Invariáns mértékek és az 1997. évi Schweitzer verseny 7. feladata

Az 1997. évi Schweitzer verseny 7. feladata a következőképpen szól:

Legyen $\mathbf{G}$ Abel-csoport, $0 \le \varepsilon < 1$ és $f\colon \mathbf{G} \to \mathbf{R}^n$ olyan függvény, amelyik kielégíti az

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \varepsilon \|f(y)\|, \qquad (x, y) \in \mathbf{G}^2$$

egyenlőtlenséget. Igazoljuk, hogy ekkor léteznek olyan $A\colon \mathbf{G} \to \mathbf{R}^n$ additív valamint $\varphi\colon A(\mathbf{G}) \to \mathbf{R}^n$ folytonos függvények, melyekre $f = \varphi \circ A$.

A feladat megoldásában kulcsszerepet játszik a következő eredmény:

Tétel: *Vezessük be a következő fogalmat: Egy $\mathbf{G}$ csoporton értelmezett korlátos függvények $B(\mathbf{G})$ terén definiált $M\colon B(\mathbf{G}) \to \mathbf{R}^1$ leképezés, (baloldali) transzláció invariáns középérték, ha*

i.) $M(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 M f_1 + c_2 M f_2$ *minden* $c_1, c_2 \in \mathbf{R}^1$ *számra és* f_1, f_2 $\mathbf{G} \to \mathbf{R}^1$ *korlátos függvényre.*

ii.) $M \mathbf{T}_g f = M f$ *minden* $g \in \mathbf{G}$ *és* $f \in B(\mathbf{G})$*-re, ahol* $\mathbf{T}_g f(h) = f(gh)$.

iii.) $\inf\limits_{g \in \mathbf{G}} f(g) \le M f \le \sup\limits_{g \in \mathbf{G}} f(g)$ *minden* $f \in B(\mathbf{G})$*-re.*

Ha a G csoport kommutativ, akkor a rajta értelmezett korlátos függvények terén létezik (baloldali) transzláció invariáns mérték.

E feladatsorban belátjuk mind a fenti tételt mind pedig a megfogalmazott Schweitzer verseny feladatot. Továbbá megtárgyalunk néhány a fenti tételhez kapcsolódó problémát. Lássuk be először a következő állítást:

0.) A fent megfogalmazott tétel ekvivalens a következő állítással. Ha a $\mathbf{G}$ csoport kommutativ, akkor létezik azon (jobboldali) invariáns egyre normált μ véges mérték, azaz olyan μ függvény $\mathbf{G}$ *összes* részhalmalmazán, melyre $0 \le \mu(\mathbf{A}) \le 1$ minden $\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$ halmazra, $\mu(\mathbf{G}) = 1$, $\mu(\mathbf{A}g) = \mu(\mathbf{A})$ minden $\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$ halmazra és $g \in \mathbf{G}$ „mozgatásra", és ha $\mathbf{A}_1, \dots \mathbf{A}_k$ a $\mathbf{G}$ diszjunkt részhalmazai, akkor $\mu(\mathbf{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{A}_k) = \mu(\mathbf{A}_1) + \cdots + \mu(\mathbf{A}_k)$.

A fent megfogalmazott tétel kapcsán természetes módon vetődik fel néhány további kérdés is, melyekre esetleg későbbi szemináriumokon visszatérhetünk.

i.) Mely csoportokra létezik (jobboldali) invariáns véges mérték és melyekre nem? A fenti tétel szerint létezik ilyen mérték kommutativ csoport esetén. Negatív a válasz viszont akkor, ha a csoport nagyon „bonyolult". Bebizonyítható, hogy nem létezik ilyen mérték, ha a csoport egy részcsoportja izomorf a két elem által generált szabad csoporttal. Lakos Gyula hívta fel a figyelmemet arra, hogy az ilyen kérdések vizsgálata fontos szerepet játszik Laczkovich Miklós speciálelőadásában is. Valóban, például a Tarski paradoxon (egy gömböt szét lehet vágni véges sok részre, és azokból össze lehet rakni két ugyanolyan sugarú gömböt) szoros kapcsolatban van a három dimenziós tér mozgatáscsoportjának bonyolultságával. Szívesen venném, ha a jövőben valaki beszélne ilyen problémákról.

ii.) Egy másik érdekes kérdés, melyet később esetleg tárgyalhatunk az, hogy mikor létezik egy halmaz összes részhalmazain nem triviális (nem megszámlálható sok pontba koncentrált) σ-additív mérték.

A fent megfogalmazott eredmények bizonyításához transzfinit indukció, tehát a kiválasztási axióma felhasználása szükséges. Ez azért fontos, mert ez egyben azt jelenti, hogy a fenti feladatokra csak egzisztencia bizonyításokat nem pedig explicit konstrukciót tudunk adni. Ezt a transzfinit indukciót több ekvivalens módon alkalmazhatjuk. Az egyik leggyakrabban (és talán legkényelmesebben) használt módszer a következő un. Zorn lemma.

Zorn lemma. *Legyen $(X, \preceq)$ egy részben rendezett halmaz. (Bízonyos $x \in X$, $y \in X$ párokra teljesül az $x \preceq y$ egyenlőtlenség, mely teljesíti a következő tulajdonságokat: (i) $x \preceq x$, (ii) ha $x \preceq y$ és $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$, (iii) ha $x \preceq y$ és $y \preceq x \Rightarrow x = y$.) Egy $A \subset X$ halmazt X teljesen rendezett részhalmazának hívunk, ha tetszőleges $x \in A$ és $y \in A$ elemekre $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$. Egy $m \in X$ elemet maximálisnak nevezünk, ha $m \preceq x \Rightarrow m = x$.*

Tegyük fel, hogy az $(X, \preceq)$ részben rendezett halmaz teljesíti a következő tulajdonságot: Az X halmaz tetszőleges $A \subset X$ rendezett részhalmazának van majoránsa, azaz olyan $z \in X$ elem, melyre $x \preceq z$ minden $x \in A$ elemre. Ekkor tetszőleges $x \in X$ elemre létezik olyan $m \in X$ maximális elem, melyre $x \preceq m$.

A Zorn lemma bizonyítását nem tárgyaljuk. Ugyancsak elhagyjuk az alább kimondott Banach–Hahn tétel bizonyítását, mely a Zorn lemma segítségével bizonyítható. Ez a funkcionálanalízis egyik legfontosabb eredménye és része a felső éves egyetemi tananyagnak. A tételsor elején kimondott tételt könnyebb a Banach–Hahn tétel segítségével mint a Zorn lemma közvetlen alkalmazásával bizonyítani.

Banach–Hahn tétel. *Legyen adva egy E valós lineáris tér, annak egy L altere, egy $u_0\colon L \to \mathbf{R}^1$ lineáris leképezés, és egy az egész E téren definiált $p(x)$, $x \in E$, valós értékű függvény, mely teljesíti a következő tulajdonságokat:*

i.) $u_0(x) \le p(x)$, *ha* $x \in L$.
ii.) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, *ha* $x, y \in E$.
iii.) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, *ha* $x \in E$, *és* $\alpha \ge 0$.

Ekkor létezik az u_0 lináris leképezésnek olyan $u\colon E \to \mathbf{R}^1$ kiterjesztése az egész E térre, mely lineáris leképezés, és $u(x) \le p(x)$ minden $x \in E$ pontban.

1.) Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{G}$ csoport korlátos függvényeinek terén akkor és csak akkor létezik (baloldali) transzláció invariáns középérték, ha tetszőleges $f_1, \dots, f_k$ $\mathbf{G}$-n definiált korlátos függvényekre és $g_1 \in \mathbf{G}, \dots, g_k \in \mathbf{G}$ elemekre

$$\sup_{h \in \mathbf{G}} \sum_{j=1}^{k} \bigl(f_j(h) - \mathbf{T}_{g_j} f_j(h)\bigr) \ge 0 ,$$

ahol $\mathbf{T}_g f(h) = f(gh)$ minden $h \in \mathbf{G}$-re.

Segítség: Lássuk be, hogy a feltétel teljesülése esetén a $\sum\limits_{j=1}^{k} \bigl(f_j(h) - \mathbf{T}_{g_j} f_j(h)\bigr)$ alakú függvényekből álló altéren definiált $u_0(f) \equiv 0$ leképezés kiterjeszthető a $\mathbf{G}$ téren értelmezett korlátos függvények terén definiált u lineáris leképezéssé úgy, hogy $u(f) \le \sup\limits_{h\in\mathbf{G}} f(h)$.

A kimondott tétel bebizonyítható az első feladat segítségével. A bizonyításban megjelenik egy a matematika bizonyos problémáiban fontos szerepet játszó fogalom a null kohomologia, az hogy tetszőleges n egész számra a $\sum\limits_{j=1}^{n}(\mathbf{T}^j f - \mathbf{T}^{j-1} f) = \mathbf{T}^n f - f$, tehát mindössze két elemből álló összeg. (Pontosabban a null kohomologia többdimenziós változatát használjuk).

2.) Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{G}$ kommutativ csoport korlátos függvényeinek terén létezik (baloldali) transzláció invariáns középérték.

Segítség: Ha $\sup\limits_{h\in\mathbf{G}} \sum\limits_{j=1}^{k} \big(f_j(h) - \mathbf{T}_{g_j} f_j(h)\big) \le -\varepsilon$ alkalmas választással, akkor tekintsük a

$$\sup_{h\in\mathbf{G}} \sum_{0\le l_1\le N,\dots 0\le l_k\le N} \sum_{j=1}^{k} \mathbf{T}_{g_1^{l_1}\cdots g_k^{l_k}} \big(f_j(h) - \mathbf{T}_{g_j} f_j(h)\big)$$

kifejezést elég nagy N-re, és adjunk e kifejezésre egymásnak ellentmondó alsó és felső becslést.

3.) Egy $A \subset \mathbf{R}^n$ $\operatorname{conv} A$ konvex burka akkor és csak akkor tartalmaz egy $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ pontot, ha tetszőleges $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ számokra $\inf\limits_{(u_1,\dots,u_n)\in A}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \le \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \le \sup\limits_{(u_1,\dots,u_n)\in A}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n)$. Ha M (baloldali) transzláció invariáns középérték egy $\mathbf{G}$ Abel csoport korlátos függvényeinek terén, $(f_1,\dots,f_n)$ n korlátos függvényből álló vektor, akkor $(Mf_1,\dots,Mf_n)$ az $(f_1(g),\dots,f_n(g))$, $g\in\mathbf{G}$, pontok konvex burkában van.

4.) Legyen M (baloldali) transzláció invariáns középérték egy $\mathbf{G}$ Abel csoport korlátos függvényeinek terén. Ha teljesülnek a feladatsor elején megfogalmazott Schweitzer feladat feltételei, akkor az $Af(x) = M[f(x+\cdot) - f(\cdot)]$, $Af\colon \mathbf{G}\to\mathbf{R}^n$ leképezés jól definiált függvény $\mathbf{G}$-n, $A(x+y) = A(x) + A(y)$, és teljesül az $\|A(y) - f(y)\| \le \varepsilon\|f(y)\|$ egyenlőtlenség.

5.) A $\varphi(u) = f(x)$, ha $u = A(x)$ értelmesen definiálja a $\mathbf{G}$ halmaz $A(\mathbf{G})$ képének leképezését az $\mathbf{R}^n$ halmazra, azaz ha $A(x_1) = A(x_2)$, akkor $f(x_1) = f(x_2)$. Sőt, ha $u_1 = A(x_1)$, $u_2 = A(x_2)$, akkor mivel

$$(1-\varepsilon)\|f(x_1-x_2)\| \le \|f(x_1) - f(x_2)\| \le (1+\varepsilon)\|f(x_1-x_2)\|$$
$$(1-\varepsilon)\|f(x_1-x_2)\| \le \|A(x_1) - A(x_2)\| \le (1+\varepsilon)\|f(x_1-x_2)\|\ ,$$

$\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|u_1-u_2\| \le \|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\| \le \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|u_1-u_2\|$. Lássuk be, hogy a definiált A and φ függvények a feladatsor elején megfogalmazott Schweitzer feladat megoldását szolgáltatják. (Az is látható innen, hogy a φ függvénynek létezik folytonos inverze.)