使得} \quad \gamma(t) = (\gamma_X(t), \gamma_Y(t)).$$

容易验证,

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \rightarrow ([\gamma_X], [\gamma_Y])$$

给出了群同构。□

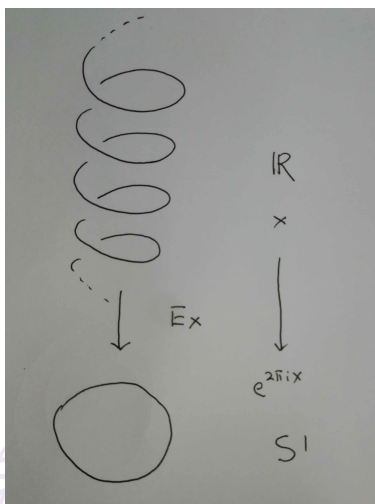
### 4.3 $S^1$ 的基本群

考虑映射

$$\text{Ex} : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad x \rightarrow e^{2\pi i x}.$$

$\text{Ex}$  是一个连续映射，并且满足条件

$$\text{Ex}(x+1) = \text{Ex}(x).$$



由于  $S^1$  是道路连通的，我们取定  $S^1$  上的一个基点为  $e = 1 \in S^1$ ，并简记  $\pi_1(S^1, e)$  为  $\pi_1(S^1)$ 。容易看出， $\pi_1(S^1)$  上的一个元素表示为一个连续映射

$$f : S^1 \rightarrow S^1, \quad f(e) = e.$$

并且  $f, g$  表示  $\pi_1(S^1)$  中同一个等价类当且仅当

$$f \simeq g \text{ rel } \{e\}.$$

**引理 4.25.** 任给一个连续映射  $f : S^1 \rightarrow S^1, f(e) = e$ ，存在一个唯一的连续映射

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(0) = 0$$

使得下面的图表交换

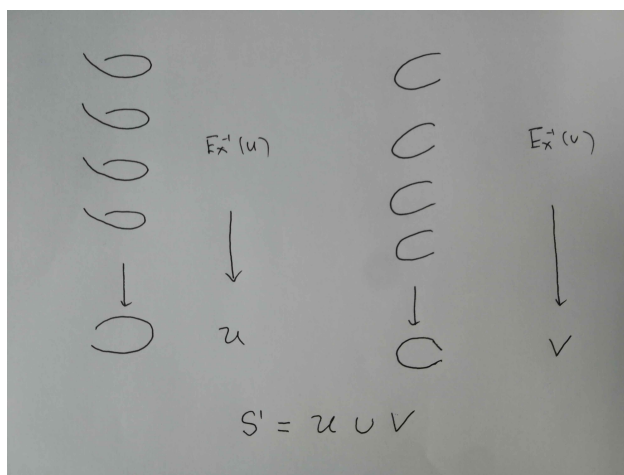
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \text{Ex} \downarrow & & \downarrow \text{Ex} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

即  $\text{Ex} \circ \tilde{f} = f \circ \text{Ex}$ 。 $\tilde{f}$  称为  $f$  的提升 (*lifting*)。

**证明.** 考虑  $S^1$  上的两个开集

$$U = S^1 - \{-1\}, \quad V = S^1 - \{1\}.$$

$\text{Ex}^{-1}(U)$  是  $\mathbb{R}$  上不相交的开区间的并，并且每个开区间在  $\text{Ex}$  下都与  $U$  一一对应。 $\text{Ex}^{-1}(V)$  类似。



记  $g = f \circ \text{Ex}$ 。由于  $f$  是连续映射，存在  $\epsilon > 0$  使得对任意的  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$g([n\epsilon, (n+1)\epsilon]) \subset U \quad \text{或} \quad g([n\epsilon, (n+1)\epsilon]) \subset V.$$

这里  $[n\epsilon, (n+1)\epsilon]$  是  $\mathbb{R}$  上的闭区间。

由  $\text{Ex}^{-1}(U)$  和  $\text{Ex}^{-1}(V)$  的上述性质，存在一个唯一的连续映射

$$\tilde{f} : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{使得} \quad \tilde{f}(0) = 0, \text{Ex} \circ \tilde{f}(x) = g(x) \quad \forall x \in [0, \epsilon]$$

这样我们就将  $\tilde{f}$  唯一地延拓到了区间  $[0, \epsilon]$ 。特别地， $\tilde{f}(\epsilon)$  有一个特定的取值。类似的，我们考虑  $[\epsilon, 2\epsilon]$ 。同理，在确定  $\tilde{f}(\epsilon)$  的取值后，我们可以将  $\tilde{f}$  唯一的连续延拓到  $[\epsilon, 2\epsilon]$ 。由此下去，我们可以唯一地将  $\tilde{f}$  连续延拓到每个区间  $[n\epsilon, (n+1)\epsilon]$  上，得到一个唯一确定的连续映射

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

使得  $\tilde{f}(0) = 0$ ,  $\text{Ex} \circ \tilde{f} = g$ 。 □

**引理 4.26.** 设  $f : S^1 \rightarrow S^1$  和  $g : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(e) = g(e) = e$  且  $f \stackrel{F}{\simeq} g \text{ rel } \{e\}$ 。则

$$\tilde{f} \stackrel{\tilde{F}}{\simeq} \tilde{g} \text{ rel } \{0\}.$$

这里  $F : S^1 \times I \rightarrow S^1$ ,  $\tilde{F} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  为相应的同伦。并且如下条件满足：对任意  $t \in I$ ,  $\tilde{F}|_{\mathbb{R} \times \{t\}}$  都是  $F|_{S^1 \times \{t\}}$  的提升。

**证明.** 证明与引理4.25类似，留给读者练习。 □

**引理/定义 4.27.** 给定  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(e) = e$ 。我们定义  $f$  的度 (degree) 为

$$\text{deg}(f) = \tilde{f}(1).$$

这里  $\tilde{f}$  见引理4.25。则  $\text{deg}$  是一个整数，且与  $f$  的同伦等价类无关，因此定义了映射

$$\text{deg} : \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [f] \rightarrow \text{deg}(f).$$

证明. 由  $\text{Ex} \circ \tilde{f}(1) = f \circ \text{Ex}(1) = e$  知  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ . 假设  $f \simeq g \text{ rel } \{e\}$ , 由引理4.26, 存在连续映射

$$F: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F|_{\mathbb{R} \times \{0\}} = \tilde{f}, \quad F|_{\mathbb{R} \times \{1\}} = \tilde{g}.$$

对任意  $t \in I$ ,  $F|_{\mathbb{R} \times \{t\}}$  都是一个提升. 特别地,  $F(1, t) \in \mathbb{Z}$ . 由连续性知对任意  $g$ ,  $F(1, t)$  取值为同一个整数. 因此

$$\deg f = F(1, 0) = F(1, 1) = \deg g.$$

□

注 4.28. 实际上, 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 我们都有  $\deg(f) = \tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x)$ . 这个可以在上述引理的证明中通过  $\tilde{f}(x+1, t) - \tilde{f}(x, t) \in \mathbb{Z}$  以及连续性得到.

例子 4.29. 考虑映射

$$E_n: S^1 \rightarrow S^1, \quad e^{2\pi i \theta} \mapsto e^{2\pi i n \theta}.$$

易知  $E_n$  的提升为

$$\tilde{E}_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto nx. \implies \deg(E_n) = n.$$

由此我们知道对于不同的  $n$ ,  $[E_n]$  是  $\pi_1(S^1)$  中不同的元素. 特别地,  $\pi_1(S^1)$  不是一个平凡群.

由定义, 我们可以看出元素  $[E_n]$  间满足如下的乘法关系:

$$[E_n] \star [E_m] = [E_{n+m}].$$

引理 4.30. 设  $[f] \in \pi_1(S^1)$  并且  $\deg(f) = n$ , 则  $[f] = [E_n]$ .

证明. 设  $f: S^1 \rightarrow S^1$  且  $\deg(f) = n$ , 设  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为  $f$  的提升. 考虑同伦

$$\tilde{F}: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{F}(x, t) = (1-t)\tilde{f}(x) + tnx.$$

由注4.28我们知道对任意的  $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{F}(x+1, t) = \tilde{F}(x, t) + n.$$

因此  $\tilde{F}$  通过  $\text{Ex}$  投射到一个良好定义的映射

$$F: S^1 \times I \rightarrow S^1, \quad F(\text{Ex}(x), t) = \text{Ex}(F(x, t)).$$

$F$  给出了从  $f$  到  $E_n$  的同伦, 因此  $[f] = [E_n]$ . □

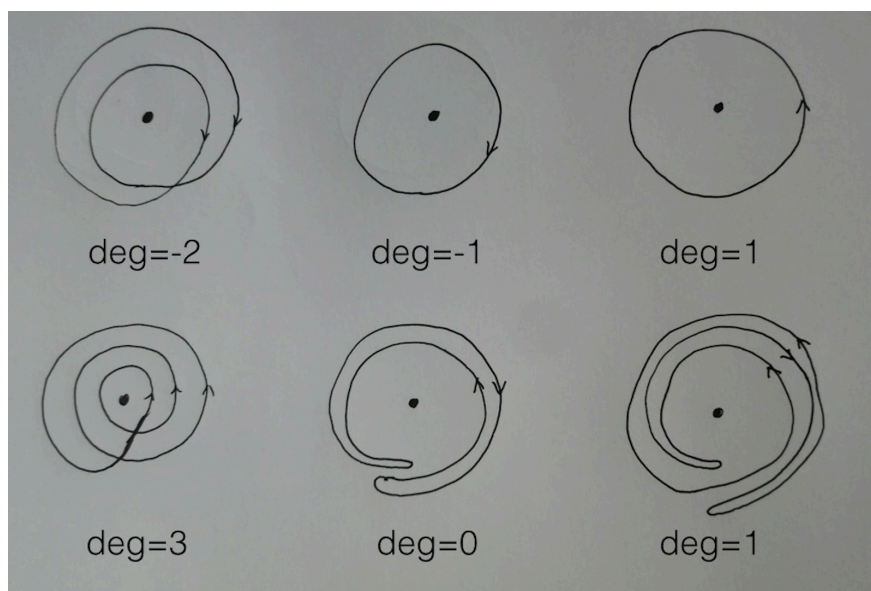
定理 4.31.  $\deg: \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$  是一个群同构.

证明. 由于  $\deg([E_n]) = n$ , 我们知道  $\deg$  是一个满射. 由引理4.30知  $\deg$  是一个单射. 由性质

$$[E_n] \star [E_m] = [E_{n+m}]$$

知  $\deg$  是一个群同态, 因此是一个群同构. □

$\deg f$  描述了  $f: S^1 \rightarrow S^1$  这个映射把  $S^1$  缠绕在  $S^1$  的圈数。其中如果沿着逆时针方向总共转了  $n$  圈，顺时针方向总共转了  $m$  圈，则在正负相抵的效果下  $\deg f = n - m$ 。上面的定理告诉我们，这个有效的缠绕数是同伦不变的，并且映射的同伦等价类完全被这个缠绕数决定。



**例子 4.32.** 平面上挖去原点的空间  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  与  $S^1$  同伦等价，于是  $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ ，它也可以通过类似的  $\deg$  来刻画，描述了一条闭曲线绕原点的有效圈数。

**例子 4.33.**  $n$  个  $S^1$  的乘积  $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$  的基本群为  $\mathbb{Z}^n$ 。

#### 4.4 复叠空间

在本节中，为了方便讨论，我们假设所有的我们考虑的空间都是度量空间，且道路连通。

**定义 4.34.** 设  $X$  是一个度量空间。子集  $U \subset X$  称为  $X$  的开集，如果  $\forall x_0 \in U, \exists r > 0$  使得  $B(x_0, r) \subset U$ 。

度量空间中的开集是  $\mathbb{R}^n$  中的开球的自然推广。读者可以验证，开集满足如下的基本性质

- 有限个开集的交是开集；
- 任意个开集的并是开集。

实际上，一个集合上如果给定一些子集满足如上的两条性质，这个集合被称为拓扑空间，相应的子集被称为这个拓扑空间中的开集。我们在这里不对一般的拓扑空间做过多的讨论。

**命题 4.35.** 设  $X, Y$  是两个度量空间，则  $f: X \rightarrow Y$  是连续的当且仅当对  $Y$  中任意的开集  $V$ ，它在  $f$  下的原像  $f^{-1}(V)$  是  $X$  中的开集。

**注 4.36.** 这个关于开集的原像是开集的性质是一般拓扑空间之间连续映射的定义。

**定义 4.37.**  $X, Y$  称为是同胚的 (homeomorphic), 如果存在一一的连续映射  $f : X \rightarrow Y$  使得  $f^{-1}$  也是连续映射.  $f$  称为是一个从  $X$  到  $Y$  的同胚.

同胚是一个比同伦更强的结构. 两个同胚的空间具有完全相同的拓扑性质, 特别地, 它们的道路连通分支和基本群是一样的. 我们下面讨论一个比同胚弱一点的结构.

**定义 4.38.** 一个连续映射  $p : X \rightarrow Y$  称为是一个复叠映射或者覆盖映射 (covering map), 如果  $\forall y \in Y$ , 存在一个包含  $y$  的开集  $V$ , 使得  $V$  的原像

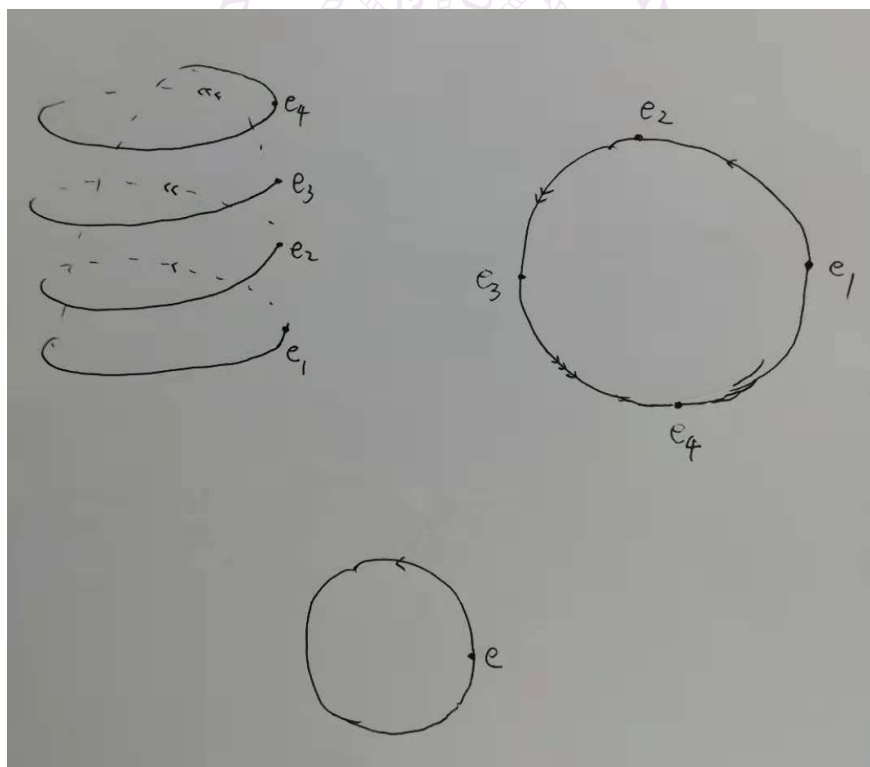
$$p^{-1}(V) = \sqcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

是  $X$  中的开集  $U_{\alpha}$  的不交并, 并且对每个  $U_{\alpha}$ , 映射  $p|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \rightarrow V$  都是一个同胚. 此时我们称  $X$  为  $Y$  的一个复叠或者覆盖.

如果  $p : X \rightarrow Y$  是一个复叠, 则局部上看  $X$  和  $Y$  是相似的, 虽然整体上可能不一样.

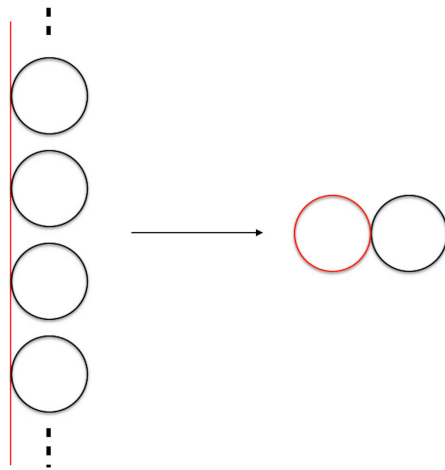
**例子 4.39.**  $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  是一个复叠映射.

**例子 4.40.**  $p : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n, n \geq 1$  是一个复叠映射. 下面的图给出了  $S^1$  的四重覆盖的示意图. 其中上图左为立体图, 上图右为平面图.



在上图右中,  $e_k, k = 1, 2, 3, 4$  为  $e = 1$  在  $p$  下的四个原像, 利用复平面的坐标, 它们为  $e_k = \exp(\frac{2\pi i}{4}(k-1))$ .

**例子 4.41.** 如下映射是一个复叠映射



基本群在复叠映射下比较好的性质。

**定理 4.42.** 设  $p: X \rightarrow Y$  是一个复叠映射,  $x_0 \in X, y_0 = p(x_0) \in Y$ 。任取一个从  $y_0$  出发的路径  $\gamma: I \rightarrow Y, \gamma(0) = y_0$ , 存在一个唯一的从  $x_0$  出发的路径  $\tilde{\gamma}: I \rightarrow X, \tilde{\gamma}(0) = x_0$  使得如下图表交换

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \tilde{\gamma} \nearrow & & \downarrow p \\
 I & \xrightarrow{\gamma} & Y
 \end{array}$$

即  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ 。  $\tilde{\gamma}$  称为  $\gamma$  相对于复叠  $p$  的提升。并且, 如果  $\gamma$  和  $\gamma'$  是同伦等价的两条路径, 则它们之间的同伦也可以提升, 提升后的同伦给出了提升  $\tilde{\gamma}$  和  $\tilde{\gamma}'$  的同伦等价。

这个定理的证明本质上和引理4.25是完全一样的, 我们留给读者自己思考补全。

**推论 4.43.** 设  $p: X \rightarrow Y$  是一个复叠映射,  $x_0 \in X, y_0 = p(x_0) \in Y$ , 则

$$p_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

是一个单同态。特别的  $p_*\pi_1(X, x_0)$  为  $\pi_1(Y, y_0)$  的一个子群。

上面的推论告诉我们, 从基本群这个角度来说, 一个拓扑空间  $Y$  映射的覆盖  $X$  比这个空间  $Y$  本身要简单。研究复叠映射的一个好处之一在于我们可以通过研究一个比较相对简单的复叠空间来研究这个空间本身。特别的, 研究  $Y$  的覆盖空间可以用来计算  $Y$  的基本群本身。我们之后将会通过详细讨论一些例子来说明这一点。

固定一个空间  $Y$ , 在它所有的覆盖  $X$  之中, 有一个处于特殊地位: 这个覆盖  $X$  的基本群是平凡的。

**定义 4.44.** 一个道路连通的空间  $X$  称为是单连通的 (simply connected), 如果  $\pi_1(X)$  是平凡群。

**定义 4.45.** 设  $X, Y$  是道路连通的,  $p: X \rightarrow Y$  是一个从  $X$  到  $Y$  的复叠映射。如果  $X$  是单连通的, 我们称  $X$  是  $Y$  的万有复叠 (universal cover),  $p$  是一个万有复叠映射。



可以证明, 对于度量空间  $Y$ , 它的万有复叠总是存在的, 并且任意两个万有复叠都是同胚的。因此万有复叠在同胚意义下是唯一的。

**例子 4.46.** 可以证明  $\pi_1(S^2)$  为平凡群 (证明留做习题)。从而恒等映射  $S^2 \rightarrow S^2$  是万有复叠。

**例子 4.47.**  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \cong (S^1)^n$  是万有复叠。特别地,  $n = 2$  时,  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$  的万有复叠。此时  $\pi_1(S^1 \times S^1, y_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ 。

**定理 4.48.** 设  $p: X \rightarrow Y$  是万有复叠。则任取  $y_0 \in Y$ ,  $p^{-1}(y_0)$  与  $\pi_1(Y, y_0)$  存在一个一一对应。

**证明.** 取定一个点  $x_0 \in X$  使得  $p(x_0) = y_0$ , 我们定义如下一个映射

$$T: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow p^{-1}(y_0), \quad [\gamma] \rightarrow \tilde{\gamma}(1).$$

这里  $\tilde{\gamma}: I \rightarrow X$  是定理4.42给出的以  $x_0$  为起点的  $\gamma$  的提升。由于  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , 我们知道  $p(\tilde{\gamma}(1)) = p(\tilde{\gamma}(0)) = y_0$ , 于是  $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(y_0)$ 。

我们首先说明  $T$  是良好定义的, 即与  $[\gamma]$  的代表元  $\gamma$  的选取无关。设  $[\gamma] = [\gamma']$ , 则存在同伦

$$F: I \times I \rightarrow Y, \quad F|_{I \times \{0\}} = \gamma, \quad F|_{I \times \{1\}} = \gamma', \quad F(0, u) = F(1, u) = y_0, \forall u \in I.$$

特别的, 对任意的  $u \in I$ ,  $F|_{I \times \{u\}}$  都是从  $y_0$  到  $y_0$  的圈。

由定理4.42, 我们可以把每个圈  $F|_{I \times \{u\}}$  唯一的提升为  $X$  上的路径。它们构成一个同伦

$$\tilde{F}: I \times I \rightarrow X, \quad p \circ \tilde{F} = F, \quad \tilde{F}(0, u) = x_0, \forall u \in I.$$

我们考察路径  $I \rightarrow X$ ,  $u \rightarrow \tilde{F}(1, u)$ 。它是常值映射  $I \rightarrow Y$ ,  $u \rightarrow F(1, u) = y_0$  的提升。由定理4.42中提升的唯一性, 常值映射的提升必然是常值映射, 因此  $\tilde{F}(1, u)$  对任意  $u$  取值相同。于是

$$\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{F}(1, 0) = \tilde{\gamma}(1),$$

这说明  $T$  的定义与  $\gamma$  的选取无关, 因此是良好定义的。

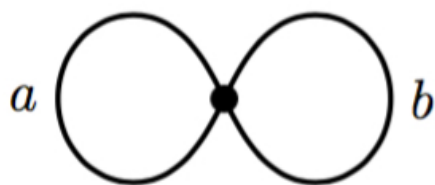
- $T$  是满射。任取  $x \in p^{-1}(y_0)$ , 由于  $X$  是道路连通的, 存在一条从  $x_0$  到  $x$  的道路  $\tilde{\gamma}$ 。则  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  是  $Y$  上从  $y_0$  到  $y_0$  的圈。由  $T$  的定义,  $x = T([\gamma])$ 。因此  $T$  是满射。
- $T$  是单射。设  $T([\gamma_1]) = T([\gamma_2]) = x$ 。则  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  是两条从  $x_0$  到  $x$  的路径。由于  $X$  是单连通的, 存在一个从  $\tilde{\gamma}_1$  到  $\tilde{\gamma}_2$  的同伦  $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ 。容易验证,  $F = p \circ \tilde{F}$  给出了从  $\gamma_1$  到  $\gamma_2$  的同伦, 即  $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ 。因此  $T$  是单射。

□

这个定理说明, 计算基本群和寻找万有复叠是密切相关的。

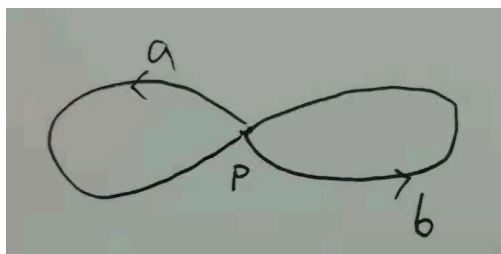
**例子 4.49.**  $\text{Ex}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  是万有复叠, 因此  $\pi_1(S^1, e)$  一一对应于  $\text{Ex}^{-1}(e) = \mathbb{Z}$ 。

**例子 4.50.**  $X \subset \mathbb{R}^2$  是平面上交于一个点的两个圆组成的 8 字形, 如下图

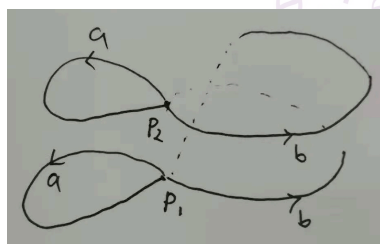


我们把它记作  $S^1 \vee S^1$ 。

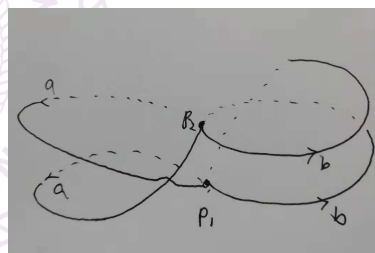
我们记  $X$  中心的交叉点为  $P$ ，左边的圈以逆时针方向绕一次为  $a$ ，同样以  $b$  来标记右边的以逆时针方向绕一次的圈。相应地，我们将顺时针方向绕一次左边和右边的圈分别记为  $a^{-1}, b^{-1}$ 。



下面的图 1a和图 1b 为  $X$  的两个不同的二重覆盖的“立体”图。注意到在第一个图上，将  $a$  替换成  $b$  得到一个不同的覆盖。

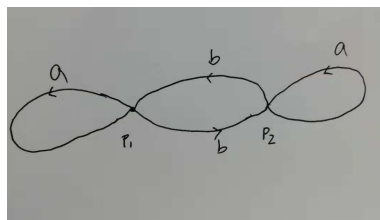


(a) 一个二重覆盖

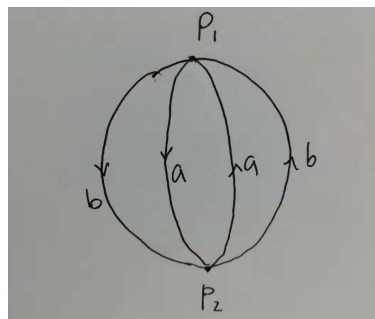


(b) 另一个二重覆盖

上面的两个二重覆盖对应的“平面”图如下图 2a 和图 2b 所示。



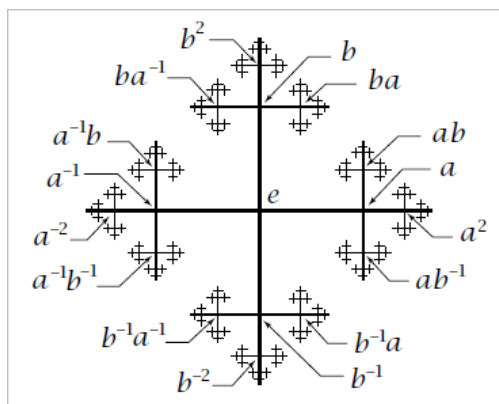
(a) 一个二重覆盖的平面图



(b) 另一个二重覆盖的平面图

容易看出在第一个二重覆盖中，以  $P_1$  为基点的圈由  $a, b^2, bab^{-1}$  生成。这里为了方便之后的讨论，我们利用乘法表示道路复合  $\star$ ，并采用从左之右的顺序对道路进行复合。例如圈  $bab = (bab^{-1})b^2$ 。同样对于第二个二重覆盖，以  $P_1$  为基点的圈由  $a^2, b^2, ab$  生成。

$X$  的万有覆盖通过如下的树图 (记为  $\Gamma$ ) 给出



这个构造本身是很有意思的, 构造方式如下。在第一步我们取二维直角坐标系中横轴上和纵轴上的区间  $[-1, 1]$ , 记其中心点为  $e$ 。在第二步, 我们固定一个数  $\lambda, 0 < \lambda < 1/2$ 。它具体的取值将不重要, 我们不妨取为  $1/3$ 。在距离第一步构造的树的末端长度为  $\lambda$  的点  $q$ , 放置一个和通过该点的树中的线段垂直的, 长度为  $2\lambda$  的线段。该线段以  $q$  为中点。重复这个操作, 在第  $n$  步, 我们在距离第  $n-1$  步构造的树的末端长度为  $\lambda^{n-1}$  的点放置一个和通过该点的树中的线段垂直的, 长度为  $2\lambda^{n-1}$  的线段。这是一个有可数个顶点的树图, 基本群是平凡的。

我们以点  $e$  为基准点, 将树  $\Gamma$  的相邻的两个顶点之间的向右的线段 (如果存在) 标记为  $a$ , 向上的线段 (如果存在) 标记为  $b$ 。同理将向左和向下的线段分别标记为  $a^{-1}, b^{-1}$ 。

我们定义一个映射  $p: \Gamma \rightarrow X$  如下。我们将树图  $\Gamma$  中的所有的顶点映至点  $P$ 。将被标记为  $a, b$  的树中的线段分别映射至  $X$  中逆时针方向的圈  $a, b$ , 同理将被标记为  $a^{-1}, b^{-1}$  的树中的线段分别映射至  $X$  中对应的顺时针方向的圈。容易验证, 这样得到的映射连续, 且是一个覆盖映射。因此,  $p: \Gamma \rightarrow X$  是万有覆盖。

由于树图  $\Gamma$  是道路连通的。对任意一顶点  $x$ , 存在从中心  $e$  出发到该顶点  $x$  的道路。我们把该道路经过的线段上的标记按照先后顺序复合起来, 得到一个由四个标记  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  组成的字符串。从  $e$  到顶点  $x$  的道路是不唯一的 (可以走回头路), 但按照我们上述的构造, 存在一条长度最短的道路。我们将这条道路对应的字符串作为顶点  $x$  本身的标记。容易看出, 这种标记方式是良好定义的。

**定义 4.51.** 考虑  $n$  个字符  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和它们的“逆”字符  $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ 。用这些字符作排列, 构成的序列叫做一个字符串。其中没有任何字符的空字符串称为空单词, 记作  $e$ 。我们将一个字符串在模掉关系  $a_k a_k^{-1} = e = a_k^{-1} a_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$  之后得到的序列称为一个单词。所有单词构成的集合在“字符串拼接之后再模掉关系”这一运算下构成一个群。这个群称为  $n$  个生成元  $a_1, a_2, \dots, a_n$  生成的自由群, 记作  $F_n$ 。

**例子 4.52.** 考虑二个生成元  $a, b$  生成的自由群  $F_2$ 。考虑二个单词  $bab^{-1}, b^2 = bb$ 。它们相乘的方式为首先将后者的首拼接到前者的尾, 从而得到字符串  $bab^{-1}bb$ 。然后我们模掉关系  $b^{-1}b = e$ , 得到单词  $bab$ 。这是上述的两个单词  $bab^{-1}, b^2 = bb$  在自由群  $F_2$  中的乘积。又例如三个单词  $aba, a^{-1}, b^{-1}$  的乘积为由字符串  $abaa^{-1}b^{-1}$  先后模掉关系  $aa^{-1} = e, bb^{-1} = e$  后得到的单词, 其结果为  $a$ 。

由上述万有覆盖的结构, 我们知道  $p^{-1}(P)$  一一对应于树图  $\Gamma$  的顶点, 即  $F_2$  的元素。实际上更进一步可以证明

$$\pi_1(X, P) \cong F_2.$$

结论  $\pi_1(X)$  同构与  $F_2$  的证明过程和  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  类似。首先我们证明引理4.25的平行结论:  $X$  中的圈可以提升为  $\Gamma$  中以  $e$  为起点的道路。此时道路的端点为树  $\Gamma$  的某个顶点, 这些顶点一一对应与  $F_2$  中的元素。其次我们证明和引理4.26类似的同伦提升性质: 这已经由定理4.42提供。然后我们构造类似于引理/定义4.27中度这样的映射记为  $\Phi$ , 将  $[\gamma] \in \pi_1(X, P)$  中的元素映射至它的道路提升  $\tilde{\gamma}$  的端点  $\tilde{\gamma}(1)$ 。同伦提升性质告诉我们这个映射是良好定义的。然后我们构造类似于例子4.29中这样的连接  $e$  和  $\tilde{\gamma}(1)$  的所有道路中的标准 (standard) 道路: 该道路的标准之处在于它在  $\Gamma$  中不走回头路。这样得到了  $\Phi$  的一个等价描述记为  $\Psi$ 。再次我们证明上述构造的映射  $\Psi$  是双射: 证明过程和引理 4.30 的类似, 实际上已经包含在定理4.48的证明过程中。证明满射的过程, 用到了  $\Gamma$  是道路连通的这个性质。利用标准道路的构造, 我们可以说明  $\Psi$  是一个群同态。从而我们得到定理 4.31 的类似结论, 即  $\pi_1(X, P) \cong F_2$ 。

**例子 4.53.** 平面上挖去两个点  $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$  同伦等价于 8 字形  $X = S^1 \vee S^1$ , 因此

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}) \cong F_2.$$

## 4.5 一些例子和应用

在前面的讨论中, 我们对于保持  $e$  的映射  $f: S^1 \rightarrow S^1$  定义了它的度  $\deg(f)$ 。实际上, 如果  $f$  不保持  $e$ ,  $\deg(f)$  也是可以类似定义的。令  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是  $f$  的一个提升

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \text{Ex} \downarrow & & \downarrow \text{Ex} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

则  $f$  的度定义为

$$\deg(f) = \tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x).$$

类似于前面连续性的讨论, 这个定义与  $\tilde{f}$  以及  $x$  的选取无关, 并且同伦的映射具有相同的度。

**命题 4.54.** 设连续映射  $f: S^1 \rightarrow S^1$  满足  $f(-p) = -f(p)$ , 则  $\deg(f)$  是奇数。这里  $-p$  是  $p$  的对径点,  $-f(p)$  是  $f(p)$  的对径点。

**证明.** 设  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是  $f$  的一个提升, 则  $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + \deg(f)$ 。令

$$g(x) = \tilde{f}(x + \frac{1}{2}) - \tilde{f}(x).$$

由  $f(-p) = -f(p)$ ,

$$\text{Ex}(g(x)) = \frac{\text{Ex}(\tilde{f}(x + \frac{1}{2}))}{\text{Ex}(\tilde{f}(x))} = \frac{f(\text{Ex}(x + \frac{1}{2}))}{f(\text{Ex}(x))} = \frac{f(-\text{Ex}(x))}{f(\text{Ex}(x))} = -1 \implies g(x) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

由连续性,  $g(x) = \eta$  是常值函数, 其中  $\eta \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . 于是

$$\deg(f) = \tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x) = g(x + \frac{1}{2}) + g(x) = 2\eta \text{ 是奇数.}$$

□

### 代数基本定理

**定理 4.55.** 设  $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n$  是一个复系数的  $n$  次多项式 ( $n > 0, c_i \in \mathbb{C}$ ), 则  $f$  一定有一个复数根, 即存在  $a \in \mathbb{C}$  使得  $f(a) = 0$ .

**证明.** 反证法, 假设  $f$  不存在复数根. 我们定义同伦

$$F : S^1 \times I \rightarrow S^1, \quad F(e^{2\pi i\theta}, t) = \frac{f(\tan(\frac{\pi t}{2})e^{2\pi i\theta})}{\|f(\tan(\frac{\pi t}{2})e^{2\pi i\theta})\|}.$$

令  $g_0, g_1 : S^1 \rightarrow S^1$ , 其中

$$g_0(e^{2\pi i\theta}) = F(e^{2\pi i\theta}, 0) = \frac{f(0)}{\|f(0)\|}, \quad g_1(e^{2\pi i\theta}) = F(e^{2\pi i\theta}, 1) = e^{2\pi i\theta}.$$

于是  $\deg(g_0) = 0, \deg(g_1) = n$ . 另一方面,  $g_0 \stackrel{F}{\simeq} g_1$  同伦, 因此  $\deg(g_0) = \deg(g_1)$ . 矛盾. □

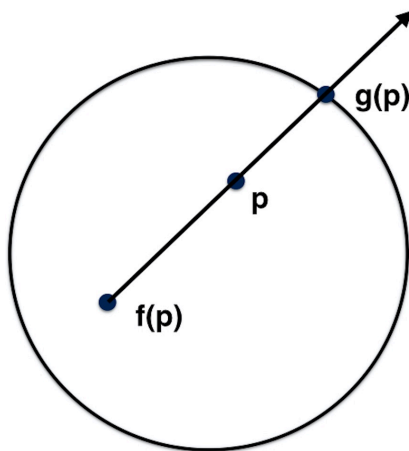
### Brouwer 不动点定理

**定理 4.56** (Brouwer 不动点定理).  $D^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$  是平面上的单位圆盘. 则任意一个连续映射  $f : D^2 \rightarrow D^2$  一定有不动点, 即存在  $p \in D^2$  使得  $f(p) = p$ .

**证明.** 假设连续映射  $f : D^2 \rightarrow D^2$  没有不动点.  $\forall p \in D^2$ , 令  $l_p$  是从  $f(p)$  出发指向  $p$  的射线.  $D^2$  的边界是单位圆周  $S^1$ , 记  $i : S^1 \hookrightarrow D^2$  是嵌入映射. 我们定义如下  $D^2$  到  $S^1$  的连续映射

$$g : D^2 \rightarrow S^1,$$

$g(p)$  是下图所示射线  $l_p$  与圆周  $S^1$  的交点.



一方面, 容易看出  $g \circ i: S^1 \rightarrow S^1$  是恒等映射, 于是  $\deg(g \circ i) = 1$ 。另一方面, 由于  $D^2$  是可缩空间,  $g$  同伦于常值映射。因此  $g \circ i$  同伦于常值映射, 即  $\deg(g \circ i) = 0$ 。矛盾。  $\square$

**推论 4.57.** 设  $X$  同胚于  $D^2$ 。则任意连续映射  $f: X \rightarrow X$  一定有不动点。

Brouwer 不动点定理应用广泛, 通常被用来证明解的存在性。我们讨论一个线性代数中的例子。

**定理 4.58 (Perron–Frobenius 定理).** 设  $A = (A_{ij})$  是一个  $3 \times 3$  的矩阵, 并且每个矩阵元  $A_{ij} > 0$ 。则  $A$  存在一个特征向量  $\vec{x}$  使得  $\vec{x}$  的每个坐标都是正实数, 并且其特征值是正实数。

**证明.** 考虑单位球面  $S^2$  上具有非负坐标的部分

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$$

考虑连续映射

$$f: B \rightarrow B, \quad \vec{x} \rightarrow \frac{A\vec{x}}{\|A\vec{x}\|}.$$

由于  $A$  的每个分量都是正数,  $f$  是一个良好定义的连续映射。由于  $B$  同胚于单位圆盘  $D^2$ , 由 Brouwer 不动点定理,  $f$  存在一个不动点, 即存在  $\vec{x} \in B$  使得

$$\frac{A\vec{x}}{\|A\vec{x}\|} = \vec{x}.$$

于是  $\vec{x}$  是  $A$  的特征向量。由此我们知道  $A\vec{x}$  和  $\vec{x}$  的坐标都是正实数, 并且其特征值是正实数。  $\square$

### Borsuk-Ulam 定理

**定理 4.59.** 任取连续映射  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , 存在  $x \in S^2$  使得  $f(x) = f(-x)$ 。这里  $-x$  是  $x$  的对径点。

**证明.** 假设对任意  $x \in S^2$ , 我们有  $f(x) \neq f(-x)$ 。定义

$$\rho: S^2 \rightarrow S^1, \quad \rho(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

将  $\rho$  限制在赤道上, 我们得到一个连续映射

$$f: S^1 \rightarrow S^1, \quad \text{满足 } f(-x) = -f(x).$$

由命题 4.54,  $\deg(f)$  是奇数。另一方面,  $\rho$  限制在  $S^2$  的上半球面给出了  $f$  到常值映射的同伦, 于是  $\deg(f) = 0$ 。矛盾。  $\square$

Borsuk-Ulam 定理的一个有趣的推论是如下的 Pancake 定理

**定理 4.60 (Pancake 定理).** 设  $A_1, A_2$  是平面  $\mathbb{R}^2$  上两个面积大于 0 的有界区域。则存在一条直线, 它把  $A_1, A_2$  同时分割为面积相等的两部分。

证明. 我们把  $A_1, A_2$  放到  $\mathbb{R}^3$  中

$$A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

给定  $\mathbb{R}^3$  中单位球面  $S^2$  上的一点  $\vec{u}$ , 令  $P_{\vec{u}}$  是  $\mathbb{R}^3$  中过原点且法向为  $\vec{u}$  的平面. 令

$$A_i^-(\vec{u}) = \{\vec{p} \in A_i | \vec{p} \cdot \vec{u} \leq 0\}, \quad A_i^+(\vec{u}) = \{\vec{p} \in A_i | \vec{p} \cdot \vec{u} \geq 0\}.$$

容易看出,  $P_{\vec{u}}$  交平面  $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$  于一条直线, 它把  $A_i$  切分为  $A_i^\pm(\vec{u})$  两部分. 定义连续映射

$$f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(\vec{u}) = (\text{Area}(A_1^-(\vec{u})), \text{Area}(A_2^-(\vec{u}))).$$

由 Borsuk-Ulam 定理, 存在  $\vec{u} \in S^2$  使得  $f(u) = f(-u)$ , 即  $\text{Area}(A_i^-(\vec{u})) = \text{Area}(A_i^+(\vec{u})), i = 1, 2$ . □

### 毛球 (Hairy ball) 定理

设  $\vec{x}$  是球面  $S^2$  上一点,  $\vec{x}$  处的一个切向量指的是一个  $\mathbb{R}^3$  中与  $\vec{x}$  垂直的向量.  $S^2$  上的一个连续向量场指的是一个连续映射

$$V : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

使得  $V(\vec{x})$  是  $\vec{x}$  处的一个切向量, 即  $\vec{x} \perp V(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in S^2$ .

**定理 4.61** (Hairy ball 定理). 球面  $S^2$  上不存在处处非零的连续向量场.

证明. 假设  $V$  是  $S^2$  上一个处处非零的连续向量场, 即  $V(\vec{x}) \neq 0, \forall \vec{x} \in S^2$ . 设

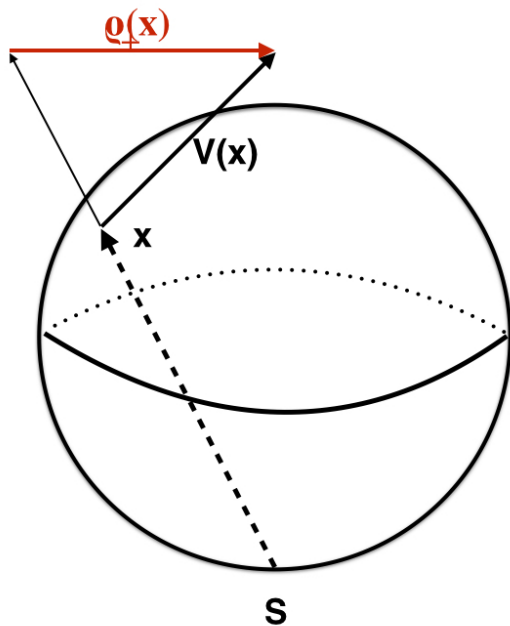
$$V(\vec{x}) = (\alpha(\vec{x}), \beta(\vec{x}), \gamma(\vec{x})).$$

记  $D_+$  为  $S^2$  的上半平面,  $D_-$  为  $S^2$  的下半平面.  $N$  为北极点,  $S$  为南极点. 我们定义

$$\rho_+ : D_+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \mapsto (\alpha(\vec{x}), \beta(\vec{x})) - \frac{\gamma(\vec{x})}{x_3 + 1} (x_1, x_2)$$

$$\rho_- : D_- \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \mapsto (\alpha(\vec{x}), \beta(\vec{x})) - \frac{\gamma(\vec{x})}{x_3 - 1} (x_1, x_2)$$

在几何上,  $\rho_+$  是向量  $V(\vec{x})$  沿着  $\vec{x} - S$  方向向水平平面的投影, 如下图



$\rho_-$  是向量  $V(\vec{x})$  沿着  $\vec{x} - N$  方向向水平平面的投影。易知  $\rho_{\pm}$  处处非零，即给出了连续映射

$$\rho_{\pm} : D_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

我们把  $D_{\pm}$  的边界和  $S^1$  等同起来。定义连续映射

$$f_{\pm} : S^1 \rightarrow S^1, \quad \vec{x} \rightarrow \frac{\rho_{\pm}(\vec{x})}{\|\rho_{\pm}(\vec{x})\|}, \quad \vec{x} \in S^1 = D_+ \cap D_-.$$

由于  $\frac{\rho_{\pm}}{\|\rho_{\pm}\|}$  给出了  $f_{\pm}$  到常值映射的同伦，我们推出

$$\deg(f_+) = \deg(f_-) = 0.$$

另一方面，限制在  $S^1$  上，

$$\rho_{\pm}(\vec{x}) = (\alpha(\vec{x}), \beta(\vec{x})) \mp \gamma(\vec{x})(x_1, x_2), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, 0) \in S^1 = D_+ \cap D_-.$$

其中  $(\alpha(\vec{x}), \beta(\vec{x}))$  与  $(x_1, x_2)$  垂直。

给定一个映射  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ，我们定义它的一个反射为

$$R(f) : S^1 \rightarrow S^1, \quad \vec{x} \rightarrow f(\vec{x}) - 2(\vec{x} \cdot f(\vec{x}))\vec{x}.$$

由上述  $\rho_{\pm}$  的表达式，我们知道

$$f_+ = R(f_-).$$

由于  $f_-$  同伦于常值映射  $c : S^1 \rightarrow S^1, c(\vec{x}) = (-1, 0)$ 。因此  $f_+ = R(f_-)$  同伦于  $R(c)$ 。另一方面

$$R(c) : S^1 \rightarrow S^1, \quad (x_1, x_2) \rightarrow (2x_1^2 - 1, 2x_1x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2).$$



即

$$R(c) : (\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow (\cos 2\theta, \sin 2\theta).$$

我们有  $\deg(f_+) = \deg(R(c)) = 2$ , 与前述  $\deg(f_+) = 0$  矛盾。 □

Hairy ball 定理可以通过如下的图形象地表达 (取自 Wikipedia)



## 4.6 复叠分类和曲面

### 复叠与轨道

**定义 4.62.** 群  $G$  作用在拓扑空间  $X$  上称为是连续的, 如果对任意  $g \in G$ , 群作用  $g : X \rightarrow X$  是连续映射。一个连续的群作用  $G \times X \rightarrow X$  称为是一个复叠作用 (covering space action), 如果  $X$  中的任一点存在一个开领域  $U$ , 使得

$$gU \cap U = \emptyset, \quad \forall g \in G, g \neq 1. \quad (\dagger)$$

下面的讨论中, 我们假设  $G$  在  $X$  上是一个复叠作用。特别地,  $G$  在  $X$  上是自由作用。记  $X/G$  是  $G$  的轨道空间,

$$\pi : X \rightarrow X/G, \quad x \rightarrow Gx$$

是自然的映射, 把  $x$  映射到它的轨道。为方便起见, 我们记  $\bar{x} = Gx \in X/G$ 。

**定义 4.63.**  $X/G$  的子集  $V$  称为  $X/G$  的开集, 如果它在  $\pi$  下的逆像  $\pi^{-1}(V)$  是  $X$  的开集。这样定义的所有开集构成了  $X/G$  上的一个拓扑结构, 称为商拓扑。

任取  $x \in X, \bar{x} \in X/G$ , 设  $U$  为  $x \in X$  的一个开领域满足条件( $\dagger$ )。记  $\bar{U} = \pi(U)$ 。则  $\bar{U}$  是  $X/G$  中  $\bar{x}$  的一个开领域,

$$\pi^{-1}(\bar{U}) = \coprod_{g \in G} gU$$

是  $X$  中不交的开集并, 并且每个  $gU$  都同胚于  $\bar{U}$ 。由此说明

$$\pi : X \rightarrow X/G \text{ 是一个复叠映射。}$$

这个轨道空间和复叠映射的构造实际上是很一般的。

**定理 4.64.** 设  $Y$  是一个道路连通的,  $\pi : X \rightarrow Y$  是万有复叠。则  $G = \pi_1(Y)$  给出了一个在  $X$  上的复叠作用, 使得  $Y$  同胚于  $X/G$ 。

**证明.** 给定  $Y$  上从  $y_1$  到  $y_2$  的一条路径  $\gamma : I \rightarrow Y$ , 我们定义如下的传输变换

$$T_\gamma : \pi^{-1}(y_1) \rightarrow \pi^{-1}(y_2).$$

给定  $x_1 \in \pi^{-1}(y_1)$ , 由定理4.42, 存在一个唯一的路径  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow X$  满足  $\tilde{\gamma}(0) = x_1$  并且如下图表交换

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow \pi \\ I & \xrightarrow{\gamma} & Y \end{array}$$

于是  $\tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(y_2)$ 。  $T_\gamma$  定义为

$$T_\gamma(x_1) = \tilde{\gamma}(1).$$

我们说明  $T_\gamma$  只与  $\gamma$  的同伦等价类有关。实际上, 假如  $\gamma$  同伦地变化到  $\gamma'$ , 保持端点  $y_1, y_2$  固定。设  $\tilde{\gamma}(1) = x_2, \tilde{\gamma}'(1) = x'_2$ 。由定理4.48及其证明, 我们知道  $\pi_1(Y, y_2)$  与  $\pi^{-1}(y_2)$  有一个一一对应。在这个对应下, 平凡元  $1 \in \pi_1(Y, y_2)$  对应于  $x_2$ ,  $[\gamma' \star \gamma^{-1}]$  对应于  $x'_2$ 。由于  $\gamma, \tilde{\gamma}$  是同伦的,  $[\gamma' \star \gamma^{-1}] = 1$ 。因此  $x'_2 = x_2$ 。于是我们也把传输映射记为  $T_{[\gamma]}$ 。类似的论证说明,

$$T_{[\gamma]} : \pi^{-1}(y_1) \rightarrow \pi^{-1}(y_2)$$

是一个一一对应。特别的, 如果  $y_2 = y_1$ , 即  $\gamma$  是一个圈, 则  $T_{[\gamma]}$  是一个  $\pi^{-1}(y_1)$  的置换。

取定  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ , 记  $G = \pi_1(Y, y_0)$ 。我们构造一个  $G$  在  $X$  上的作用如下。

任给  $x \in X, g = [\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ 。设  $\tilde{\beta} : I \rightarrow X$  是一条从  $x$  到  $x_0$  的路径, 则  $\beta = \pi \circ \tilde{\beta} : I \rightarrow Y$  是  $\pi(x)$  到  $y_0$  的路径。我们定义

$$gx := T_{[\beta]}^{-1} \circ T_{[\gamma]} \circ T_{[\beta]}(x).$$

容易验证这给出了一个群作用。由定理4.48知, 每个逆像  $\pi^{-1}(y), y \in Y$  构成一个群轨道, 因此  $Y$  一一对应于轨道空间  $X/G$ 。进一步可以说明,  $G$  在  $X$  上的作用是一个复叠作用, 并且  $Y$  同胚于  $X/G$ 。具体的分析留给感兴趣的读者。  $\square$

上述定理说明, 任意一个道路连通的度量空间都可以看作是  $X/G$ , 其中  $X$  是单连通的,  $G$  在  $X$  上是一个复叠作用。设  $H \subset G$  是  $G$  的一个子群。容易看出  $H$  在  $X$  上也是复叠作用, 并且我们有自然的映射

$$\pi_H : X/H \rightarrow X/G, \quad Hx \rightarrow Gx.$$

可以验证,  $\pi_H$  是一个复叠映射, 并且对于  $X/G$  中任意一点  $\bar{x}$ ,  $\pi_H^{-1}(\bar{x})$  一一对应于陪集  $G/H$ 。

## 复叠空间分类

**定义 4.65.** 给定拓扑空间  $Y$ , 两个复叠映射  $p_i: X_i \rightarrow Y, i = 1, 2$  称为是等价的, 如果存在同胚  $\sigma: X_1 \rightarrow X_2$  使得如下图表交换

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\sigma} & X_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & Y \end{array}$$

**定义 4.66.**  $G$  的两个子群  $H_1, H_2$  称为是共轭等价的, 如果存在  $g \in G$  使得  $H_1 = gH_2g^{-1}$ .

**定理 4.67.** 设  $Y$  是道路连通的度量空间,  $\pi: X \rightarrow Y$  是万有复叠。

i) 我们有一一对应

$\pi_1(Y)$  的子群的共轭等价类  $\cong Y$  的道路连通的复叠的等价类。

这里, 给定  $\pi_1(Y)$  的子群  $H$ , 它对应于复叠  $X/H \rightarrow Y$ 。反之, 给定复叠映射  $p: \tilde{Y} \rightarrow X$ , 它对应于  $\pi_1(\tilde{Y}) \subset \pi_1(Y)$  (推论 4.43)。

ii) 在上述对应下, 指数为  $k$  的子群对应于  $k$  重的复叠。这里, 子群  $H \subset G$  的指数为  $k$ , 如果  $|G/H| = k$ ; 复叠  $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$  称为  $k$  重复叠, 如果  $|p^{-1}(y)| = k, \forall y \in Y$ 。

**例子 4.68.** 设  $Y$  是道路连通的度量空间, 则  $Y$  的任意两个万有复叠都是等价的复叠, 它对应于  $\pi_1(Y)$  的平凡子群。因此在等价的意义下, 万有复叠是唯一的。

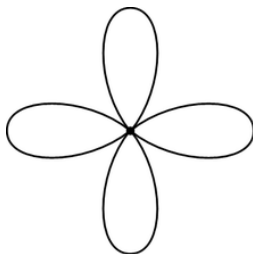
**例子 4.69.**  $\text{Exp}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  是万有覆盖,  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ 。  $\mathbb{Z}$  的非平凡子群形如  $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}, m > 0$ , 它的指数为  $m$ 。容易看出  $\mathbb{R}/m\mathbb{Z}$  同胚于  $S^1$ , 它给出了  $m$  重的复叠

$$\pi_m: S^1 \rightarrow S^1.$$

这里  $\text{deg}(\pi_m) = m$ 。

**定理 4.70 (Nielsen-Schreier 定理).** 设  $F_n$  是  $n$  个生成元的自由群,  $H$  是  $F_n$  的指数为  $k$  的子群。则  $H \cong F_{1+k(n-1)}$ , 即  $H$  是  $1+k(n-1)$  个生成元的自由群。

**证明.** 考虑如下由  $n$  个  $S^1$  在一点粘接起来的空间  $Y_n$



我们知道  $F_n \cong \pi_1(Y_n)$ 。设  $H$  是  $F_n$  的指数为  $k$  的子群。由定理4.67

$$H \cong \pi_1(\tilde{Y})$$

其中  $p: \tilde{Y} \rightarrow Y_n$  是一个  $Y_n$  的  $k$  重复叠。容易看出,  $\tilde{Y}$  是一个含  $k$  的顶点,  $kn$  个边组成的连通图。通过缩并所有的顶点, 可以说明  $\tilde{Y}$  同伦于  $1 + k(n-1)$  个边和一个顶点构成的连通图, 即  $1 + k(n-1)$  个  $S^1$  在一点粘接起来的空间。因此

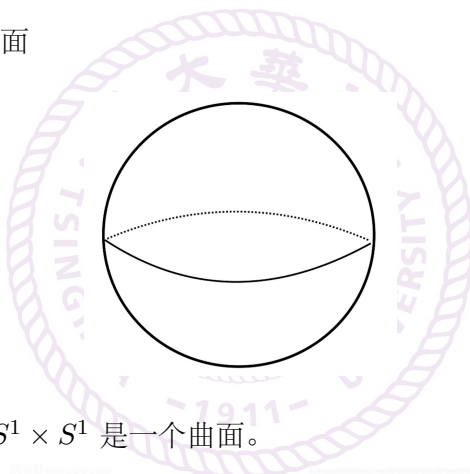
$$H \cong \pi_1(\tilde{Y}) \cong \pi_1(Y_{1+k(n-1)}) \cong F_{1+k(n-1)}.$$

□

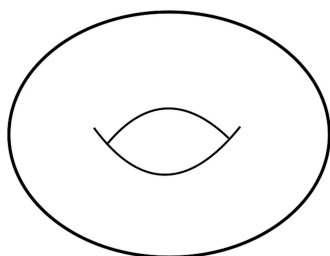
### 曲面分类及其基本群

**定义 4.71.**  $X$  称为一个  $n$  维的拓扑流形, 如果任意  $x \in X$  存在一个开领域  $U$  使得  $U$  同胚于  $\mathbb{R}^n$  中的一个开集。2 维的拓扑流形称为一个拓扑曲面, 或简称为曲面。

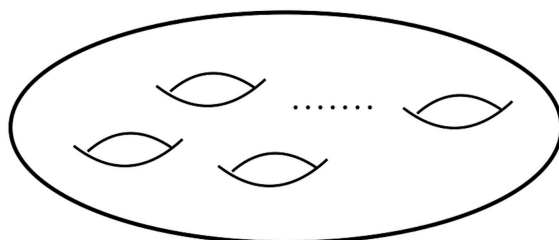
**例子 4.72.** 黎曼球面是一个曲面



**例子 4.73.** 2 维的环面  $T^2 = S^1 \times S^1$  是一个曲面。



**例子 4.74.** 如下图的曲面, 含有  $g$  个“洞”, 称为亏格为  $g$  的闭曲面



黎曼球面  $S^2$  可以看作是亏格为 0 的曲面，环面  $T^2$  可以看作是亏格为 1 的曲面。

例子 4.75. 莫比乌斯带，如下图 (取自 Shapeways)，是一个不可定向的曲面



例子 4.76. Klein 瓶，如下图 (取自 Wikipedia)，是一个不可定向的曲面，并且不能放在  $\mathbb{R}^3$  中



定理 4.77. 设  $\Sigma_g$  是一个亏格为  $g$  的闭曲面，则  $\Sigma_g$  的万有复叠空间为

球面  $S^2$  (若  $g = 0$ ), 平面  $\mathbb{R}^2$  (若  $g = 1$ ), 上半平面  $\mathbb{H}$  (若  $g > 1$ ).

我们已经知道， $S^2$  是单连通的。 $T^2 = S^1 \times S^1$  的万有复叠是  $\mathbb{R}^2$ ，使得

$$T^2 \cong \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2.$$

对于亏格  $g > 1$  的情况，上述定理说明存在  $G = \pi_1(\Sigma_g)$  在  $\mathbb{H}$  上的复叠作用使得  $\Sigma_g$  同胚于  $\mathbb{H}/G$ 。实际上，除了拓扑性质外，上述定理还可以推广到几何性质，称为黎曼曲面的单值化定理。它说明了  $G$  可以取作是  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  的子群 (一个 **Fuchsian 群**)。  $G$  的作用保持  $\mathbb{H}$  上的双曲度量，因此商空间  $\Sigma_g \cong \mathbb{H}/G$  上赋予了一个度量结构，称为  $\Sigma_g$  的双曲度量，描述了  $\Sigma_g$  拓扑之外的共形结构。

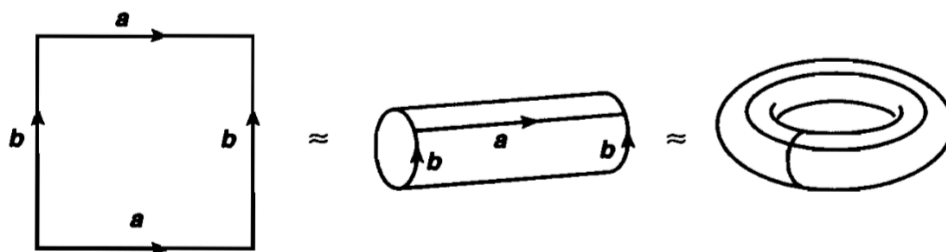
最后，我们讨论一下  $\pi_1(\Sigma_g)$  来结束本节。

定义 4.78. 设  $D$  是平面上的一个多边形区域。我们给  $D$  的边界依次标记符号和定向。从某一个顶点出发，按逆时针顺序依次写下如下的文字：如果边的标记符号为  $a$ ，定向为逆时针，我们写下  $a$ ；如果定向为顺时针，我们写下  $a^{-1}$ 。我们把  $D$  的边界按如下方式粘接起来：如果两个边具有相同的标记，则把这两条边按定向的方向粘接起来。所得到的曲面记为如上写下的文字序列。

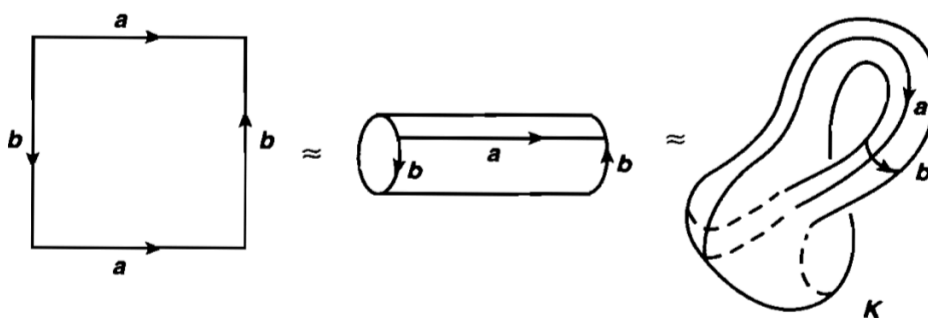
例子 4.79. 文字  $aa^{-1}$  表示的曲面同胚于  $S^2$ 。

例子 4.80. 文字  $aa$  表示的曲面同胚于  $S^2/\mathbb{Z}_2$ 。

例子 4.81. 文字序列  $aba^{-1}b^{-1}$  表示的曲面同胚于环面  $T^2$ ，如下图 (取自 Munkres: Topology)



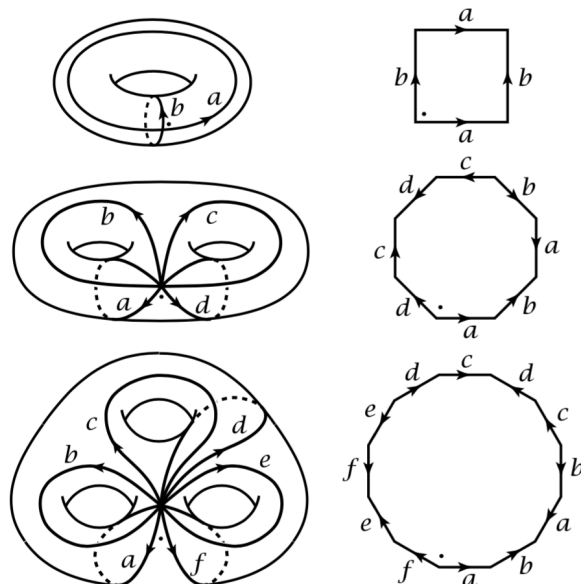
例子 4.82. 文字序列  $aba^{-1}b$  表示 Klein 瓶，如下图 (取自 Munkres: Topology)



定理 4.83. 设  $\Sigma_g$  是一个亏格为  $g$  的闭曲面，则  $\Sigma_g$  同胚于如下文字表示的曲面

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}.$$

下面是几个曲面的示意图 (取自 Hatcher: Algebraic Topology)



利用上述定理可以证明

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

即  $\pi_1(\Sigma_g)$  是  $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$  生成的自由群模掉关系  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$  的商群。

