

UNIVERSITÉ BATNA 2, FACULTÉ DE TECHNOLOGIE, DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE

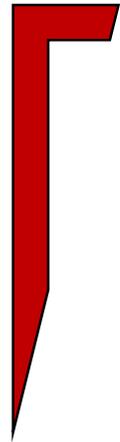
# COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX MÉTALLIQUES

Cours destiné aux Etudiants inscrits en Master 1 GM

**P<sup>r</sup> A. DERARDJA**

## Chapitre 2. Élasticité – Visco-élasticité

- Description des différents types de comportements
- Élasticité linéaire
- Loi de Hooke généralisée
- Énergie de déformation élastique
- Relations de symétrie
- Thermo élasticité linéaire
- Viscoélasticité linéaire
- Modèle de Kelvin-Voigt
- Modèle de Maxwell



# Comportements / Modèles

## Modèles rhéologiques analogiques:

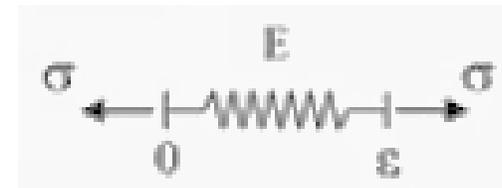
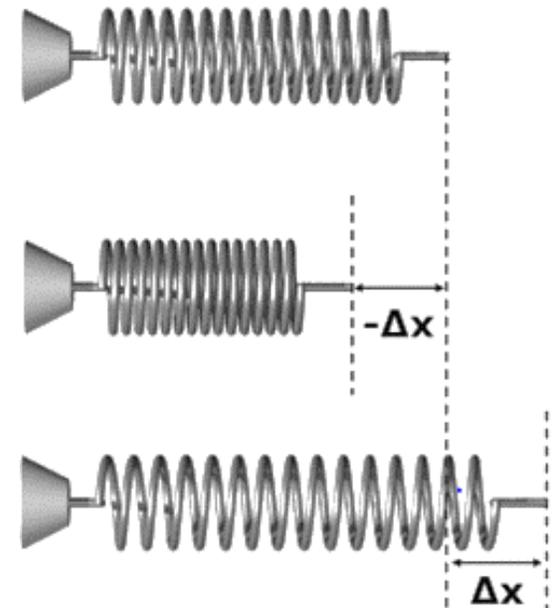
Dans la matière, les liaisons interatomiques peuvent être assimilées à des ressorts Parfaits. Ce qui permet d'expliquer la force de rappel en élasticité.

Le ressort se déplace sous l'effet d'une force tel que:

$$F = k \Delta x$$

Dans le modèle du ressort et en se mettant dans le monde de la contrainte et de la déformation en élasticité linéaire,

on a:  $\frac{F}{S} = E \left( \frac{\Delta L}{L} \right)$  soit  $\sigma = \varepsilon E$



L'équation ainsi établie par analogie est la loi de Hooke. Dans le régime Hookéen, la réponse est immédiate et la déformation est instantanée.

Dés qu'on parle d'un retard de réponse dans le temps, on parle de retard de déformation. On dit qu'on a un retard temporel de déformation:

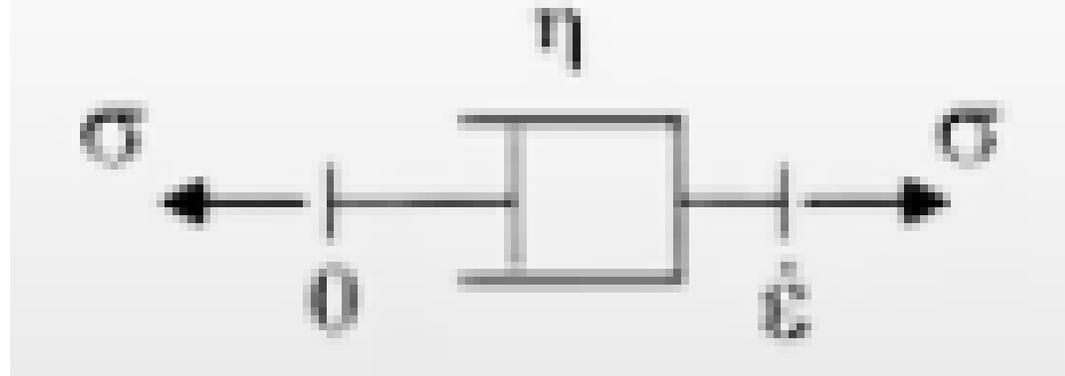
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon'$$

Dans ce cas, on utilise un amortisseur.



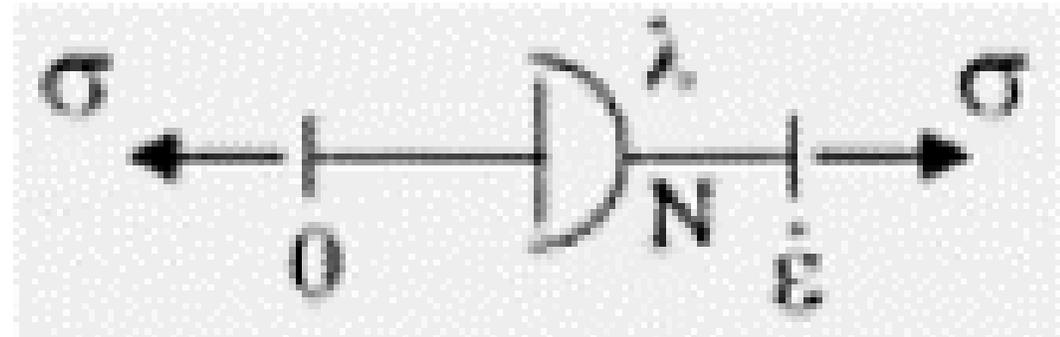
Si le comportement est linéaire  $\longrightarrow$  l'amortisseur de Newton (idéal)

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$$



Si le comportement est non linéaire  $\longrightarrow$  l'amortisseur de Norton

$$\sigma = \lambda (\dot{\varepsilon})^{1/N}$$



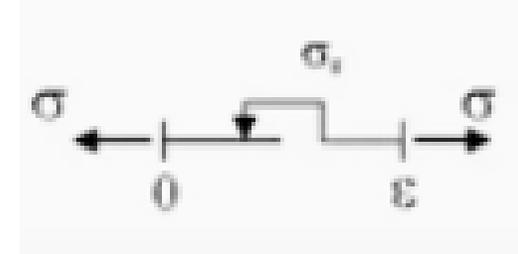
# Ruptures, Seuils

Un mouvement par rupture de liaisons internes dues au glissement.

Contrainte seuil: **Patin ou Élément de Saint Venant**

$$-\sigma_s < \sigma < \sigma_s$$

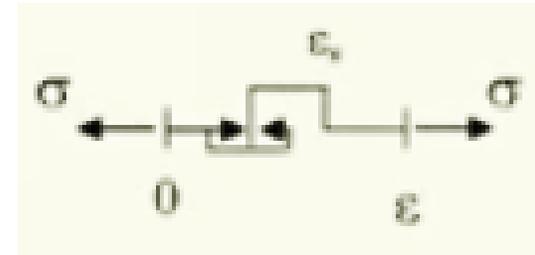
Compression                      Traction



Si la contrainte n'atteint pas la contrainte seuil, le patin ne peut pas glisser  
⇒ Pas de déformation.

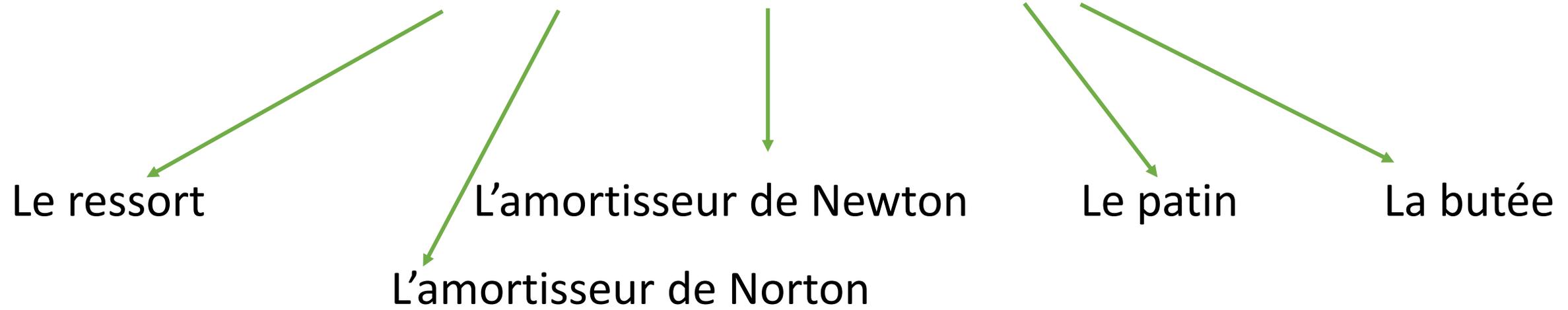
Déformation seuil: **Butée**

$$-\varepsilon_s < \varepsilon < \varepsilon_s$$



Si la déformation n'atteint pas la déformation seuil ⇒ Pas de réaction

## 5 Modèles rhéologiques possibles



Sans tenir compte des aspects physiques, ces modèles sont utilisés pour décrire le comportement.

# Montage des modèles:

En série:



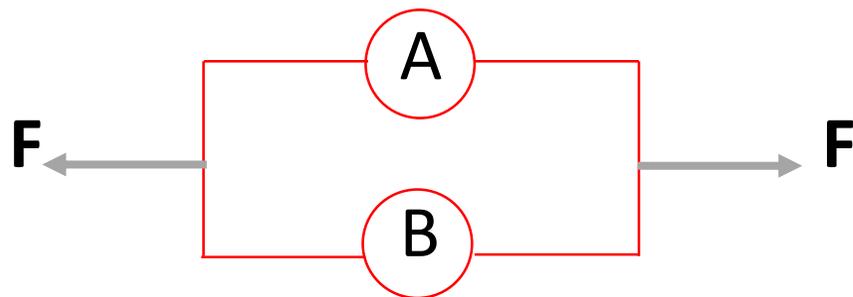
La force est la même  $\Rightarrow$   
Conservation de la contrainte

$$\sigma = \sigma_A = \sigma_B$$

Sommation des déformations

$$\varepsilon = \varepsilon_A + \varepsilon_B$$

En parallèle:



Une sommation des forces  $\Rightarrow$   
Une sommation des contraintes

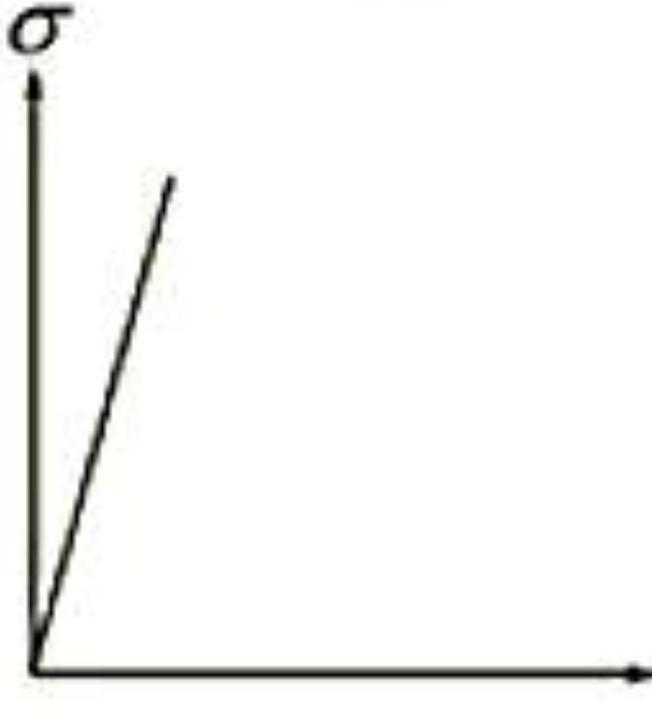
$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B$$

Conservation de la déformation

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_B$$

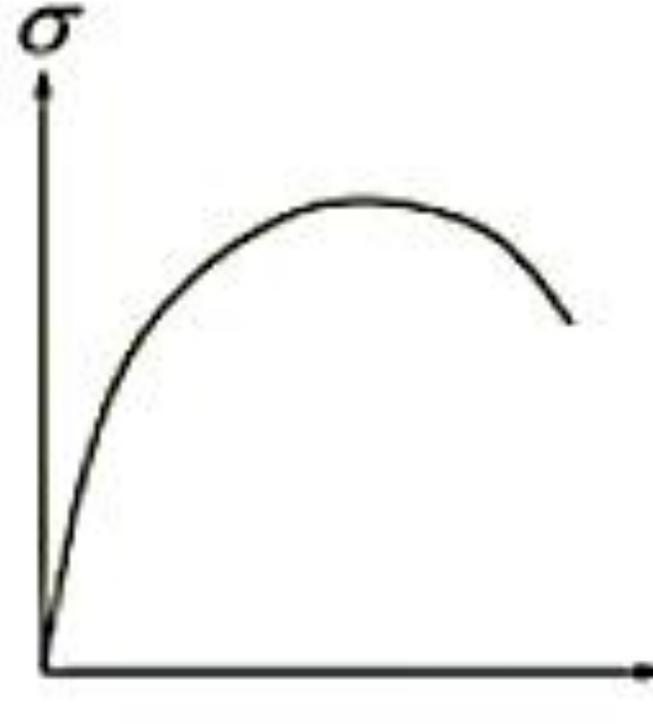
# Différents types de comportement

**Fragile**



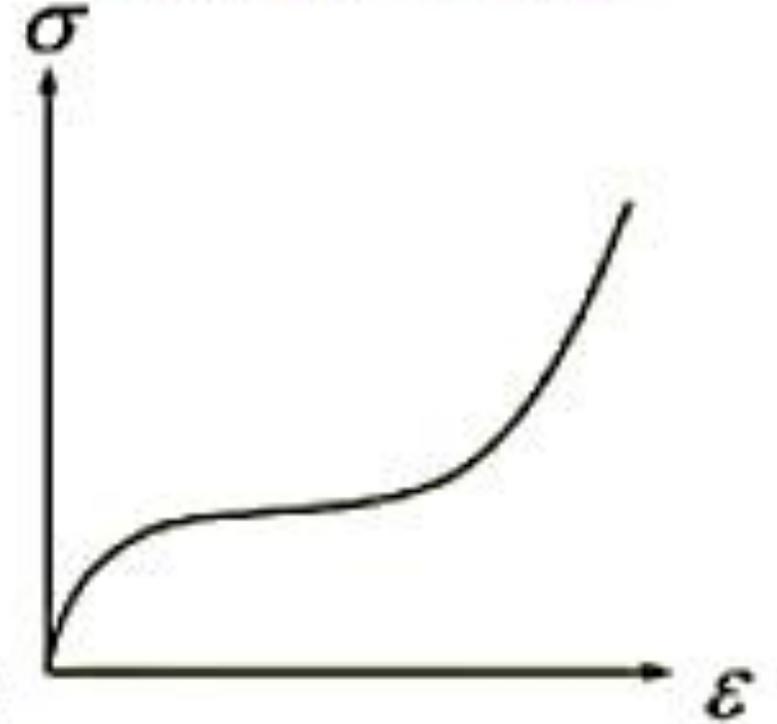
Métaux fortement durcis  
Thermodurcissables  
Céramiques

**Ductile**

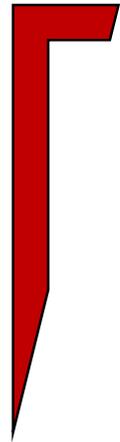


Métaux  
Thermoplastiques

**Elastique  
non linéaire**



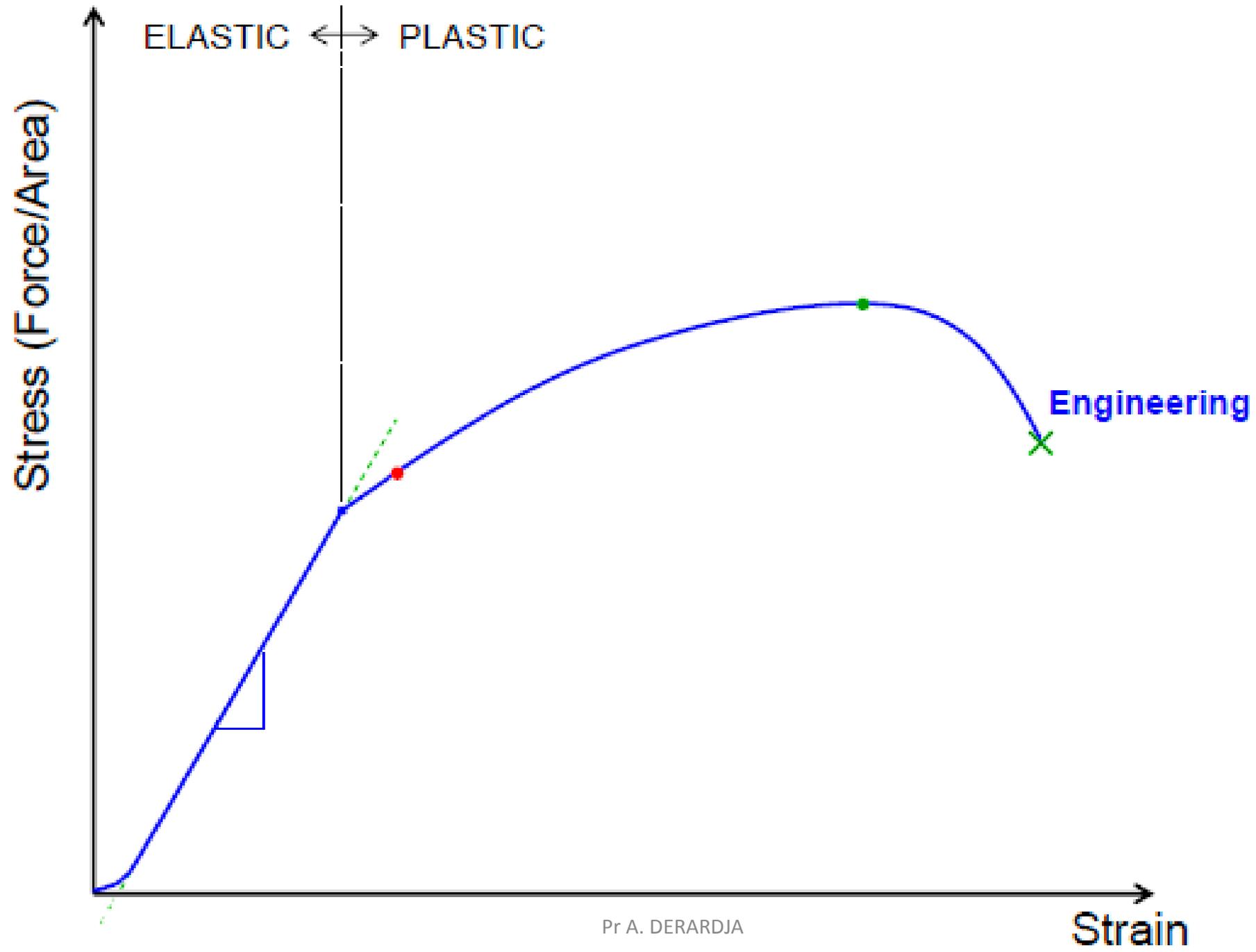
Elastomères



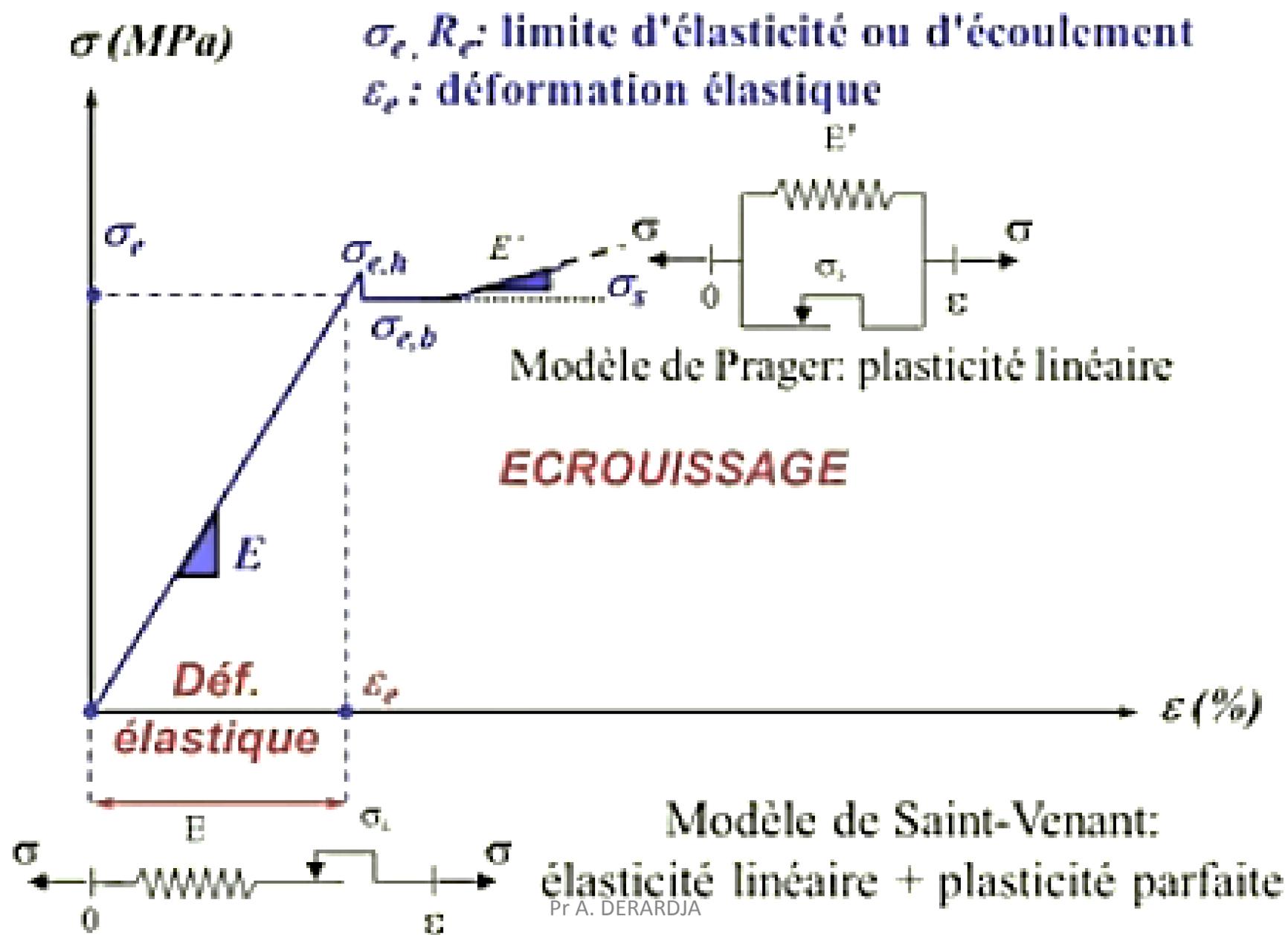
# Elasticité linéaire

Le modèle de l'élasticité linéaire est utilisé pour décrire un matériau qui répond comme suit lorsqu'il est soumis à un essai de traction uniaxial, en maintenant les niveaux de contrainte suffisamment bas :

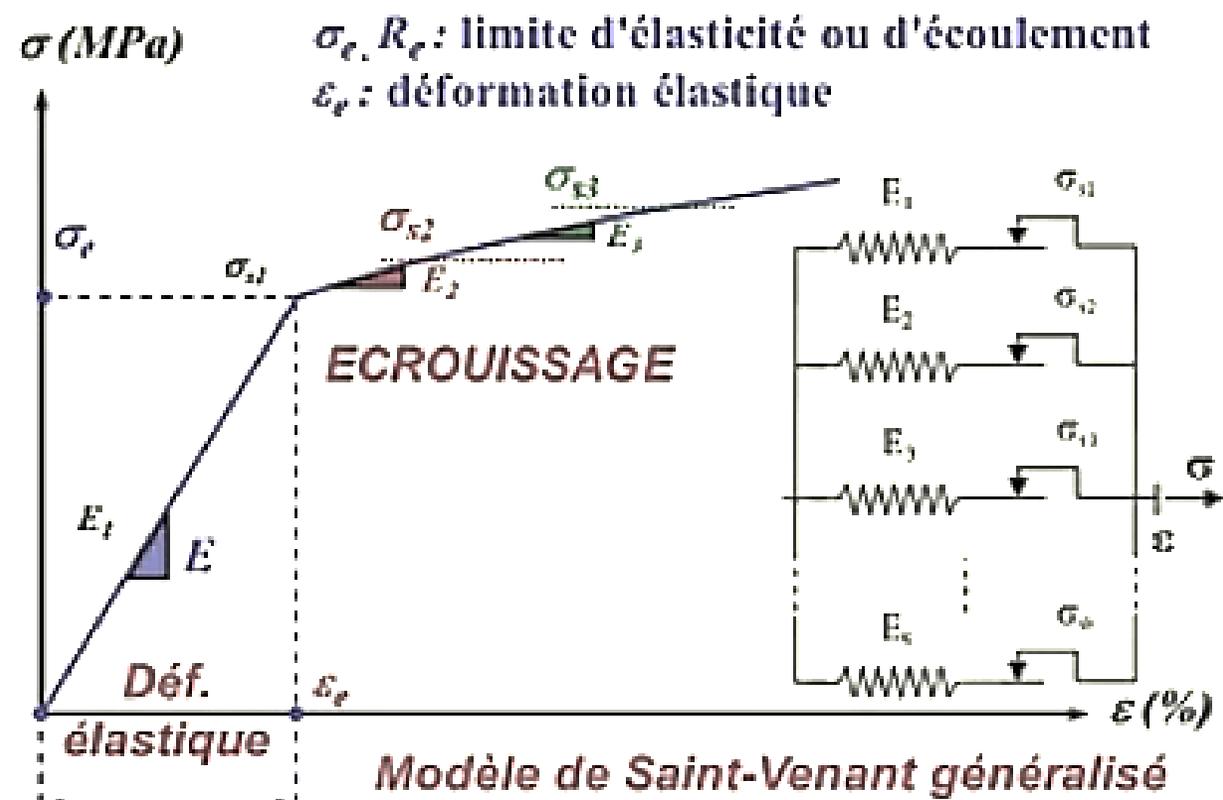
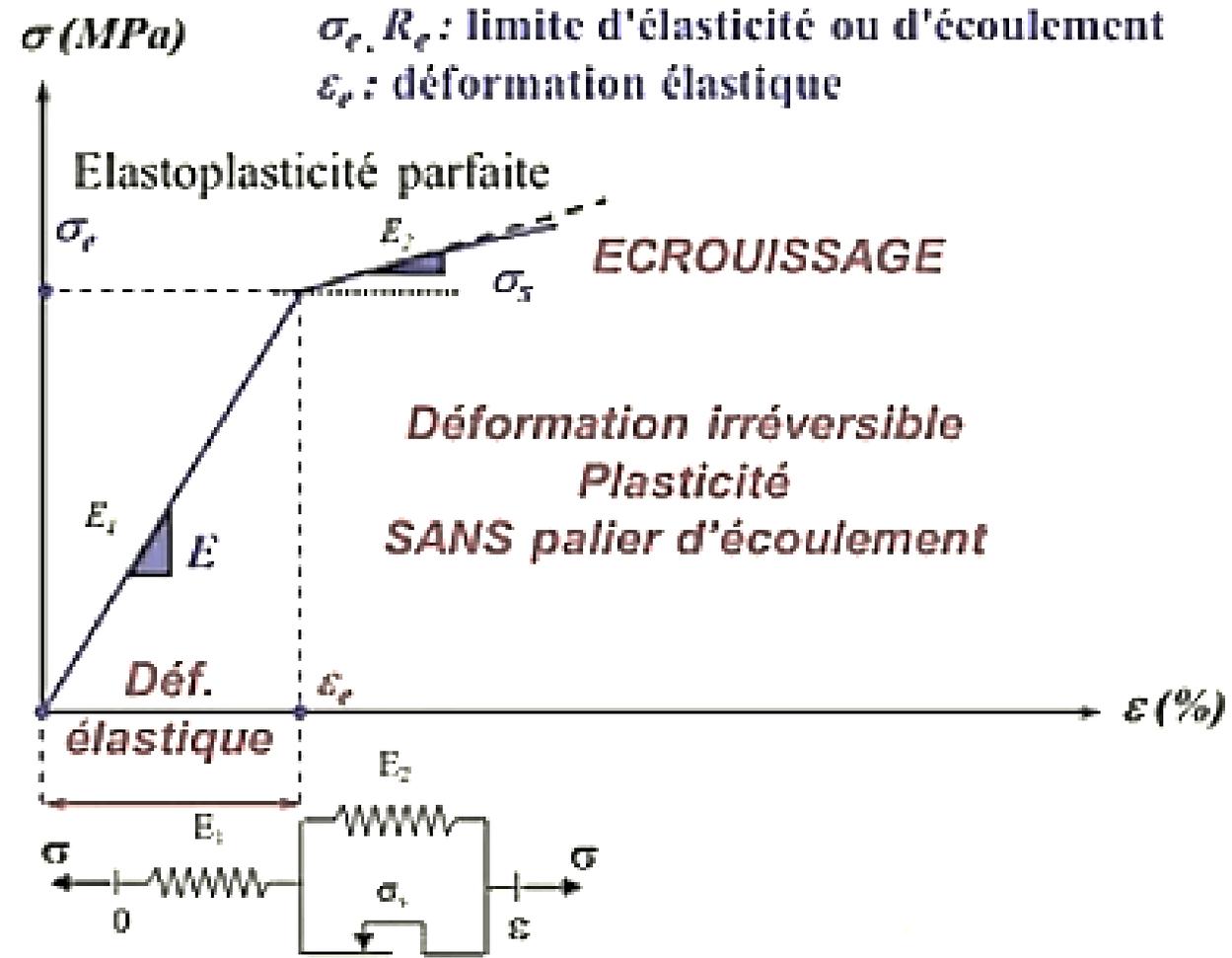
- Les déformations dans le matériau sont petites  $\Rightarrow$  linéarité,
- Les contraintes sont proportionnelles aux déformations  $\Rightarrow$  linéarité,
- Le matériau retourne à son état initial quand la charge appliquée est annulée  
 $\Rightarrow$  Elasticité,
- Il n'y a pas de dépendance de la vitesse de chargement ou de la déformation  
 $\Rightarrow$  Elasticité.

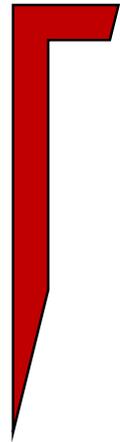


# Avec plateau d'écoulement



# Sans plateau d'écoulement





## Loi de Hooke généralisée

La relation contraintes-déformations pour décrire les matériaux anisotropes est de la forme:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T)$$

Où  $C_{ijkl}$  est le tenseur d'ordre 4, appelé **tenseur élastique de rigidité** et  $\alpha_{kl} = \alpha_{lk}$  est le tenseur des coefficients de dilatation thermique.

La relation contraintes-déformations est inversible:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T$$

Où  $S_{ijkl}$  est le **tenseur élastique de compliance (ou de souplesse)**

## Relations de symétrie

Le tenseur élastique de rigidité est constitué de 81 termes d'après sa définition, donc 81 propriétés du matériau à déterminer! Heureusement,  $C_{ijkl}$  doit satisfaire

les relations de symétrie suivantes:  $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = C_{jikl}$

Ce qui réduit le nombre de constantes à 21.

Le tenseur élastique de compliance (souplesse) doit satisfaire les mêmes relations:

$$S_{ijkl} = S_{klij} = S_{ijlk} = S_{jikl}$$

Les relations de symétrie reposent sur ce qui suit:

➤ Le tenseur de contraintes est symétrique, ce qui ne peut être possible que si:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

➤ Si la densité d'énergie de déformation existe pour le matériau, le tenseur élastique de rigidité doit satisfaire :  $C_{ijkl} = C_{klij}$

$$\Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk} \text{ et } C_{ijkl} = C_{lkij}$$

Or, par définition on a:  $C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$  et  $\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$

$$\Rightarrow C_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \text{ et donc : } \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \text{ ce qui correspond à: } C_{ijkl} = C_{klij}$$

Ces symétries permettent d'écrire les relations contraintes-deformations dans une forme matricielle compacte:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}\Delta T)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 2\alpha_{23} \\ 2\alpha_{13} \\ 2\alpha_{12} \end{bmatrix}$$

$$C_{11111}$$

$$C_{1122} = C_{2211} \dots$$

La forme inverse donne:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} + \alpha\Delta T$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix}$$

$S_{1111}, \dots$

$S_{1133} = S_{3311} \dots$

## Energie élastique de déformation:

C'est une grandeur qui représente le travail fourni par unite de volume pour déformer un matériau d'un état de reference sans contrainte à un état chargé. Elle est indépendante de l'historique du chargement.

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij} \Delta T) (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T) = \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$



Matériau isotrope

Pour la plupart des matériaux, mais pas tous, le matériau n'a pas d'orientation caractéristique. Ainsi, si on découpe une éprouvette de traction dans un bloc de matériau, la courbe contrainte-déformation sera indépendante de l'orientation de l'éprouvette par rapport au bloc de matériau.

**Ces matériaux sont dits isotropes.**

Si on chauffe un matériau isotrope et homogène en augmentant sa température uniformément, sa taille va augmenter sans qu'il ne change de forme.

# Contraintes-déformations

- ✓ La déformation est déterminée en utilisant le tenseur de déformation infinitésimal  $\epsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$
- ✓ La contrainte de Cauchy  $\sigma_{ij}$  est utilisée comme mesure de contrainte.

Les relations contraintes-déformations sont données par:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Module d'Young      Coeff. de Poisson      Coeff. de dilatation thermique

Pr A. DERARDJA

Sous leur forme compacte, les relations précédentes peuvent être écrites en utilisant la notation indicielle

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

Ces relations peuvent s'exprimer en fonction du tenseur de compliance :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow S_{ijkl} = \frac{1+\nu}{2E} (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Les relations inverses peuvent être exprimées par:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sous la forme compacte:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right\} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \delta_{ij}$$

Les relations contraintes-déformations en fonction du tenseur élastique de rigidité

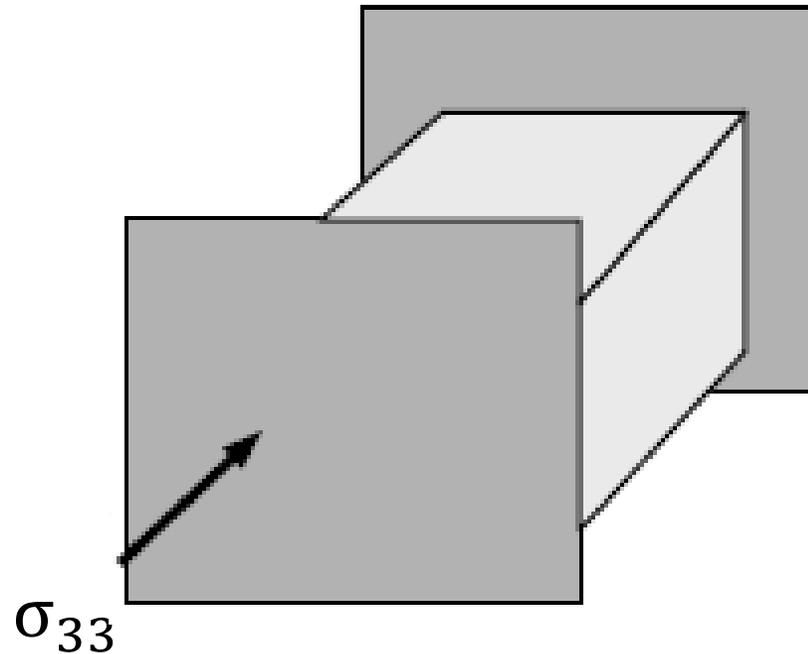
$C_{ijkl}$  s'écrivent:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha\Delta T \delta_{kl})$$

$$\Rightarrow C_{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl}$$

Etat de déformation plane: Il découle d'un mouvement plan, défini par un champ de déplacement de la forme suivante :

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_3} = \frac{\partial U_2}{\partial X_3} = 0 \quad \text{avec : } U_3 = 0$$



$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0$$

Il en résulte un tenseur de déformations de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} + (1+\nu)\alpha\Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par application de la loi de Hooke, on en déduit la forme du tenseur de contraintes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec: } \sigma_{33} = \frac{E\nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu},$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

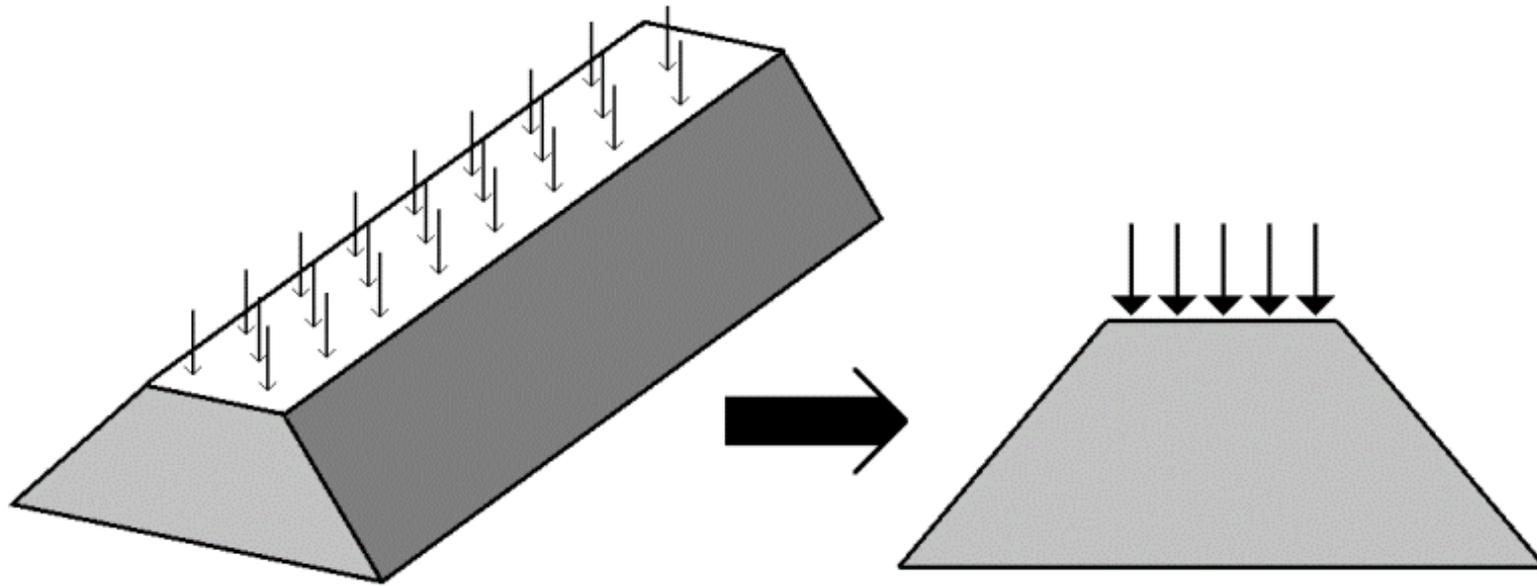
La contrainte  $\sigma_{33}$  est différente de zéro ; elle correspond aux forces s'opposant au mouvement dans la direction 3.

En notation indicielle, les expressions sont:

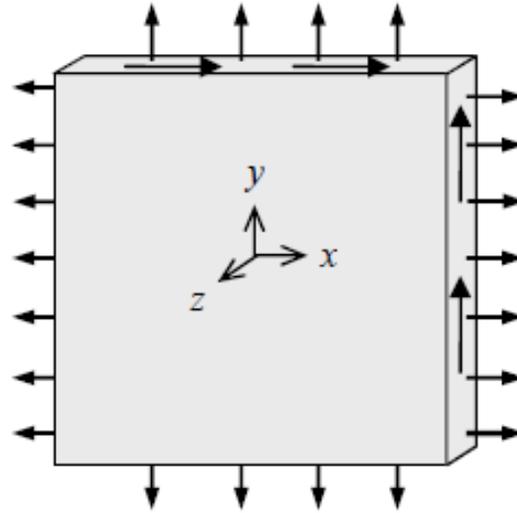
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_{\alpha\beta} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + (1+\nu) \alpha \Delta T \delta_{\alpha\beta}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \delta_{\alpha\beta}$$

Cet état de déformation se rencontre dans le cas de structures allongées dans une direction donnée, et identiques à elles-mêmes dans cette direction (tant au niveau de la géométrie que du chargement).



Etat de contrainte plane:



Cet état est défini par le tenseur de contraintes suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec:  $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$

Par application de la loi de Hooke, on en déduit que le tenseur de déformations correspondant est:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec:  $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha \Delta T$

Similairement,  $\varepsilon_{33}$  correspond au changement de l'épaisseur du matériau

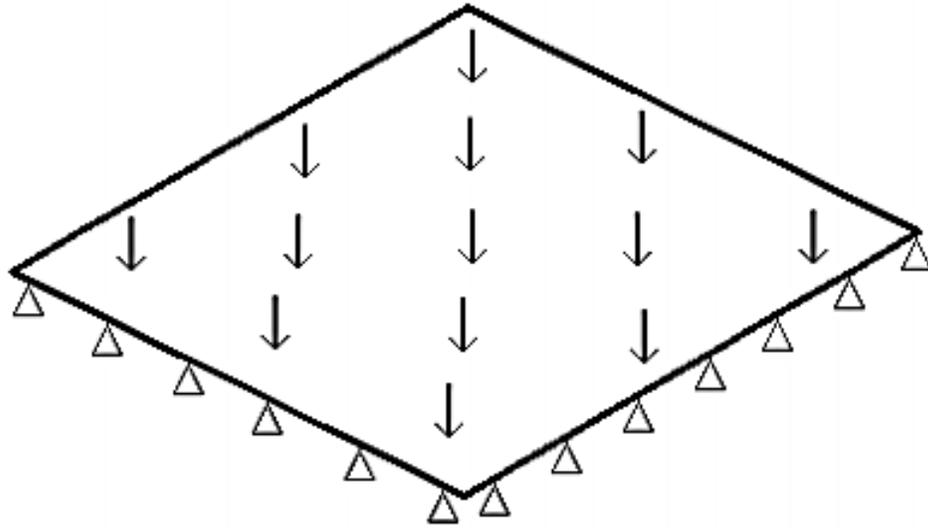
Perpendiculairement à la direction de la charge.

En notation indicielle, les expressions s'écrivent:

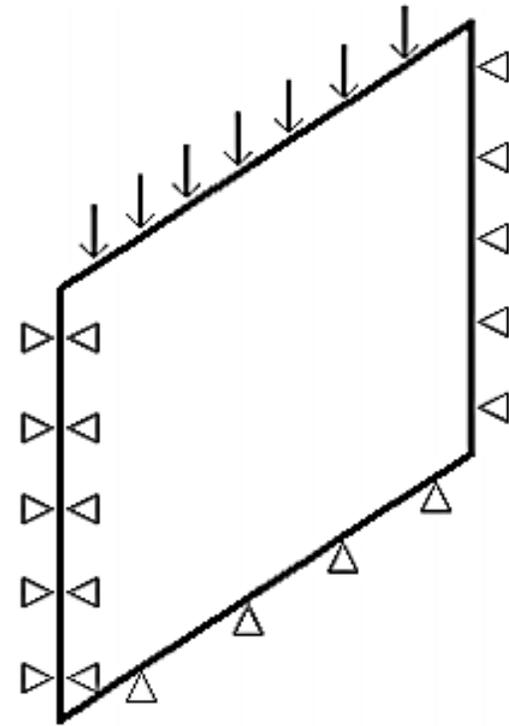
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \alpha \Delta T \delta_{\alpha\beta}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T \delta_{\alpha\beta}$$

Des contraintes planes apparaissent par exemple dans le cas d'une structure mince chargée uniquement dans son plan. Une telle structure est appelée une coque, et ne doit pas être confondue avec une plaque, de géométrie comparable mais chargée perpendiculairement à son plan.



**Plaques**  
Contraintes quelconques



**Coques**  
Contraintes planes

## Interprétation physique des constantes élastiques :

Le **module d'Young  $E$**  est défini par la pente de la courbe contraintes-déformations en traction uniaxiale. Il représente la rigidité du matériau .

Le **coefficient de Poisson  $\nu$**  représente le rapport de la déformation latérale à la déformation longitudinale en traction uniaxiale. Il varie entre 0.2 et 0.49, et sa valeur est d'environ 0.3 pour la majorité des matériaux métalliques.

Pour un matériau stable -  $1 < \nu < 0.5$ .

Si  $\nu = 0.5$ , le matériau est incompressible, son volume reste constant quelque soit sa déformation.

Si  $\nu = 0$ , la dilatation de l'échantillon ne cause pas une contraction latérale.

Le **coefficient de dilatation thermique  $\alpha$**  mesure le changement dans le volume d'un matériau s'il est chauffé en absence de contraintes. Il est généralement petit; pour les aciers par exemple  $\alpha \approx 6-10 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  .

Le **module d'élasticité isostatique** (bulk modulus) mesure la résistance matériau au changement de son volume. Il prend une valeur plus importante que celle de E.

Le **module de cisaillement G**, noté également  $\mu$ , mesure la résistance au volume préservant les déformations en scission. Sa valeur est souvent légèrement plus petite que E.

## Constantes élastiques isotropes et densités pour quelques matériaux

Material	Mass density $\rho / \text{Mgm}^{-3}$	Youngs Modulus $E / \text{GNm}^{-2}$	Poisson Ratio $\nu$	Expansion coeft $K^{-1}$
Tungsten Carbide	14 – 17	450–650	0.22	$5 \times 10^{-6}$
Silicon Carbide	2.5 – 3.2	450	0.22	$4 \times 10^{-6}$
Tungsten	13.4	410	0.30	$4 \times 10^{-6}$
Alumina	3.9	390	0.25	$7 \times 10^{-6}$
Titanium Carbide	4.9	380	0.19	$13 \times 10^{-6}$
Silicon Nitride	3.2	320 - 270	0.22	$3 \times 10^{-6}$
Nickel	8.9	215	0.31	$14 \times 10^{-6}$
CFRP	1.5-1.6	70 – 200	0.20	$2 \times 10^{-6}$
Iron	7.9	196	0.30	$13 \times 10^{-6}$
Low alloy steels	7.8	200 - 210	0.30	$15 \times 10^{-6}$
Stainless steel	7.5-7.7	190 - 200	0.30	$11 \times 10^{-6}$
Mild steel	7.8	196	0.30	$15 \times 10^{-6}$
Copper	8.9	124	0.34	$16 \times 10^{-6}$
Titanium	4.5	116	0.30	$9 \times 10^{-6}$
Silicon	2.5-3.2	107	0.22	$5 \times 10^{-6}$
Silica glass	2.6	94	0.16	$0.5 \times 10^{-6}$
Aluminum & alloys	2.6-2.9	69-79	0.35	$22 \times 10^{-6}$

D'autres constantes élastiques peuvent être utilisées:

module d'élasticité isostatique (bulk modulus):  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

module de cisaillement:  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  et module de Lamé:  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

	LAME MODULUS $\lambda$	SHEAR MODULUS $\mu$	YOUNG'S MODULUS $E$	POISSON'S RATIO $\nu$	BULK MODULUS $K$
$\lambda, \mu$			$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$
$\lambda, E$		Irrational		Irrational	Irrational
$\lambda, \nu$		$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$		$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$
$\lambda, K$		$\frac{3(K-\lambda)}{2}$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	
$\mu, E$	$\frac{\mu(2\mu-E)}{E-3\mu}$			$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$
$\mu, \nu$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$		$2\mu(1+\nu)$		$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
$\mu, K$	$\frac{3K-2\mu}{3}$		$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$	
$E, \nu$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$			$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
$E, K$	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$	$\frac{3EK}{9K-E}$		$\frac{3K-E}{6K}$	
$\nu, K$	$\frac{3K\nu}{(1+\nu)}$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3K(1-2\nu)$		

Pr. A. DERARDJA  
Tableau reliant toutes les combinaisons possibles

## Energie de déformation :

L'expression de l'énergie de deformation est formée de deux parties:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T$$

Où:  $\varepsilon_{ij}^T = \alpha \Delta T \delta_{ij}$  représente la déformation due à la dilatation thermique (déformation thermique).

et  $\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  représente la déformation due au chargement mécanique (déformation élastique).

Sous chargement, la densité d'énergie de déformation est donnée par:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e$$

Elle peut être écrite, également, sous la forme:

$$W = \frac{1 + \nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{kk} \sigma_{jj}$$

Ou encore:

$$W = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e + \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{jj}^e \varepsilon_{kk}^e$$