Stuiteren tussen probleemsituatie en vakkennis

Hoe een veelzijdige ICT-omgeving het modelleerproces kan ondersteunen

André Heck
AMSTEL Instituut, Universiteit van Amsterdam, heck@science.uva.nl

Samenvatting

Er bestaat momenteel in de vernieuwingscommissies voor de exacte vakken grote aandacht voor modelleren, het gebruik van modellen in onderwijs en ICT-ondersteuning hiervan. Vanuit de vakdisciplines hebben betrokkenen hierop vaak een verschillende kijk en leggen ze accenten anders. De een ziet onder invloed van het constructivisme en een visie op ontdekkend en/of authentiek leren grote mogelijkheden voor het gebruik van de computer bij het zelf maken van modellen door leerlingen. De hoop en verwachting is dan dat op deze manier meer realistische verschijnselen in de biologie, scheikunde en natuurkunde met succes door leerlingen aangepakt kunnen worden, dat leerlingen op deze manier zelf kennis kunnen opbouwen en dat dit ook voor minder wiskundig ingestelde leerlingen haalbaar is. De ander heeft angst dat inzicht in wiskundige en natuurwetenschappelijke begrippen en methodes ondersneeuwt bij het gebruik van ICT en dat modelleren op de computer een doel op zich dreigt te worden. In dit artikel bespreek ik een kader waarin de verschillen en overeenkomsten tussen de verschillende visies een plek krijgen en waarmee ze enigszins begrepen kunnen worden. Enkele modellen voor modelleren passeren de revue, waaruit ook blijkt dat er grote overeenkomsten bestaan tussen het proces van zelf modelleren en het zelf doen van onderzoek en problemen oplossen. Aan de hand van de vraag welke beweging een stuiterende bal precies maakt en met behulp van een concreet model voor modelleren, nl. het model van Blum en Leiß, zal ik onderzoeken hoe een dergelijk model niet alleen in vakdidactische zin gebruikt kan worden voor het analyseren van werk van leerlingen, maar ook een bijdrage kan leveren aan het ontwerp van modelleeractiviteiten. Bij deze lesactiviteiten ga ik expliciet in op de rol die ICT hierbij kan hebben. De relatief grote variatie in de gebruikte kennis en vaardigheden en in de diepgang van de activiteiten springt naar mijn mening in het oog. Dit voorbeeld illustreert dat door zinvol gebruik van een bètabreed inzetbare computerwerkomgeving, die een voldoende groot arsenaal aan gereedschappen ter beschikking stelt aan leerlingen, een grote wisselwerking tussen probleemsituatie en vakkennis realiseerbaar is, zeker wanneer leerlingen de gelegenheid krijgen het hele cyclische proces van modelleren een of meerdere malen door te lopen.

1. Modelleren in het nieuwe curriculum

We bevinden ons momenteel in een tijdsgewricht van verregaande onderwijsvernieuwing bij de exacte vakken. Elke vernieuwingscommissie staat een aantrekkelijk en uitdagend, door inspirerende leraren verzorgd programma voor ogen waarin een actieve leerhouding van leerlingen bevorderd wordt, vooral op basis van het principe van ‘leren door doen’.

In het visiedocument ‘Rijk aan betekenis’ van de wiskundecommisie cTWO (2007), dat is samengevat en toegelicht in (Siersma & Drijvers, 2007), staat: *“Een actieve leerhouding kan bevorderd worden door een scala van wiskundige activiteiten zoals benaderen en schatten, modelleren, wiskundig manipuleren, analyseren, onderzoeken, redeneren en bewijzen.”* Ze worden in het rapport de centrale denkactiviteiten genoemd. Ze zijn verbonden met de wiskundige kernconcepten getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. In het brede spectrum van werkvormen wordt expliciet het opstellen en toetsen van modellen genoemd, waarbij het standpunt ingenomen wordt dat wiskunde hierin functioneert als hulpmiddel dat toegepast wordt in praktische, technische en wetenschappelijke situaties en minder als zelfstandige discipline met zijn eigen manier van denken en doen.

De Commissie Nieuwe Natuurkunde, afgekort NiNa, heeft in haar visiedocument ‘Natuurkunde leeft’ (2006) geschreven: *“Leren door doen heeft in de natuurkunde een duidelijke betekenis. De activiteiten die centraal staan in de natuurkunde zijn meten, waarnemen, experimenteren, simuleren, modelleren, reduceren, analyseren, benaderen en schatten.”* Onder activiteiten wordt hier verstaan: *“handelingen waarbij voor een adequate uitvoering natuurkundige kennis is vereist en waarin die kennis betekenis krijgt.”* De commissie pleit expliciet voor het ruim aandacht geven aan het ontwerpen, zelf experimenteren en modelleren, naast de aandacht voor cognitieve vaardigheden. ‘Ontdekkend leren’ werkt volgens de NiNa commissie namelijk motiverend en ondersteunt de leercyclus van Kolb (1984).

De Commissie Vernieuwing Scheikunde havo en vwo stelt in haar adviesrapport (Driessen & Meinema, 2003): *“De belangrijkste functie van het schoolvak scheikunde is het leren doorgronden van de wereld van producten en chemische processen door: (a) zelf waar te nemen, (b) conclusies te trekken en (c) te oordelen. Het zelf experimenteel onderzoek doen speelt hierbij een essentiële rol. Aan de hand van eigen observaties en waarnemingen leren leerlingen conclusies trekken en oordelen over stoffen en producten, reacties en levensprocessen.”*

In de visiedocumenten van de commissies die zich met wiskunde- en natuurkundeonderwijs bezig houden komt ‘modelleren’ veelvuldig aan bod. Het is evident dat in beide disciplines bij het modelleerproces de vertaling van realistische problemen in wiskundige vorm en het gebruik van formules vaak een grote rol speelt. In het vervolg van dit artikel zal ik me tot dit type van modelleren beperken zonder dit het label van ‘wiskundig modelleren’ te geven omdat dit wellicht verwarring schept met het beperkte gebruik van dit label voor het proces van vertalen van een realistisch probleem in een wiskundige vorm en het wiskundig uitwerken van dit model. Verschillend woordgebruik in de visiedocumenten, ‘denkactiviteit’ en ‘actieve exploratie’, doet tevens vermoeden dat wiskundigen en natuurkundigen onder modelleren toch niet precies hetzelfde verstaan. Dit klopt en hoeft ook niet te verbazen vanuit de optiek dat wiskunde voornamelijk een beschrijvende wetenschap is met als doel om ideale constructies zonder verwijzing naar hun reële bestaan te bestuderen en dat natuukunde vooral een op empirie stoelende wetenschap is die via modellen verklaringen zoekt voor fenomenen en voorspellingen over reële processen wilt doen (zie o.a. Schwarz & White, 2005).

Maar ook onder wiskundigen alleen bestaat al verschil van mening over wat modelleren eigenlijk is. Vakdidactici doen hiervoor niet onder en hebben onderling een verschillende kijk op modelleren en de rol ervan in onderwijs. Belangrijke punten van discussie zijn (i) of bij modelleeronderwijs vooral het leren oplossen van problemen uit de werkelijkheid met behulp van disciplinaire kennis en vaardigheden op de voorgrond moet staan of dat bij modelleeronderwijs ook het leren van disciplinegebonden concepten op het netvlies gehouden moet worden en (ii) welke rol ICT bij modelleeronderwijs kan spelen. Kaiser en Sriraman (2006) onderscheiden met betrekking tot het eerste discussiepunt zes benaderingen van wiskundig modelleren in onderwijs, d.w.z. van modelleren in de taal van wiskunde in een onderwijssituatie:

(1) realistische of toegepaste modellering, waarin het pragmatische doel van het leren toepassen van wiskunde bij het oplossen van problemen uit de werkelijkheid centraal gesteld wordt;
(2) contextuele modellering, met als doel de motivatie en leerhouding van leerlingen te verbeteren via het oplossen van woordproblemen;
(3) didactische modellering, waarin het structureren en bevorderen van leerprocessen hoog in het vaandel staat;
(4) conceptuele modellering, dat zich concentreert op de introductie en ontwikkeling van concepten;
(5) socio-kritische modellering, waarin een kritisch kijk op de wereld om ons heen en inzicht in de maatschappelijke rol van wiskunde belangrijke leerdoelen zijn;
(6) epistemologische modellering, dat theorievorming als belangrijkste element beschouwt.

Cognitieve modellering, waarin leerpsychologie ingezet wordt om het modelleerproces beter te begrijpen en hierdoor verworven inzichten gebruikt worden om het denken bij leerlingen te bevorderen, zou aan dit rijtje nog toegevoegd kunnen worden, ware het niet dat het los staat van onderwijsleerdoelen en toch vooral een beschrijvende en verklarende functie heeft. In de volgende sectie zal ik hier verder op ingaan en het modelleerproces onder de loep nemen.

Bovenstaande typering lijkt me trouwens ook geschikt om verschillende benaderingen van modelleren in natuurwetenschappelijke vakken in Nederland in kaart te brengen. Bij onderwijs in scheikunde en biologie op vwo-niveau wordt er meer nadruk op gelegd dat leerlingen kunnen omgaan met modellen als representatie van de werkelijkheid en dat een model een hulpmiddel is voor het beschrijven, begrijpen, voorspellen en omgaan met verschijnselen in de werkelijkheid, dan dat het zelf maken van modellen op de voorgrond staat. Simulaties van kant-en-klare computermodellen worden veelal ingezet om biologische en chemische processen te beschrijven. Dit sluit aan bij toegepaste modellering en bij illustratie van concepten in het kader van didactische modellering. Een actieve deelname van leerlingen aan het proces van modelontwikkeling binnen Nederlands voortgezet onderwijs in scheikunde en biologie heeft zich totnogtoe beperkt tot enkele studies en experimenten in de klas (Prins e.a., 2003; Westra, 2005). Het zelf ontwikkelen van modellen en implementeren in modelleersoftware vindt in het Nederlandse voortgezet onderwijs vooral plaats in natuurkundeonderwijs en dit past dan goed in de lijn van didactische modellering. Uit onderzoek, bijvoorbeeld (van Genderen, 1989) en (Dekker, 1993), en uit evaluaties en ervaringen in het onderwijsveld is gebleken dat het gebruik van leefwereldcontexten, in de betekenis van ‘situaties uit een deel van de leefwereld die gebruikt worden om vakkennis te onderwijzen’, hierbij kan helpen om leerlingen te motiveren en te interesseren voor het natuurwetenschappelijke werk, maar ook dat dit niet automatisch leidt tot beter begrip van natuurwetenschappelijke concepten en methoden bij leerlingen. Niet elke reële context slaat trouwens even goed aan bij leerlingen (van Eijck e.a., 2004; van Eijck, 2006): noodzaak lijkt dat leerlingen uit eigen ervaring kunnen putten.

Binnen wiskundeonderwijs is sinds de curriculumhervorming aan het begin van de jaren negentig contextuele modellering gemeengoed en staan de schoolboeken vol met sommen waarin een leefwereldsituatie opgeroepen wordt. Maar de traditionele cultuur van netjes in hanteerbare delen opgesplitste sommen maken is niet doorbroken en de realiteitswaarde van de gebruikte contexten is vaak buitengewoon klein. Het zelf ontwikkelen van modellen en het gebruik van ICT hierbij staat nog in de kinderschoenen. Lichtpunten zijn de jaarlijkse Wiskunde A-lympiade en de Wiskunde-B Dag, waarin leerlingen een hele dag werken aan het zelfstandig modelleren van een probleemsituatie, en sommige praktische opdrachten en profielwerkstukken (zie Doorman e.a., 2007). Ze kunnen gezien worden als voorbeelden van ‘model ontlokkende activiteiten’ (Lesh & Doerr, 2003), d.w.z. van probleemoplossende activiteiten waarin leerlingen zelf vat proberen te krijgen op een voor hen betekenisvolle probleemsituatie en uitgedaagd worden om zelf hun wiskundige aanpak te kiezen en verder uit te werken. Een aanpak volgens de principes van realistisch wiskunde onderwijs en met name het gebruik van emergente modellen (Gravemeijer, 1999; 2007), dat op beperkte schaal in de tweede fase van het voortgezet onderwijs beproefd is (o.a. Doorman, 2005), is te karakteriseren als conceptuele modellering omdat het accent vooral ligt op taal- en kennisontwikkeling en minder op interpretatie van een situatie. Een situatie is hier slechts een middel om tot taal- en kennisontwikkeling te komen. Het doel is om de aanvankelijke, door leerlingen ontwikkelde, modellen *van* een specifieke situatie te laten uitgroeien tot een model *voor* meer wiskundige redeneringen, die zij dan op hun beurt weer kunnen gebruiken in het meer traditionele wiskundige modelleerproces van vertalen van een probleemsituatie in een wiskundige vorm, wiskundig uitwerken en tenslotte terugvertalen van de wiskundige oplossingen naar de oorspronkelijke situatie.

Al lezende de visiedocumenten is niet zonder meer duidelijk welke van bovengenoemde perspectieven van modelleren de diverse vernieuwingscommissies echt voor ogen hebben, maar toegepaste modellering (1) en educatieve modellering [(3) en (4) samen] lijken de meest waarschijnlijke uitgangspunten. Kort samengevat richt toegepaste modellering zich op het oplossen van authentieke problemen uit de werkelijkheid en niet zozeer op de ontwikkeling van wiskundige en/of natuurwetenschappelijke kennis. Ook wordt het modelleerproces bij voorkeur in zijn geheel uitgevoerd en beperken leerlingactiviteiten zich niet tot bepaalde deelprocessen. Bij educatieve modellering wordt daarentegen ook belang gehecht aan zaken als motivatie van leerlingen, het scheppen van een meer realistisch beeld van wiskunde en natuurwetenschappen als een menselijke activiteit die een ontwikkeling doorgemaakt heeft en nog steeds doormaakt, en wordt ruime aandacht besteed aan het structureren van leerprocessen met het oog op het introduceren, verder ontwikkelen en illustreren van nieuwe concepten en domeinen waarin deze concepten toepasbaar zijn. Het is een meer integrale aanpak om de relatie tussen wiskunde en natuurwetenschappen aan de ene kant en de wereld om ons heen aan de andere kant te accentueren.

In het NiNA rapport (2006) staat te lezen: *"Het is een wezenlijk kenmerk van de natuurkunde dat de belangrijkste grondbeginselen een wiskundige vorm hebben. Formules zijn in de natuurkunde dus niet in allereerst rekenvoorschriften, al worden ze in de schoolpraktijk vaak wel zo gehanteerd, maar een taal waarin concepten en theorieën geformuleerd en begrepen kunnen worden."* Ook wordt opgemerkt: *"Een belangrijke taak van het natuurkundeonderwijs is leerlingen het inzicht te verschaffen dat de natuurkunde werkt met een model als hanteerbare representatie van de werkelijkheid. De taal van de wiskunde dient om het model te beschrijven. De toetssteen voor een model is het experiment; een goed bedacht en uitgevoerd experiment bepaalt of het model voldoet en goed bevonden wordt."* Wiskunde heeft dus een instrumentele betekenis binnen de natuurkunde: het is de taal waarin natuurwetenschappelijke verschijnselen op efficiënte en effectieve wijze beschreven kunnen worden en aan de ontwikkeling waarvan, nu en in het verleden, veel natuurwetenschappers hebben bijgedragen. Om de kwaliteit van een model te kunnen beoordelen wordt grote waarde gehecht aan experimentele verificatie. Een model moet contact maken en houden met de werkelijke wereld wil dit van wezenlijke betekenis kunnen zijn. Dit contact kan ook tot uiting komen in de verklarende en/of voorspellende kracht van een model. Men verliest beter niet uit het oog dat modellering, simulatie en experiment elkaar op essentiële wijze aanvullen en eigenlijk niet zonder elkaar kunnen.

In het visiedocument van cTWO (2007) wordt vooral het duale karakter van wiskunde benadrukt. Standpunt 2 luidt: *"Het wiskundeonderwijs zoekt een balans tussen enerzijds wiskunde als zelfstandige discipline – als denkwijze waarin abstraheren, generaliseren en formeel manipuleren een grote rol spelen – en anderzijds wiskunde als instrument voor het modelleren van probleemsituaties, als hulpmiddel dat toegepast wordt in praktische, technische en wetenschappelijke situaties. De ijking van deze balans zal per schooltype en per profiel verschillen."* Expliciet wordt uitgelegd wat onder modelleren verstaan wordt: *"Modelleren is een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Leerlingen worden voor een probleemsituatie geplaatst met als doel deze met wiskundige middelen op te lossen. Dit omvat het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen. Visualiseren, schematiseren en representeren maken hiervan in belangrijke mate deel uit. Een ander essentieel onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen."* De commissie onderkent het volgende: *"In echte wiskundige probleemsituaties is modelleren een zeer complexe en moeilijke activiteit; het is didactisch geen eenvoudige opgave om leerlingen in het voortgezet onderwijs iets van dit proces te laten ervaren zonder in kunstmatige overgesimplificeerde situaties te vervallen."*

In wezen verwijzen beide vernieuwingscommissies bij modelleren naar een vergelijkbaar proces, namelijk een proces waarin disciplinaire kennis wordt toegepast om nieuwe situaties te beschrijven, hierover verwachtingen te formuleren, deze te toetsen aan de werkelijkheid en voorspellingen te maken. Het doel kan liggen in een beter begrip van de situatie, maar ook in het ontwikkelen van nieuwe kennis en methoden. Wel lijken er verschillen in de benadering van modelleren: bij natuurkundeonderwijs lijkt de holistische aanpak, waarin leerlingen alle fasen van het modelleerproces doorlopen, geprefereerd te worden, terwijl bij wiskundeonderwijs een keuze gemaakt lijkt te zijn voor een atomistische aanpak, waarin men zich concentreert op het proces van mathematiseren en wiskundig analyseren van modellen. Savelsbergh (2007) wijst ook op deze verschillen in opvattingen over een modelleercurriculum voor Wiskunde D en NLT. Samengevat: in wiskundeonderwijs wil men zich toch vooral met de achterliggende wiskunde van modellen bezig houden en met de wijze waarop deze wiskundige modellen uitgedacht worden. Dit biedt de mogelijkheid om leerlingen goed te laten zien hoe dezelfde wiskundige concepten en technieken steeds weer opnieuw toegepast kunnen worden in verschillende toepassingsgebieden. Nadeel hiervan is wel dat leerlingen zich minder goed een beeld kunnen vormen van wat de rol en betekenis van modelleren in praktijk is. Vragen zoals "Welke kennis kun je destilleren uit een model?", "Waarom is het ene model beter dan het andere?", "Hoe kun je kritiek op een gegeven model verwerken?", "Hoe weet je onderweg in het modelleerproces of je op het goede spoor zit of dat je je op glad ijs begeven hebt", enzovoort, dreigen onderbelicht te worden. In de holistische aanpak komen deze aspecten eerder en meer over het voetlicht.

Wat modelleren zo moeilijk maakt is dat veel problemen uit de echte wereld zo complex zijn en dat vaak een beroep gedaan wordt op bètabrede kennis en vaardigheden, en op probleemspecifieke kennis en ervaringen. Het zelf vertalen van een verschijnsel in de werkelijkheid naar een wiskundig en/of natuurwetenschappelijk model zal niet altijd en voor elke groep van leerlingen haalbaar zijn in de onderwijspraktijk. De ontwerpcommissie voor dynamische modellen in wiskunde D (Garst & Peletier, 2007) gaat hierin zover dat zij voorgesteld heeft om het opstellen van modellen op basis van fysische beginselen zoals de wetten van Newton niet in de eindtermen van het programma op te nemen, omdat dit een intrinsiek lastige activiteit is. Ze benadrukken dat het hier om de eindtermen gaat en niet om een afwijzing van voorbeeldproblemen uit de fysische wereld in het lesprogramma. Maar gelukkig is modelleren meer dan het vertalen van een verschijnsel in wiskundige vorm. Ook als het vertaalproces al voor je gedaan is blijft er nog voldoende werk over.

Om vat te krijgen op of inzicht te verwerven in complexe en dynamische verschijnselen worden vaak computers ingezet om modeluitkomsten te berekenen en te visualiseren. In het adviesrapport aan de gezamenlijke bèta-vernieuwingscommissies (Savelsbergh e.a., 2007) heeft de 'afstemmingsgroep modelleren' de wenselijkheid uitgesproken dat

(1) *"leerlingen ervaring opdoen met de mogelijkheden en beperkingen van computermodellen en modelleertools, zowel vanuit het oogpunt van scientific literacy, als vanuit het oogpunt van voorbereiding op studie en beroep;"*

(2) *"leerlingen en leraren goed vertrouwd raken met tenminste één modelleertool. Dat tool moet dan wel breed inzetbaar zijn. Een grafisch (systeemdynamisch) modelleertool is voldoende breed inzetbaar en lijkt goed bruikbaar voor leerlingen."*

In deze opzet kan er nog veel onderzocht worden door leerlingen, ook als de vertaalslag van verschijnsel in de werkelijkheid naar wiskundig model niet door henzelf gedaan is. Het is namelijk niet zonder meer duidelijk of het zelf ontwikkelen van modellen en implementeren in een computerwerkomgeving door leerlingen verbetering in de begripsontwikkeling brengt. Maar hier liggen mijns inziens wel goede mogelijkheden. Gebruik van ICT, waarbij het 'zwarte doos' effect van de gebruikte software tegengegaan kan worden doordat het, in principe, mogelijk is om in detail de onderliggende wiskundige en natuurwetenschappelijke structuur van een computermodel te bekijken, kan volgens mij de wiskundige en natuurwetenschappelijke begripsontwikkeling ondersteunen en verdiepen. Hierbij moet wel de kanttekening gemaakt worden dat de docent bij dit leerproces als goed rolmodel onontbeerlijk is: diep inzicht komt niet vanzelf aanwaaien bij leerlingen en een sturende rol van de docent is essentieel. Het gevaar dat het gebruik van complexe realistische contexten en het kritiekloos en kennisloos werken met software het zicht op de te ontwikkelen vakbegrippen en methoden ontneemt ligt namelijk op de loer. Ik vermoed dat een kritische houding ten aanzien van modelleren en modellen bij leerlingen bevorderd kan worden door ze een zelfde verschijnsel op meerdere manieren te laten modelleren. Aanwijzingen hiervan zijn te vinden in een experiment waarin vwo-leerlingen verschillende modellen gemaakt hebben voor overlevingskansen na een hartinfarct op basis van cijfers uit een klinisch onderzoek (van den Camp & Heck, 2003) en in een experiment waarin leerlingen de vorm van een hangbrug en een hangende ketting (Heck, 2007b) onderzocht hebben. Een derde, voor leerlingen goed te begrijpen voorbeeld hiervan is de modellering van alcohol metabolisme in het menselijk lichaam (Heck, 2006; 2007a), onderdeel van een lesmodule over kwantitatieve farmacokinetiek voor wiskunde D.

2. Modellen voor modelleren

In de eerste sectie hebben we gezien dat er verschillende opvattingen en doelstellingen over gebruik van modellen en modelleren in onderwijs bestaan. Daarom is het voor het vervolg van dit artikel belangrijk te weten welk uitgangspunt de auteur inneemt. Onder modelleren versta ik een cyclisch proces waarin een aantal activiteiten geschakeld is en waarin zowel wiskundige en domeinspecifieke kennis en vaardigheden een rol spelen bij het vat krijgen op en redeneren over een situatie of probleem uit de echte wereld. Hoewel ik hier refereer aan problemen uit de echte wereld moet dit niet opgevat worden als louter en alleen verwijzing naar leefwereldsituaties. Ook situaties in experimenten en anderszins geconstrueerde situaties met een duidelijke vakachtergrond reken ik hiertoe. Kenmerkend is dat de situatie uit de wereld om ons heen komt en hierin geconstrueerd kan worden via een experiment of dat de situatie realiseerbaar is in de betekenis van ‘concreet voorstelbaar binnen de spelregels van een vakdomein’. De formulering van het begrip ‘modelleren’ sluit niet uit dat een situatie of probleem gebruikt wordt om reeds aanwezige (informele) kennis en inzichten bij leerlingen aan te boren, maar desalniettemin gaan mijn gedachten meer uit naar de volgende twee toepassingen in onderwijs: oriëntatie op en verdieping van een vakbegrip of methode. In het eerste geval ligt het accent op de introductie van een nieuw begrip, appellerend aan de nieuwsgierigheid van leerlingen, of heeft deze een probleemstellend karakter om leerlingen beperkingen van aanwezige kennis en vaardigheden te laten ervaren en voor te bereiden op de introductie van een nieuw begrip. In het tweede geval gaat het om toepassen van reeds verworven kennis en vaardigheden met het oog op verdere verdieping of om andere redenen zoals motiveren van leerlingen of een blik werpen op de praktijk.

Borromeo Ferri (2006) heeft de verschillende schakels in het modelleerproces empirisch onderbouwd vanuit leerpsychologisch gezichtspunt. Met deze aanpak heeft zij niet alleen modelleerprocessen van leerlingen en de rol van leraren hierbij geanalyseerd, maar ook diverse denkstijlen van leerlingen en leraren en de invloed hiervan op het modelleerproces in kaart gebracht (Borromeo Ferri, 2007; Borromeo Ferri & Blum, 2007). Zij is niet de enige die de modelleercyclus schematisch beschreven heeft: onderstaande figuren 1 t/m 7 vormen een brede selectie van beschrijvingen uit de vakliteratuur.

Het diagram in figuur 1, dat toegeschreven wordt aan lesmateriaal van de Open Universiteit in Engeland over modelleren en toepassen van wiskunde, bevat zeven blokken waarin de belangrijkste deeltaken bij modelleren samengevat zijn. Het is oorspronkelijk ontworpen vanuit een perspectief van toegepaste modellering en komt in talloze varianten in de literatuur voor. Ik heb hier gekozen voor het diagram uit (Galbraith & Clatworthy,1990), maar een bijna identieke figuur is ook al terug te vinden in (Burghes & Borrie, 1979). Gelet op het perspectief waarmee het diagram ontworpen is hoeft het niet te verbazen dat het diagram grote gelijkenis vertoont met vergelijkbare schema’s voor het doen van onderzoek en het oplossen van problemen. Een voorbeeld is het APU model (Gott & Murphy, 1987), waarin de zeven stappen in onderzoek zijn: (1) identificatie van het probleem, (2) herformulering en definitie van het probleem, (3) planning van een experiment, (4) uitvoering van een experiment, (5) data verzameling, (6) interpretatie van gegevens en conclusies, en (7) evaluatie van resultaten. Een tweede voorbeeld is het modellen-en-modelleren perspectief op probleemoplossen dat in (Lesh & Doerr, 2003; Lesh & Zawojewski, 2007) is gemotiveerd en uitgewerkt. In het laatste geval hanteren de auteurs een schema van de modelleercyclus in vier stappen: (1) beschrijving van de echte wereld in een model, (2) manipulatie van het model om tot voorspellingen of acties te komen, (3) vertaling (interpretatie) van modelresultaten naar de echte wereld en (4) verificatie van de bruikbaarheid van acties en voorspellingen. Tevens wijzen ze er op dat er eigenlijk niet sprake is van een lineair te doorlopen cyclus, maar van een niet-lineair modelleerproces.

De linkerkant van onderstaand diagram (Figuur 1) representeert de echte wereld, de rechterkant de wiskundige wereld en het middenstuk geeft de verbinding tussen deze twee werelden aan. Aan de overgangen van de ene fase naar de andere wordt in dit diagram weinig woorden vuil gemaakt. Ook wordt geen aandacht besteed aan het feit dat in praktijk leerlingen, net als professionele modelleurs overigens, niet de stappen in de opgegeven volgorde doorlopen: onderweg kunnen oplossingstrategieën en gebruikte methoden wijzigen of kan al snel op eerder gemaakt veronderstellingen teruggekomen worden. Met andere woorden, modelleren is meer dan een eenvoudige cyclus die wellicht een paar keer doorlopen wordt.

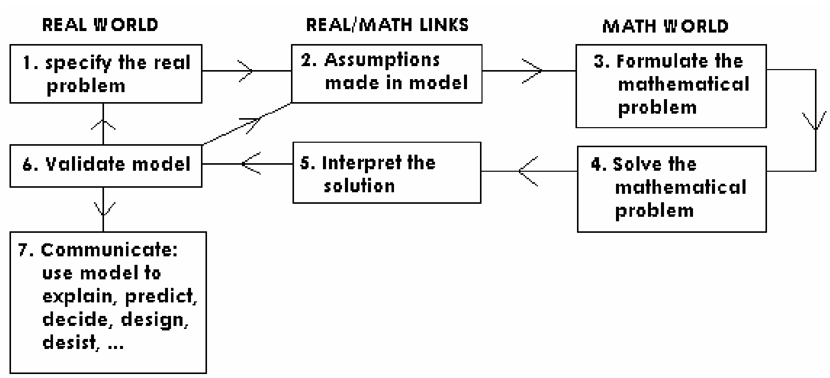


fig. 1. Modelleercyclus in lesmateriaal van de Open University (UK).

Dit is anders in de volgende afstammeling, overgenomen uit (Galbraith & Stillman, 2007). Het diagram in Figuur 2 schetst welke tussenproducten er tijdens een modelleerproces ontstaan en hanteert voor de ontwikkeling van deze producten een tweerichtingsverkeer, met een voorkeursrichting waarvan vermeld wordt welke activiteiten hierbij voornamelijk een rol spelen. Er wordt dus niet alleen aangegeven welke tussenproducten of stadia bij modelleren te onderscheiden zijn, maar ook welke overgangen op kunnen treden en waarmee modelleurs zich dan voornamelijk bezighouden.

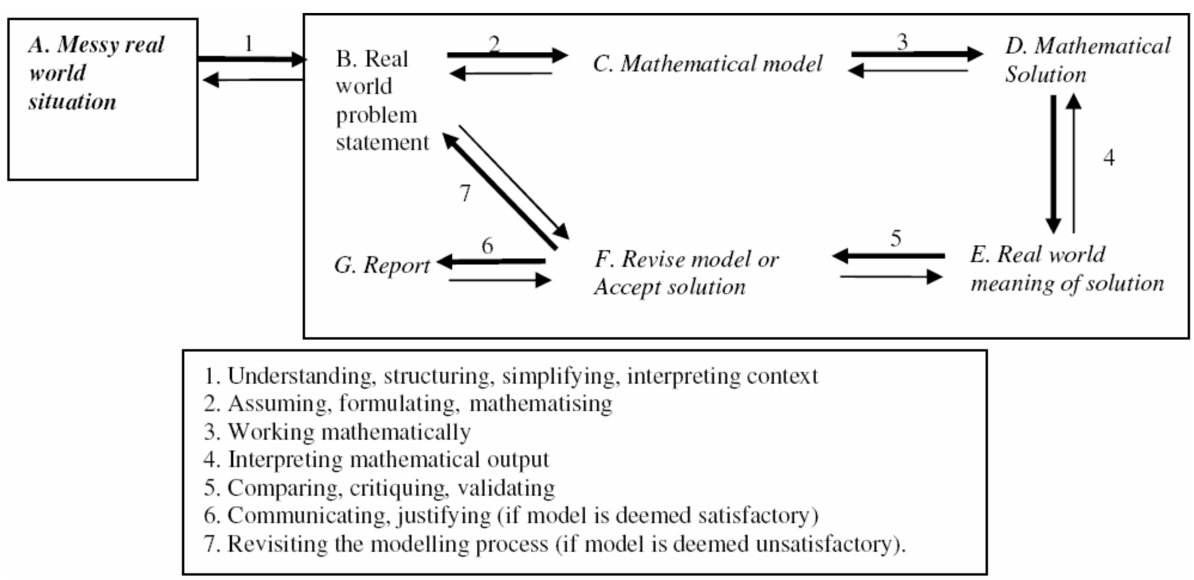


fig. 2. Modelleercyclus volgens Galbraith en Stillman (2007).

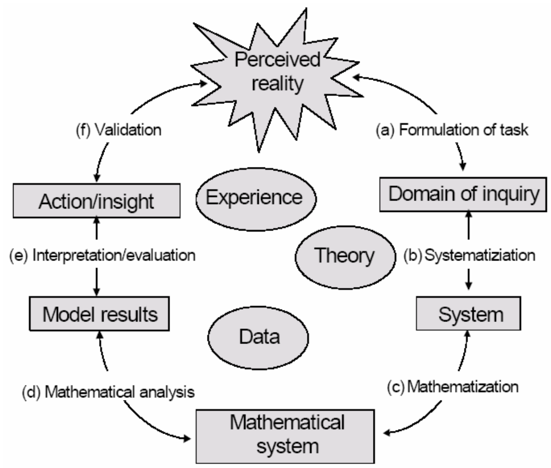


fig. 3. Modelleercyclus volgens Blomhøj en Jensen (2007).

In het diagram in Figuur 3, overgenomen uit (Blomhøj & Jensen, 2007), wordt het modelleerproces opgedeeld in 6 deelprocessen (a)-(f). Bij elk deelproces hoort een aantal modelleercompetenties. Bijvoorbeeld, deelproces (b) houdt in dat de leerling door het maken van aannamen en vereenvoudigingen de probleemsituatie kan inperken tot een hanteerbare vraagstelling en dat hij/zij het probleem kan opsplitsen in deelproblemen. Bij deelproces (c) wordt van een leerling verwacht dat hij/zij relevante variabelen in de probleemsituatie kan identificeren, verbanden tussen variabelen kan definiëren, en geschikte keuzes uit het arsenaal van wiskundige representaties en ICT middelen kan maken. Nieuw in dit type diagram is dat, naast de tussenresultaten en deelactiviteiten, ook aandacht gegeven wordt aan zaken waarop een beroep gedaan wordt tijdens het modelleren. De labels 'ervaring', 'theorie' en 'data' vormen de epistemologische basis voor de diverse deelprocessen.

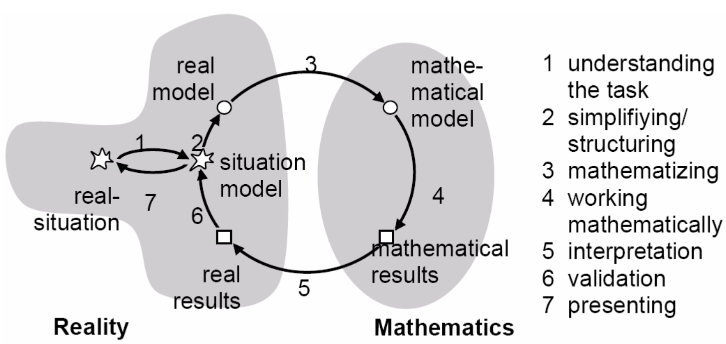


fig. 4. Modelleercyclus volgens Blum en Leiß (2005).

Wanneer in het diagram van Figuur 3 'domain of inquiry' en 'system' geïnterpreteerd wordt als 'situation model' en 'real model' dan lijkt de modelleercyclus op die van Blum en Leiß (Figuur 4). In dit schema wordt onderscheid gemaakt tussen het 'situatiemodel' en het 'model van de werkelijkheid'. Het situatiemodel is een mentaal beeld van de echte situatie dat vaak onbewust tot stand komt door informele kennis, ervaring en disciplinaire kennis. Zo'n mentaal beeld kan visueel zijn in de vorm van grafische representaties (tekeningen, grafen, etc.), maar ook meer analytisch gestructureerd via symbolen (bijvoorbeeld schetsen met vermeldingen van grootheden en formules die mogelijkerwijs een rol spelen) en verbale beschrijvingen (bijvoorbeeld een opsomming van kernzaken). Dit hangt van persoonlijke voorkeuren af en onbewust worden al veronderstellingen en vereenvoudigingen toegepast. De vereenvoudiging en structurering van het ideaalbeeld gaat in deze modelleercyclus bewust verder tot een 'model van de werkelijkheid' gecreëerd is met een concrete vraagstelling. Overigens maken veel onderzoekers het subtiele onderscheid tussen het situatiemodel en model van de werkelijkheid niet omdat de twee concepten zo dicht bij elkaar liggen en in praktijk moeilijk van elkaar te onderscheiden zijn. Desalniettemin maakt de extra aandacht die hier aan het doorgronden van de werkelijke situatie en het gesitueerde probleem gegeven wordt, terwijl de modelleur zich nog buiten de wiskunde wereld bevindt, dit model interessant voor modelleeronderwijs waarin leerlingen geacht worden om zelf modellen te ontwikkelen. Ook geeft de introductie van het mentale beeld van de situatie aan dat een model niet door de natuur gegeven is, maar door mensen gekozen of geconstrueerd wordt, en dat een model een individueel, min of meer uniek, en met taal, representaties en redeneringen doordrenkt intern karakter in de denkwereld van de modelleur heeft, naast het externe fysische model dat de modelleur waarneemt en beschrijft.

In Figuur 3 en Figuur 4 komt het woord 'mathematiseren' voor dat staat voor het vertalen van het model van de werkelijkheid naar een wiskundig model (veelal een formule of vergelijking). Als synoniemen zijn op te vatten: 'horizontaal mathematiseren' (Treffers, 1978, 1987), 'algebraïseren' (van Streun, 2007) en 'formaliseren' (Savelsberg e.a., 2007). De termen 'wiskundig werken' en 'wiskundig analyseren' zijn onderdeel van 'verticaal mathematiseren'. Letterlijk zegt Treffers (1978) hierover: *"In het algemeen kan men zeggen, dat de horizontale mathematisering bestaat uit het zodanig schematiseren van het gebied, dat het probleemveld met mathematische middelen aangepakt kan worden. De vervolgaktiviteiten, die betrekking hebben op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering, worden met de term vertikale mathematisering aangeduid."* In deze definitie zit een element van niveauverhoging, dat in de praktijk van het 'berekenen van de oplossing' niet gebeurt als er geen speciale aandacht voor gevraagd wordt. Gravemeijer (2005) pleit daarom voor een opdeling van mathematiseren in drie categorieën: (1) horizontaal mathematiseren, (2) het uitvoeren van wiskundige bewerkingen en (3) verticaal mathematiseren in engere zin, d.w.z. gericht op niveauverhoging. Ik sluit me hierbij aan.

Om soortgelijke redenen wordt in onderstaande modelleercyclus volgens Savelsbergh e.a. (2007) de term 'berekenen' gebruikt. Om van het wiskundig model naar modeluitkomsten te komen worden twee routes aangegeven, nl. een klassieke route met pen en papier of op een schoolbord en een route waarin met een computermodel gewerkt wordt. Bij computermodellering wordt vooral gedacht aan toepassing bij complexere problemen waarvoor de analytische mathematische behandeling buiten bereik van leerlingen is. Het idee is dat leerlingen met een geschikte computermodelleeromgeving een instrument in handen hebben om ook in meer realistische situaties problemen aan te pakken. In het advies staat: *"Daardoor krijgt modelleren een meer realistisch karakter en kunnen activiteiten als experimentele toetsing, modelevaluatie en probleemdefinitie meer betekenis krijgen. Bovendien kan zodoende de relatie met 'echte' modelleerproblemen, zoals die spelen in de beroepspraktijk en in het maatschappelijk debat, beter inzichtelijk gemaakt worden."* In het diagram van Figuur 5 komt voor het eerst ICT expliciet om de hoek kijken. Ik zal in de volgende sectie hier dieper op ingaan en in meer detail beschrijven in welke andere fasen van het modelleerproces ICT een rol kan spelen.

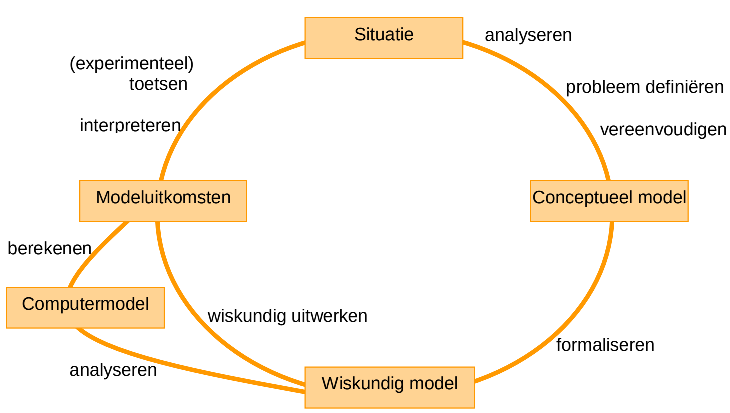
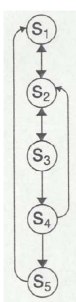


fig. 5. Modelleercyclus volgens Savelsbergh e.a. (2007).

Dergelijke schema's voor modelleercycli worden vooral gebruikt als theoretisch kader voor vakdidactische studies (bijv. Galbraith & Stillman, 2006), om het 'ideale modelleerproces' te beschrijven en om modelleercompetenties te formuleren (Maaß, 2006). Ze geven niet aan dat men tijdens het modelleerproces persé alle fasen in genoemde volgorde doorloopt. Met andere woorden, ze zijn geen dwingend voorschrift voor het organiseren van onderwijs in een bepaalde volgorde. Een gegeven computermodel kan best het vertrekpunt zijn om vat te krijgen op een dynamisch verschijnsel en voor het construeren van een wiskundig model kan het nodig zijn eerst de aanwezige kennis van wis- en natuurkunde op te frissen of uit te breiden. Blomhøj en Jensen (2003) geven een voorbeeld van een lesontwerp uit de farmacologie waarin het proces van mathematiseren in omgekeerde volgorde gebeurt: eerst wordt experimenteel een geschikte formule voor de concentratie van een verdovingsmiddel bepaald en pas daarna wordt een 2-compartimentmodel ontwikkeld dat de gevonden formule als oplossing heeft. Zwaneveld (2007) laat ook zien dat er op allerlei verschillende niveaus gemodelleerd kan worden. Hij noemt als belangrijkste stap bij elk modelleerprobleem de aanpak en de durf om daarbij iets te proberen. Een schema voor een cyclisch proces van modelleren mag dan wel geen onderwijsmethodiek representeren, het kan wel als globale beschrijving van de structuur van het modelleerproces dienen en hulp bieden bij het organiseren van onderwijs en het beoordelen van leerlingenwerk. Dit is vergelijkbaar met de manier waarop het APU-model voor onderzoek doen bedoeld is als kader voor de beschrijving en de beoordeling van praktisch werk van leerlingen.

Om het modelleerproces van individuen beter in kaart te brengen en uit te stijgen boven een vaste structuur van een modelleercyclus, die mogelijkerwijs een of meerdere malen doorlopen wordt, beschouwt Voskoglou (1994, 2007) het modelleerproces min of meer als een besluitvormingsproces dat met een Markovketen in kaart gebracht kan worden (Figuur 6). De beoordeling van de kwaliteit van elk behaald tussenresultaat bepaalt min of meer welke overgang naar een volgend tussenresultaat hierna optreedt.



S_1 = analyse van het probleem (probleem begrijpen en de beperkingen en randvoorwaarden die de werkelijkheid oplegt herkennen)
S_2 = mathematisering (inclusief probleemformulering in wiskundige vorm)
S_3 = oplossing van het model (verkregen door goede wiskundige uitwerking)
S_4 = validatie van het model (meestal door reproductie van het gedrag van het reële systeem onder de gegeven voorwaarden via een modelberekening)
S_5 = interpretatie van de gevonden wiskundige oplossing in relatie met het reële systeem

fig. 6. Markovketen als representatie van het modelleerproces (Voskoglou, 2007).

Doerr (2007) geeft aan dat docenten zonder ervaring in modelleren eerst veeleer de gedachte hebben dat de modelleercyclus een lineair te doorlopen cyclus is en pas later, na zelf modelleerervaringen opgedaan te hebben, tot het besef komen dat het meer een niet-linear, cyclisch proces is zoals gerepresenteerd in Figuur 7, die geïnspireerd is op de beschrijving van Weigand en Weller (1998) voor het modelleerproces. Hiermee kunnen individuele modelleerroutes beschreven worden.

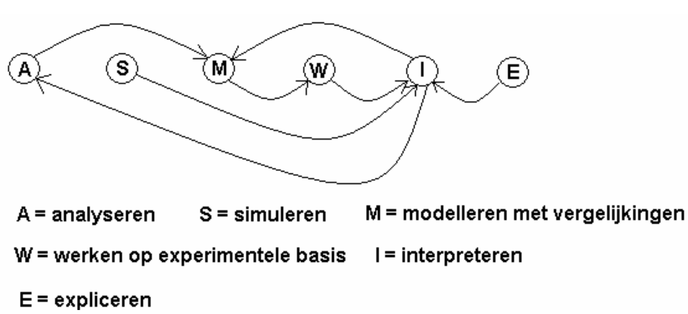


fig. 7. Voorbeeld van een niet-lineair, cyclisch beeld van het modelleerproces (Doerr, 2007).

Het opsplitsen van de modelleercylus in deelprocessen betekent ook niet dat de kennis en vaardigheden bij elk deelproces afzonderlijk geleerd en geoefend moeten worden. Dan kom je juist in valkuilen terecht zoals het zomaar weggeven van formules in leefwereldsituaties of het modelleren van verschijnselen zonder validatie van het model door vergelijking met ervaringen, observaties, experimentele gegevens of met theoretische kennis. Dit is eigenlijk alleen te rechtvaardigen wanneer men slechts voor even wil inzoomen op een bepaald facet van het modelleerproces, bijvoorbeeld om zich op een kernconcept of een basistechniek te concentreren. Men kan dan in het lesmateriaal voldoende informatie opnemen die de op dat moment minder belangrijk beschouwde deelprocessen sterk vereenvoudigen, zo niet trivialiseren. Dit gebeurt vaak in lesopdrachten waar de vertaalslag van een probleem uit de werkelijkheid naar een wiskundige probleembeschrijving al gemaakt is. Maar als men modelleren serieus neemt, dan ontkomt men volgens mij niet aan de verplichting om leerlingen meerdere keren alle stappen van het modelleerproces te laten doorlopen, ongeacht de extra tijd die hiervoor uitgetrokken moet worden. De benodigde tijd moet niet onderschat worden: Clatworthy en Galbraith (1991) rapporteren dat vooral de vertaalslag van de realiteit in een wiskundige vorm voor leerlingen een lastig te nemen hobbel was en dat de aan hun experimentele modelleercursus deelnemende leerlingen aangaven zich pas na een jaar (omvang 1 uur per week) thuis te voelen in het modelleerproces. Maull en Berry (2001) vermelden dat hun leerlingen onvoldoende tijd staken in het reflecteren op het fysische verschijnsel en de geschiktheid van een model dat ze gemaakt hadden. Met deze wetenschap in het achterhoofd, die keer op keer bevestigd is in de didactische literatuur, zal het duidelijk zijn dat de recente vermindering van lesuren in bètavakken het niet gemakkelijker maakt om leerlingen voldoende kansen te geven om diepgaand kennis te maken met het gehele modelleerproces. Waarschijnlijk lukt dit alleen als de keuzevakken Wiskunde D en NLT hierbij betrokken zijn, maar dit impliceert dan wel dat het om een selecte groep van leerlingen gaat.

Een schema voor een modelleercyclus kan ook een houvast bieden aan auteurs van lesmateriaal waarin wiskundig modelleren centraal staat. Dit is geen loos advies want menig onderwijsontwikkelaar kan de verleiding niet weerstaan om leerlingen al vrij snel bloot te stellen aan het modelleren van complexe systemen. Nadeel is dan dat een leerling bij het gegeven probleem niet alle facetten in elke stap van de modelleercyclus kan overzien en dat de auteurs in een poging om de situatie zo eenvoudig mogelijk te presenteren eindigen met modellen die weinig of geen realiteitswaarde en voorspellingsmogelijkheden hebben. Als je wilt dat een leerling de hele modelleercyclus kan doorlopen, dan is het naar mijn mening verstandig juist voor simpele, maar vakinhoudelijk rijke onderwerpen te kiezen. Pas als een leerling voldoende kennis en ervaring met modelleren heeft opgedaan en een solide basis van wiskundige en natuurwetenschappelijke kennis en vaardigheden heeft verworven is bestudering van complexere systemen mogelijk. Dit past dan goed in een grotere praktische opdracht of in een profielwerkstuk. Kaiser en Schwarz (2006) en Lingerfjärd (2006) geven voorbeelden van succesvolle modelleerprojecten voor leerlingen van deze aard.

3. De rol van ICT en technologie bij modelleren

Wat opvalt in de modelleercycli van Figuren 1-7 is dat gebruik van ICT en technologie niet expliciet genoemd wordt, behalve het woord ‘computermodel’ in Figuur 5. Dit betekent overigens niet dat aan ICT of technologie geen rol wordt toebedacht in het modelleerproces, maar meer dat het mogelijke gebruik van hulpmiddelen en ICT in de activiteiten als een vanzelfsprekendheid beschouwd wordt waar dit het modelleerproces bevordert of op een hoger plan brengt. Hoe is anders te verklaren dat in de modelleercyclus van Blomhøj en Jensen (Figuur 3) wel theorie, ervaring en data genoemd worden als zaken waarop tijdens het modelleren beroep wordt gedaan, maar dat ICT of technologie onvermeld blijft? Dit past trouwens wel in de door de cTWO commissie uitgesproken wenselijkheid dat ICT-gebruik in onderwijs gericht moet zijn op verdieping en verrijking van kennis, kernachtig samengevat als het ‘use-to-learn’ principe. Bij elk deelproces in de modelleercyclus kan een lijstje gemaakt worden van mogelijk verstandig ICT- en technologie-gebruik bij het modelleren. In deze sectie probeer ik een lijst van computeractiviteiten voor leerlingen samen te stellen, overigens zonder de illusie te hebben hiermee al volledigheid bereikt te hebben. Ik probeer een zo concreet mogelijke invulling te geven aan ICT- en technologiegebruik en ik neem hierbij de modelleercyclus van Blum en Leiß (Figuur 4) als uitgangspunt, in het besef dat ook bij de andere schema's van het modelleerproces de genoemde computeractiviteiten hun plek hebben.

Om een goed beeld te krijgen van de reële situatie en het probleem in kwestie moet een leerling enerzijds reeds bij hem of haar aanwezige kennis en ervaring op dit terrein oproepen en anderzijds actief op zoek gaan naar nieuwe informatie die van nut kan wezen. Bij een nieuw modelleerproces is het altijd verstandig om eerst na te gaan wat je zelf over de situatie en het probleem allemaal al weet (of meent te weten) en of je slim uit eerdere ervaringen met modellen en modelleren kunt putten. Discussiëren met medeleerlingen kan hierbij van nut zijn en dit zou natuurlijk best, bij gebrek aan direct contact, via email, chat, msn of binnen een elektronische leeromgeving kunnen gebeuren. Dit gebruik van ICT als communicatiemiddel komt nog sterker naar voren bij het vergaren van informatie: een Internet-search geeft toegang tot een veelheid aan gegevens over een onderwerp en brengt je in contact met andere personen die zich met hetzelfde of een sterk verwante onderwerp bezig houden of gehouden hebben. ICT kan in deze fase een informatiebron in verschillende gedaanten zijn: een video of animatie op een cd-rom of Internet biedt de mogelijkheid om je een beter beeld te vormen van het probleem of om een verschijnsel goed te observeren. Een animatie, computersimulatie of Java applet kan klaar staan om mee te experimenteren en zo ervaringen op te doen. Daarnaast hebben verkennende, zelfbedachte experimenten vooral een kwalitatief karakter in de trant van 'zien wat er gebeurt als iets verandert in de condities' en ICT zal hierbij in het algemeen slechts een beperkte rol spelen.

Om tot een concrete vraagstelling te komen moet er nog structuur in de aanwezige, maar wellicht incomplete, kennis en ervaringen aangebracht worden en moet nog een sterke vereenvoudiging van de echte situatie tot een hanteerbaar en vermoedelijk oplosbaar probleem plaatsvinden. Computersimulaties kunnen helpen om zodanig vat te krijgen op het probleem dat onderscheid gemaakt kan worden tussen wat belangrijk is en wat verwaarloosd kan worden. Soms wordt een sterke vereenvoudiging, waarvan men weet dat deze bij een precieze bestudering van een verschijnsel niet meer te rechtvaardigen is, gebruikt om na te gaan of men met het modelleren op een goed spoor zit. Dit kan ook een deelprobleem betreffen dat direct te maken heeft met het eigenlijke probleem. Voor zo'n deelprobleem kunnen dan al experimenten opgezet worden om tot een goede formulering van een concreet probleem te komen en hypothesen op te stellen. Bij deze experimenten kunnen metingen al een rol gaan spelen en dan is het gebruik van de computer voor het vergaren van gegevens m.b.v. sensoren al heel goed denkbaar. Ook een simulatieomgeving kan in deze fase ingezet worden om via experimenteren tot adequate probleemformulering en hypothesestelling te komen. In de professionele sfeer is soms de situatie zelf al ICT-rijk: Maurits (2007) geeft een voorbeeld uit de medische praktijk waarin een arts aan een wiskundige vraagt of spierechografie-beelden van patiënten op een kwantitatieve manier beoordeeld kunnen worden. De vertaling naar een fysisch-mathematische vraagstelling komt in dit geval neer op een zoeken naar meetbare begrippen in een ICT-rijke context.

Het proces van mathematiseren wordt meestal beschouwd als stevig denk- en puzzelwerk waarbij pen en papier onder handbereik moet zijn en ICT in veel mindere mate van dienst is. In een ideaalbeeld van wiskundig modelleren mag dit wel zo lijken, maar in praktijk speelt ICT toch menigmaal een rol bij de ontwikkeling van een wiskundig model. In het praktijkvoorbeeld van Maurits (2007) worden drie maten bepaald met behulp van beschrijvende statistiek en filtertechnieken en wordt hiertoe speciale beeldanalyse-software ingezet. In meer algemene zin wordt ICT vaak gebruikt om orde te scheppen in een grote hoeveelheid gegevens en om standaardmodellen uit te testen op het gegeven probleem. Het eerder aangehaalde voorbeeld van Blomhøj en Jensen (2003) uit de farmacologie waarin eerst regressie met sommen van exponentiële functies op meetgegevens toegepast wordt om vast te stellen uit hoeveel componenten een geschikt compartimentenmodel zou moeten bestaan is een succesvolle benadering in kwantitatieve farmacokinetiek. Dit is weliswaar een extreem voorbeeld waarin ICT de modelontwikkeling domineert, maar een dergelijke vorm van ICT-ondersteund wiskundig experimenteren om tot een wiskundig model te komen is niet ongebruikelijk: het doorrekenen van simpele voorbeelden m.b.v. ICT-middelen zoals de rekenmachine, spreadsheetprogramma, computeralgebra-systeem, simulatieprogramma, of statische software behoort ook tot deze klasse van ICT-ondersteunde modelontwikkeling. ICT is in deze fase louter en alleen kant-en-klaar rekengereedschap in handen van de modelleur ter ondersteuning van het denk- en werkproces om tot een wiskundig model te komen. Een terughoudendheid in het gebruik hiervan is overigens wel op zijn plaats. Voorbeelden van ondeskundig en onzinnig gebruik van software bij de ontwikkeling van wiskundige modellen zijn genoeg voorhanden en ook bij deskundig ICT-gebruik ligt het duiveltje van misleidende, op een verkeerd been zettende computerresultaten op de loer. Wiskundigen zijn daarom in het algemeen terughoudend in het gebruik van ICT bij wiskundig modelleren, zelfs als het om berekenen van modeluitkomsten gaat. Zij grijpen niet bij het minste of geringste naar rekenmachines en computerprogramma's, maar ze proberen het mathematiseringsproces door goed nadenken en puzzelen met pen en papier in veelbelovende banen te leiden en ze proberen eigenschappen van modeluitkomsten af te leiden door zorgvuldig het mathematisch model te analyseren alvorens oplossingen ook echt uit te rekenen. Broer (2007) pleit voor een dergelijke aanpak in modelleeronderwijs.

In de beroepspraktijk moet een toegepast wiskundige evenwel beschikken over software- en programmeerkennis voor het uitwerken van een fysisch-mathematisch model. Dit is niet voor niets, want bij het wiskundige werk om een oplossing te vinden van een wiskundig model is het meer regel dan uitzondering om ICT in te zetten voor het verwerken van gegevens en het maken van grafische representaties (ook van hypothetische of opgespoorde algebraïsche verbanden), voor het analyseren van gegevens (bijvoorbeeld door het bepalen van een regressiekromme bij data), en voor het doorrekenen van enkele specifieke gevallen ter controle (bijvoorbeeld het simuleren van ontwikkeld computermodel). Een grafische rekenmachine, een spreadsheetprogramma, statistische software, een computeralgebra-systeem, software voor het opstellen van computermodellen, het uitvoeren van simulaties en voor het maken van computeranimaties, en software voor het verzamelen, verwerken en analyseren van gegevens op een computer zijn enkele van de vele hulpmiddelen die binnen handbereik van gebruikers – en hier reken ik ook leerlingen toe – in staat stellen om rekenwerk snel uit te voeren en verschillende wiskundige representaties, in grafiek- of tabelvorm, snel en zonder al te veel moeite te realiseren. Voor leerlingen geldt wel in het bijzonder dat ze deze gereedschappen al voldoende moeten beheersen tijdens hun werkzaamheden zodat de cognitieve belasting door het gebruik ervan niet al te zeer toeneemt en ze hun aandacht op de wiskundige uitwerking kunnen blijven richten i.p.v. op de technologie. Onder deze voorwaarde van een minimale cognitieve belasting kan ICT en technologie een nuttige bijdrage aan het modelleerproces van leerlingen leveren. Doerr en Tripp (1999) geven voorbeelden van lessituaties waarin het gebruik van technologie (in hun geval, gebruik van een bewegingsdetector) bevordert dat mismatches bij leerlingen tussen enerzijds hun mentale beelden van een probleemsituatie en hun representaties hiervan en anderzijds met technologie verkregen representaties van de werkelijkheid snel aan het licht komen en een stimulans zijn om tot andere gedachten te komen. Vergelijking van een door een leerling voorspelde grafiek en een via technologie verkregen meetgrafiek is bijvoorbeeld heel confronterend en kan de verdere gang van zaken in een modelleerproces sterk beïnvloeden: een leerling wordt bevestigd in zijn of haar mening en krijgt het gevoel op de goede weg te zijn of wordt direct geconfronteerd met het gegeven dat de situatie toch anders is dan eerder gedacht. Als de verschillende representatiemogelijkheden onderling dynamisch gekoppeld zijn binnen een ICT-rijke omgeving, dan wordt dit effect nog versterkt. Vermoedens kunnen door technologie ondersteunde metingen snel gefalsificeerd worden en op hun beurt vervangen worden door nieuwe vermoedens, klaar om getest te worden. Overigens doet men er goed aan te beseffen dat niet alleen het beheersingsniveau van leerlingen wat betreft ICT en technologie invloed heeft op het modelleerproces, maar dat ook de mogelijkheden, beperkingen, aard van de beschikbare representaties, en het gebruikersinterface van gebruikte hulpmiddelen invloed hebben op het modelleergedrag van leerlingen. (Löhner e.a., 2003) handelt bijvoorbeeld over de invloed van de specificatiemogelijkheden in een modelleeromgeving op het modelleergedrag van leerlingen.

Tijdens de ontwikkeling van een model wordt het vaak eerst toegepast op speciale, meer eenvoudige gevallen om na te gaan of het goed werkt en wat de beperkingen zijn. Pas hierna komt de toepassing op het echte probleem, waarbij in eerste instantie de beschrijvingskracht van het model voor het onderzochte verschijnsel of probleem op de proef gesteld wordt. Computerresultaten worden vergeleken met resultaten van metingen of observaties. In tweede instantie wordt het model gebruikt om voorspellingen te doen. Computerberekeningen en simulaties spelen hierin vaak een rol.

Tijdens de evaluatie worden niet alleen de gebruikte methoden en de resultaten onder de loep genomen, maar wordt ook de rol van de computer hierbij geëvalueerd. Evaluatie van de oplossing van het probleem, voor zover gevonden, kan leiden tot voorstellen om het (computer)model te verbeteren, uit te breiden of aan te passen. Voor de rapportage en presentatie van de bevindingen wordt uiteraard ICT ingezet.

Tabel 1 vat de rol van ICT en technologie in de modelleercyclus van Blum en Leiß samen.

Overgang in modelleercyclus	*Potentiële rol van ICT en technologie*
1. het probleem begrijpen	*oriënteren op het probleem:* observeren van videobeelden, actief experimenteren met simulaties en applets; *informatie verzamelen:* Internet search, gebruik van cd-rom *communiceren met anderen:* chat, msn, email, ELO
2. vereenvoudigen/structureren	*steviger vat krijgen op de situatie:* observeren van videobeelden, actief experimenteren met simulaties, metingen met de computer in kleine experimenten (eventueel voor deelproblemen)
3. mathematiseren	*ordenen en wiskundige representeren:* verzamelen, verwerken en analyseren van gegevens op de computer (bijvoorbeeld regressie)
4. wiskundig uitwerken	*uitvoeren van omslachtig rekenwerk:* representeren in grafische of tabulaire vorm (met dynamische koppeling tussen representaties), uitrekenen van resultaten (numeriek en in formulevorm), wiskundige bewerkingen toepassen op meerdere gegevens, implementeren in computermodellen en simuleren
5. interpreteren	*vergelijken van resultaten van een computermodel met meetresultaten:* simulaties doen en analyseren van afwijkingen tussen modelresultaten en metingen
6. valideren	*voorspellingen doen:* computerberekeningen en simulaties doen; *model en methoden evalueren*: numerieke methoden valideren (inclusief het vaststellen van nauwkeurigheid), ter discussie stellen van het computermodel en aanpassen
7. presenteren	*tekstverwerken en presenteren:* rapporteren op schrift en via Internet, visualiseren van oplossingen

Tabel 1. Potentiële rol van ICT en technologie in het modelleerproces.

Motieven die een rol spelen bij de keuze voor het gebruik van ICT en technologie bij modelleren (en niet louter en alleen bij deze wiskundige en natuurwetenschappelijke activiteit) zijn:

- het *authentieke karakter* van de activiteiten: leerlingen kunnen met door henzelf verzamelde gegevens van goede kwaliteit werken op een wijze die de manier van werken van professionals weerspiegelt. Modelresultaten en resultaten van zelfgedane metingen kunnen gemakkelijk met elkaar vergeleken worden. Wiskunde en natuurwetenschappen leren kan hiermee voor leerlingen een invulling met een concreter doel krijgen en het leren van wiskunde en natuurwetenschappen is zo min of meer gelijkgesteld aan het uitoefenen van deze vakken. Voor voorbeelden verwijs ik naar (Ellermeijer & Heck, 2003) en (Heck & Holleman, 2003) in een context van bewegingswetenschappen, naar (Heck, 2006; 2007a) in de context van kwantitatieve farmacokinetiek en naar Heck (2008) in de context van forensische fotografie;

- *efficiëntie:* ICT stelt leerlingen in staat om routinewerk en rekenwerk met een herhaald karakter efficiënter uit te voeren. Een spreadsheetprogramma en de grafische rekenmachine maken het bijvoorbeeld gemakkelijk om wiskundige operaties op een lijst van waarden tegelijk uit te voeren en snel variaties in het rekenwerk te maken. De hoop en verwachting is dat leerlingen hierdoor hun aandacht meer op het modelleren van de probleemsituatie zelf kunnen richten;
- *motivatie:* sommige leerlingen worden aangetrokken door computergebruik en daarnaast maakt het de bestudering van meer realistische problemen voor leerlingen mogelijk, waar anders hun wiskundige en natuurwetenschappelijke vaardigheden ontoereikend zouden zijn, of geeft het aan het werk van leerlingen een zeker spelkarakter. Het imago van exacte vakken als saai en moeilijk kan hiermee wellicht vervangen worden door een beeld van leuke en interessante vakken waarin de moeite gestoken in hard werken beloond wordt;
- *interactiviteit:* ICT en technologie kan sommige leerlingen aanzetten tot experimenteren en uitproberen van een methode, waar ze anders zouden berusten in hun lethargische houding van ‘dit kan ik toch niet, of dit begrip ik toch niet’. ICT en technologie nodigt meer dan een leeg blaadje papier uit toe tot het ondernemen van actie. Een voorbeeld van anders gedrag van leerlingen is gerapporteerd in (van den Camp & Heck, 2003);
- *verrijking en verdieping van kennis en vaardigheden:* ICT en technologie maken het mogelijk dat leerlingen ervaringen van verschillende aard op het terrein van toepassingen van wiskunde en natuurwetenschappen opdoen en zo een meer realistisch beeld van de rol van wiskunde en natuurwetenschappen in wetenschap, technologie en praktijk krijgen. Begrip en kennis van wiskunde en natuurwetenschappelijke concepten wordt met name verbeterd en verdiept door de mogelijkheid van het gebruik van meerdere, dynamisch met elkaar verbonden representaties. Dit is iets wat zonder ICT moeilijk te realiseren is. Ook kan ICT ingezet worden ter controle van gevonden tussenresultaten, al is het alleen maar om na te gaan of men nog op de goede weg zit;
- *toegang tot geavanceerde technieken:* met een geschikte computermodelleeromgeving hebben leerlingen een instrument in handen waarmee ze complexe problemen kunnen bestuderen waarvoor de analytische mathematische behandeling buiten hun bereik ligt. De verschillende compartimentmodellen van alcohol metabolisme uit (Heck, 2006; 2007a) zijn bijvoorbeeld binnen bereik van vwo-leerlingen gekomen;
- *demonstratie van stapsgewijze verbetering en aanpassing van een model:* ICT helpt om het iteratieve karakter van modelleren te demonstreren aan leerlingen. Immers, op deze manier kunnen leerlingen gemakkelijker stapsgewijze verbeteringen in een model aanbrengen, al is het alleen maar een betere keuze van parameterwaarden in een model. Leerlingen hoeven niet steeds bij nul te beginnen, maar kunnen voortborduren of gebruikmaken van eerder gerealiseerd werk. Ze kunnen net zolang doorgaan tot hun (computer)model de werkelijkheid voldoende adequaat beschrijft en bijvoorbeeld via simulaties in staat stelt om voorspellingen te doen in een nieuwe situatie waarop het model ook van toepassing is of lijkt te zijn. Het voorbeeld van de bestudering van stuiterende ballen in de volgende sectie van dit artikel is een treffend voorbeeld;
- *feedback:* met ICT is instantane en directe feedback naar leerlingen zonder tussenkomst van docenten realiseerbaar. Als dan ook nog leerlingenwerk geregistreerd en opgeslagen wordt in een elektronische leeromgeving, dan kunnen docenten op elk gewenst moment rustig bekijken wat de leerlingen gedaan hebben, welke vorderingen ze gemaakt hebben, waar problemen de kop opstaken en aan welke onderdelen in de nabije toekomst aandacht gegeven moet worden. In een E-klas discrete dynamische modellen in het kader van Wiskunde D is hiermee in 2007 goede praktijkervaring opgedaan (Heck & Houwing, 2008).

Bij dit alles is de kanttekening op zijn plaats dat het gebruik van ICT en technologie bij modelleren geen doel op zich is, maar dat deze middelen alleen als hulp en ondersteuning van het leer- en werkproces soelaas kunnen bieden. Onderzoek naar ICT-gebruik met instrumentatietheorie als kader, (bijv. Drijvers & Gravemeijer, 2004; Haspekian, 2005), geeft een genuanceerder beeld van de mogelijkheden en beperkingen van ICT en waarschuwt dat de complexiteit van ICT-gebruik in onderwijs niet onderschat mag worden.

De modellen voor modelleren en de rol van ICT en technologie in het modelleerproces zijn totnogtoe wellicht wat al te theoretisch besproken. Daarom zal ik in de volgende sectie een en ander illustreren aan de hand van een concreet voorbeeld: het modelleren van een stuiterende bal. Het betreft de ontwikkeling van een hypothetische leerroute, die ten dele in een 5-vwo klas in de natuurkundeles is uitgevoerd (deze lesmodule is overigens tijdens werk aan een lesmodule voor Wiskunde D ontstaan). Een soortgelijke illustratie van het gebruik van de modelleercyclus van Blum en Leiß voor de ontwikkeling van lesmateriaal waarin modelleren een centrale rol speelt is te vinden in (Heck, 2007b) en betreft het modelleren van de vorm van een hangbrug en een hangende ketting.

4. Modelleren van een stuiterende bal.

De probleemsituatie die ik deze sectie bespreek past voor het merendeel in de reguliere lessen, eventueel uitgespreid over meerdere jaren, maar leent zich ook goed voor een praktische opdracht. Het onderwerp, een stuiterende bal, is niet nieuw: van Streun (2003) heeft eerder aan de hand van een profielwerkstuk over een stuiterende bal aandacht geschonken aan de wisselwerking tussen modelvorming en experimenteel onderzoek, waarin bij de interpretatie van meetresultaten gebruik wordt gemaakt van wiskundige methoden. In hun artikel over het gebruik van akoestische metingen aan stuiterende ballen ter bepaling van de valversnelling merken Schwarz en Vogt (2004) op dat dergelijk onderzoek leerlingen doet kennismaken met het wezen van natuurwetenschappelijk onderzoek, namelijk dat zonder theoretische overwegingen en zonder natuurkundige modellen niet goed vat te krijgen is op experimentele gegevens. Eerder werk van De Beurs en Krol (1991) en werk van Aguiar en Laudares (2003), waarin ook contactmomenten van stuiterende ballen met een geluidsensor geregistreerd zijn, illustreren dat zo'n onderzoek inderdaad geen appeltje-eitje is en stevig denkwerk vereist. Desalniettemin, of misschien wel juist daarom, merken Turner en Ellis (1999) en Bridge (1998) op dat een stuiterende bal zo'n geschikt onderwerp is voor leerlingenwerk omdat een hanteerbare theorie en een uitvoerbaar experiment volop de gelegenheid bieden tot discussie en evaluatie.

In dit artikel besteed ik, zoals eerder opgemerkt, expliciet aandacht aan de rol die ICT hierbij kan spelen en bouw hierbij ook voort op lesmateriaal dat door Didaktiek Natuurkunde van de UvA al in het kader van het ITN- en PRINT-project in 1991 ontwikkeld is. Ik zal de modelleercyclus van Blum en Leiß gebruiken op de mogelijke ontwikkeling van het modelleerproces en de ontwikkeling van lesmateriaal dat hierop aanstuurt te beschrijven. Maar ik zal deze cyclus niet als een strak spoorboekje hanteren om aan te geven dat de deelprocessen niet lineair doorlopen hoeven te worden. Tenslotte zal dit voorbeeld van een stuiterend balletje een goede illustratie van het multidisciplinaire karakter van modelleren blijken te zijn en zal het aantonen dat leerlingen zelf veel zaken kunnen uitzoeken wanneer ze de beschikking hebben over een rijke ICT-gebaseerde leeromgeving. Net als met het eerder genoemde voorbeeld van het modelleren van de vorm van een hangbrug en een hangende ketting in (Heck, 2007b), hoop ik met dit voorbeeld van een stuiterende bal te kunnen demonstreren dat achter een simpel ogend probleem heel veel interessante wis- en natuurkunde schuil gaat die voor vwo-leerlingen met behulp van ICT en technologie zowel toegankelijk als uitdagend is.

4.1. Vat krijgen op de probleemsituatie

Iemand met rijke ervaring in modelleren probeert altijd eerst vat te krijgen op een nieuw te onderzoeken reële situatie. Dit doet hij of zij door vragen te stellen, ook aan zichzelf, om er achter te komen welke kennis en ervaring al aanwezig is en welke informatie nog ingewonnen moet worden. Welke vragen kun je als leerling zoal stellen over een stuiterende bal? Een heleboel! Hoe komt het eigenlijk dat een bal eerst recht naar beneden valt en dan stuitert? Welke invloed heeft de keuze van het grondoppervlak waarop de bal stuitert op de beweging van de bal? Maakt de materiaalkeuze, vorm, temperatuur of grootte van de bal iets uit voor de stuiterbeweging en zo ja, hoe kan dit begrepen worden? Welke invloed heeft het medium waarin de bal beweegt? Wat is het effect van spin op de beweging? Hoe komt het eigenlijk dat een bal stuitert en heeft de snelheid van de bal hier invloed op? Wat zorgt er voor dat een bal uiteindelijk niet meer stuitert? Kun je aan het geluid van de stuiterende bal horen of het einde van het stuiteren al nabij is? Kun je de totale stuitertijd berekenen en voorspellen? Deze vragen komen niet uit de lucht vallen: uit eerdere ervaringen of door met een bal te spelen komen dergelijke vragen opborrelen.

Je kunt onmogelijk alle vragen tegelijkertijd beantwoorden; je zult je moeten beperken tot een probleem dat hanteerbaar is in de beschikbare tijd. In dit artikel zal ik de beweging van een holle, met lucht gevulde bal die verticaal, zonder spin stuitert op een harde, horizontale ondergrond bestuderen. De bal kan bijvoorbeeld een voetbal, tennisbal of tafeltennisbal zijn; als ondergrond is een harde vloer of tafel geschikt. Om praktische redenen zal ik me in experimenten beperken tot het stuiteren van een tafeltennisbal op een tafel. De modelsituatie kan samengevat worden in een schematische weergave, eventueel met een tekening waarin de vormverandering van de stuiterende bal bij grondcontact overdreven wordt weergegeven. Figuur 8 is een simpel model van de meetkundige vorm van een met lucht gevulde bal tijdens het contact met de ondergrond. De figuur komt uit (Bridge, 1998), een artikel waarin de auteur deze schets gebruikt om af te leiden dat de bal zich tijdens de botsing nagenoeg gedraagt als een ideale veer volgens de wet van Hooke. Deze schets geeft een mentaal beeld weer en hoeft helemaal niet zo goed met de werkelijkheid overeen te stemmen. Hubbard en Strong (2001) hebben videobeelden gemaakt van een op een glasplaat stuiterende tafeltennisbal met behulp van een hogesnelheidscamera en dit leverde een genuanceerder beeld op: eerst vindt inderdaad een vervlakking plaats, gevolgd door een naar binnen klappen van het oppervlak van de bal wanneer de contactcirkel groot genoeg geworden is. Figuur 9 schetst de twee stadia in de vervorming van de tafeltennisbal tijdens het grondcontact. Deze schets is een overdreven weergave van iets wat echt waargenomen wordt in de videobeelden. Opnieuw dus een mentaal beeld van de werkelijkheid.

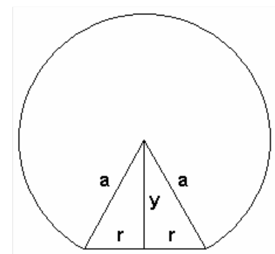


fig. 8. vervorming van de bal bij grondcontact.

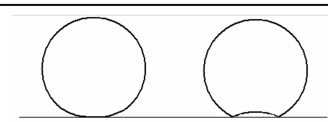


fig. 9. twee stadia van vervorming van de bal bij grondcontact.

Om terug te keren tot de oorspronkelijke probleemsituatie: een strategische keuze kan zijn om eerst maar eens een vallende bal te bestuderen. Het logische vervolg is na te denken over een bal die omhoog gaat en weer neervalt. Tot slot komt het stuiterende balletje aan bod.

4.2. Een deelprobleem: een vallende bal

Stel je bent geïnteresseerd in de beweging van een vallende bal en je vraagt je af of je de beweging kunnen beschrijven en voorspellen. Je wilt bijvoorbeeld in staat zijn te schatten of uit te rekenen hoe lang het duurt voordat een bal die op zekere hoogte wordt losgelaten de ondergrond bereikt, in het vervolg valtijd genoemd. Door ervaring of kortstondig experimenteren met verschillende ballen kom je er snel achter dat bij een heleboel ballen de valtijd niet afhangt van de grootte van de bal. Wel geldt voor een balletje van piepschuim een langere valtijd dan voor een tennisbal of een tafeltennisbal. Dergelijk gedrag kan aan het materiaal liggen of het niet hol zijn van een balletje van piepschuim, maar met enige natuurkundige kennis of elders opgedane informele kennis is de gedachte aan het effect van luchtweerstand niet vreemd. Voor het gemak laat je in het vervolg van de bestudering van een vallende bal de luchtweerstand buiten beschouwing en doe je net of alleen de zwaartekracht een rol speelt in het valproces. Met andere woorden, je idealiseert de probleemsituatie tot een gemakkelijker te bestuderen probleem dat toch nog dicht bij de werkelijkheid staat. Later kun je alsnog de luchtweerstand in het model gaan betrekken, indien je dit nodig acht. Dergelijke strategische keuzes komen vaak bij een modelleerproces voor.

4.2.1. Experimenteel modelleren

Een keuze om een variabele in een wiskundig model voor de eenvoud niet mee te nemen kan overigens ook pas na bestudering van experimentele gegevens gemaakt worden. Analyse van gegevens uit een experiment kunnen je op een goed spoor zetten. De experimentele gegevens kun je later opnieuw gebruiken om een gevonden model te confronteren met de werkelijkheid. In onderwijs is een bijkomend voordeel dat je leerlingen op deze manier activeert en motiveert. Larkin-Hein en Zollman (2000) hebben ervaren en beschreven dat een aanpak in natuurkundeonderwijs waarbij videoanalyse van bewegingen en experimenteel modelleren via regressie ingezet wordt effectief is in het activeren van leerlingen. Bovendien bevordert het de motivatie en de leerhouding van leerlingen en zorgt het ervoor dat leerlingen onbewust intensiever en langer met de lesstof bezig zijn. Ook een afstandssensor kan effectief gebruikt worden door leerlingen om de beweging van een vallende en/of stuiterende bal experimenteel te onderzoeken (Turner & Ellis, 1999). De Beurs en Krol (1991) hebben in navolging van Bernstein (1977) contactmomenten van stuiterende ballen met een geluidsensor geregistreerd en geanalyseerd. In Coach 6 kun je zelfs meten met sensoren en videocamera’s simultaan doen. Aguiar en Laudares (2003), Schwarz en Vogt (2004) en White e.a. (2007) gebruiken geluidsmetingen ook om de valversnelling te bepalen door te ‘luisteren’ naar vallende ballen. Benenson en Bauer (1993) hebben met dit doel voor ogen studenten videometingen laten doen. Kortom, er zijn voldoende mogelijkheden om gegevens te verzamelen in experimenten met vallende en stuiterende ballen en deze vervolgens te gebruiken om modellen op te stellen of te verifiëren. Ik concentreer me in dit artikel vooral op het verzamelen van gegevens via metingen in videoclips omdat op deze manier het hele bewegingsproces te volgen is en niet alleen stuitermomenten. Hoewel videometing minder nauwkeurig is dan metingen via geluid (Foong e.a., 2004), heeft deze aanpak mijn voorkeur omdat een leerling dan het hele proces van stuiteren kan volgen en niet alleen natuurkundige grootheden afleidt uit metingen die indirect hiermee gekoppeld zijn.

Figuur 10 toont een schermafdruk van een videoanalyse van een vallende bal met behulp van de computerwerkomgeving Coach 6. In het venster linksonder is een fragment te zien van de originele videoclip van het experiment, waarin een persoon op een ladder een bal loslaat op een hoogte van 4,5 meter langs een tegelwand. Perspectivische vervorming maakt het een beetje lastig om in dit filmpje direct de positie van de bal te meten tijdens de val naar beneden. Maar Coach 6 reikt gelukkig middelen aan om het imaginaire verticale vlak waarin de valbeweging plaats vindt, bij benadering gerepresenteerd door de tegelwand in de opgenomen film, zodanig aan te passen dat een frontaal-parallel beeldvlak ontstaat waarin wel goed gemeten kan worden. Meer details over het correctieproces, dat bekend staat onder de naam dat ‘beeldrectificatie’, en meer inspirerende voorbeelden van perspectiefcorrectie in videoanalyses zijn te vinden in (Heck, 2004) en (Heck & Uylings, 2006). Het venster linksboven in Figuur 10 toont een fragment van de gerectificeerde film. Hierin kan de positie van de bal tijdens de valbeweging gemeten worden door in elk filmbeeldje de bal met de cursor aan te wijzen. Maar dit is veel werk en foutengevoelig. Handiger is hier om gebruik te maken van ‘point-tracking’: je wijst aan het begin één of meerdere punten aan die gevolgd moeten worden en waarvan de coördinaten vervolgens automatisch, beeldje voor beeldje verzameld worden. Meer details over de implementatie van point-tracking en voorbeelden van gebruik zijn te vinden in (Heck, 2004), (Heck & Uylings, 2006) en (Heck & Vonk, 2008).

De tijd is in de meting overigens op nul gezet op het moment dat de bal losgelaten wordt. Verder is de keuze gemaakt om het assenstelsel zodanig te plaatsen dat de oorsprong zich bevindt in het punt waar de bal op de vloer neerkomt en wordt alleen de bal getraceerd. Dit is allemaal gedaan omdat eerdere ervaringen met modelleren de basis vormen voor het vermoeden dat de analyse van de gegevens zo eenvoudiger zal worden en wellicht eenvoudigere wiskundige formules oplevert dan wanneer het assenstelsel lukraak geplaatst is. Eerder opgedane kennis en ervaringen spelen bijna altijd een rol bij modelleren!

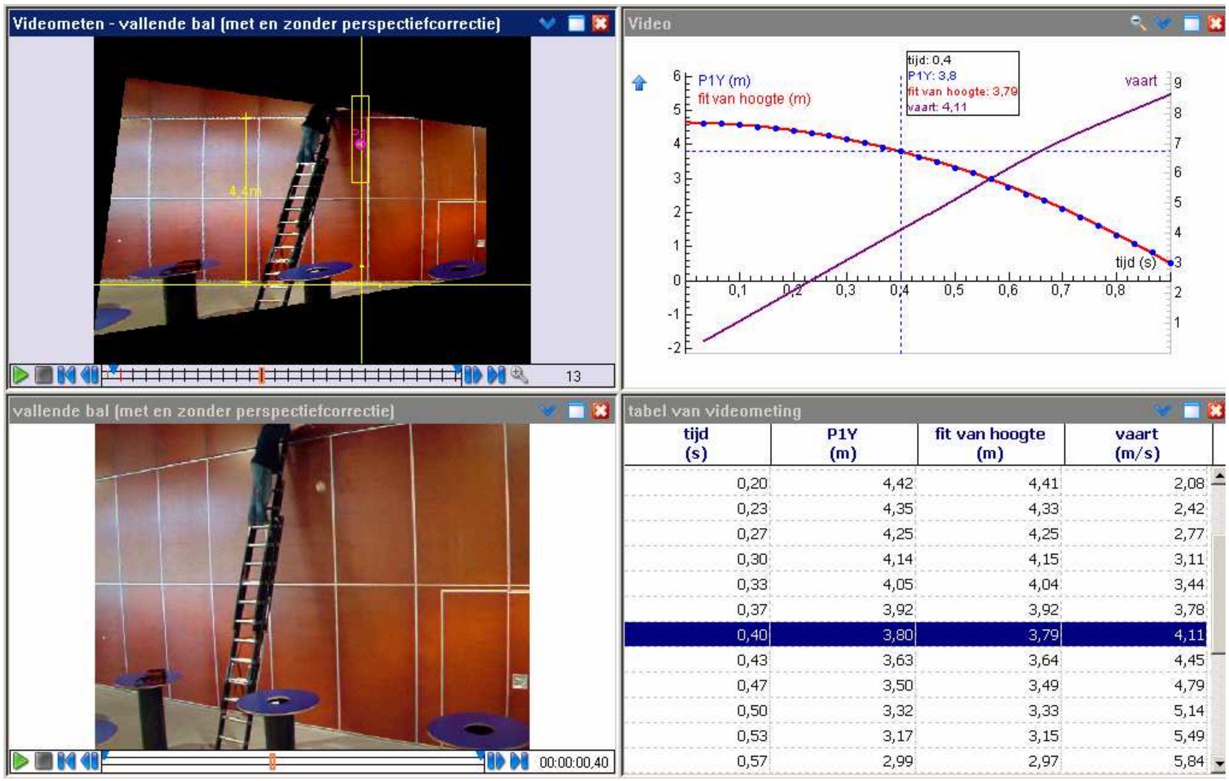


fig. 10. Schermafdruk van videometing en regressie in Coach 6.

De vensters aan de rechterkant in Figuur 10 tonen de meetgegevens in tabel- en grafiekvorm. Omdat ervaring leert dat de snelheid van de bal tijdens het vallen toeneemt, je uit de natuurkundeles weet dat bij bewegingsmechanica altijd snelheid en versnelling een rol spelen, en omdat je weet dat deze begrippen te maken hebben met eerste en tweede afgeleiden van positie, is het niet zo vreemd om in het grafiekenvenster rechtsboven de grafiek van de (numerieke) afgeleide van de verticale positie van de bal in een tweede as uit te zetten tegen de tijd. Wat onmiddellijk opvalt is dat de grafiek van de snelheid van de bal een rechte lijn is. Wiskunde leert dan dat de versnelling van de bal, afgeleide van snelheid van de bal, constant is en dat de bal tijdens de valbeweging een paraboolbaan volgt. Een kwadratische regressie in het grafiekenvenster laat zien dat een parabool die goed past bij de meetgegevens ook echt bestaat. De gevonden formule blijkt in dit geval te zijn:

$$-4,974 \cdot \text{tijd}^2 - 0,174 \cdot \text{tijd} + 4,598$$

De numerieke waarde van de versnelling van de bal is dus 9,948 m/s^2 en ligt dicht bij de gravitatieconstante. De constante 4,598 ligt dicht bij de hoogte vanwaar de bal losgelaten wordt. Met deze formule kun je ook uitrekenen hoe lang het duurt voordat de bal de grond raakt. Algebra heeft zo betekenis in de gegeven context en is geen op zichzelf staand onderdeel.

Wat je ziet in bovenstaande bestudering van de beweging van een vallende bal is dat de experimentele aanpak schijnbaar vanzelf leidt tot een wiskundige beschrijving van de bal met een kwadratische functie van tijd. De versnelling is constant en lijkt verdacht veel op de valversnelling. Maar je moet dit dan nog wel verder nadenken over het resultaat en een verklaring proberen te vinden:

bijvoorbeeld, de aanname dat alleen zwaartekracht in het experiment een rol speelt en dat aërodynamische invloeden verwaarloosd kunnen worden is plausibel gemaakt. Het experiment helpt zo in het versimpelen van de probleemsituatie en in het selecteren van relevante variabelen bij modelleren.

4.2.2. Een dynamisch model voor een vallende bal

Experimenteel modelleren via regressie is praktisch, kost niet al te veel moeite en levert prima resultaten op, maar het is in feite een zwaktebod. Wil je een wiskundig model hebben van een specifieke bal, dan kun je met zo'n aanpak best tevreden zijn, maar bij een andere vallende bal moet je weer opnieuw beginnen en er is geen garantie dat de nauwkeurigheid van een parabool dan weer volstaat. Trouwens, wat leer je nu eigenlijk over het algemene bewegingsvraagstuk van een vallende bal? Weinig toch? Ik schreef in de vorige sectie ook niet voor niets dat de experimentele aanpak schijnbaar vanzelf leidt tot een wiskundige beschrijving van de hoogte h van de bal in de tijd met behulp van een kwadratische functie. Er zijn veel regressiekrommen die tot een goed resultaat leiden. In het diagram in Figuur 11 is de ene grafiek bijna niet te onderscheiden van de andere: ze gaan allemaal door de meetpunten heen. De vergelijkingen van sommige regressiekrommen zijn:
$h = -4{,}911 \cdot \text{tijd}^2 - 0{,}544 \cdot \text{tijd} + 4{,}69$ (parabool),
$h = -5{,}385 \times \text{tijd}^{1{,}86275} + 4{,}666$ (machtsfunctie) en
$h = 10{,}836 \sin(1{,}0184 \cdot \text{tijd} + 1{,}5905) - 6{,}169$ (sinusoïde). Hoe weet je welk verband het meest betekenisvol is?

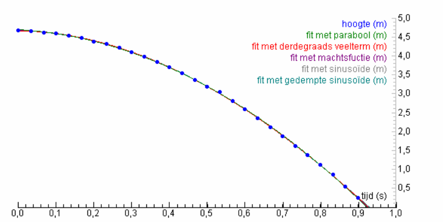


fig. 11. regressiekrommen bij meetpunten.

Tijd dus om rekenmachines en computers aan de kant te schuiven en eerst eens rustig na te denken over de valbeweging. Kun je op basis van elementaire wiskundige principes uit de mechanica een wiskundig model opbouwen dat de beweging van een vallende bal afdoende beschrijft? Wat je zoekt is een functievoorschrift van een functie $h(t)$ waarvan de grafiek een 'idealisering' is van de hoogte van een vallende bal. Net als eerder, kies je daartoe een coördinatenstelsel en ligt het voor de hand om de y-as daarvan verticaal langs de vallende bal te kiezen. Het is opnieuw niet gek om als oorsprong het punt te kiezen waar de bal de grond zal raken. Natuurkunde leert dat het voor de oplossing van het probleem om $h(t)$ te bepalen nuttig is om ook naar de afgeleide $h'(t)$ en naar de tweede afgeleide $h''(t)$ te kijken. Deze functies stellen de snelheid en de versnelling van de bal voor en worden meestal met $v(t)$ en $a(t)$ aangeduid. De tweede wet van Newton leert dat de kracht uitgeoefend op de bal gelijk is aan het product van de massa van de bal en de versnelling van de bal. Wanneer je alleen de zwaartekracht in beschouwing neemt en je je herinnert dat deze kracht in grootte gelijk is aan het product van de massa en de valversnelling g, dan kom je uit op de volgende differentiaalvergelijking

$$h''(t) = -g$$

In feite heb je te maken met een beginwaardenprobleem: als je de bal op tijdstip $t = 0$ loslaat op hoogte h_0 en met beginsnelheid v_0, dan is het wiskundige probleem teruggebracht tot het vinden van een voorschrift van een functie $h(t)$ die voldoet aan

$$h''(t) = -g, \quad h(0) = h_0, \quad h'(0) = v_0$$

Dit beginwaardenprobleem is te schrijven als een stelsel van eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), & h(0) = h_0 \\ v'(t) = -g, & v(0) = v_0 \end{cases}$$

De analytische oplossing van dit stelsel levert inderdaad een kwadratische functie voor $h(t)$ op:

$$h(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0\, t + h_0$$

De kracht van dit wiskundige model is dat je nu een op wiskundige en natuurkundige principes gebaseerde beschrijving hebt van de vrije val van elke bal losgelaten met wat voor beginsnelheid en beginhoogte dan ook. Weliswaar is dit een idealisering van het loslaten van een bal, maar toch, alle hoogte-tijdkrommen van vallende ballen zijn gelijkvormig en wel bergparabolen. Er is dus eigenlijk in wezen maar één hoogte-tijdkromme voor een vallend voorwerp.

Wanneer meer ingewikkelde mechanicaproblemen aangepakt worden kan de wiskundige kennis van leerlingen tekortschieten om tot analytische oplossingen te komen. Toch moet ook in dit soort gevallen dan niet vergeten worden dat met wiskundig redeneren vaak toch eigenschappen van de oplossingen afgeleid kunnen worden. Klakkeloos naar numerieke oplossingsmethoden grijpen of gelijk beginnen te modelleren m.b.v. de computer is niet verstandig.

4.2.3. Een computermodel voor een vallende bal

Om het modelleren m.b.v. de computer goed onder de knie te krijgen en inzicht te krijgen in de mogelijkheden en beperkingen van computermodellen lijkt het een goed idee om dit eerst in het spel te laten komen in situaties waarin leerlingen nog andere mogelijkheden ter beschikking hebben en ze computerresultaten met verwachtingen en algebraïsche resultaten kunnen vergelijken. Het probleem van de vallende bal leent zich hiervoor.

Er bestaan verschillende softwareraamwerken voor het simuleren van dynamische systemen zoals bijvoorbeeld een systeemdynamische aanpak, ook wel geaggregeerde modellering genoemd, en gebeurtenisgebaseerde, agentgebaseerde of regelgebaseerde simulatiemodellen. Een systeemdynamische aanpak leent zich voor de bestudering van continue processen. De veranderingsprocessen worden vastgelegd in differentiaalvergelijkingen c.q. differentievergelijkingen en numeriek opgelost. Een groot aantal verschijnselen hebben evenwel niet alleen een continu karakter maar worden ook gekenschetst door discrete gebeurtenissen. Het oorspronkelijke probleem van het stuiterende balletje is het prototype voor allerlei botsingsprocessen. Er is sprake van een hybride systeem (Levin & Levin, 2002), dat zowel een continu als discreet karakter heeft, en zoals we zullen zien is in de modelleeromgeving van Coach 6 een hybride aanpak eenvoudig te realiseren. Voorlopig concentreer ik me op de systeemdynamische kant van het modelleergereedschap.

Het modelleren op de computer kent twee fasen in de implementatie van het wiskundige model: het specificeren van het wiskundige model en het onderzoeken van het model. Om met het eerste te beginnen, dit kan in Coach op drie manieren: grafisch, via vergelijkingen en tekstgebaseerd. Ik bespreek hier alleen de eerste en laatste manier van specificeren van een computermodel. Figuur 12 toont een schermafdruk van het computermodel voor een vallende bal en een grafiek van verticale positie en snelheid die berekend zijn met het model.

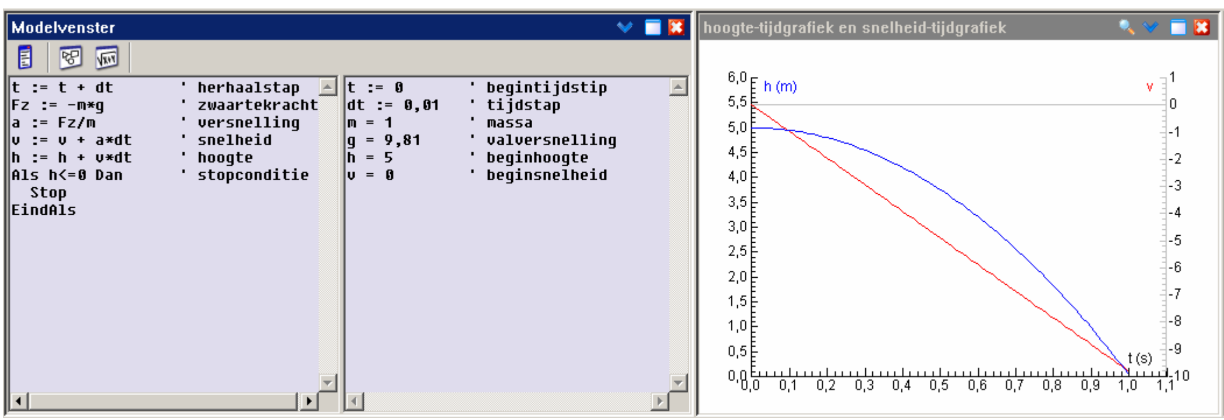


fig. 12. Tekstgebaseerd computermodel van een vallende bal.

Je ziet een apart modelvenster waarin links het tekstgebaseerde computermodel staat en rechts de parameters die je kunt instellen. De tekst voor de apostrof is de echte computercode die tijdens het doorrekenen van het computermodel daadwerkelijk gebruikt wordt. Rechts van de apostrofs staat steeds commentaar ter verduidelijking van wat er met de coderegel(s) bedoeld is. Hiermee wordt niets gedaan tijdens het doorrekenen van het computermodel. Het computermodel kun je lezen als een reeks van opdrachten die herhaald worden uitgevoerd totdat aan de stopconditie voldaan is of het maximale aantal herhalingen (iteraties) bereikt is. De programmastructuur is als volgt:

t := t + dt	herhaalstap	t = 0	begintijdstip
Fz := - m*g	zwaartekracht	dt = 0,01	tijdstap
a := Fz / m	2e wet van Newton	m = 1	massa van de bal
v := v + a*dt h := h + v*dt	bewegings- vergelijkingen	g = 9,81	valversnelling
Als h <= 0 Dan Stop EindAls	stopconditie	h = 5 v = 0	beginhoogte van de bal beginsnelheid van de bal

Rechts in het modelvenster staan de parameters die je voor een computersimulatie kunt instellen. In dit model kun je behalve de beginhoogte, beginsnelheid en massa van het geworpen voorwerp ook nog de valversnelling opgeven. De tijdstap dt bepaalt op welke tijdtippen de positie van het vallende voorwerp numeriek berekend wordt. De coderegels aan de rechterkant van het modelvenster worden slechts één keer uitgevoerd en wel bij de start van een simulatie.

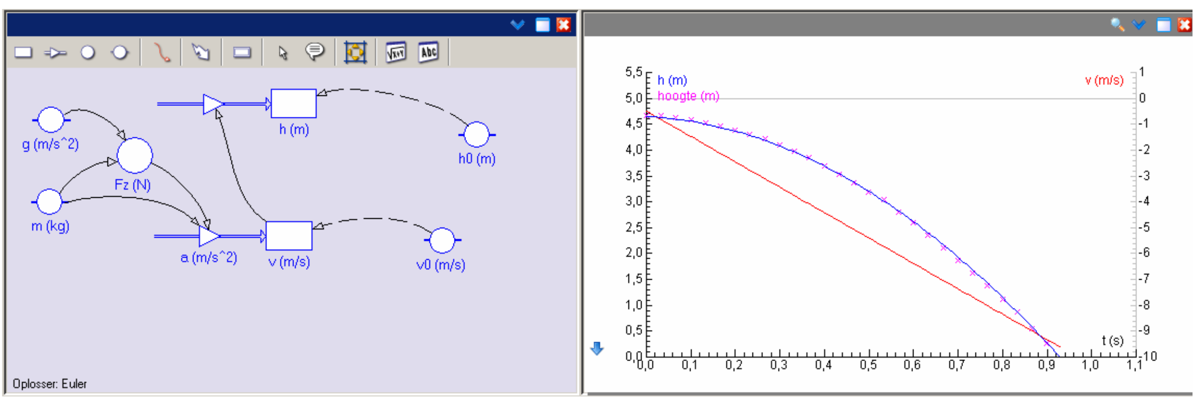


fig. 13. Een grafisch model voor een vallende bal en een vergelijking met meetgegevens.

Een leerling die meer visueel georiënteerd is kan als alternatief een grafisch modelleervenster gebruiken zoals in Figuur 13 te zien is. Dit is een schermafdruk van een Coach 6 activiteit waarin de vallende bal gemodelleerd wordt door het bijpassende beginwaardenprobleem grafisch te representeren. De betekenis van de iconen is vergelijkbaar met die in andere systeemdynamische software zoals STELLA (Steed, 1992) en Powersim: er zijn iconen voor toestandsvariabelen (rechthoeken), stroomvariabelen (dubbele pijlen met een driehoek in het midden), hulpvariabelen (cirkels), constanten (cirkels met 'handvaten'), relaties (enkele pijlen), en voor het specificeren van beginwaarden (gestippelde pijlen). Een stroompijl begint of eindigt altijd in een toestandsvariabele en geeft (een deel van) de verandering van de toestand aan. De inkomende relatiepijlen van een variabele worden gebruikt om expliciet in het grafische model aan te geven waar deze variabele van afhangt en welke variabelen in een formule voor de grootheid vermoedelijk gebruikt zullen gaan worden. De relatiepijlen zijn in Coach 6 niet verplicht gesteld om de gebruiker in staat te stellen een grafisch model te definiëren dat weliswaar minder expliciet is, maar wel dichter staat bij in de wiskunde gebruikelijke grafische weergaven van dynamische systemen (denk bijvoorbeeld aan grafische weergaven van compartimentmodellen). Samengevat, geef je via het grafische model op welke grootheden in het wiskundige model een rol spelen (met onderscheid tussen parameters, rekengrootheden en toestandsvariabelen), hoe ze van elkaar afhangen, welke formules voor grootheden precies gebruikt worden en welke waarden de constanten hebben. Het grafische model wordt automatisch vertaald naar een stel vergelijkingen die op hun beurt gebruikt worden in een computersimulatie van het model. Na het doorrekenen van een model kunnen de modeluitkomsten in een tabel of grafiek worden weergegeven. Het diagram rechts in Figuur 13 illustreert dat de verticale positie van de vallende bal (gesymboliseerd met de letter h) die uitgerekend wordt in het model bijzonder goed overeenstemt met de gemeten hoogte. De schermafdruk illustreert ook dat een grafisch modelleergereedschap niet uitsluitend voor dynamische systemen ingezet wordt, maar eigenlijk meer een grafische specificatie en weergave van een computermodel is. Een (tijdelijke) overgang naar een tekstgebaseerde weergave van het model in de modelleeromgeving van Coach maakt dit ook voor leerlingen zichtbaar.

Het computermodel levert niet gelijk nieuwe inzichten op, maar stelt leerlingen wel in staat om met behulp van het computermodel snel verschillende situaties door te rekenen en te analyseren. Door verschillende waarden voor de beginhoogte uit te proberen komt een leerling er snel achter dat de valtijd niet evenredig is met de beginhoogte. Hiervoor hoeft hij of zij niet terug te vallen op algebraïsche verbanden (hoe interessant dit op zichzelf ook moge wezen). Door een positieve startsnelheid te nemen wordt het verticaal opgooien van een bal gesimuleerd. Op deze manier kan een leerling ook alvast de beweging van een stuiterende bal tussen twee contactmomenten onder de loep nemen. Al simulerend kan de leerling het vermoeden krijgen dat de tijd die het balletje dan nodig heeft om het hoogste punt te bereiken gelijk is aan de valtijd vanaf deze hoogte. Met andere woorden, met het computermodel kan een leerling snel en gemakkelijk de invloed van gewijzigde begincondities op het verloop van een veranderingsproces bestuderen. De voorspelkracht van een computermodel openbaart zich.

Een niet zo ingewikkelde aanpassing van het tekstgebaseerde of grafische model maakt het mogelijk om luchtweerstand in het computermodel mee te nemen. Figuur 14 illustreert hoe het tekstgebaseerde model uit Figuur 12 aangepast kan worden voor een vallende tafeltennisbal, waarbij de kracht F_w die de bal ondervindt als gevolg van luchtwrijving wordt berekend met de formule

$$F_w = \frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot c_w \cdot v^2 ,$$

waarbij ρ de dichtheid van de lucht is, A de oppervlakte van de doorsnede van het voorwerp loodrecht op de bewegingsrichting ($A = \frac{1}{4}\pi \cdot D^2$ voor een bal met diameter D), v de snelheid van de bal t.o.v. de luchtdeeltjes is en c_w de luchtwrijvingscoëfficiënt is. De luchtwrijvingscoëfficiënt hangt af van de vorm en materiaal van het voorwerp. Hoewel deze coëfficiënt ook van de snelheid afhangt wordt deze in berekeningen vaak constant genomen.

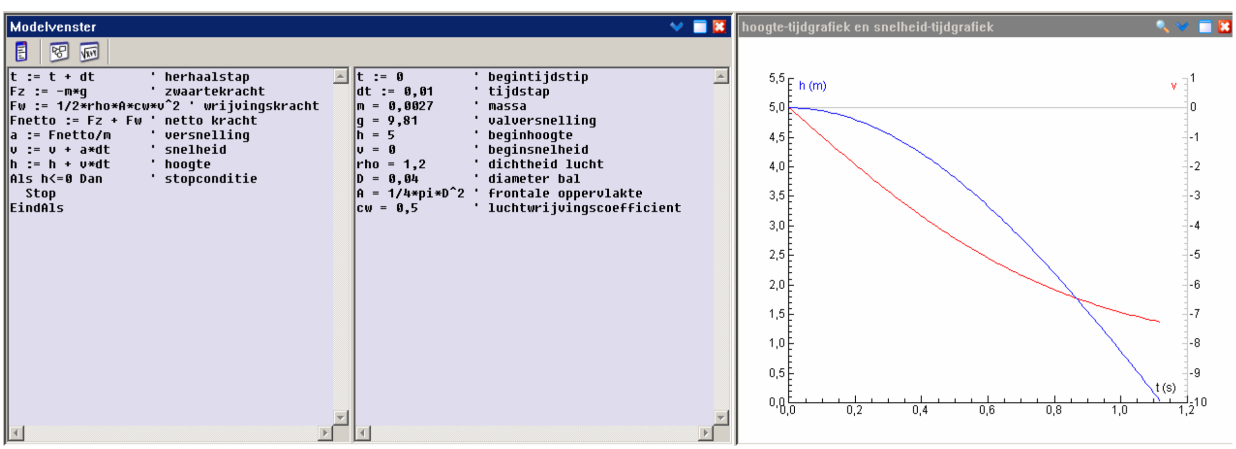


fig. 14. Tekstgebaseerd computermodel van een vallende tafeltennisbal (inclusief luchtwrijving).

Het aangepaste grafische model van een vallende tafeltennisbal is te zien in Figuur 15.

Samengevat, het computermodel verruimt het arsenaal van mogelijkheden voor een leerling om computerexperimenten uit te voeren, hypothesen te onderzoeken en 'wat als'-vragen te beantwoorden. Met het computermodel is de leerling ook weer dicht teruggekomen bij de concrete probleemsituatie waar het allemaal mee begon, namelijk vallende en stuiterende ballen, zeker als modeluitkomsten vergeleken kunnen worden met experimentele gegevens. Het toetsen van een model aan de werkelijkheid is zo een vanzelfsprekend onderdeel van de activiteiten door leerlingen.

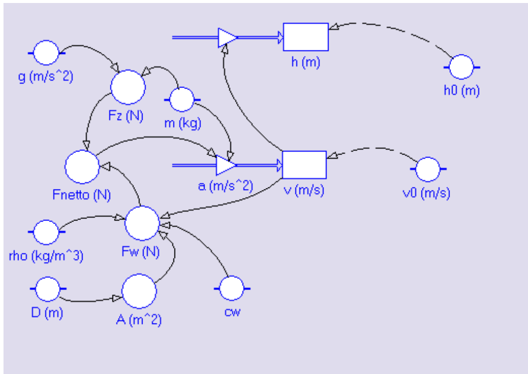


Fig 15. Grafisch model van een vallende tafeltennisbal (inclusief luchtwrijving).

4.3. Computermodel voor een stuiterbal

Laten we nu verder gaan met de meer gecompliceerde beweging van een stuiterende bal. Figuren 16 en 17 tonen elk een videoclip waarmee een vmbo-TL3 leerling de beweging van een stuiterbal heeft gemeten. De schermafdruk in Figuur 16 illustreert linksboven dat het eerdere grafische model voor een vallende bal (Figuur 13) alleen hoeft te worden uitgebreid met een discrete gebeurtenis. Op het moment dat de bal de grond raakt moet de richting waarin de bal zich beweegt namelijk omklappen. Met andere woorden, zodra de bal de grond raakt moet de snelheid van teken en grootte veranderen. De grafieken aan de rechterkant van de schermafdrukken laten zien dat de gemeten hoogtes aardig overeenstemmen met de berekende hoogtes.

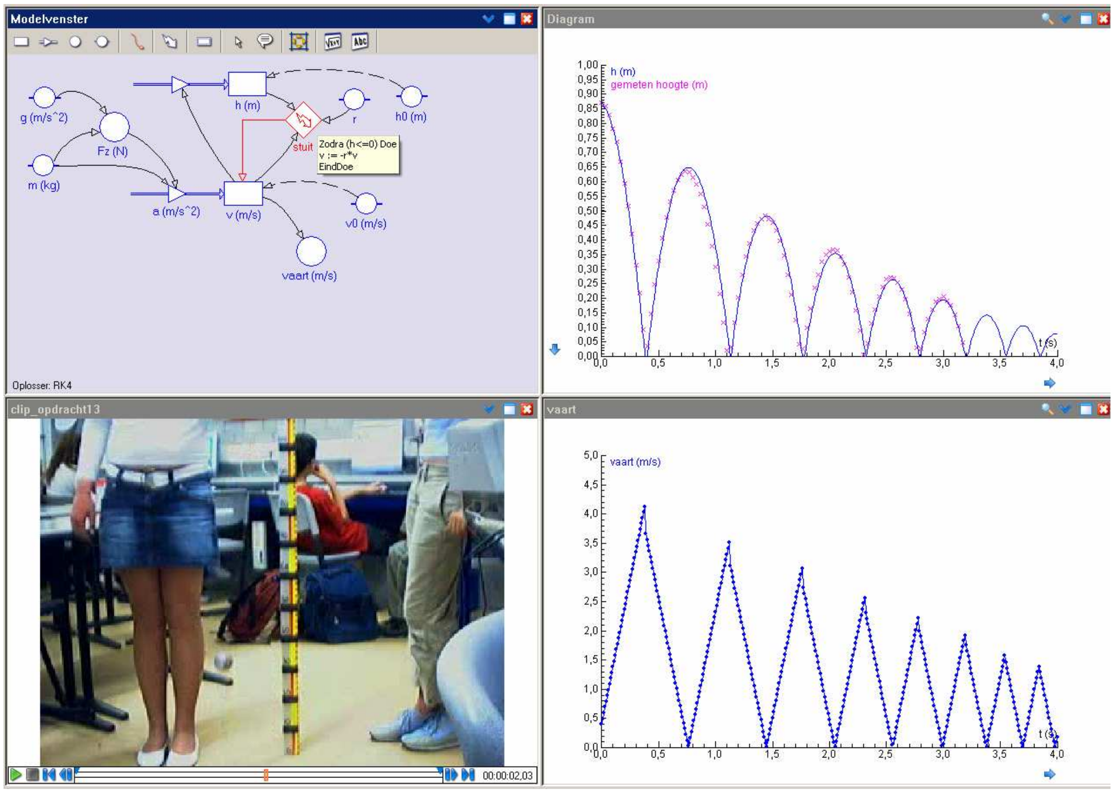


fig. 16. Schermafdruk van een Coach 6 activiteit met een grafisch model voor een stuiterende bal en een vergelijking met meetgegevens.

fig. 17. Een vergelijking van modeluitkomsten met meetgegevens voor een stuiterbal.

Laten we de details van een stuitering eens nader bekijken: de gebeurtenis treedt op zodra de hoogte kleiner of gelijk aan nul wordt. Omdat kinetische energie verloren gaat tengevolge van een inelastische botsing – je ziet gewoon dat de stuiterende bal hoogte verliest – verandert de neergaand gerichte snelheid in een omhoog gerichte snelheid en is de absolute waarde van de snelheid kort voor de botsing groter dan die van kort na de botsing. Een leerling hoeft dit natuurlijk niet voor zoete koek aan te nemen en doet dit ook maar beter niet. Met een hogesnelheidscamera is een beter beeld van het stuiterproces te krijgen. Figuur 18 is een schermafdruk van een meting van de hoogte van een stuiterende tafeltennisbal in een videoclip met 250 beeldjes per seconde. De drie gemeten hoogten voor de botsing liggen op een rechte lijn en hetzelfde geldt voor de drie gemeten hoogtes na de botsing. De hellingen van deze lijnen kunnen met de hellingtool in Coach bepaald worden:

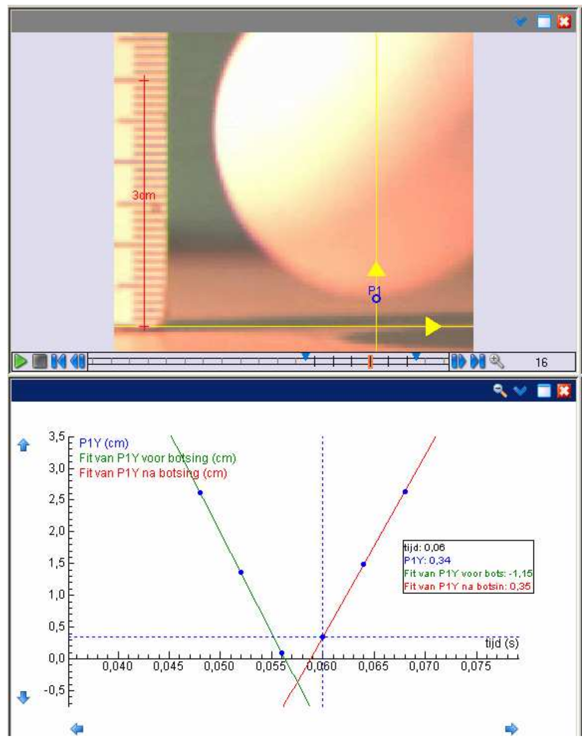


fig. 18. Videometing van een stuiterende tafeltennisbal.

$$v_{\text{voor botsing}} = -3{,}12\,\text{m/s}, \quad v_{\text{na botsing}} = 2{,}86\,\text{m/s}$$

Inderdaad neemt de snelheid in grootte bij de botsing af. De stuit mag in een zeer kleine tijdschaal dan wel een continu proces zijn en de verticale snelheid van de tafeltennisbal mag dan een continue functie zijn, op de tijdschaal waarin wij werken verandert de snelheid abrupt van teken en grootte. Op basis van dit experiment is het logisch om een restitutiecoëfficiënt r (ook wel sprongcoëfficiënt of stuiterfactor genoemd) te definiëren als:

$$v_{\text{voor botsing}} = r \cdot v_{\text{na botsing}}\,.$$

De gele sticker in het modelvenster in Figuur 16, die in Coach 6 verschijnt wanneer je de cursor lang genoeg boven de grafische component houdt die een discrete gebeurtenis voorstelt (de bliksemschicht), bevat de volgende computercode:

```
Zodra (h<=0) Doe v := -r*v EindDoe
```

Je ziet dat Coach 6 het mogelijk maakt om bij een discrete gebeurtenis aan te geven hoe een toestandsvariabele abrupt gewijzigd wordt. Een niet onbelangrijk detail in de computercode is het gebruik van het woordje ‘Zodra’ in plaats van ‘Als’. In het laatste geval wordt de conditie telkens gecontroleerd op het moment dat het computerprogramma deze code uitvoert en is het dus denkbaar dat je in dit computermodel van de stuiterende bal steeds bezig blijft het teken van de snelheid van de bal te verwisselen, terwijl de positie van de bal steeds negatief blijft. Om dit soort rariteiten en tegenstrijdigheden met de realiteit zo veel mogelijk te vermijden is de gebeurtenis in Coach 6 geïmplementeerd volgens het principe van software triggering: zodra aan een zekere voorwaarde voldaan wordt, gaat een actie eenmalig in werking en pas nadat aan deze voorwaarde niet meer voldaan is, kan de gebeurtenis weer opnieuw optreden.

Andere ingrepen op het simulatiemodel zoals abrupte veranderingen van parameterwaarden of wijzigingen in onderliggende differentiaalvergelijkingen zijn net zo via discrete gebeurtenissen te arrangeren in Coach 6. In de vakliteratuur wordt een onderscheid gemaakt tussen <u>expliciete</u> hybride modellering, bijvoorbeeld via hybride automaten of Petri-netten (Svadova, 2001), en <u>impliciete</u> hybride modellering waarin de onderliggende modelvergelijkingen onder controle van programmafragmenten staan die discrete gebeurtenissen afhandelen. In het ontwerp van de modelleeromgeving van Coach 6 is een middenweg gekozen. In het grafische model is expliciet een icoon opgenomen, de bliksemschicht, die een gebeurtenis symboliseert en waarin via pijlen aangegeven wordt welke toestandsvariabelen wijzigen als gevolg van de gebeurtenis en waarvan dit afhangt. Achter deze icoon zit een stukje Coach code verborgen dat precies beschrijft wat er in de simulatie moet gebeuren zodra de gebeurtenis optreedt.

4.4. Toepassing van wiskundige kennis

Met de experimentele benadering gevolgd door een grafische modellering van een wiskundig model zijn we al een heel eind gekomen met de bestudering van een stuiterende bal. Maar een van de oorspronkelijke onderzoeksvragen “Kun je de totale stuitertijd berekenen en voorspellen?” is nog onbeantwoord. Ook op vragen zoals “Wat is de totale afgelegde weg van het stuiterende balletje?” en “Op welke manier kun je een geschikte waarde voor de restitutiecoëfficiënt vinden?” is nog niet ingegaan. Kortom, met het computermodel voor het stuiterende balletje is de wiskundige analyse nog niet af of zelfs maar goed op gang gekomen. Je kunt stellen dat de aanpak totnogtoe alleen volstaat voor een leerling die de beweging van een specifiek stuiterend balletje wil onderzoeken, maar hij of zij moet voor elk nieuw soort balletje weer van voren af aan beginnen. Nogmaals, wat heb je dan geleerd over een stuiterende bal in het algemeen? Wis- en natuurkunde bieden uitkomst in aansluiting op de hybride systeemdynamische aanpak. Bijvoorbeeld, de restitutiecoëfficiënt kan bepaald worden als wortel van het quotiënt van de maximale hoogte na en voor de stuit, als je tenminste aërodynamische effecten en andere effecten mag verwaarlozen. De afleiding van dit resultaat is mijns inziens niet buiten bereik van vwo-leerlingen met enige kennis van wis- en natuurkunde: de vaart v_1 van de bal met massa m die een vrije val maakt van een maximale hoogte h_1 is op het moment van neerkomen op de tafel gegeven door $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, waarbij g de valversnelling is. Dit is waar omdat de potentiële energie mgh_1 dan volledig omgezet is in kinetische energie $\frac{1}{2}mv_1^2$. Voor de vaart v_2 van de bal nadat het op de tafel wegstuit nemen we $v_2 = r \cdot v_1$, waarbij r de restitutiecoëfficiënt is. De maximale hoogte h_2 waarop de bal terugkeert wordt gegeven door $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Dus geldt: $r = v_2 \big/ v_1 = \sqrt{h_2/h_1}$. Een concreet voorbeeld: in de videometing passend bij Figuur 17 kan uit de gemeten maximale hoogten de restitutiecoëfficiënt bepaald worden. Deze blijkt 0,84 te zijn en stemt prima overeen met de waarde van 0,83 die in het computermodel gebruikt is om een oplossingskromme te krijgen die prima past bij de meetgegevens.

De berekening van de totale sluitertijd, ook wel uitdooftijd genoemd, is tevens haalbaar voor een vwo-leerling. Het benodigde wiskundige werk is als volgt: de tijd waarin de bal naar beneden valt voor de eerste en tweede keer is gelijk aan $t_1 = \sqrt{2h_1/g}$ en respectievelijk $t_2 = \sqrt{2h_2/g} = r \cdot t_1$. Dit volgt uit de kwadratische formule voor de hoogte als functie van tijd bij het loslaten van een bal die daarna in vrije val terechtkomt. Als je bedenkt dat de bal de eerste keer alleen maar vanuit de hoogste positie neervalt en daarna steeds op en neer gaat, dan is het duidelijk dat de totale stuitertijd T in een expliciete formule beschreven kan worden door gebruik te maken van de somformule van een meetkundige reeks:

$$T = t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \cdots = t_1 + 2rt_1\left(1 + r + r^2 + \cdots\right) = t_1 + \frac{2rt_1}{1-r} = t_1 \cdot \frac{1+r}{1-r} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \cdot \frac{1+r}{1-r}.$$

Ook de volgende opdracht is mijns inziens nog haalbaar voor leerlingen: Bewijs dat als je in een grafiek de stuiterperiode uitzet tegen het stuittijdstip aan het begin van het tijdsinterval voor de beweging in de lucht je een verzameling punten krijgt die op een rechte lijn liggen met richtingscoëfficiënt gelijk aan de uitdrukking $r - 1$. Dit betekent dat je in praktijk niet alleen de restitutiecoëfficiënt kunt bepalen door naar opeenvolgende hoogtes van de stuiterende bal te kijken, maar ook door te luisteren naar geluidsopnamen van de stuiterende bal.

Het belang van dit algebraïsche werk is dat het de leerling in staat stelt het verschijnsel ‘stuiterende bal’ beter te begrijpen en resultaten van een model en een experiment met elkaar in verband te brengen. Met parameterwaarden $r = 0{,}84$, $h_1 = 0{,}6\,\mathrm{m}$ en $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ krijg je $T = 4{,}0\,\mathrm{s}$, wat in werkelijkheid een halve seconde meer blijkt te zijn dan de tijd die experimenteel is vastgelegd in de videoclip van Figuur 17. De reden voor het verschil in uitdooftijd tussen het wiskundige model en het experiment is dat het gedrag van een stuiterbal in werkelijkheid toch complexer van aard is en dat het stuitergedrag verandert tegen het einde van de beweging. De grootste verrassing voor leerlingen is misschien wel dat de uitdooftijd eindig is ofschoon de bal in het wiskundige model oneindig vaak stuitert. Eigenlijk maken deze zaken het onderzoek niet alleen maar ingewikkeld voor leerlingen, maar ook veel interessanter en uitdagender.

Je zou op dit punt de analyse van een stuiterbal kunnen stoppen met het idee dat je er nu wel genoeg over weet en dat je het model snapt. Maar op deze manier is modelleren meer verworden tot het begrijpen van een model in plaats van het begrijpen van de realiteit. Stuitende details komen aan de oppervlakte wanneer je preciezer gaat kijken wat er allemaal aan de hand is.

4.5. Model versus werkelijkheid: stuitende details voor een tafeltennisbal.

Totnogtoe is de hele modelleercyclus één keer doorlopen. Voor een diepgaand begrip van stuiterende ballen is dit niet toereikend. Bijvoorbeeld heb ik me vooralsnog enkel geconcentreerd op de beweging van massieve stuiterballen en niet die van holle, met lucht gevulde ballen zoals voetballen, volleyballen, tennisballen en tafeltennisballen. Daarom ga ik nog eens precies kijken naar de beweging van een tafeltennisballetje dat op een tafel stuitert.

Het is een goed idee om eerst maar eens een experiment uit te voeren: Figuur 19 toont een videometing van een tafeltennisbal die op een bureautafel stuitert. De videoclip is opgenomen met een hogesnelheidscamera met een frequentie van 150 beeldjes per seconde. De meting van de hoogte van de bal is uitgevoerd met behulp van point-tracking. De rechthoek in het videovenster geeft het zoekgebied aan waarin het volgende meetpunt gezocht wordt. Rechts in de schermafdruk staat de gemeten grafiek van de hoogte.

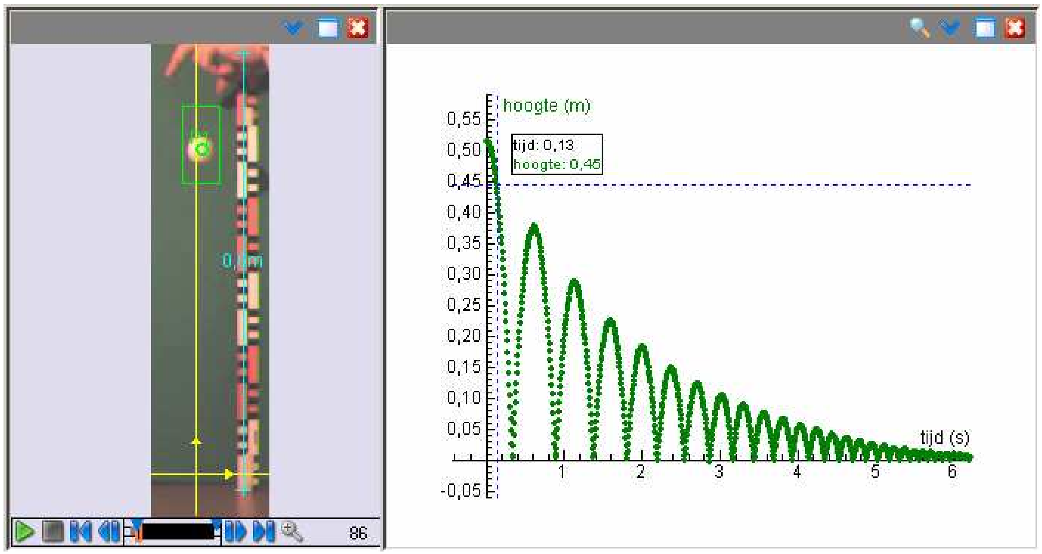


fig. 19. Videometing van een stuiterende tafeltennisbal

Deze meetgegevens kunnen gebruikt worden om het computermodel uit Figuur 16 te toetsen aan de werkelijkheid. Figuur 20 toont het resultaat. Dit is een beetje teleurstellend: de eerste drie à vier keer stuiteren is het model nog aardig in overeenstemming met de meting, maar daarna lopen model en meting uit de pas. Het model voorspelt een te korte uitdooftijd. Dit is in overeenstemming met de gegevens die gepresenteerd zijn in (Streun, 2003). Wat is hier aan de hand?

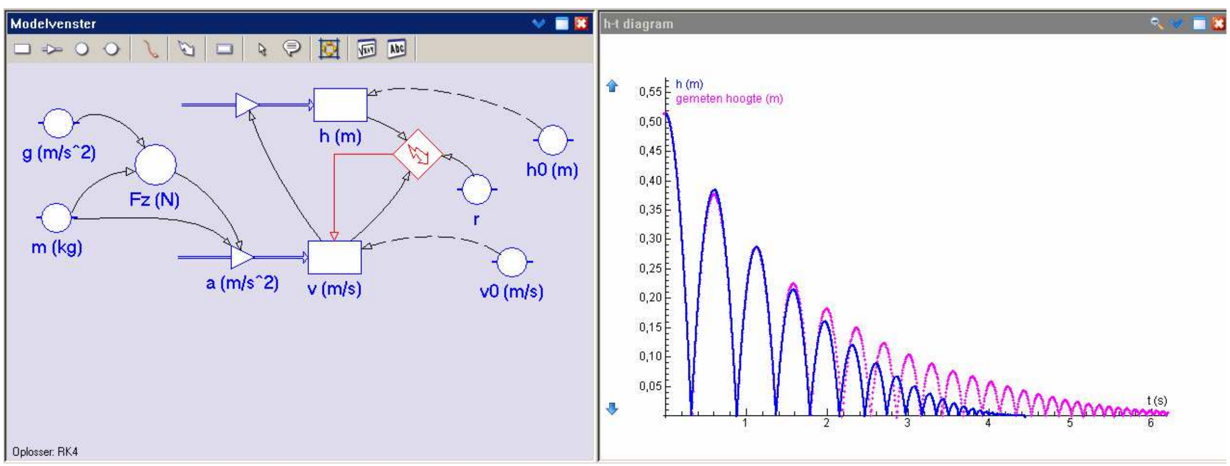


fig. 20. Vergelijking van het computermodel en de meting van een stuiterende tafeltennisbal.

De restitutiecoëfficiënt in Figuur 20 is zo gekozen (r = 0,87) dat op het oog de modelresultaten aan het begin van het stuiteren van de tafeltennisbal aardig kloppen. De eerste gedachte is misschien dat dit niet zo'n goed idee is en dat de methode van het bepalen van de restitutiecoëfficiënt door lineaire regressie van de stuiterperiode uitgezet tegen het stuittijdstip beter werkt. Als je dit doet vind je een waarde van r = 0,921. Maar ook deze waarde blijkt niet zo'n goede vergelijking tussen model en meting op te leveren. Het bovenstaande computermodel is zodanig aan te passen dat het twee achtereenvolgende stuittijdstippen opslaat, zodat de stuiterperiode bepaald kan worden en de in het computermodel berekende stuiterperiode uitgezet kan worden tegen het berekende stuittijdstip. Deze berekende grafiek kan je vervolgens vergelijken met de gemeten resultaten. Dit levert onderstaande schermafdruk op: je ziet onmiddellijk dat het computermodel niet goed bij de meetgegevens past en dat de met het model voorspelde uitdooftijd te groot is.

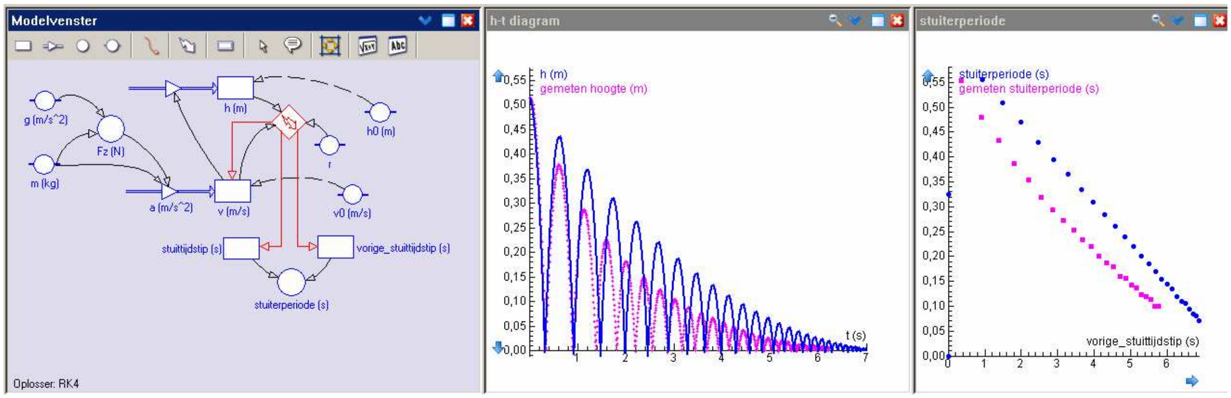


fig. 21. Vergelijking van model en meting van een stuiterende tafeltennisbal (zonder luchtwrijving).

Op dit moment zijn er verschillende verklaringen waarmee leerlingen zouden kunnen aankomen. Enkele voorbeelden van leerlingenreactie die De Beurs en Krol (1991) noemen zijn: *"De mechanica-wetten kloppen niet!"*, *"g verandert met de hoogte."*, *"r is niet constant.*" en *"Luchtwrijving is niet verwaarloosbaar.*" De laatste twee argumenten zijn steekhoudend. Eerst maar eens kijken of de verwaarlozing van luchtwrijving de grote boosdoener is. Het model uit de vorige schermafdruk kan eenvoudig aangepast worden zodat het wel met luchtwrijving rekening houdt. In Figuur 22 is het resultaat te zien: een stuk beter dan voorheen, maar op het einde van het stuiteren van de bal toch nog niet bevredigend.

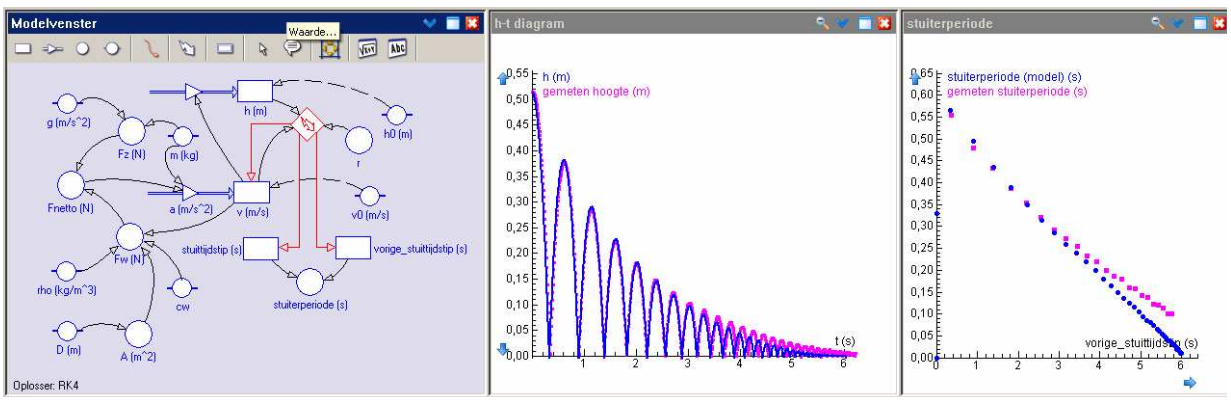
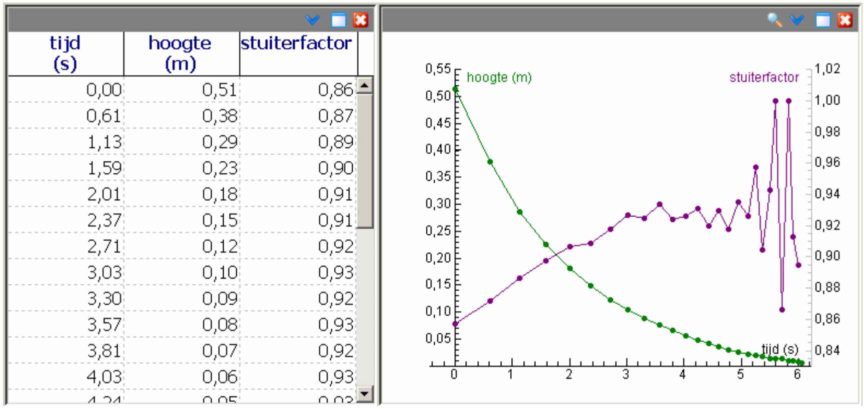


fig. 22. Vergelijking van model en meting van een stuiterende tafeltennisbal (met luchtwrijving).

De aanname dat de restitutiecoëfficiënt constant is lijkt inderdaad onjuist te zijn. Figuur 23 toont de grafiek van de gemeten opeenvolgende maximale hoogten en de hieruit berekende stuitfactor. De stuitfactor neemt in het begin van de beweging lineair toe, is daarna een tijdje nagenoeg constant, en de laatste getallen zijn waarschijnlijk onbetrouwbaar omdat de tafeltennisbal nauwelijks meer beweegt en kleine meetfouten grote afwijkingen in de stuiterfactor met zich meebrengen. Deze bevindingen kloppen met die van Bernstein (1977).

Maar schijn bedriegt hier: het is niet meer dan een gevolg van de manier waarop de stuitfactor bepaald is. Immers, als je via regressie het lineaire verband voor de stuitfactor aan het begin van de beweging (tussen 0 en 3 seconden) en de beste constante waarde na 3 seconden bepaalt, dan geeft dit alles een prachtig resultaat zonder dat er met luchtwrijving rekening gehouden hoeft te worden. In Figuur 24 is het resultaat te zien voor dit eenvoudige model met een niet-constante stuitfactor.



tijd (s)	hoogte (m)	stuiterfactor
0,00	0,51	0,86
0,61	0,38	0,87
1,13	0,29	0,89
1,59	0,23	0,90
2,01	0,18	0,91
2,37	0,15	0,91
2,71	0,12	0,92
3,03	0,10	0,93
3,30	0,09	0,92
3,57	0,08	0,93
3,81	0,07	0,92
4,03	0,06	0,93

fig. 23. Grafieken van maximale hoogte en de hiermee berekende restitutiecoëfficiënt.

Door naar opeenvolgende neerwaartse snelheden kort voor het contactmoment te kijken wordt zonder meer duidelijk dat luchtwrijving bij de beweging wel een rol speelt. Eigenlijk ben je in het model van Figuur 24 terug bij af: je hebt weliswaar een in wiskundig opzicht kloppende beschrijving van een meting, maar deze wiskundige modellering houdt helemaal geen rekening met natuurkundige principes en factoren die in de realiteit ook een rol spelen. De modellering heeft dezelfde beperking als de experimentele modellering via regressie: de beschrijvingskracht van het model is weliswaar adequaat – immers de beschikbare waarnemingen stemmen overeen – maar de voorspelkracht van het model, d.w.z. de mogelijkheid die het model geeft om voorspellingen te doen in nieuwe situaties, is buitengewoon slecht. Kortom, de kwaliteit van het model, in de betekenis die Jaap Molenaar er in zijn oratie aan de Wageningen Universiteit (2007) aan geeft, is niet goed.

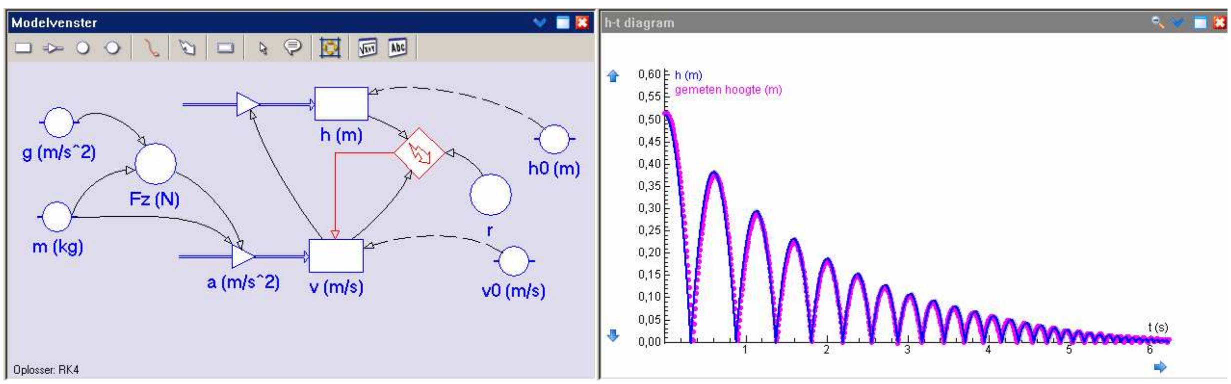


fig. 24. Model van een stuiterende bal (zonder luchtwrijving, met niet-constante stuitfactor).

Wanneer je preciezer kijkt naar de gegevens gemeten in de videoclip en de snelheden kort voor en na contactmomenten onder een vergrootglas legt, dan blijken ze toch niet een constante restitutiecoëfficiënt op te leveren: in de beginfase van het stuiteren van de tafeltennisbal is de stuitfactor kleiner dan in de eindfase. Een mogelijke verklaring is dat de stuitfactor afhangt van de snelheid waarmee de bal de tafel raakt. Dit geldt niet alleen voor tafeltennisballen, maar voor veel meer holle, met lucht gevulde ballen. Ik verwijs geïnteresseerden naar (Hubbard & Strong, 2001), waarin uitgelegd wordt waarom het kinetische energieverlies groter is naarmate de snelheid waarmee de tafeltennisbal het contactoppervlak raakt groter is. In Figuur 25 is de restitutiecoëfficiënt *r* wiskundig beschreven met een lineair verband voor hoge snelheden en een constante waarde bij lage snelheden. De overeenstemming tussen model en meting – ook tussen het berekende en gemeten verband van stuiterperiode met stuittijdstip – is nu prima en dit is inderdaad een model met goede voorspelkracht.

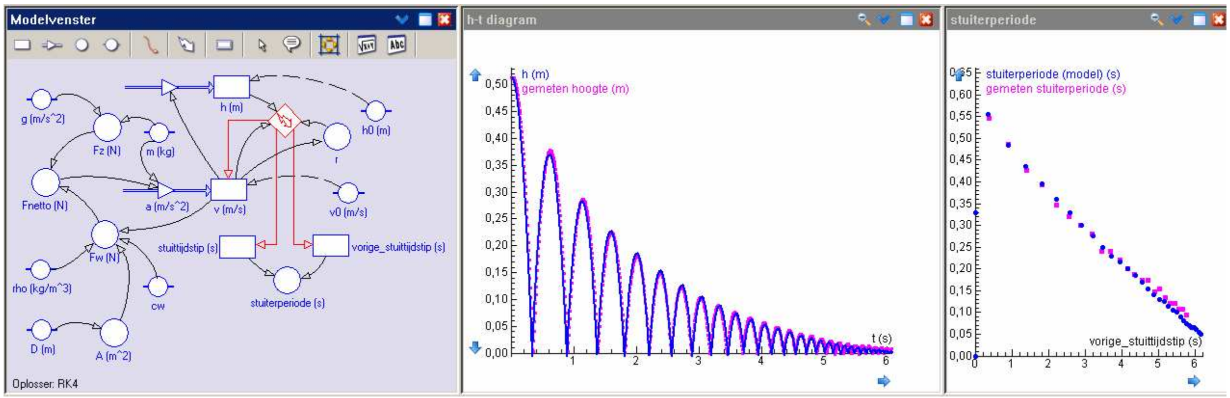


fig. 25. Modellering van een stuiterende tafeltennisbal met een snelheidsafhankelijke stuitfactor.

Zonder experimenteren en zorgvuldig vergelijken van het (computer)model met echte meetgegevens van hoge kwaliteit zouden we nooit op bovenstaand model uit zijn gekomen. Dit wil overigens nog niet zeggen dat het model en/of de hierin gebruikte hypothesen ook juist zijn. Er zijn wellicht andere op natuurwetenschappelijke gronden verdedigbare standpunten te bedenken en uit te dragen die ook tot een kwalitatief goed model leiden. Aanvullende experimenten zijn nodig. Minnaert (1972) beweert dat bij de laatste sprongen de beweging van een stuiterende rubberen of nylon bal in resonantie komt met de elastische trillingen in de bal zelf. Als interessant proefje suggereert hij verder om een bal van verschillende hoogten in zeer los zand te laten vallen en de vorm van het kuiltje te bekijken onder deze wisselende omstandigheden. Het doen van dergelijke proeven kan een stimulans zijn voor leerlingen om geboeid te raken door natuurwetenschappen. Een andere boeiende uitstap, het chaotische gedrag van een balletje dat stuitert op een trilplaat, bespreek ik nog kort in de volgende subsectie.

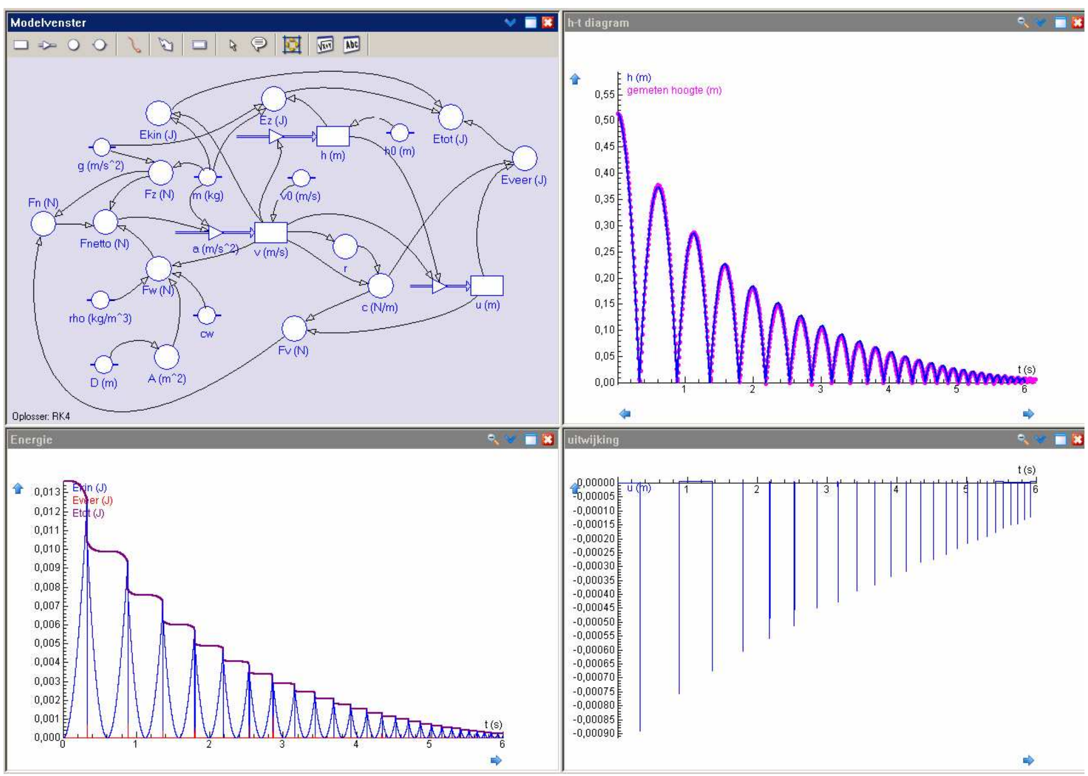


fig. 26. Modellering van een stuiterende tafeltennisbal als continu proces,
met de bal tijdens het contactmoment als een 'ideale veer' beschouwd.

Ik wil deze subsectie afsluiten met een computermodel waarin het stuiteren van een tafeltennisbal alleen maar als een continu proces opgevat wordt en verondersteld wordt dat de bal tijdens het contactmoment met het grondoppervlak zich gedraagt als een ideale veer. Met andere woorden, aan dit model liggen natuurkundige principes ten grondslag en de meer wiskundige toevlucht tot een discrete gebeurtenis wordt vermeden. In Figuur 26 is te zien dat op deze manier een haast perfecte match tussen model en werkelijkheid gerealiseerd kan worden. De kwaliteit van dit model is hoog: verschillende vormen van energie kunnen op elk moment van het stuiterproces berekend worden en wanneer de 'veerconstante' in de wet van Hooke bekend is voor de bal, dan kan ook de contacttijd vastgesteld worden. Toegegeven, het zelf maken van dit model zal buiten de mogelijkheden van de meeste leerlingen vallen, maar een natuurkundedocent kan dit computermodel wel gebruiken als uitleg hoe natuurkundige principes hun plaats vinden in het modelleerproces.

4.6. Model voor een bal die stuitert op een trilplaat.

Ik volg (Verhulst, 2003) voor de beschrijving van een bal die stuitert op een trilplaat, met als enige verschil dat ik energieverlies bij het stuiten wel inbouw. Ik neem aan dat de trilplaat beweegt volgens een sinusfunctie met uitwijking

$$y_{\text{trilplaat}} = -A\varepsilon \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

waarbij A en ε positieve getallen zijn en ε klein verondersteld mag worden. De trilplaat ondergaat dan een snelle trilling met een kleine uitwijking. Met de volgende schaling van tijd en hoogte

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad h = \frac{2y}{\varepsilon \cdot g},$$

ontstaat het dynamische systeem

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \upsilon_n \\ \upsilon_{n+1} &= r\,\upsilon_n - \lambda \cos(\theta_n + \upsilon_n). \end{aligned}$$

Hierbij is r de restitutiecoëfficiënt en wordt de parameter λ gegeven door

$$\lambda = (1+r)\cdot A$$

Het karakter van de beweging van de bal zal sterk afhangen van de parameters r en λ. Orde en chaos bij het stuiteren komt allebei voor en computersimulaties kunnen helpen bij het bestuderen van het dynamische systeem.

In Figuur 27 is te zien dat het computermodel voor een stuiterende bal in Coach 6 eenvoudig is uit te breiden voor het geval de botsingen op een platform dat regelmatig trilt plaatsvinden. De enige verandering is de definitie van de gebeurtenis wanneer de bal contact maakt met de trilplaat. De parameterwaarden, zoals bijvoorbeeld de starthoogte en beginsnelheid, zijn gelijk genomen aan die van Figuur 20, waarin een op een bureautafel stuiterende tafeltennisbal gemodelleerd is zonder rekening te houden met luchtwrijving. Luchtwrijving is in het hierboven beschreven dynamische systeem trouwens ook verwaarloosd. Voor A en ε neem ik 5, respectievelijk 0,001; de stuiterfactor is gelijk gekozen aan 0,87. Het diagram rechtsboven suggereert dat bij deze parameterwaarden na verloop van tijd een regelmatig stuiterende bal gemodelleerd is: het energieverlies dat normaliter optreedt wordt gecompenseerd doordat via de trilplaat energie aan het balletje toegevoegd wordt. De diagrammen links- en rechtsonder zijn ingezoomde fragmenten die meer details tonen van de hoogte van de bal en de trilplaat en de wisselwerking tussen beide objecten.

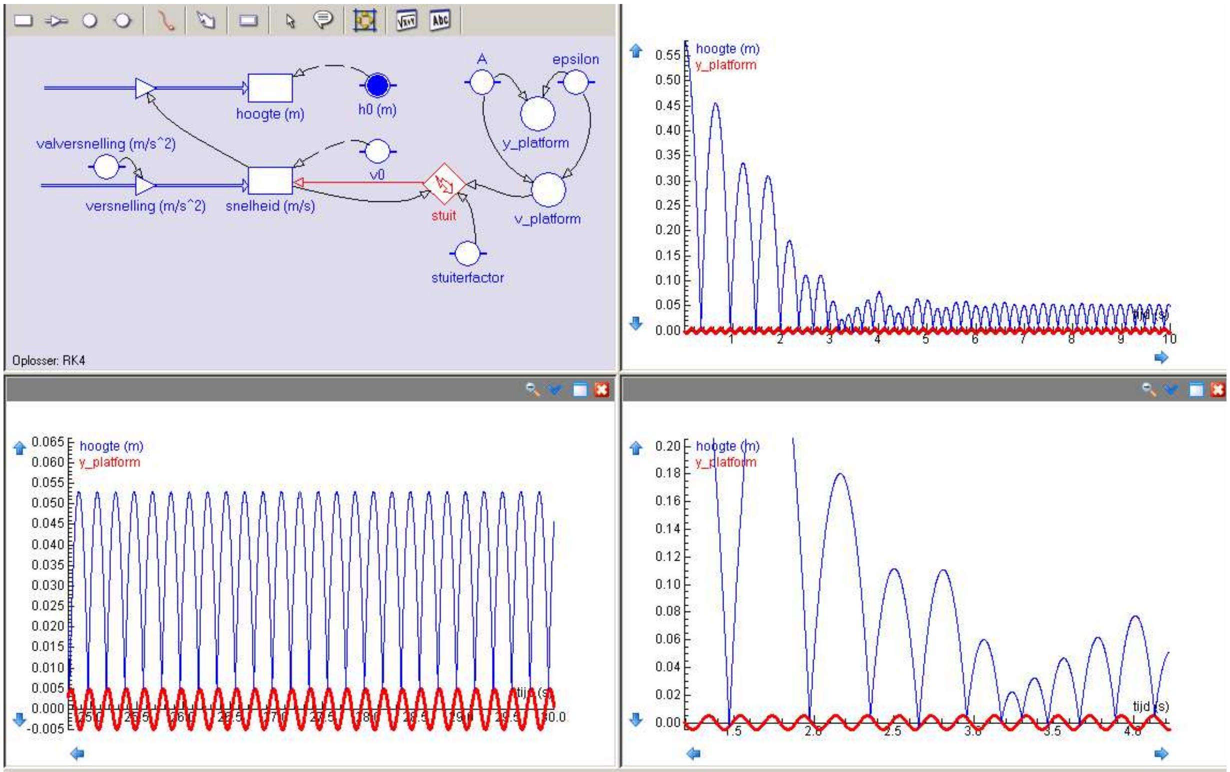


fig. 27. Model voor een bal die stuitert op een platform dat met vaste frequentie trilt met ε = 0,001.

Een kleine wijziging van de parameterwaarden heeft al grote gevolgen voor de beweging van de bal. Figuur 28 toont de grafiek van de hoogte van de bal en de trilplaat bij ε = 0,00099. In lichtgrijs is de vorige grafiek van de bal nog in de achtergrond getoond. Nu komt de stuiterende bal wel tot stilstand. Dit is geen gevolg van een foutje in de numerieke methode. Het gegeven dat kleine wijzigingen in parameterwaarden grote gevolgen hebben voor een beweging is typisch voor een chaotisch systeem.

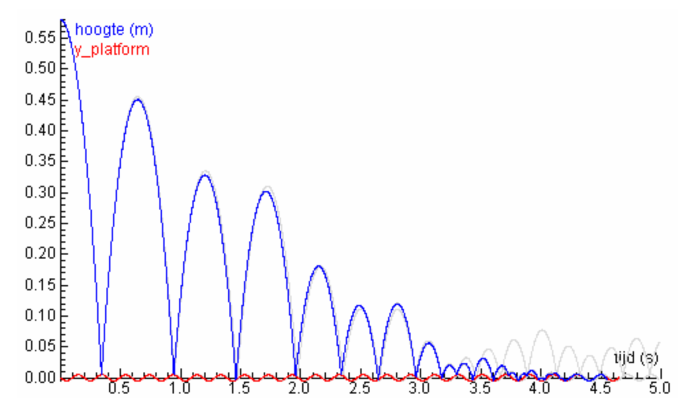


fig. 28. Model voor een bal die stuitert op een trilplaat met ε = 0,00099.

Bij kleine waarden van ε steekt er nog een tweede probleem de kop op: de kwaliteit van het algoritme dat het stelsel van differentiaalvergelijkingen numeriek oplost. Je bent nu verplicht om in Coach 6 een erg kleine stapgrootte in de 4de orde Runge-Kutta methode te kiezen. Anders hangt de gevonden oplossingskromme af van deze stapgrootte. In Figuur 29 zijn voor *A* en ε de waarden 25 en 0,00001 gekozen. Het diagram links ontstaat bij een tijdstap ter grootte van 0,000001 en het diagram rechts is een resultaat bij een 10 keer zo kleine tijdstap. Het is goed om leerlingen met dit soort zaken te confronteren opdat ze de beperkingen van computermodellen ook leren inschatten.

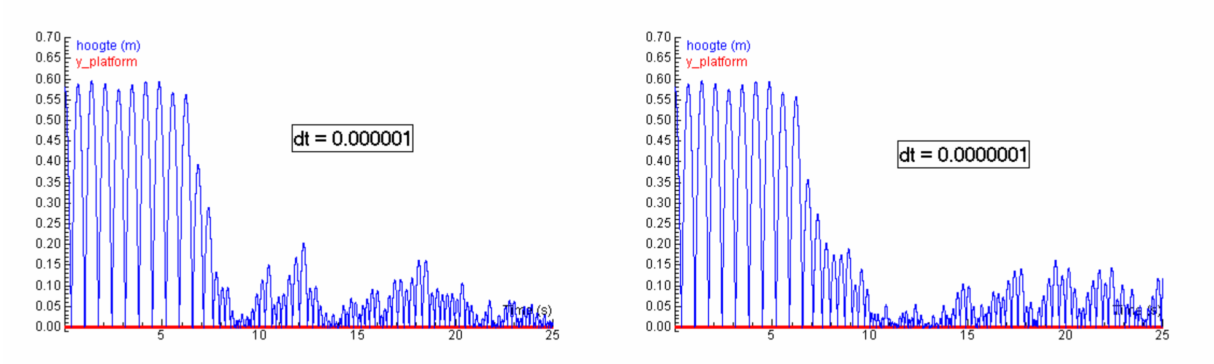


fig. 29. Modeluitkomsten voor een bal die stuitert op een trilplaat bij verschillende tijdstappen.

5. Analyse van leerlingenwerk

Hoe je het ook went of keert, uiteindelijk geeft de schoolpraktijk de doorslag of modelleeronderwijs in de bedoelde opzet realiseerbaar is. Om het concreet te houden kun je de vraag stellen of vwo-leerlingen wel in staat zijn stuiterende ballen te modelleren volgens de route die ik in dit artikel gepresenteerd heb. Daarom is een verkennend experiment in een 5-vwo klas, als praktische opdracht bij het vak natuurkunde, met het ontwikkelde lesmateriaal uitgevoerd tegen het einde van het schooljaar (in juni 2007). De leerlingen hadden in het voorafgaande schooljaar bij natuurkunde al kennisgemaakt met videometen en grafisch modelleren aan de hand van het probleem van een vallende bal en een vallende kegel. Eerder in het schooljaar hadden ze bij biologie al gemodelleerd bij de ecologie trechterproef ‘doorlaatbaarheid van grondsoorten’. Vlak voor en tijdens de praktische opdracht hadden ze bij wiskunde ook met de modelleeromgeving van Coach 6 gewerkt bij het onderwerp ‘wortels benaderen’ in een ‘E-klas setting’. Een E-klas is een combinatie van gewone lessen op school en Internet ondersteuning in de vorm van chat faciliteiten, mathcasts, en beschikbaarstelling van materialen (Heck & Houwing, 2008). De praktische opdracht bij natuurkunde is in dit kader uitgevoerd. Aan het einde zijn het materiaal, de E-klas setting en de resultaten met de leerlingen doorgesproken.

De ervaringen in een 5-vwo klas met dit lesmateriaal zijn gebaseerd op het werk van negen teams die voor het merendeel bestonden uit twee samenwerkende leerlingen, die aan het einde van het studiejaar, zelfstandig met het lesmateriaal gewerkt hebben onder begeleiding op zekere afstand van de docent in een E-klas. De leerlingen hebben met de Studio MV versie van Coach 6 ook thuis kunnen werken aan de opdrachten. Het niveau van deze groep leerlingen bij natuurkunde was net iets boven gemiddeld.

Ik bekijk alleen de kwaliteit van het werk van leerlingen door de verslagen en de Coach activiteiten die zij hebben ingeleverd zorgvuldig te lezen en te analyseren. Daartoe vergelijk ik antwoorden en resultaten van studenten met hetgeen ik als auteur van het lesmateriaal voor ogen had. Ik probeer er achter te komen in hoeverre het leerlingenwerk met de beoogde/verwachte resultaten overeenstemt. In het geval van afwijkende antwoorden en resultaten probeer ik zo mogelijk aan de hand van het taalgebruik en de gehanteerde wiskundige representaties (tabellen en grafieken) in het ingeleverde werk in te schatten welke verschillen er nu precies zijn en of de oorzaak ligt in onvolledige of gebrekkige wiskundekennis en/of natuurkundekennis of in de omgang van de leerlingen met de computerwerkomgeving Coach. Bij twijfel over aanwezige voorkennis van leerlingen is de docent geraadpleegd. Ingeval van overeenstemming tussen leerlingenwerk en het door mij beoogde werkresultaat beschouw ik dit als een teken dat de leerroute adequaat was voor de leerlingen. Een beoogd werkresultaat betekent overigens niet alleen maar dat een correct antwoord op een gestelde vraag gegeven wordt, maar betekent bij sommige vragen veel meer dat leerlingen zinvolle uitspraken over nauwkeurigheid van experimenten en suggesties voor verbeteringen doen, dan wel een onderbouwde redenering en/of uitleg geven. Hoewel ik het begrip ‘kwaliteit van leerlingenwerk’ op deze manier grotendeels vereng tot ‘overeenstemming met beoogd werkresultaat’ wil ik geen waardeoordeel in grote woorden uitspreken over het ingeleverde werk van leerlingen. Het is meer een zorgvuldige registratie en analyse van wat er in praktijk uit de bus is gekomen (of juist niet) op basis van enkel en alleen het ingeleverde werk. Andere databronnen zijn ook niet voorhanden en maken deze sectie tot niets meer, maar ook niets minder dan een verslaglegging van verkennend onderzoek naar ervaringen met het lesmateriaal op school in vergelijking met verwachtingen. In mijn ogen maakt dit het er niet minder interessant om. Een diepgaandere analyse past beter in het type van vakdidactisch onderzoek waarin een leerlijn uitgewerkt wordt en waarin leerprocessen onderzocht wordt. Wat de analyse wel een beetje bemoeilijkt is dat tweemaal geconstateerd is dat twee teams de Coachmetingen en (gedeelten van) hun analyses met elkaar gedeeld hebben. Of dit komt omdat een van de teams hulp bij de ander nodig had of gemakzucht hieraan ten grondslag ligt is niet bekend. Voordeel van E-klas setting is dat de datum van inlevering van de opdracht een indicatie geeft van wie het originele werk afkomstig lijkt te zijn. Ik heb betrokken teams als één geheel beschouwd in de analyse. Ook is dit leentjebuur spelen in sommige opdrachten bij ander teams niet goed uit te sluiten.

In de praktische opdracht deden de leerlingen het eerste deel van videometen en modelleren over een stuiterende bal, zoals eerder beschreven in dit artikel in subsecties 4.3 en 4.4. Het inbouwen van aërodynamische effecten in het model en het gebruik van een stuitfactor die afhankelijk is van de botsingssnelheid is niet in de praktische opdracht aan bod gekomen, evenmin als een model voor een bal die op een trilplaat stuitert (dit laatste was en is momenteel nog steeds geen onderdeel van het lesmateriaal). Wel is dit in de nabespreking van de opdracht kort besproken. Tabel 2 geeft een overzicht van de verschillende uitgevoerde activiteiten uit het lesmateriaal, dat beschikbaar gesteld is op mijn homepage (Heck, 2007c).

Opdracht	*Beschrijving/Doel*
3.2 Enkele schermutselingen vooraf: experimenteren en meten	
13	Videoanalyse van een stuiterende bal aan de hand van een gegeven videoclip. Bepaling van stuittijdstippen en stuiterperioden. Oordeelvorming over nauwkeurigheid van de meetresultaten.
14	Simultane video- en geluidsregistratie van een verticaal stuiterende tafeltennisbal. Bepaling van stuittijdstippen, stuiterperioden en uitdooftijd. Oordeelvorming over de nauwkeurigheid van de meetresultaten.
15	Videoanalyse van een verticaal stuiterende tafeltennisbal. Bepaling van stuittijdstippen, stuiterperioden en uitdooftijd. Vergelijking van resultaten van video- en geluidsregistratie.
16	Videoanalyse van een verticaal stuiterende bal m.b.v. een hoge snelheidscamera Bepaling van hoogte-tijd en snelheid-tijd grafieken, stuittijdstippen en stuiterperioden. Vergelijking van resultaten van videometingen bij verschillende beeldfrequenties.
3.3 Een eenvoudig model voor een stuiterende bal	
17	Karakterisering van hoogte-tijd grafieken in termen van het stuiterproces: ideale en wrijvingsloze botsing, onveerkrachtige botsing en een realistische stuitering.
18	Kwalitatieve analyse van een tafeltennisbal die verticaal stuitert op een tafel. Verklaring voor energieverlies.
19	Energieverlies bij onveerkrachtige botsing zonder luchtweerstand. Experimentele bepaling van het energieverlies via een videometing.
20	Analyse van snelheid-tijd grafiek van een verticaal stuiterend balletje.
21	Tekstgebaseerd computermodel voor een stuiterbal.
22	Grafisch computermodel voor een stuiterbal en Runge-Kutta methode. Vergelijking van computermodel met meetresultaten.
3.4 Modelleren met formules	
23	Bewijs van wiskundige formules voor stuitfactor en uitdooftijd van ideale wrijvingsloze stuiterbal. Toepassing van wiskundige formules bij concrete meetgegevens.
24	Computermodel ter analyse van geluidsregistratie van een stuiterende tafeltennisbal.

Tabel 2. Overzicht van activiteiten gedaan in de 5-vwo klas.

Opdracht 13
In de eerste opdracht zijn de leerlingen gestart met een lege Coach activiteit voor videometen en hebben ze een gegeven videoclip, waarin een meisje in een klaslokaal een stuiterbal laat stuiteren op een vloer (zie Figuur 16), geïmporteerd. Ze hebben daarna zelf een geschikt assenstelsel gekozen, zelf de ijking van afstanden uitgevoerd en andere keuzes voor de videoanalyse gemaakt. Tot slot hebben ze in hun metingen achtereenvolgende stuittijdstippen en stuiterperioden bepaald en de nauwkeurigheid van deze bepalingen onder de loep genomen.

Op basis van het werk lijkt de conclusie gerechtvaardigd dat de leerlingen geen onoverkomelijke instrumentele moeilijkheden met de videoanalyse hebben: hun kennis van videometen in Coach en hun begrip van de opdracht was ruimschoots voldoende. Een enkel team vergat de lengtemeting te ijken, waar een ander team juist zijn best deed te corrigeren voor het gegeven dat de bal in de videoclip een beetje naar voren stuitert. Wel valt op dat alle leerlingen de videometing hebben gestart vanaf het eerste de beste videobeeldje in de film. Geen van de teams heeft er voor gekozen om de meting te starten vanaf het moment dat het meisje in de videoclip de bal daadwerkelijk loslaat en dit tijdstip gelijk te stellen aan $t = 0$. Misschien is dit niet eerder aan bod gekomen in lessen of practica, maar eerlijk gezegd konden leerlingen hiervan ook in deze fase van de praktische opdracht nog niet het gemak inzien; dit blijkt pas handig te zijn wanneer een computermodel van de stuiterbeweging gemaakt wordt en de modelresultaten met meetresultaten vergeleken worden. Wellicht vertrouwden ze op de Coach faciliteit om geïmporteerde achtergrondgrafieken horizontaal te verschuiven zodat de tijdschalen van meting en model met elkaar gerelateerd kunnen worden. Terugblikkend moet ik ook toegeven dat in de aangeboden videoclip niet zo duidelijk is of het eigenlijk wel een grote rol speelt of het eerste frame in de clip al dan niet gebruikt wordt: het meisje maakt al gelijk een beweging voor het loslaten van de bal. Als het mijn bedoeling geweest is om de leerlingen zich te laten realiseren dat de keuze voor tijdstip $t = 0$ door henzelf gemaakt kan en moet worden, dan zou een langer fragment vooraf in de videoclip moeten komen waarin de bal nog duidelijk niet losgelaten wordt.

Op één team na heeft iedereen voor stuiterperioden resultaten gevonden die overeenstemmen met mijn eigen bevindingen. Het team met andere resultaten heeft zelf al opgemerkt in hun verslag dat een verkeerde meting rond de derde stuitering gedaan was, maar heeft de meting niet meer aangepast. Een tweede oorzaak van fouten was een door de leerlingen onopgemerkte rekenfout in de berekening van de stuiterperiode als verschil van twee stuittijdstippen.

De leerlingen deden over de nauwkeurigheid van de meting zinvolle uitspraken: ze bekritiseerden zowel de kwaliteit van de experimentele opzet als die van de film (de bal stuitert niet alleen in verticale richting en raakt op een bepaald moment een beetje buiten beeld) en ze identificeerden de beeldfrequentie van de film als een belangrijke oorzaak voor de ruime marge in de bepalingen van de stuittijdstippen. Geen van de teams heeft overigens uit de bekende beeldfrequentie de foutenmarge bepaald. Volstaan werd met meer algemene uitspraken zoals: *"De duur van het contact met de ondergrond is erg klein. Het is dus met behulp van videometen erg lastig om het stuitpunt te vinden, gezien dat een film een opeenvolging van momentopnames is. Hoe meer beelden per seconde een camera weet vast te leggen hoe beter de meetresultaten zullen worden."* Wat dergelijke zinnen ook illustreren is dat de leerlingen zich bewust zijn van het verschil tussen tijd in de werkelijkheid en tijd in de videoclip. Terwijl in de echte wereld tijd een continue, irreversibele grootheid is die niet gestopt kan worden, is tijd in een videoclip een rekbaar begrip (Boyd & Rubin, 1996). Hierin is tijd een discontinue grootheid die alleen als continu wordt ervaren bij het afspelen van een film. In een videoclip kun je met tijd spelen door een film sneller of langzamer af te spelen, door stap voor stap filmbeeldjes in voorwaartse of achterwaartse richting te doorlopen en door een film te pauzeren (bijvoorbeeld om in een beeldje preciezer naar een situatie te kijken en metingen te doen). Hedendaagse leerlingen zijn kennelijk vertrouwd met de aparte structuur en controleerbaarheid van het begrip tijd in video.

Opdracht 14

In deze opdracht is in Coach 6 tegelijkertijd een videoclip (beeldfrequentie = 30 fs) opgenomen en een drukmeting met een geluidssensor (meetfrequentie = 900 Hz) gedaan. Ook nu weer zijn stuittijdstippen en stuiterperioden bepaald. De leerlingen hebben de nauwkeurigheid van beide metingen met elkaar vergeleken. Daarnaast is hen gevraagd mogelijke oorzaken voor de korter wordende stuiterperioden te noemen.

Als mogelijke oorzaken hebben de leerlingen het volgende opgeschreven:

- *"Door het stuiteren verliest de bal op een of andere manier energie."*
- *"Het energieverlies of de luchtwrijving die het balletje ondergaat."*
- *"Luchtwrijving houdt de bal tijdens zijn val tegen."*
- *"(1) Hij verliest energie bij iedere stuiter door het indeuken. (2) Luchtwrijving."*
- *"Mogelijke oorzaken hiervan zijn luchtwrijving, wrijving van het oppervlak waartegen de bal botst en vervorming van de bal."*
- *"De bal verliest energie als gevolg van de luchtwrijving. Daarnaast deukt de bal in op het moment van stuiteren waardoor er ook energie verloren gaat (hiermee wordt een kracht uitgeoefend op het oppervlak)."*
- *"Kortere stuitperiodes ontstaan door een verlies in energie. Deze energie wordt verloren tijdens de stuit (het indeuken van de bal) en de luchtwrijving."*
- *"Ik denk vooral luchtwrijving, en energie verlies doordat de bal tegen de ondergrond stuitert."*

De leerlingen konden dus de twee belangrijkste en meest voor de hand liggende oorzaken noemen en het energieverlies tijdens de stuit koppelen aan vervorming van de bal, maar gek genoeg niet aan vervorming van de ondergrond tijdens het stuitermoment. In welke vorm van energie een deel van de bewegingsenergie wordt omgezet is onvermeld gebleven in de verslagen. Hier hebben de leerlingen geen punt van gemaakt. De wet van behoud van energie gebruiken leerlingen kennelijk alleen maar in situaties waar er expliciet om gevraagd wordt. Waarschijnlijk werkt het stellen van gesloten vragen in de opdrachten dit in de hand: je beantwoordt slechts wat gevraagd wordt, niet meer en niet minder. Dit is een nadeel bij een geleide verkenning van een probleem waarin geen of niet vaak genoeg open vragen aan bod komen.

De simultane videoregistratie en geluidsmeting heeft meer problemen met zich mee gebracht dan verwacht. Het is bijvoorbeeld niet elke leerling duidelijk dat het begin van de geluidspiek het contactmoment aangeeft. De volgende uitspraak illustreert dit: *"Ik denk dat de nauwkeurigheid van een geluidsmeting misschien wel beter is dan die van beeld, omdat je bij geluid niet echt iets kunt 'missen'. Wel is het zo dat je een 'lang' moment (aantal ms) van geluid hebt, je moet dan een beetje gokken waar de stuiter precies was (gemiddelde of iets dergelijks)."* Het is niet voor elke leerling blijkbaar eenvoudig om een goed beeld van een proef te hebben enkel en alleen aan de hand van een gegeven meetresultaat. Dit kan ook verklaren waarom een leerlingenteam opgemerkt heeft dat *"videometing in dit geval nauwkeuriger is, omdat we bij alleen een geluidsfragment niet kunnen bepalen of de bal recht stuitert."* Dit team vindt kennelijk een verifieerbaar beeld van de proef belangrijk en heeft weinig vertrouwen in meetgegevens alleen. Ze hebben daarbij wel over het hoofd gezien of zich onvoldoende gerealiseerd dat de videoclip en de geluidsmeting gesynchroniseerd waren in de Coach activiteit. Zij hadden m.b.v de 'uitlees-modus' van het grafiekenvenster van de geluidsregistratie en/of 'video-scrubbing' gewoonweg kunnen zien in de videoclip wat er op een gegeven tijdsmoment precies gebeurde. Omdat de synchronisatie van videoclip en geluidsmeting wel expliciet in de opdracht genoemd stond heb ik maar twee verklaringen hiervoor: (1) het staat voor leerlingen teveel tussen de regels van de tekst door of (2) leerlingen hebben zelf nog geen en weinig praktijkervaring met simultane video-opname en metingen met sensoren. Het laatste zou ook verklaren waarom drie teams bij de beantwoording van vragen in de opdracht een videometing op de meegeleverde videoclip gaan doen en de geluidsmetingen links laten liggen. Dit komt pas in de volgende Coach activiteit aan bod. Een rijke ervaring met het zelf doen van experimenten lijkt me nuttig, zo niet noodzakelijk om dit soort uitglijders te voorkomen. Van leerlingen mag niet verwacht worden dat ze zonder eigen ervaringen een experimentele opzet kunnen doorgronden. Practicum is mijns inziens onontbeerlijk in goed natuurkundeonderwijs.

De door leerlingen gevonden uitdooftijd varieert van 5 seconden tot 8 seconden. De belangrijkste reden voor deze variatie is dat sommige leerlingen niet het tijdstip van loslaten van de bal als startmoment gekozen hebben of dat ze juist pas begonnen zijn met tijdmeting bij de eerste stuit van de tafeltennisbal op de tafel. Een kwestie van nauwkeurig werken, dunkt me.

Opdracht 15

Deze opdracht is min of meer identiek aan opdracht 13, maar leerlingen wordt nu ook gevraagd de nauwkeurigheid van meetresultaten via beeld- en geluidsregistratie met elkaar te vergelijken.

De meeste leerlingen merkten inderdaad op dat de videometingen bij een beeldfrequentie van 30 beeldjes per seconde onnauwkeuriger is dan de geluidsmeting. Wat precies de beperkingen van videometing zijn was duidelijk, zoals moge blijken uit het volgende citaat: *"Het is wel vrij nauwkeurig maar niet optimaal. Het balletje is namelijk rond en het puntje wat je met videometen gebruikt niet. Je kunt dus op meerdere plekken van de bal klikken. Als je de eerste keer de top van de bal neemt en de tweede keer de onderkant is het dus minder nauwkeurig. Ook heb je maar 30 frames per seconde dus kun je makkelijk de stuiter missen omdat daar geen beeldje van is. Het geluid is wat dat betreft nauwkeuriger."* De objectiviteit en de resolutie van de meting wordt door deze leerlingen terecht ter discussie gesteld.

Opvallend was wel dat één leerlingenteam in hun rapportage opschreef dat Coach interpoleert om een redelijke meetgrafiek te kunnen tekenen: *"De metingen zijn erg onnauwkeurig door het lage aantal beeldjes per seconde (FPS) van de gebruikte camera. Per beeldje legt de bal een flinke afstand af. Daar wordt de meting erg onnauwkeurig van omdat Coach veel moet interpoleren om een redelijke grafiek te kunnen tekenen."* In werkelijkheid zijn in een Coach diagram alleen de meetpunten onderling met rechte lijnstukken verbonden om een beter beeld van het verloop van een meting te geven. Dit kun je interpolatie noemen, maar er worden eigenlijk geen nieuwe punten uitgerekend; dit is alleen een kwestie van visualisatie en er valt over te discussiëren of de standaardinstelling juist niet alleen de meetpunten zou moeten tonen zonder verbindingslijnstukken. De opmerking van de leerlingen zou er op kunnen wijzen dat ze een alternatieve conceptie hebben van de manier waarop in de software een grafiek bij metingen tot stand komt.

Opdracht 16

In deze opdracht krijgen de leerlingen de kans een videoanalyse te doen van een stuiterende bal aan de hand van een filmpje dat met een hogesnelheidscamera gemaakt is; de beeldfrequenties zijn 50 en 150 beeldjes per seconde. De videometing wordt gedaan via point-tracking. Leerlingen moeten zelf voor een deel de videometing voorbereiden, bijvoorbeeld. een geschikt assenstelsel en schaling kiezen; point-tracking instellingen zijn daarentegen in het eerste onderdeel van de opdracht al netjes klaargezet omdat het de eerste keer is dat leerlingen deze wijze van meting toepassen. In het tweede deel, bij de videoclip met een frequentie van 150 beeldjes per seconde, kunnen leerlingen dit zelf doen. De videoanalyse beperkt zich in deze opdracht tot het maken van de hoogte-tijdgrafiek en de snelheid-tijdgrafiek en het nagaan wat het verschil in nauwkeurigheid tussen een videometing van een filmpje met beeldfrequentie van 50 en 150 fps is.

De videometing en het tekenen van de grafieken heeft geen enkel team voor problemen gesteld. Iedereen heeft begrepen dat een hogere beeldfrequentie een hogere nauwkeurigheid van meetresultaten oplevert. De volgende uitspraken illustreren dit:

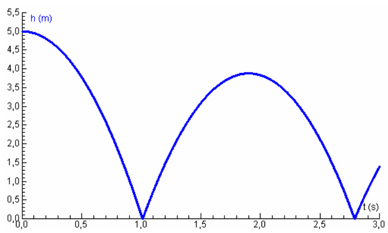
- *"De meting met 150 fps is het meest nauwkeurige, omdat er duidelijker te zien is wanneer het balletje de grond raakt. Ook is nauwkeuriger te meten wanneer het balletje waar is."*

- *“De 150fps is veel nauwkeuriger. Je hebt daar veel meer beeldjes, dus veel meer meetpunten. Hierdoor kun je veel minder makkelijk een stuiter missen (omdat er geen beeldje van is) en is de meting dus nauwkeuriger.”*
- *“Omdat de tweede meting het voordeel heeft van driemaal zoveel informatie (namelijk 150 i.p.v. 50 FPS) is deze meting veel nauwkeuriger. De meetgegevens zijn op die manier gedetailleerder Er zijn meer beeldjes per seconde vastgelegd dus tussenwaarden die je anders zou moeten schatten kun je nu nauwkeurig bepalen.”*

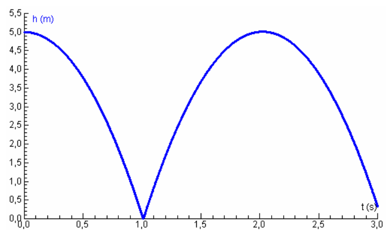
Alleen werd er soms onterecht gedacht dat een meting die langzaam verloopt per definitie nauwkeuriger is, gelet op de uitspraak *“Degene met 150 beeldjes per seconde, die gaat veel langzamer te werk en die is daarom veel nauwkeuriger. Ook zijn het 150 beeldjes per seconde en 50 beeldjes per seconde is wat minder”*. In de leefwereld van de leerling mag nauwkeuriger werken dan wel meer tijd kosten, voor een videometing op de computer via point-tracking gaat dit argument niet echt op!

Opdracht 17

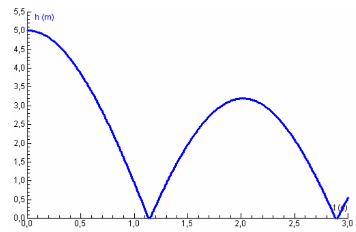
De vraag is om onderstaande hoogte-tijdgrafieken voor een stuiterende bal te koppelen aan het ideale wrijvingsloze geval, de onveerkrachtige botsing en een realistisch geval. Ook wordt een uitleg verlangd.



Figuur A



Figuur B



Figuur C

Alle leerlingen waren het er over eens dat Figuur B het ideale wrijvingsloze geval representeert. De verwarring ontstond pas bij keuze tussen A en C voor onveerkrachtige botsing, Dit mag ten dele toegeschreven worden aan de vraagstelling, maar ook het taalgebruik misleidde enkele studenten: zij koppelden Figuur C aan een onveerkrachtige botsing omdat ze concludeerden dat de bal na de stuit minder hoog komt als er geen sprake is van vering. Zij schreven op:

- *“De onveerkrachtige botsing is grafiek C. Hier komt de bal niet echt hoog omdat hij dus niet echt mee veert.”*
- *“Figuur C: Onveerkrachtige botsing, deze stuitert en gaat weer omhoog maar niet naar dezelfde hoogte als waar hij vandaan kwam. Dit wil zeggen dat de tennisbal geen wrijvingsloos geval is. Bij deze zouden wij zeggen dat het eentje is zonder veerkracht, hij gaat niet zo hoog als de realistische botsing.”*
- *“A is het model dat het realistische geval weergeeft. De pingpongbal is een beetje elastisch, en stuitert dus hoger dan model C, dat de onveerkrachtige botsing weergeeft.”*

Deze leerlingen dachten, al dan niet door het woordgebruik op een verkeerd been gezet, bij een onveerkrachtige botsing niet aan een botsingsproces waarin een deel van de bewegingsenergie in een andere vorm van energie omgezet wordt, maar aan materiaaleigenschappen van bal en vloer. Andere leerlingen hanteerden daarentegen een correct natuurkundig begrip van niet-elastische botsing en waren heel precies in hun redenering en uitleg:

- *“In Figuur A komt de bal steeds minder hoog, maar wel hoger dan in Figuur C. Bij A is er sprake van de onveerkrachtige botsing. Figuur C geeft het realistische geval weer: er is niet alleen rekening gehouden met de onveerkrachtigheid, maar kennelijk ook met de luchtwrijving omdat de bal hier het minst hoog komt.”*
- *“Figuur C: Deze grafiek geeft het realistische geval weer. Omdat het balletje luchtwrijving ondervindt, is de eerste stuiter 0,2 seconde later dan in de andere 2 gevallen. Bovendien gaat er*

bij een echte botsing energie verloren in de stuiter (door in en uit deuken van het balletje). Dit samen geeft dat het balletje minder hoog komt dan bij figuur A. Deze grafiek moet hierom wel bij het realistische geval horen." en *"Figuur A & Onveerkrachtige botsing omdat: De eerste 'valperiode' is gelijk aan die van de ideale wrijvingsloze geval, hierdoor kan het dus nog niet de realistische geval zijn. (Dit is een soort van ongerijmt bewijs... niet B en niet C dus....A).*

Opdracht 18

In deze vraag worden leerlingen uitgedaagd om verklaringen te vinden voor het gedrag van een stuiterende tafeltennisbal. Zij moeten beargumenteren of bepaalde factoren van invloed zijn op energieverlies tijdens botsingen en een experiment verzinnen om na te gaan of luchtweerstand dan wel energieverlies tijdens het botsen de belangrijkste rol speelt bij een stuiterende tafeltennisbal. Een detailopname van een stuiterende tafeltennisbal in een videoclip met een beeldfrequentie van 250 fps is beschikbaar om de exploratie van leerlingen te ondersteunen.

Wat het experiment betreft om uit te zoeken of de luchtweerstand dan de onveerkrachtigheid van de botsing de belangrijkste rol in het stuiterproces speelt dachten de meeste leerlingen gelijk aan hetzelfde experiment uitvoeren in een vacuüm. Zij schreven bijvoorbeeld op: *"Wij denken dat je dit van tevoren niet kunt bepalen. Je kan de bal in een vacuüm ruimte laten vallen en kijken of hij dan hoger komt dan in de gewone situatie. Als het verschil tussen de gewone en de nieuwe situatie erg groot is, is luchtwrijving de grootste oorzaak. Anders de botsing."* en *"Laat de bal vallen in een luchtledige ruimte. Als deze dan eindeloos lang door blijft stuiteren wordt dat veroorzaakt doordat er geen energie verloren gaat bij het stuiteren en wordt er dus alleen energie verloren door de luchtweerstand. De luchtweerstand is altijd aanwezig wanneer een object zich beweegt in lucht, dus die is sowieso van toepassing."*

Eenieder merkte op dat de gedetailleerde opname met de hogesnelheidscamera bij een frequentie van 250 beeldjes per seconde aantoont dat er een behoorlijk verschil in snelheid van de bal vóór en ná botsing is. Dit bracht hen tot het inzicht dat het verlies aan bewegingsenergie bij elke botsing op de tafel wel eens de belangrijkste factor zou kunnen wezen voor de vorm van de baan van de bal: *"Als de snelheid omlaag en de snelheid omhoog (na de stuiter) bij benadering gelijk zijn, gaat er zeer weinig energie verloren in de stuiter, waaruit blijkt dat de luchtwrijving het grootste aandeel in energieverlies heeft. Als de snelheden een groot verschil hebben, gaat er wél veel energie verloren bij het stuiteren. Zoals u in de grafiek linksonder kunt zien, is de |helling| best sterk veranderd (ongeveer 8 graden), dus er gaat aardig wat energie verloren in de stuiter."* Een team merkte op dat het versnelling-tijd grafiek geschikt is om informatie hierover te verkrijgen: *"Omdat er met zo veel beeldjes per seconde is gemeten is een zeer nauwkeurige videometing mogelijk. Je kan in een grafiek de afgeleide van de hoogte nemen en dan daarvan nog eens de afgeleide zodat je de versnelling krijgt, ja daar is over nagedacht. Aan de versnelling kun je zien of de bal meer wordt afgeremd door de luchtwrijving of door de botsing."* Dit tweetal leerlingen was al duidelijk gespitst op een gegevensanalyse waarbij de overeenstemming tussen een op natuurkundige principes gebaseerd, wiskundig model uitsluitsel geeft over de belangrijkheid van een bepaalde factor.

De argumentatie voor het positieve antwoord op de vraag of de snelheid van de bal bij het neerkomen van invloed was op het energieverlies waren divers. De meeste leerlingen dachten in absolute grootheden door te kijken naar het hoogteverschil tussen opeenvolgende botsingen. In de eerste stuitering is het hoogteverschil het meest merkbaar in absolute waarde; als je zou kijken naar de relatieve energievermindering per stuit is het antwoord en de redenering minder duidelijk. Slechts één team zocht een verklaring in het volgende: *"De snelheid is ook van belang: die heeft invloed op de hoeveelheid vervorming van de bal tijdens de botsing."*

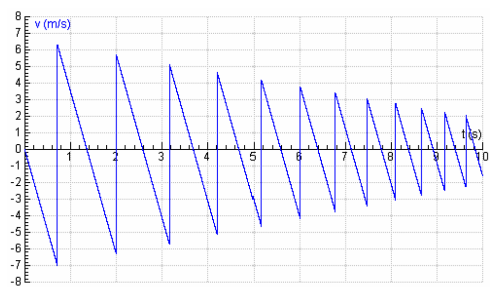
Op de vraag of het energieverlies bij botsing met bekende natuurkundeformules te berekenen is gaf het merendeel van de teams aan het verschil in kinetische energie voor en na botsing te kunnen berekenen, maar slechts twee teams kwamen met de expliciete formule $\Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$ (voor het energieverlies in de stuiter) op de proppen.

Opdracht 19
In deze opdracht wordt de aandacht van leerlingen gevestigd op het principe van een niet-elastische botsing en wordt luchtweerstand buiten het model van een stuiterende tafeltennisbal geplaatst. Leerlingen wordt ook gevraagd te berekenen welk percentage van de kinetische energie verloren gaat bij de botsing in een videoclip gemaakt met een hogesnelheidscamera.

Bijna alle leerlingen noemden warmte als de energievorm waarin een deel van de bewegingsenergie omgezet wordt. Minder werd gedacht aan vervorming van de bal en de ondergrond of mogelijk energieverlies door de productie van (geluids)trillingen bij botsing. Niet zo gek eigenlijk want uiteindelijk is het energieverlies bijna geheel toe the schrijven aan omzetting in warmte. Bovendien, als leraar ben je vaak al blij als leerlingen met warmte als energievorm aan komen zetten.

De bepaling van de balsnelheid voor en na de botsing opgenomen met een hogesnelheidscamera leverde verschillende antwoorden op en foutieve formules voor het energieverlies. Belangrijkste oorzaak voor de verschillende uitkomsten van snelheden was dat menig team van leerlingen zonder meer aannam dat het laagste gemeten punt in de hoogte-tijdgrafiek ook daadwerkelijk bij het contactmoment past. Bij een lineaire regressie van punten voor en na de botsing blijkt dit niet waar te zijn. Leerlingen kregen daardoor de te lage schatting voor de snelheid na de botsing en een te hoog ingeschat energieverlies. Daar waar het correcte antwoord ongeveer 16% is varieerden antwoorden van leerlingen tussen 7 en 55 procent. Wat opviel in het formulewerk voor het energieverlies was dat veel leerlingen verkeerde formules hanteerden zoals: energieverlies = $\text{snelheid}_{\text{na}}/\text{snelheid}_{\text{voor}} \times 100$, (in procenten), energieverlies = $\text{snelheid}_{\text{na}}^2/\text{snelheid}_{\text{voor}}^2 \times 100$ (in procenten) en de foutieve formule energieverlies = $\text{snelheid}_{\text{voor}} / \text{snelheid}_{\text{na}} \times 100 - 100$ (in procenten).

Opdracht 20
In deze opdracht moeten leerlingen redeneren aan de hand van de volgende snelheid-tijdgrafiek



Zij moeten bijvoorbeeld kunnen aangeven waarom de schuine lijnen in de grafiek evenwijdig aan elkaar lopen, hoe je aan de grafiek kunt zien dat men het balletje heeft laten vallen en niet omhoog of omlaag gegooid heeft, de beginhoogte waarop de bal losgelaten is schatten en de grafiek van kinetische energie tegen tijd schetsen.

Met deze opdracht hebben de meeste leerlingen over het algemeen geen moeite gehad, maar de formuleringen haperden nog wel eens. Goedbedoelde verklaringen van de evenwijdigheid van schuine lijnen was bijvoorbeeld: *"De factor waarmee ze schuin hellen is de zwaartekracht, deze is constant tijdens de meting (als het goed is :P). Daardoor zijn de schuine lijnen dus ook evenwijdig."* en *"De luchtwrijving is niet zo groot, waardoor het balletje met een constante versnelling afremt. Daardoor zijn de lijnen evenwijdig."* Veel leerlingen hebben een realistische hoogte geschat door de gemiddelde snelheid te berekenen over de eerste val en dit getal vermenigvuldigen met de valtijd. Sommigen hebben er maar een slag naar geslagen.

Het schetsen van de grafiek van kinetische energie leverde verschillende resultaten op. Eén team liet dit over aan Coach en gebruikte hiervoor de meting uit opdracht 16 en de formule Ek = 2,5*0,5*0,003*v^2. Deze formule lijkt op het eerste gezicht vreemd, maar er staat eigenlijk niets anders dan dat ze de formule $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ gebruikt hebben met massa m = 0,003 kg. Het getal 2,5 is ingegeven omdat de bal in de opdracht 20 ongeveer 2,5 keer zo snel gaat als in opdracht 16. De computergrafiek staat linksboven in Figuur 30. De leerlingen hebben geen commentaar bij hun schets geschreven wat betreft het kortstondige moment van botsing waarop de kinetische energie gelijk aan nul wordt. In Figuur 30 zijn ook drie schetsen te zien van leerlingen die zelf een tekening gemaakt hebben. Twee hiervan tonen alternatieve concepties.

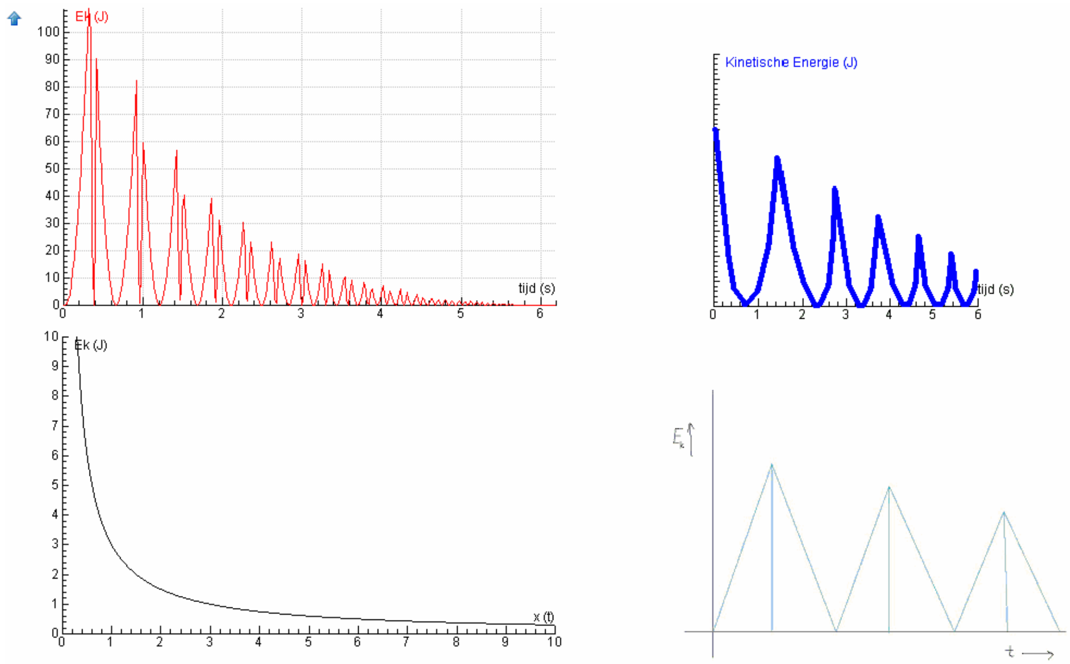
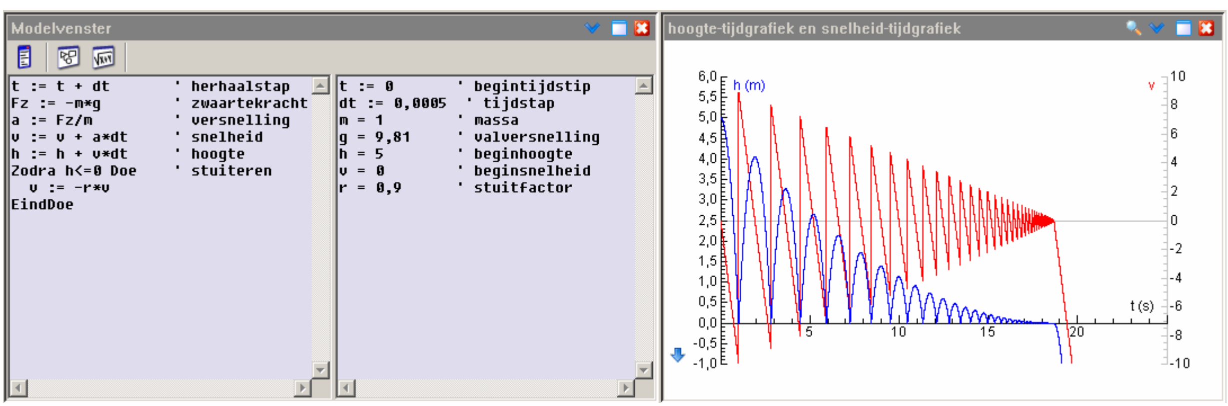


fig. 30. Schetsen van leerlingen over de kinetische energie van de bal. Linksboven m.b.v. een video-meting, rechtsboven een correcte zelfbedachte schets en onderaan twee foutieve figuren.

Opdracht 21

Leerlingen wordt gevraagd het tekstgebaseeerde computermodel van een vallende bal uit Figuur 12 zodanig aan te passen dat het een stuiterende bal modelleert. Verder moeten ze wat numerieke problemen in het computermodel onderzoeken.

Zonder veel problemen hebben de leerlingen aanpassingen aangebracht die werken. Ik toon in Figuur 31 de schermafdrukken van de twee soorten van leerlingenwerk die ik tegengekomen ben:



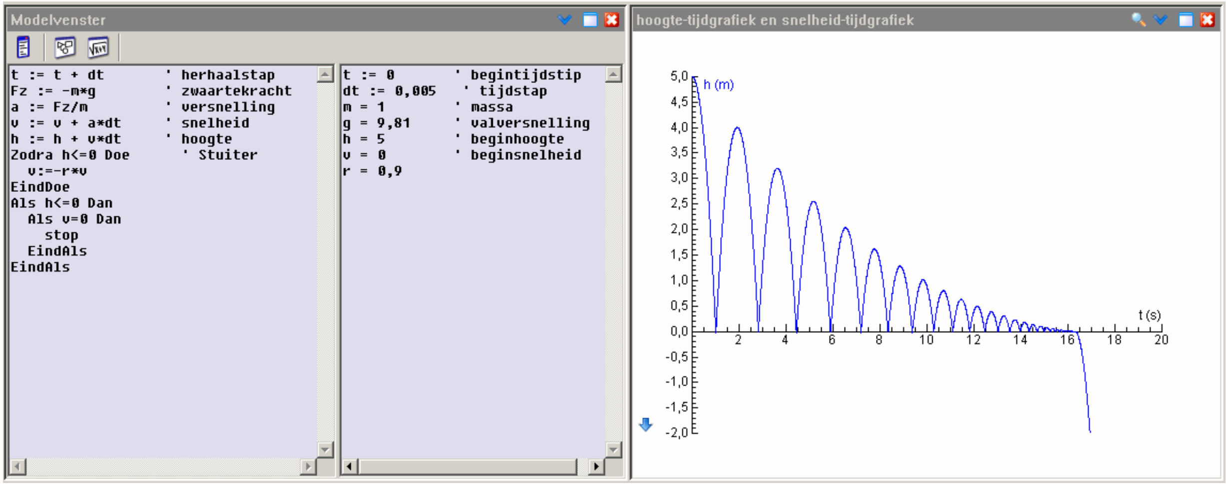


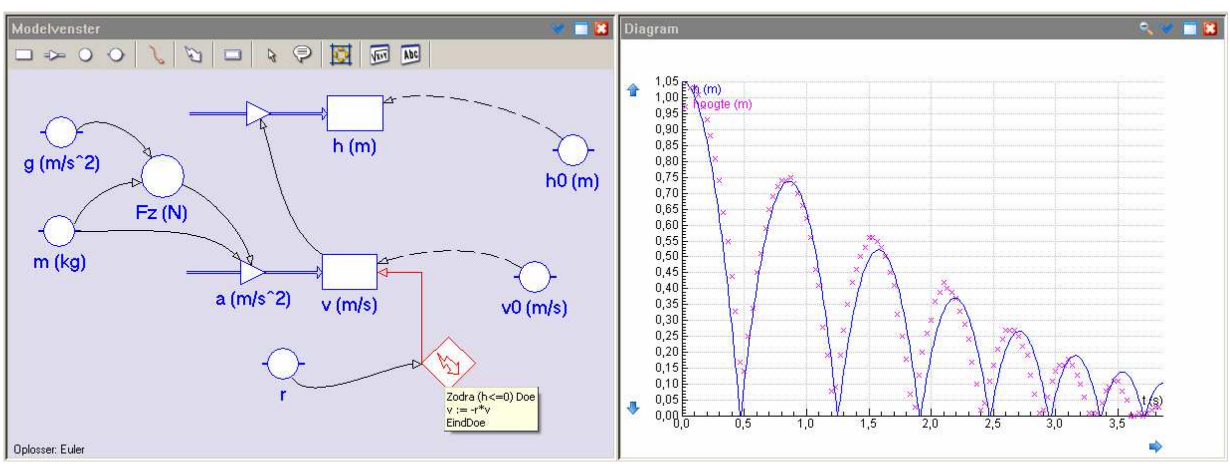
fig. 31. Twee tekstgebaseerde modellen van leerlingen voor een stuiterbal.

De tweede schermafdruk toont de worsteling die deze leerlingen gehad hebben met de numerieke problemen en hun poging om tot een correcte beëindiging van de stuitering te komen. Sommige leerlingen geven overigens wel een plausibele verklaring voor de numerieke problemen. Een voorbeeld: *"Het model geeft een benadering van de situatie in stappen. Daarom komt het voor dat de bal soms onder h = 0 pas stuitert. Als de bal vervolgens niet meer boven h = 0 komt na het stuiteren zal deze versnellen naar beneden, wat de plotselinge daling aan het einde van de grafieken verklaart."* Deze tekst illustreert mijns inziens dat de leerlingen een goed beeld hadden van hetgeen ze aan het doen waren.

Opdracht 22

Leerlingen wordt dit keer gevraagd het grafische computermodel van een vallende bal uit Figuur 13 zodanig aan te passen dat het een stuiterende bal modelleert. Verder gaan ze na dat het gebruik van een 4de-orde Runge-Kutte methode een goede verbetering van het numerieke model oplevert en vergelijken ze modelresultaten met hun in opdracht 13 verkregen meetresultaten.

Zonder veel problemen hebben de leerlingen aanpassingen aangebracht die werken. Ik toon een tweetal schermafdrukken van leerlingenwerk waarin modelresultaten gematched zijn met meet-resultaten. De makers merkten hierbij op dat ze redelijk in de buurt van de meetresultaten gekomen waren. De tweede schermafdruk toont alleen een vergelijking van modelresultaten en meetdata in grafiekvorm. De makers schreven hierover: *"Het begin ziet er goed uit, alleen aan het einde wordt het een warboel van roze kruisjes, dit komt omdat de video meting daar niet echt goed was."*



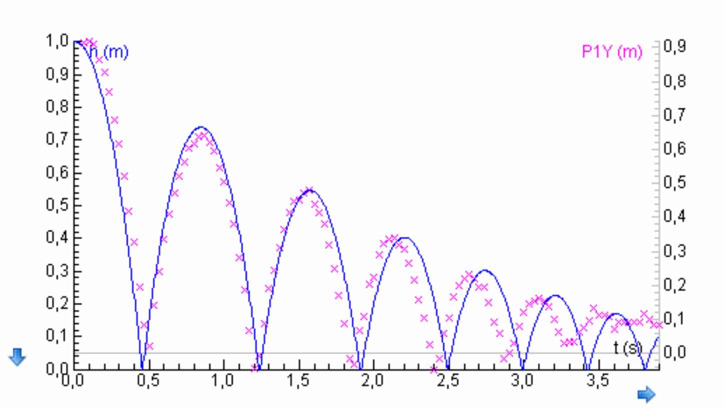


fig. 32. Een grafisch model van leerlingen voor een stuiterbal en een vergelijking van model met meetresultaten.

De makers van het in Figuur 32 getoonde grafische model merkten over het model en de nog aanwezige numerieke problemen het volgende op:

a) *Het model is aangepast en werkt perfect. De hoogten zijn nu realistisch alleen minder geloofwaardig is het alsmaar doorstuiteren van de bal. Hiervoor zouden we op één of andere manier nog een stopconditie in kunnen bouwen die de bal laat stoppen als de snelheid niet meer boven een bepaalde waarde komt.*

b) *Als je de tijdstap kleiner maakt treedt het onrealistische verschijnsel van a niet meer op: op een gegeven moment ligt de bal gewoon stil.*

c) *We krijgen inderdaad weer het 'oude' probleem, maar als we* **h** <= −0,05 *als stopconditie invullen is maar een heel klein stukje van de grafiek onrealistisch.*

Opnieuw toont dit verslag mijns inziens aan dat deze leerlingen goed wisten waar ze mee bezig waren.

Opdracht 23

In deze opdracht wordt van leerlingen de in sectie 4.4 beschreven algebraïsche aanpak gevraagd. Ze moeten o.a. de correctheid van de volgende twee formules aantonen:

stuitfactor = wortel van het quotiënt van twee opeenvolgende maximale hoogten,
stuitfactor = het quotiënt van twee opeenvolgende stuiterperioden.

Bovendien moeten ze de volgende formule voor de uitdooftijd T, d.w.z. voor de tijdsduur die nodig is voordat een stuiterende bal die op tijdstip t = 0 op hoogte h_0 losgelaten wordt tot stilstand komt, bewijzen (g = valversnelling, r = stuitfactor):

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{1+r}{1-r}.$$

Deze opdracht is toch duidelijk te hoog gegrepen voor de leerlingen en dit was gelet op het beroep dat gedaan wordt op algebraïsche vaardigheden niet eens zo onverwacht. De meeste teams lieten zien dat de formules goed werken door meetgegevens in te vullen. Met andere woorden: ze maakten aannemelijk dat de formules wel eens goed kunnen uitpakken in een concreet geval. Maar zelfstandig aan de slag gaan met formules afleiden en bewerken bleek lastig voor het merendeel van de leerlingen. Wellicht gaf de natuurkundige context hen ook niet meer houvast. Eén team maakte een goede start, maar kwam vast te zitten: "*De stuitfactor geeft aan hoeveel van de kinetische* *energie er na de botsing behouden blijft:* $r = \dfrac{E_{k,1}}{E_{k,2}}$ *omdat op het hoogste punt alle kinetisch energie van de bal na de botsing is overgegaan in zwaarte energie kunnen we die ook invullen in* $E_z = m \cdot g \cdot h$. *Volgens mij is dit de goede manier om deze som op te lossen maar verder komen we er niet uit…"*

Een ander team herkende in de gegeven formule in $\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$ de valtijd, maar had verder geen idee waar de ander term vandaan komt. Het gebruiken van deze formules in concrete gevallen, zoals gevraagd werd in de rest van de opgave, vormde geen probleem.

Eenvoudige conclusie mijnerzijds: de uitdaging was te groot voor deze groep van leerlingen. In de opdracht moeten meer hints worden opgenomen, zeker wanneer het formulewerk van een vallende bal niet paraat is.

Opdracht 24

In deze Coach activiteit staat een tabel van de stuittijdstippen gemeten via geluidsopname, waarden die de leerlingen in opdracht 14 hopelijk ook zelf gevonden hebben. De bedoeling is om in deze Coach activiteit aan de tabel de stuiterperioden toe te voegen en dan de scatter plot te maken van stuiterperioden uitgezet tegen stuittijdstippen. Volgens opdracht 23 moeten de punten van deze grafiek op een rechte lijn liggen met richtingscoëfficiënt gelijk aan $r - 1$. Via regressie is de stuitfactor r te bepalen en hiermee ook de uitdooftijd.

De leerlingen die nog fut hadden voor deze opdracht hebben deze zonder al te grote problemen kunnen maken. Zie onderstaande schermafdruk (Figuur 33). Het werk was concreet en duidelijk genoeg voor de leerlingen en hun ervaring met Coach was ruim voldoende. Eén team heeft een rekenfoutje bij de bepaling van de stuitfactor gemaakt en merkte op dat dit de oorzaak kon wezen voor het gegeven dat de door hen berekende uitdooftijd niet overeenstemt met de meetgegevens. Ze hebben dit echter niet meer gecorrigeerd. Maar op zichzelf gaven deze leerlingen wel blijk van een zekere kritische blik op eigen werk.

data van geluidsmeting

	Stuittijdstip (s)	Stuitperioden (s)	: van Stuitperiode (s)
1	0,312	0,52	0,49
2	0,829	0,45	0,44
3	1,283	0,41	0,41
4	1,688	0,36	0,37
5	2,051	0,33	0,34
6	2,379	0,30	0,31
7	2,679	0,28	0,29
8	2,955	0,25	0,26
9	3,207	0,23	0,24
10	3,439	0,22	0,22
11	3,654	0,20	0,20
12	3,852	0,19	0,19

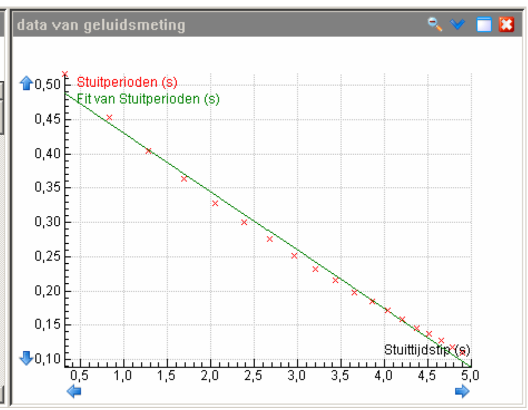


fig. 33. Leerlingenwerk: analyse van geluidsmetingen van een stuiterende bal.

De resultaten van het leerlingenwerk samenvattend en terugkomend op de analysevraag in hoeverre het leerlingenwerk met de beoogde/verwachte resultaten overeenstemde, trek ik de volgende voorzichtige conclusies. De taken in de praktische opdracht waren voor de 5-vwo leerlingen concreet en uitvoerbaar. Zowel tekstueel als grafisch modelleren verliep zonder onoverkomelijke moeilijkheden en leerlingen gaven er in hun rapportage blijk van goed te weten waar ze mee bezig waren geweest. Gebruik van wiskundige formules in de natuurkundige context lukte wel, maar het zelfstandig afleiden en bewerken van formules was problematisch en kennelijk boven het niveau van algebraïsche vaardigheden van het merendeel van de leerlingen.

6. Korte terugblik

Ik hoop in dit artikel de volgende doelen gerealiseerd te hebben:

- De visies van de vernieuwingscommissies in de exacte vakken op modelleren en het gebruik van modellen in onderwijs zijn in een meer theoretisch kader te plaatsen en te begrijpen.
- Een bruikbaar overzicht is gegeven van modellen voor modelleren. Het nut van een beschrijving van het modelleerproces is in didactische zin tweeledig: (1) het is een theoretisch kader die het 'ideale modelleerproces' beschrijven, modelleercompetenties te formuleren en om problemen van leerlingen bij het modelleren te duiden; (2) het geeft houvast bij het ontwerp van onderwijs in modelleren en het ontwikkelen van lesmateriaal
- Het voorbeeld van stuiterende ballen illustreert goed dat bij modelleren van realistische problemen verschillende methoden van aanpak en talloze middelen inzetbaar zijn, variërend van al experimenterend aan de slag zijn of met een computermodel in de weer zijn tot algebraïsch/ analytisch formuleren en met pen en papier oplossen. Bij een algebraïsche aanpak wordt wel een groot beroep gedaan op de wiskundige vaardigheden van leerlingen. In de huidige praktijk blijkt dit voor veel leerlingen een struikelblok.
- Het idee dat een modelleercyclus zoals bijvoorbeeld die van Blum en Leiß houvast kan bieden bij het structureren en ontwerpen van een modelleeropdracht voor leerlingen is in het concrete voorbeeld van modelleren van stuiterende ballen goed overgekomen.
- Aannemelijk is gemaakt dat ICT inderdaad het arsenaal van mogelijkheden voor een leerling zinvol verruimt met het oog op experimenten uitvoeren, hypothesen onderzoeken en 'wat als'-vragen beantwoorden. Met een computermodel kan een leerling vaak ook weer dicht terugkomen bij de concrete probleemsituatie waar het allemaal mee begon, zeker als modeluitkomsten vergeleken kunnen worden met experimentele gegevens. Het toetsen van een model aan de werkelijkheid hoort een vanzelfsprekend onderdeel van de activiteiten door leerlingen te zijn. Op deze manier is een steeds terugkerende wisseling van aandacht op probleemsituatie en vakkennis op een natuurlijke wijze te realiseren.
- Coach 6 biedt uitstekende mogelijkheden om experimenteren en modelleren aan elkaar te koppelen in zinvolle en in praktijk uitvoerbare leerlingactiviteiten met een authentiek karakter.
- Het artikel heeft de notie versterkt dat in simpel ogende problemen heel veel interessante wis- en natuurkunde zit die voor vwo-leerlingen met behulp van ICT zowel toegankelijk als uitdagend is. Het verband tussen wis- en natuurkunde in theorie en praktijk kan met aanvankelijk simpel ogende, maar bij nader inzien toch rijke probleemsituaties goed aan leerlingen duidelijk gemaakt worden.

De auteur wil zijn collega's Cor de Beurs, Jan van de Craats, Ton Ellermeijer en Leendert van Gastel danken voor hun commentaar op conceptversies van het artikel. Bijzondere dank gaat uit naar Peter Uylings voor de vruchtbare discussies over modellering van stuiterende ballen en over implementering van computermodellen, alsmede voor het uitproberen van het ontwikkelde lesmateriaal bij zijn vwo5-leerlingen op het Bonhoeffer College te Castricum.

Literatuur

Aguiar, C.E. & Laudares, F. (2003). Listening to the coefficient of restitution and the gravitational acceleration of a bouncing ball. *American Journal of Physics 71* (5) 499–501.

Benenson, W. & Bauer, W. (1993). Frame grabbing technique in undergraduate physics education. *American Journal of Physics 61* (9) 848-851.

Bernstein, A.D. (1977). Listening to the coefficient of restitution. *American Journal of Physics 45* (1) 41–44.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modeling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications 22* (3) 123–139.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In: W. Blum, P.L. Galbraith & M. Niss (red.). *Modelling and applications in mathematics education.* The 14th ICMI Study, New ICMI Study Series, Vol. 10 (pp. 45–56). New York, USA: Springer.

Blum, W. & Leiß, D. (2005) "Filling up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In: M. Bosch (red.) *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education* (pp. 1623-1633). http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38* (2) 86–95.

Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from cognitive perspective. In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Kahn (eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics*. Chichester, UK: Horwood, pp. 260–270.

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2007). Insight of teachers' unconscious behaviour while dealing with modeling problems in the classroom. Paper presented at *ICTMA13: Modeling Students Modeling Competencies: focusing on Design Sciences*, Bloomington, USA, 22-26 July 2007. http://site.educ.indiana.edu/Papers/tabid/5320/Default.aspx

Boyd, A. & Rubin, A. (1996). Interactive Video: A Bridge Between Motion and Math. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 1*, 57–93.

Bridge, N.J. (1998). The way balls bounce. *Physics Education 33* (3) 174–181.

Broer, H. (2007). Computergebruik en demathematisering. *Nieuw Archief voor Wiskunde 5/8* (3) 201–205.

Burghes, D.N. & Borrie, M.S. (1979) Mathematical modeling: a new approach to teaching applied mathematics. *Physics Education 14* (2), 82–86.

Clatworthy, N.J & Galbraith, P.L. (1991). Mathematical Modelling in Senior Mathematics: Implementing an Innovation. *Teaching Mathematics and its Applications 19* (1) 6–28.

cTWO (2007). *Rijk aan betekenis*. www.ctwo.nl

de Beurs, C. & Krol, M. (1991). Hypothesetoetsing met behulp van numerieke modellen *NVON Maandblad 16* (10) 444–447.

Dekker, J (1993). *Wendbaarheid in beweging.* Proefschrift. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam

Didaktiek Natuurkunde (1991). *Computer-toepassingen in de Natuurkunde.* Rapport ITN 9002 (2e druk). Hoofdstuk 4: computertoepassingen bij onderzoek (pp. 55–69). Amsterdam, NL: UvA

Doerr, H.M. & Tripp, J.S. (1999). Understanding How Students Develop Mathematical Models. *Mathematical Thinking and Learning 1* (3) 231–254.

Doerr, H.M. (2007). What knowledge do teacher need for teaching mathematics through application and modelling? . In: W. Blum, P.L. Galbraith & M. Niss (red.). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study, New ICMI Study Series, Vol. 10 pp. 69–78. New York, USA: Springer.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., de Lange, J. & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education 39* (5-6) 405–418.

Driessen, H. & Meinema, H. (2003). *Chemie tussen context en concept, ontwerpen voor vernieuwing*. SLO: Enschede. www.nieuwescheikunde.nl

Drijvers, P. & Gravemeijer, K. (2004). Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraïsche schema's. *Tijdschrift voor Didactiek van de β-wetenschappen 21* (1), 47–68.

Ellermeier, T. & Heck, A. (2003). Walk like a Physicist: An example of Authentic Education. In: *Electronic proceedings of GIREP conference: Physics in New Fields*, Lund, Sweden, July 2002, http://pinf.fysik.lu.se/abstracts/fullText/148.pdf.

Foong, S.K., Kiang, D., Lee, P., March, R.H. & Baton, B.E. (2004). How long does it take a bouncing ball to bounce an infinite number of times? *Physics Education 39*, 40–43.

Galbraith, P. & Clatworthy, N.J. (1990). Beyond Standard Models: Meeting the Challenge of Modelling. *Educational Studies in Mathematics 21* (2) 137–163.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A Framework for Identifying Student Blockages during Transitions in the Modelling Process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38* (2) 143–162.

Garst, S. & Peletier, M. (2007). Gedetailleerd programma van de module Dynamische Modellen van VWO-Wiskunde D 2007-2011. Voorstel van 25 januari 2007, www.ctwo.nl

Gott, R. & Murphy, P. (1987) *Assessing Investigation at Ages 13 and 15: APU Science Report for Teachers: 9.* Association for Science Education, Hatfield.

Gravemeijer, K. (1999) How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning 1* (2) 155–177

Gravemeijer, K. (2005) Revisiting 'Mathematics education revisited'. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer, L. Wesker (red.) *Freudenthal 100* (pp.106–113). http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6638.pdf

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modeling. In: W. Blum, P.L. Galbraith & M. Niss (red.). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study, New ICMI Study Series, Vol. 10 (pp. 137–144). New York, USA: Springer.

Haspekian, M. (2005). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10* (2) 109-141.

Heck, A. & Holleman, A. (2003). Walk like a Mathematician: An example of Authentic Education. In: T. Trinadifillidis & K. Hatzikiriakou (red.) *Technology in Mathematics Teaching*. Proceedings ICTMT6, Volos, Greece, October 2003. 380 - 387.

Heck, A. (2004). Met een schuine blik. *Nieuwe Wiskrant 23* (3) 29–32.

Heck, A. & Uylings, P. (2006). Capturing the Real World in the Classroom. *International Journal for Technology in Mathematics Education 13* (3) 107–116.

Heck, A. (2006). Getting Drunk and Sober Again. *Electronic Proceedings of Modeling in Physics and Physics Education, GIREP 2006* Conference, University of Amsterdam, www.girep2006.nl

Heck, A. (2007a). Modelling Intake and Clearance of Alcohol in Humans. *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, Vol. 1, No. 3. https://php.radford.edu/~ejmt/

Heck, A. (2007b). Modelleren van bruggen en bogen. *Nieuwe Wiskrant 27* (1), 19–29.

Heck, A. (2007c). *Vallende en stuiterende ballen*. Lesmateriaal, beschikbaar op de homepage van de auteur: www.science.uva.nl/~heck/research/stuiterballen

Heck, A. (2008). Wiskundige CSI. Aangeboden aan *Euclides*.

Heck, A. & Houwing, H. (2008). An e-class in action: experiences with ICT-intensive teaching and learning of discrete dynamical models. In voorbereiding.

Heck, A. & Vonk, R. (2008). You Must Keep Money Moving. Aangeboden aan *The Physics Teacher*.

Hubbard, M. & Stronge, W.J. (2001). Bounce of hollow balls on flat surfaces. *Sports Engineering 4*, 49–61.

Kaiser, G. & Schwarz, B. (2006). Mathematical modeling as bridge between school and university. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38* (2) 196–208.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38* (3) 302–310.

Kolb, D.A. (1984). *Experiential learning: experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Larkin-Hein, T. & Zollman, D.A. (2000). Digital Video, Learning Styles, and Student Understand in Kinematics. *Journal of SMET Education*, 1/2 May-August, pp. 17–30.

Lesh, R. & Doerr, H.M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In: R. Lesh & H.M. Doerr (red.). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 3–34.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. In: F.K. Lester, Jr. (red.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publications Inc., pp. 763–804.

Levin, T & Levin, I. (2002). Hybrid Systems Modeling in Learning Science and Technology. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 21* (4) 313–330

Lingerfjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38* (2) 96-111.

Löhner, S., Savelsbergh, E. & van Jolingen, W. (2003) De invloed van representaties op het modelleergedrag van leerlingen. *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen 20* (1), 48–72.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38* (2) 113–142.

Maull, W. & Berry, J. (2001). An investigation of student working styles in a mathematical modelling activity. *Teaching Mathematics and its Applications 20* (2) 78–88.

Maurits, N. (2007). Patiënten in getallen: echte wiksunde in het ziekenhuis. *Euclides 82* (8), 309–313.

Minnaert, M. (1972). *De natuurkunde van 't vrije veld. deel 3*, 3de druk. Thieme: Zutphen, pp. 79–80.

Molenaar, J. (2007). De kracht van wiskundig modelleren. Oratie uitgesproken op 21 juni 2007 in de Aula van Wageningen Universiteit. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/8 (4) 244–250.

NiNa Commissie (2006). *Natuurkunde leeft*. www.nieuwenatuurkunde.nl

Prins, G., Savelsbergh, E. & Pilot, A. (2003). Modelleren van dynamische systemen in de scheikunde: Ontwerp en evaluatie van een onderwijsmodule over wassen van textiel. *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen 20* (1), 26–47.

Savelsbergh, E. (2007) Dynamisch modelleren: Aanzet tot een curriculum. *Nieuw Archief voor Wiskunde 5/8* (3) 207-213.

Savelsbergh, E. et al. (2007) *Modelleren in de β-vakken: Kennis in uitvoering*, Advies aan de gezamenlijke β -vernieuwingscommissies. Utrecht, NL-Bèta.

Schwarz, C.V. & White, B.Y (2006). Metamodeling Knowledge: Developong Students' Understanding of Scientific Modeling. *Cognition and Instruction 23* (2) 165–205.

Schwarz, O. & Vogt, P. (2004) Akustische Messungen an springende Bällen. *Praxis der Naturwissenschaften: Physik 53* (3) 22–25.

Siersma, D. & Drijvers, P. (2007). Rijk aan betekenis. *Euclides 82* (5), 169–172.

Steed, M. (1992) Stella, A Simulation Construction Kit: Cognitive Process and Educational Implications. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 11* (1) 39–52.

Streun, van A. (2004). Een stuiterend balletje en bètabrede onderzoeksvaardigheden. *Euclides 78* (4), 128–129.

Streun, van A. (2007). Parate kennis en algebra: symbol sense. *Euclides 82* (4), 151–152.

Svádová, M. (2001). Modelling Hybrid Dynamic Systems Using Hybrid Petri Nets. In: *13th International Conference on Process Control*. Bratislava: Štrbské pleso, Slovakia: Slovak University of Technology, Bratislava, pp. 72–75.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht.* Proefschrift. Utrecht, NL: IOWO.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: a Model of Goal and Theory Descriptions in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project* – Dordrecht, NL: Reidel.

Turner, W.A. & Ellis, G.W. (1999). The Energetics of a Bouncing Ball. *The Physics Teacher* **37** (8) 496–498.
Van den Camp, W. & Heck, A. (2003). Survival Analysis by Students. In: T. Trinadifillidis and K. Hatzikiriakou (eds.) *Technology in Mathematics Teaching*. Proceedings ICTMT6, Volos, Greece, October 2003, pp. 388–394.
Van Eijck, M., Goedhart, M., Kaper, W. & Ellermeijer, T. (2004). Een probleemstellende benadering van het onderwijzen van de werking van het hart vanuit een medische 'context'? *Tijdschrift voor Didactiek van de β-wetenschappen 21* (1), 20–46.
Van Eijck, M. (2006) *Teaching quantitative concepts with ICT in pre-university biology education*. Proefschrift. Amsterdam, NL: Universiteit van Amsterdam.
Van Genderen, D. (1989) *Mechanica-onderwijs in beweging*. Proefschrift. Utrecht, NL: Rijksuniversiteit Utrecht.
Verhulst, F. (2003). *Chaos en Orde*. Zebra-reeks nr. 16. Epsilon Uitgaven:Utrecht, NL.
Voskoglou, M. (1994). An application of Markov Chain to the process of modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 2**5*** (4) 475-480.
Voskoglou, M. (2007). A stochastic model for the modelling process. In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Kahn (eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics*. Horwood: Chichester, pp. 149–157.
Weigand, H. & Weller, H. (1998). Modelling real-life problems involving periodic processes with computer algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education 5* (4) 251–267.
Westra, R. (2005). Digitale konijnen in het voortgezet onderwijs. *Het zoogdier 16* (4) 6–9.
White, J.A., Medina, A., Román, F.L. & Velasco, S. (2007). *The Physics Teacher 45* (3) 175–177.
Zwaneveld, B. (2006). Modelleren op verschillende niveaus. *Euclides 82* (3), 89–91.