Matematika

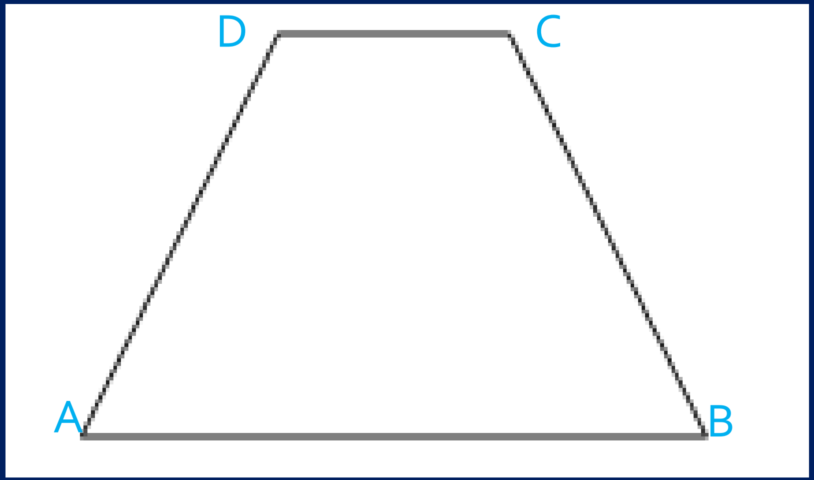
a középiskolák első osztálya számára

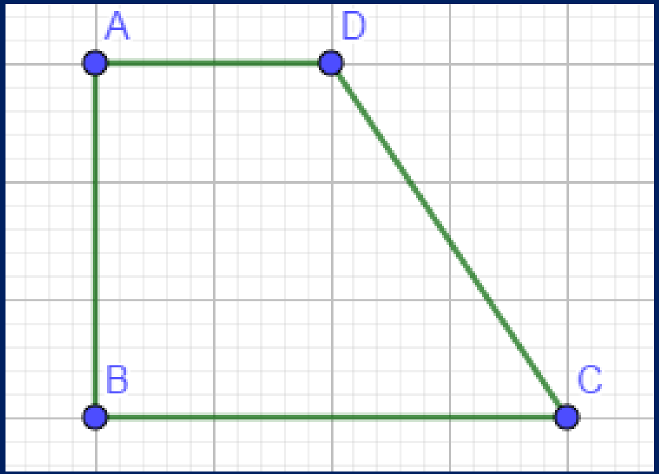
NÉGYSZÖGEK

paralelogramma, trapéz, deltoid

TRAPÉZ

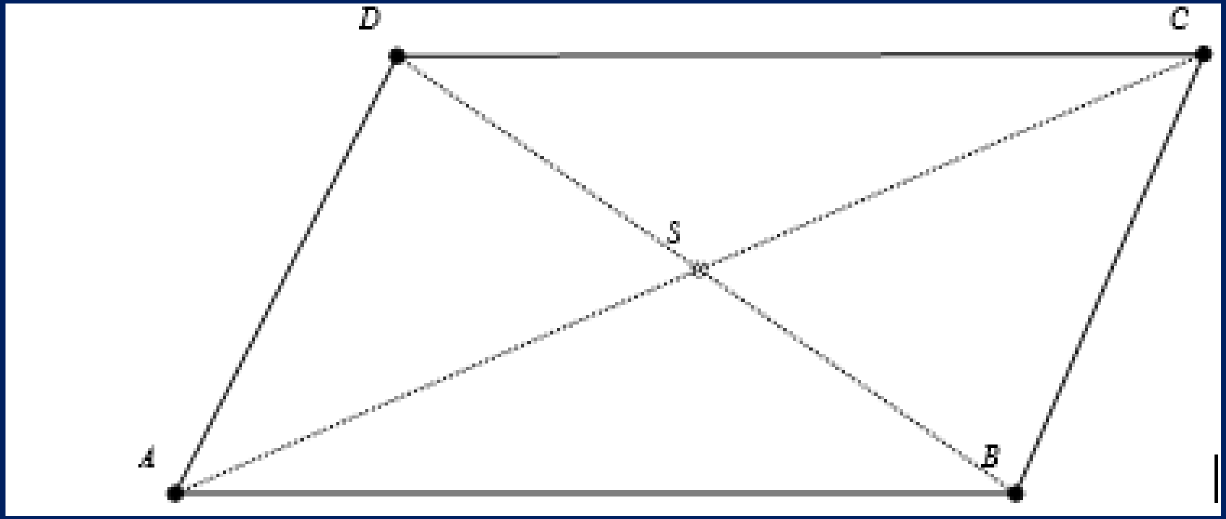
- Definíció : Az ABCD négyszög trapéz, ha AB||CD. Az AB és CD oldalak az alapok, BC és AD oldalak a trapéz szárai.
- A trapéz egyenlő szárú, ha BC≅AD és BC nem párhuzamos az AD szárral.
- A trapéz derékszögű, ha legalább egyik belső szöge derékszög.



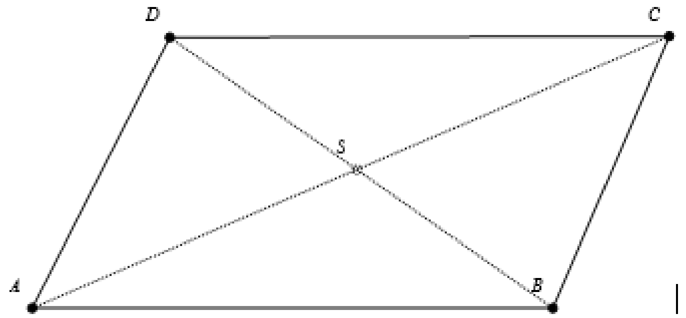


PARALELOGRAMMA

- *Definíció :* Az ABCD négyszög paralelogramma, ha szemköztes oldalpárjai egymással párhuzamosak, vagyis AB| | CD és AD| | BC.



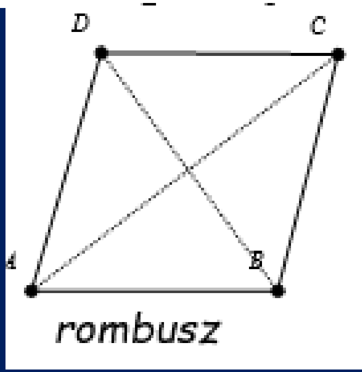
PARALELOGRAMMA

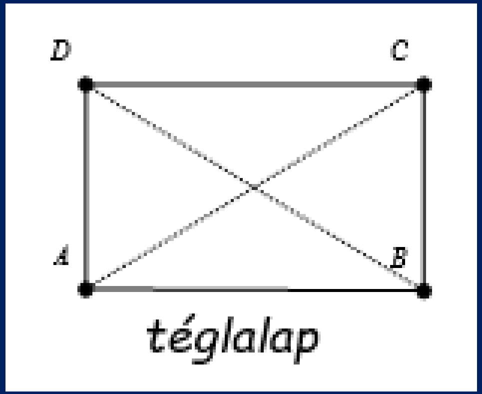


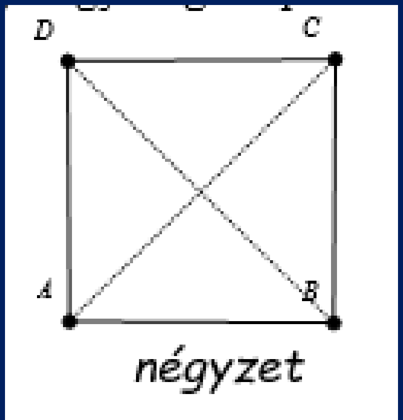
- *Tétel:* Legyen ABCD egy konvex négyszög. Akkor a következő állítások egymással ekvivalensek:
- ***(1)*** ABCD négyszög paralelogramma.
- ***(2)*** A négyszög bármely két belső szomszédos szöge egymás kiegészítő szöge.
- ***(3)*** A négyszög szemköztes szögpárjai egymással egybevágóak.
- ***(4)*** Az ABCD négyszögben $AB \parallel CD$ és $AB \cong CD$ -szemköztes oldalai egybevágóak és párhuzamosak.
- ***(5)*** Az ABCD négyszögben $AB \cong CD$ és $AD \cong BC$ -szemköztes oldalpárjai egybevágóak.
- ***(6)*** A négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást, vagyis az AC és BD szakasznak közös felezőpontja van.

PARALELOGRAMMA

- *Definíció:*
- Azt a négyszöget, amelynek mind a négy oldala egyenlő, *rombusz*nak nevezzük.
- Azt a négyszöget, amelynek mind a négy szöge egybevágó (derékszög), *téglalap*nak nevezzük.
- Azt a négyszöget, amelynek minden oldala egybevágó és minden belső szöge egybevágó, *négyzet*nek nevezzük.





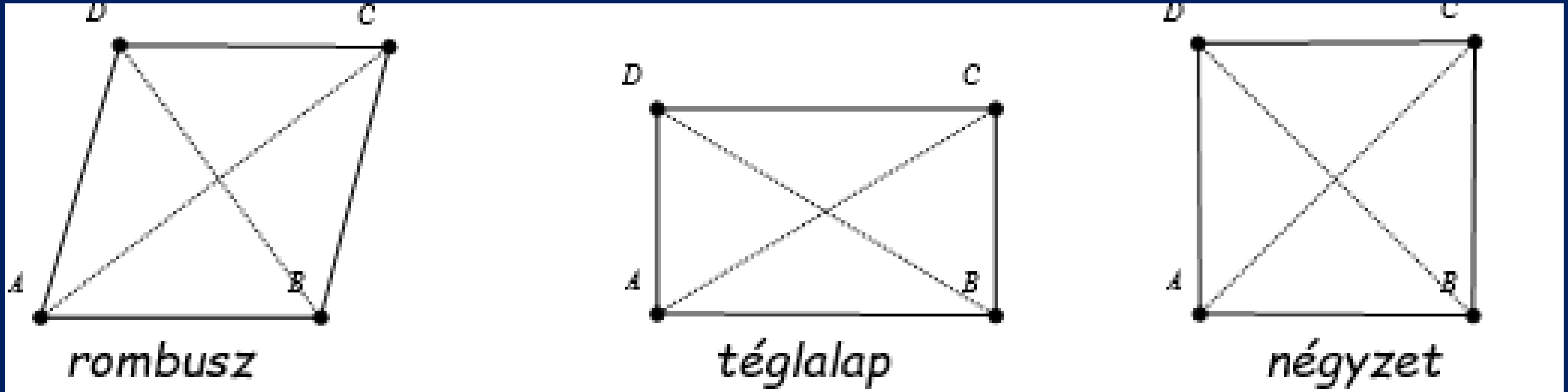


PARALELOGRAMMA

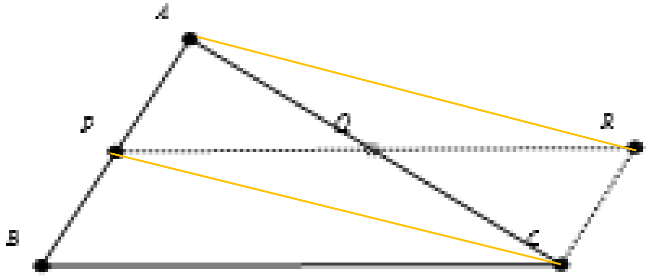
- Tétel: a) A paralelogramma akkor rombusz, ha átlói merőlegesen felezik egymást.

b) A paralelogramma akkor téglalap, ha átlói egymással egybevágók.

c) A paralelogramma akkor négyzet, ha átlói egymással egybevágók és merőlegesek egymásra.



HÁROMSZÖG KÖZÉPVONALA

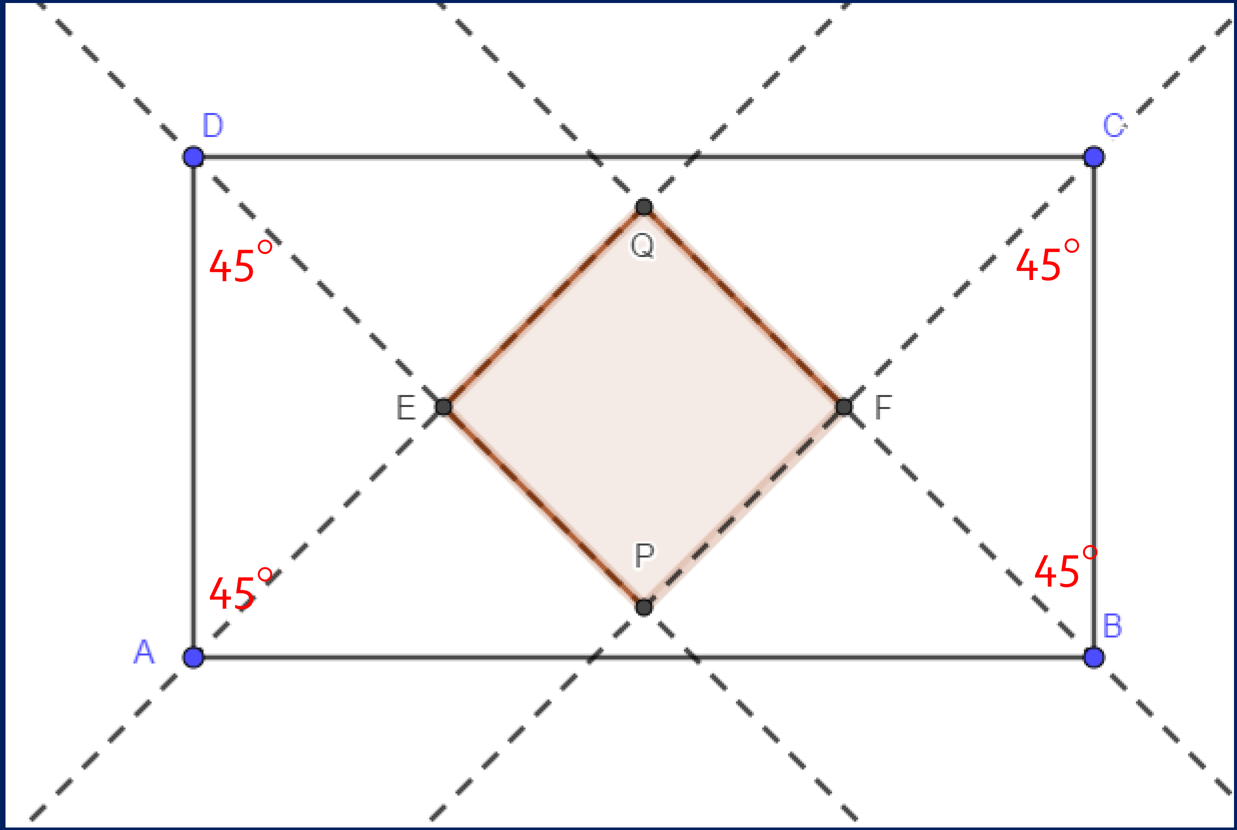


- *Definíció :* A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakasz a háromszög középvonala, és ez a háromszög harmadik oldalának felel meg.
- Tétel: (háromszög középvonala) Ha P és Q pontok az ABC háromszög AB és AC oldalának felezőpontjai, akkor PQ egyenlő BC felével és BC párhuzamos a PQ egyenessel.
- *Bizonyítás:* Jelölje R azt a pontot a PQ egyenesen, amelyre PQ≅QR és $\mathcal{B}$(P, Q, R). Ekkor az AC és PR szakaszoknak közös felezőpontjuk van, tehát az előző tétel alapján az APCR négyszög paralelogramma.
- Ha alkalmazzuk ugyanezt a tételt, ez azt jelenti, hogy az AP és RC szakaszok egybevágóak és párhuzamosak, a P pont az AB szakasz felezőpontja, tehát a PB és RC szakaszok egybevágóak és párhuzamosak.
- Ugyancsak a Tétel alapján a PBCR négyszög is paralelogramma. Ekkor ugyanezen tétel alapján a BC és PR szakaszok egybevágóak és párhuzamosak. A végső következtetés abból a tényből származik, hogy a Q pont a PR szakasz felezőpontja.

PARALELOGRAMMA

DAE$\Delta \cong$ BCFΔ DPC $\cong$ AQBΔ egyenlő szárú
$\Rightarrow$AE$\cong$DE$\cong$CF$\cong$BF és DP$\cong$CP$\cong$AQ$\cong$BQ
$\Rightarrow$ EP=DP-DE$\cong$CP-CF=PF$\cong$FQ$\cong$QE
$\Rightarrow$ EPFQ négyzet

A téglalap (nem négyzet) belső szögeinek szögfelező egyenesei olyan pontokban metszik egymást, amelyek négyzetet alkotnak.



$$DEA\measuredangle = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$$
$$\Rightarrow QEP\measuredangle = 90°$$

$$\mathrm{CFB}\measuredangle = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$$
$$\Rightarrow QFP\measuredangle = 90°$$

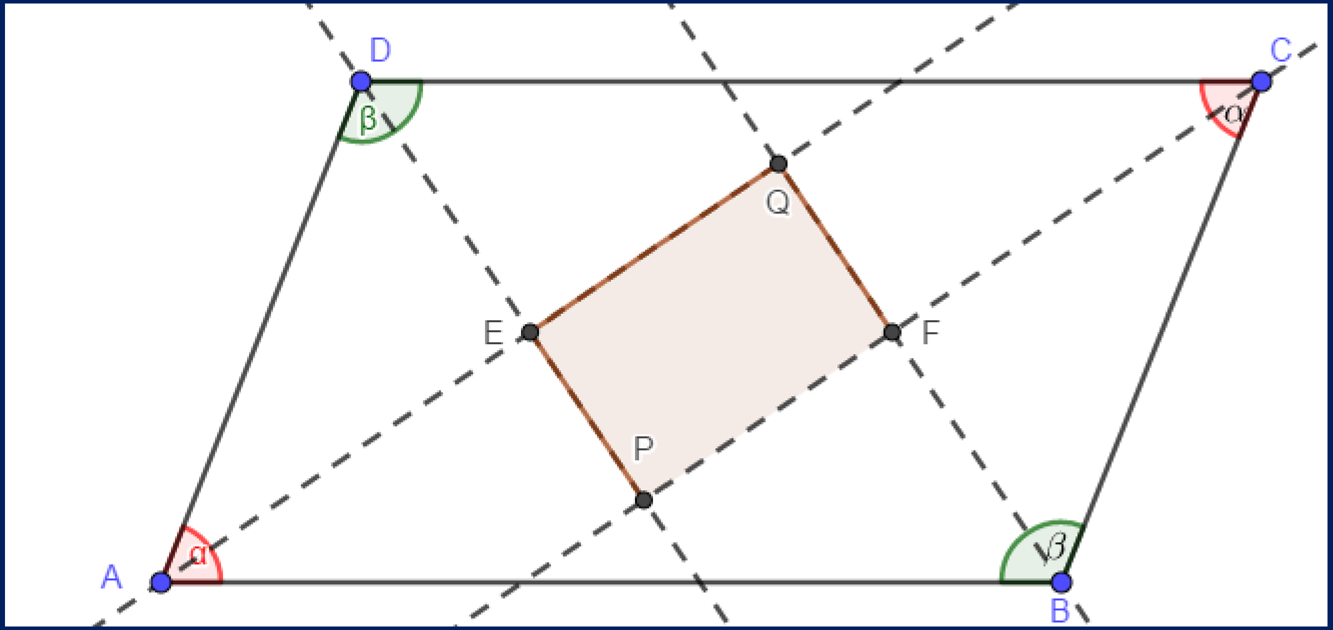
$$AQB\measuredangle = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$$
$$DPC\measuredangle = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$$

$AQ \| \mathrm{CP} \quad \wedge \quad \mathrm{DP} \| \mathrm{BQ} \quad \Rightarrow \quad EPFQ$ paralelogramma

EPFQ téglalap

PARALELOGRAMMA

A paralelogramma (nem rombusz) belső szögfelezőinek metszéspontjai egy téglalap csúcspontjai.



$$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$$

$$DEA\measuredangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90°$$

$$DEA\Delta \cong \mathrm{CFB}\Delta(SzOSz) \qquad \Rightarrow CFB\measuredangle = 90°$$

$$DPC\measuredangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90°$$

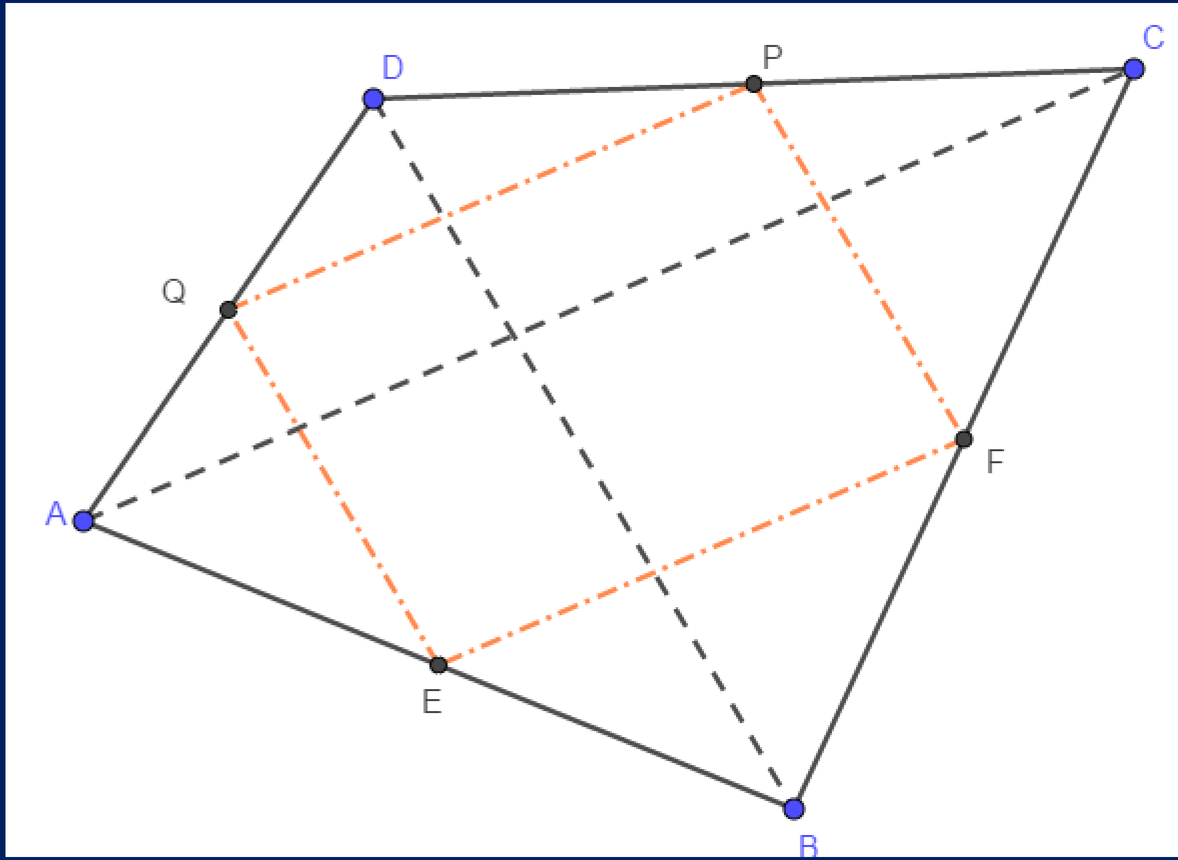
$$AQB\Delta \cong CPD\Delta \qquad \Rightarrow AQB\measuredangle = 90°$$

EPFQ téglalap

$$AQ \| \mathrm{CP} \quad \wedge \quad \mathrm{DP} \| \mathrm{BQ} \quad \Rightarrow \quad EPFQ\ paralelogramma$$

PARALELOGRAMMA

Igazold, hogy tetszőleges négyszög oldalainak felezőpontjai egy paralelogramma csúcsait adják



ACD háromszög középvonala QP

$$QP \| \mathrm{AC} \quad \wedge \quad \mathrm{QP} = \frac{1}{2}AC$$

ACB háromszög középvonala EF

$$\mathrm{EF} \| \mathrm{AC} \quad \wedge \quad \mathrm{EF} = \frac{1}{2}AC$$

ABD háromszög középvonala QE

$$Q\mathrm{E} \| \mathrm{DB} \quad \wedge \quad \mathrm{QE} = \frac{1}{2}DB$$

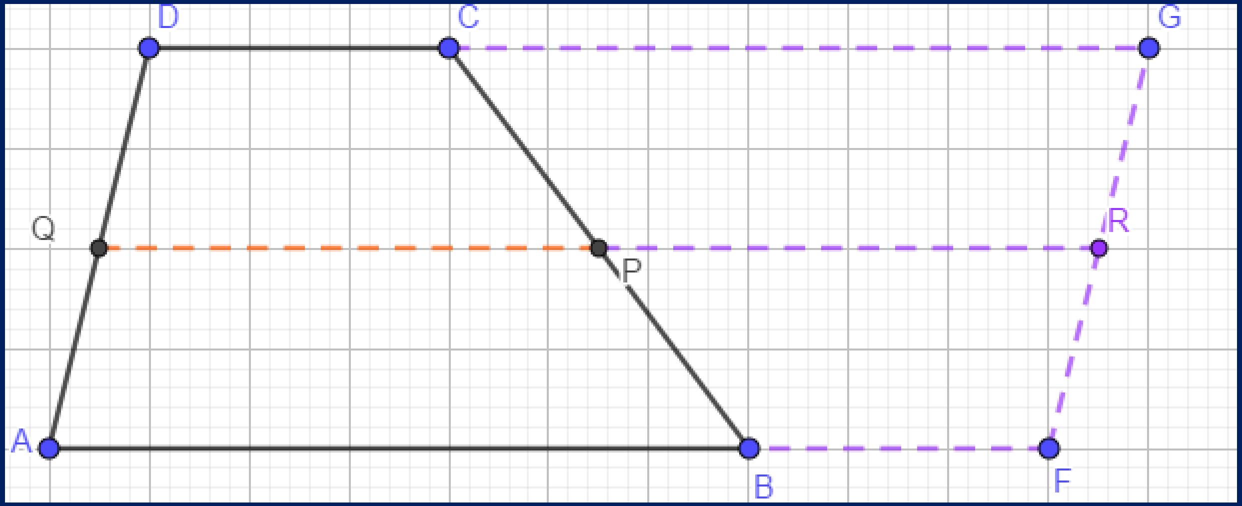
BCD háromszög középvonala PF

$$PF \| \mathrm{DB} \quad \wedge \quad \mathrm{PF} = \frac{1}{2}DB$$

EFPQ paralelogramma

TRAPÉZ

Ha P és Q pontok az ABCD trapéz AD és BC szárainak felezőpontjai, igazold, hogy AB + CD = 2 PQ. (PQ szakaszt a *trapéz középvonalának* nevezzük)



BFGC trapéz egybevágó ABCD trapézzal

$QP \cong RP$

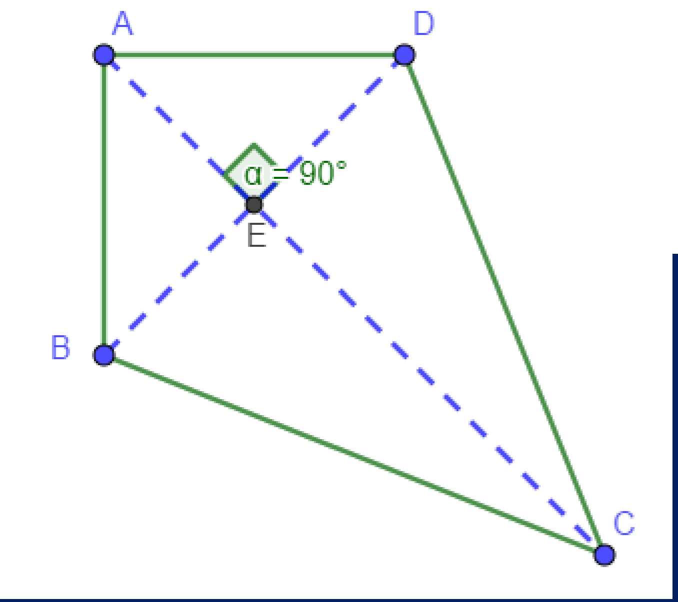
AFGD paralelogramma

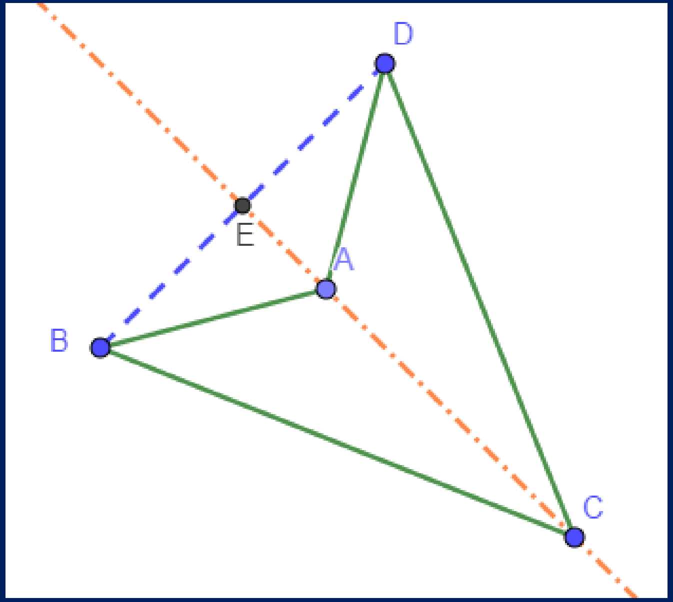
$QR \cong AF \cong DG$

$AB + CD = QR = 2QP$

DELTOID

- A deltoid olyan tengelyesen szimmetrikus négyszög, melynek az egyik átlója a szimmetriatengelye és melynek két-két egymás melletti oldala azonos hosszúságú.
- (Ha mind a négy oldal azonos hosszúságú, akkor a deltoid egyúttal rombusz is, ha ezenfelül közbezárt szögük derékszög, négyzet is.)
- Ebből az is következik, hogy van a vele szemközti szöggel egybevágó szöge, és hogy a konvex deltoid egyik átlója merőlegesen metszi a másikat, és szimmetria miatt felezi azt.
- A konkáv deltoid átlói elkerülik egymást, nem metszik egymást





Köszönöm a megtisztelő figyelmet

Ez a bemutató a négyszög tulajdonságait tárgyalta