

מתכונת במתמטיקה 6- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. שני רוכבי אופנים יצאו בו זמנית מ – A ל-B. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה של x קמ"ש. הרוכב השני נוסע במהירות של $2x - 20$ קמ"ש. לאחר שהרוכב השני עבר 16 ק"מ, הוא עצר לחצי שעה והמשיך לרכב במהירות הגדולה ב- 4 קמ"ש ממהירותו הקודמת. 3 שעות לאחר שיצאו הרוכבים לדרך, היה המרחק ביניהם קטן מ- 8 ק"מ. מצא באיזה תחום מספרים נמצא x . דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה.

2. נתונה הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$. האיבר במקום ה- n מקיים $a_n = 1.5 \cdot 2^n$.

א. הוכח כי הסדרה הנתונה היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום איברי הסדרה שווה לסכום הריבועים של n האיברים הראשונים בסדרה. מצא את האיבר הראשון a_1 .

ג. מצא את מספר האיברים בסדרה אם סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול מסכום האיברים במקומות האי זוגיים ב- 4095.

3. א. במכללה מסוימת בחרו באקראי 3 תלמידים. ההסתברות שלאף אחד מהם אין מנוי לתיאטרון היא

0.421875. מה ההסתברות שתלמיד במכללה זו יש מנוי לתיאטרון?

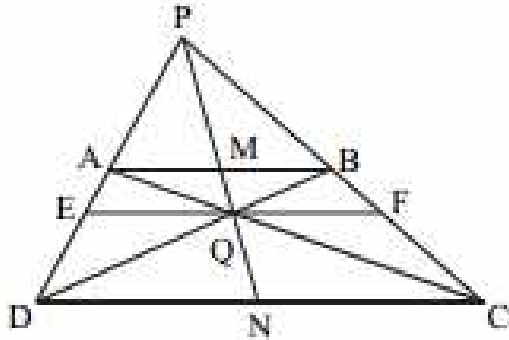
ב. ל- $\frac{5}{8}$ מהתלמידים שרכשו מנוי לתיאטרון יש מנוי לסינמטק. ל- $\frac{1}{3}$ מהתלמידים שלא רכשו מנוי לתיאטרון

יש מנוי לסינמטק. בוחרים באקראי תלמיד מהמכללה ומתברר כי יש לו לפחות מנוי אחד. מה ההסתברות שיש לו מנוי לסינמטק.

ג. בוחרים באקראי 4 תלמידים מהכללה, מה ההסתברות שבדיוק לשניים מתוך הארבעה יש מנוי לסינמטק.

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5

4. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).



המשכי השוקים נפגשים בנקודה P.

Q היא נקודת החיתוך של האלכסונים.

PQ חותך את הבסיס AB בנקודה M.

המשכו של PQ חותך את הבסיס DC בנקודה N.

EF עובר דרך נקודה Q ומקביל ל-DC.

א. הוכח: $QE = QF$

ב. הוכח: $AM = BM$

ג. הוכח: $S_{ADNQ} = S_{BCNQ}$

5. משולש ABC הוא משולש שווה שוקים,

החסום במעגל שמרכזו O.

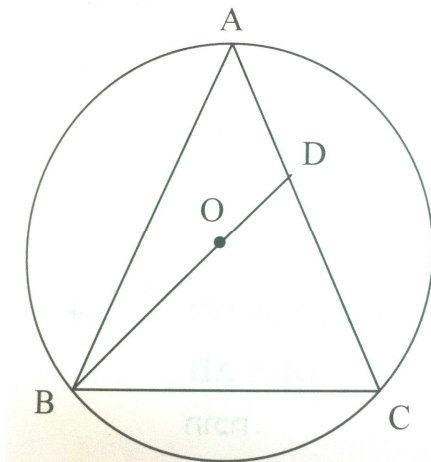
נתון ישר BD העובר דרך מרכז המעגל.

$BD = k$, $\angle BAC = \beta$

א. הבע באמצעות β ו- k את שוקי המשולש.

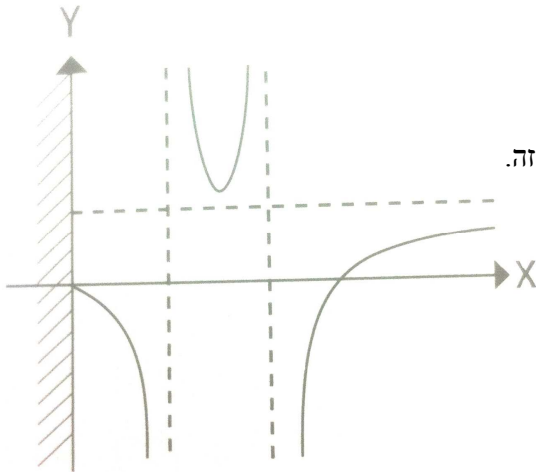
ב. נתון כי שטח המשולש ABD הוא $\frac{k^2 \sin\left(\frac{3\beta}{2}\right)}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

הבע באמצעות k בלבד את היקף המשולש ABC



פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8

6. נתון גרף הפונקציה $f(x) = \frac{2ax - 12b\sqrt{x}}{bx - 3b\sqrt{x} + c}$, $(0 < b, 0 < a)$, אשר חותך את ציר ה- x בשתי נקודות



שהמרחק ביניהן הוא 9 יח' אורך.

א. מצא את האסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתון: גרף הנגזרת $f'(x)$ עולה בתחום $1 < x < 4$ ורק בתחום זה.

מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא באיזה תחום מספרי נמצאת נקודת הקיצון של

גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

ד. הגדירו פונקציה חדשה $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$

7. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = 3x^2$ ו- $g(x) = x\sqrt{x^2 + 128}$ בתחום $x \geq 0$.

בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות.

א. איזה גרף, I או II, מתאים לפונקציה $f(x)$,

ואיזה גרף מתאים לפונקציה $g(x)$? נמק.

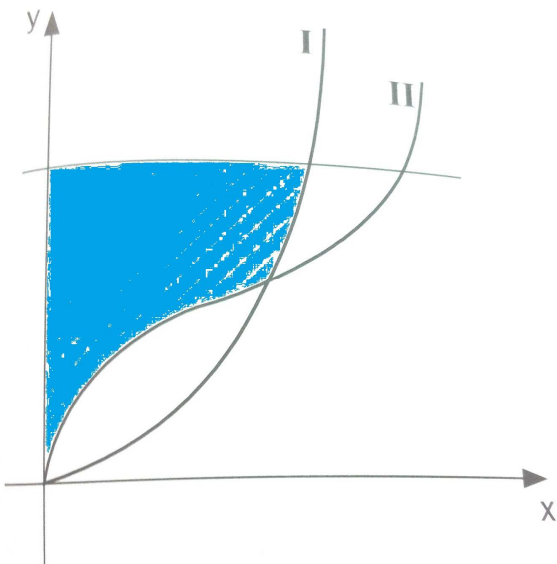
ב. הוכח: $\int g(x)dx = \frac{(x^2 + 128)^{1.5}}{3} + c$

וחשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- y , הישר $y = 75$

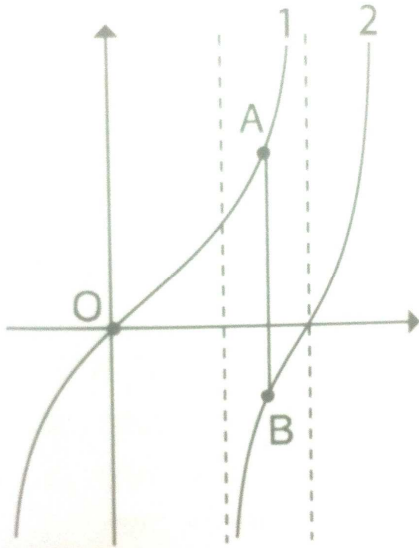
ועל ידי הגרף של $f(x)$ ושל $g(x)$ (השטח המקווקו).

ג. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות בתחום $x \geq 0$

מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



8. נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2 \tan x$ ו- $g(x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ בתחום $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.



למרות שגרף 2 עובר גם משמאל לאסימפטוטה השמאלית, לשם הנחות, הוא מופיע רק בתחום הרלוונטי לתרגיל, מימין לה.

א. מצא את שתי האסימפטוטות המופיעות בשרטוט.

ב. קבע איזה מהגרפים מתאים לפונקציה $g(x)$.

ג. מהנקודה A, הנמצאת על גרף 1 בין האסימפטוטות,

מורידים אנך החותך את גרף 2 בנקודה B.

מצא את אורכו המינימלי של הקטע AB.

ד. כאשר אורך AB מינימלי, חשב את שטח ΔABO .

בהצלחה !

1. המהירויות של הרוכבים חיוביות לכן $x > 10$

$$x_1 = 3x \quad \text{ב} - 3 \text{ המרחק שהרוכב הראשון עבר}$$

$$x_2 = 16 + \left(3 - \frac{16}{2x-20} - \frac{1}{2}\right)(2x-20+4) = 16 + \frac{5x-66}{x-10}(x-8)$$

$$x_2 - x_1 = 16 - 3x + \frac{(5x-66)(x-8)}{x-10} = \frac{2(x^2 - 30x + 184)}{x-10}$$

יכול להיות שהרוכב הראשון נמצא לפני הרוכב השני או הפוך לכן

$$-8 < \frac{2(x^2 - 30x + 184)}{x-10} < 8$$

$$\frac{2(x^2 - 30x + 184)}{x-10} < 8 \Rightarrow x^2 - 34x + 224 < 0 \Rightarrow 8.973 < x < 25.06 \quad \text{נדרוש}$$

$$\frac{2(x^2 - 30x + 184)}{x-10} > -8 \Rightarrow x^2 - 26x + 114 < 0 \Rightarrow x < 8 \text{ or } x > 18 \quad \text{וגם נדרוש}$$

חיתוך של כל התנאים נותן את התשובה הסופית $18 < x < 25.06$ (ק"מ).

$$2. \quad a_{n+1} = 1.5 \cdot 2^{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.5 \cdot 2^{n+1}}{1.5 \cdot 2^n} = 2 \quad \text{א.}$$

$$b. \quad S_2 = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q-1}, \quad S_1 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{a_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q-1} = \frac{a_1^2(q^{2n} - 1)}{(q-1)(q+1)} \Rightarrow a_1 = q+1 = 3$$

$$g. \quad S_3 = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \frac{a_2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{a_1 q (q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = 2(2^{2n} - 1)$$

$$S_4 = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = 2^{2n} - 1$$

$$S_4 + 4095 = S_3 \Rightarrow 2^{2n} - 1 + 4095 = 2 \cdot 2^{2n} - 2 \Rightarrow 2^{2n} = 4096 = 2^{12} \Rightarrow 2n = 12$$

בסדרה יש 12 איברים.

$$3. \quad \text{א. } (1-p)^3 = 0.421875 \Rightarrow p = 0.25 \quad \text{ההסתברות שלתלמיד יש מנוי לתיאטרון.}$$

ב.

	מנוי לתיאטרון (A)	לא מנוי לתיאטרון (\bar{A})	
מנוי לסינמטק (B)	0.15625	0.25	0.40625
לא מנוי לסינמטק (\bar{B})	0.09375	0.5	0.59375
	0.25	0.75	1

C – המאורע שלתלמיד יש לפחות מנוי אחד

$$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0.40625}{0.5} = 0.8125 = \frac{13}{16}$$

ג. $p = 0.406$ - מנוי לסינמטק ולא לתיאטרון.

$$P = \binom{4}{2} (0.406)^2 (1 - 0.406)^2 = 0.349$$

4. א. $DC \parallel EQ$ (נתון) לפי הרחבה ראשונה של תלס מתקבל (1) $\frac{AC}{AQ} = \frac{DC}{EQ}$

(2) $DC \parallel QF$ (נתון) לפי הרחבה ראשונה של תלס מתקבל $\frac{BD}{BQ} = \frac{DC}{QF}$

$DC \parallel AB$ (נתון) לפי הרחבה שנייה של תלס מתקבל $\frac{QC}{QA} = \frac{QD}{QB}$.

(3) $1 + \frac{QC}{QA} = 1 + \frac{QD}{QB} \Rightarrow \frac{QA + QC}{QA} = \frac{QB + QD}{QB} \Rightarrow \frac{AC}{QA} = \frac{BD}{QB}$

מ- (1) ל- (3) ול- (2) - $\frac{AC}{AQ} = \frac{DC}{EQ} \Rightarrow \frac{BD}{QB} = \frac{DC}{EQ} \Rightarrow \frac{DC}{QF} = \frac{DC}{EQ}$

ומכאן נובע כי $EQ = QF$.

ב. $AM \parallel EQ$ (נתון) לפי הרחבה ראשונה של תלס מתקבל $\frac{PM}{PQ} = \frac{AM}{EQ}$

$MB \parallel QF$ (נתון) לפי הרחבה ראשונה של תלס מתקבל $\frac{PM}{PQ} = \frac{MB}{QF}$.

מכאן נובע כי $\frac{AM}{PQ} = \frac{MB}{QF}$. בעזרת משל א' מתקבל $AM = MB$.

ג. $AM \parallel DN$ (נתון) לפי הרחבה ראשונה של תלס מתקבל $\frac{AM}{DN} = \frac{PM}{PN}$.

$$\frac{BM}{CN} = \frac{PM}{PN} \quad \text{לפי הרחבה ראשונה של תלם מתקבל}$$

$$\text{מכאן נובע כי } \frac{BM}{CN} = \frac{AM}{DN} \quad \text{בעזרת משל ב' מתקבל } CN = DN$$

$$S_{AMND} = \frac{(AM + DN)h}{2}, \quad S_{BMNC} = \frac{(MB + NC)h}{2}$$

$$S_{AMND} = S_{BMNC} \quad \text{לכן בסיסים}$$

$$S_{AMQ} = \frac{AM \cdot h'}{2}, \quad S_{MBQ} = \frac{MB \cdot h'}{2}$$

$$S_{AMQ} = S_{MBQ} \quad \text{לכן}$$

$$S_{ADNQ} = S_{BCNQ} \quad \text{ומכאן מתקבל כי } S_{ADNQ} = S_{AMND} - S_{AMQ}, \quad S_{BCNM} = S_{BMNC} - S_{BMQ}$$

$$5. \text{א. } \angle BAC = \beta \quad \text{(נתון). בניית עזר - OC - רדיוס במעגל.}$$

$$\angle BOC = 2\beta \quad \text{זווית מרכזית שווה לפעמים הזווית ההיקפית שנשענת על אותה קשת}$$

$$OB = OC = R \quad \text{(שני רדיוסים במעגל) לכן } \triangle BOC \text{ הוא משולש שווה שוקים.}$$

$$\angle OBC = \angle OCB = 90 - \beta \quad \text{(סכום זוויות ב- } \triangle OBC \text{ שווה ל-180 מעלות + זוויות בסיס שוות).}$$

$$\triangle ABC \text{ הוא משולש שווה שוקים (נתון)}$$

$$\angle ABC = \angle ACB = 90 - \frac{\beta}{2} \quad \text{(סכום זוויות ב- } \triangle OBC \text{ שווה ל-180 מעלות + זוויות בסיס שוות).}$$

$$\angle ABD = 90 - \frac{\beta}{2} - (90 - \beta) = \frac{\beta}{2} \quad \text{(חיסור זווית)}$$

$$\angle ADB = 180 - \frac{\beta}{2} - \beta = 180 - \frac{3\beta}{2} \quad \text{(סכום זוויות במשולש ABD שווה ל-180 מעלות).}$$

$$\frac{AB}{\sin(180 - 3\beta/2)} = \frac{k}{\sin \beta} \Rightarrow AB = \frac{k \sin 1.5\beta}{\sin \beta} \quad \text{ב- } \triangle ABD \text{ לפי משפט הסינוסים}$$

$$S = \frac{AB \cdot BD \sin 0.5\beta}{2} = \frac{k^2 \sin 1.5\beta}{2 \sin \beta} \sin 0.5\beta \quad \text{ב. שטח המשולש ABD}$$

$$S = \frac{k^2 \sin 1.5\beta}{2 \sin \beta} \sin 0.5\beta = \frac{k^2 \sin 1.5\beta}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Rightarrow (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin 0.5\beta = 2 \sin \beta \quad \text{לפי הנתון מתקבל}$$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin 0.5\beta = 4 \sin 0.5\beta \cos 0.5\beta \quad \text{- נקבל}$$

$$\sin 0.5\beta((\sqrt{6} + \sqrt{2}) - 4\cos 0.5\beta) = 0 \Rightarrow \sin 0.5\beta = 0 \text{ or } \cos 0.5\beta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

מפתרון המשוואה מתקבל $\beta = 30^\circ$

$$\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(90 - 0.5\beta)} \Rightarrow BC = \frac{k \sin 1.5\beta}{\cos 0.5\beta} - \Delta ABC$$

$$P_{ABC} = AB + AC + BC = 2 \frac{k \sin 1.5\beta}{\sin \beta} + \frac{k \sin 1.5\beta}{\cos 0.5\beta} = (2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)k$$

$$2ax - 12b\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}(a\sqrt{x} - 6b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{36b^2}{a^2} \text{ א. 6}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2a}{b} = 4 \quad . x_2 - x_1 = \frac{36b^2}{a^2} = 9 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

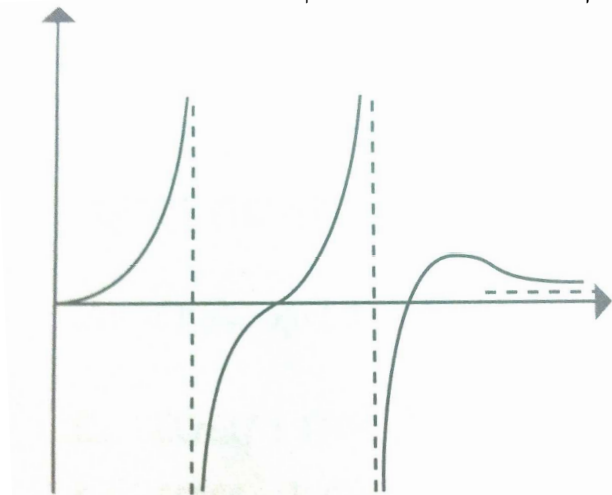
ב. לפי הנתון עולה בתחום $1 < x < 4$ ורק בתחום זה והציור ניתן להסיק כי האסימפטוטות ב- $x = 1, x = 4$.

כלומר $x = 1, x = 4$ מאפסים את המכנה - $4b - 6b + c = 0 \Rightarrow c = 2b$, $b - 3b + c = 0 \Rightarrow c = 2b$

$$f(x) = \frac{4bx - 12b\sqrt{x}}{bx - 3b\sqrt{x} + 2b} \Rightarrow f(x) = \frac{4x - 12\sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x} + 2} \text{ נציב } c = 2b, a = 2b \text{ ונקבל -}$$

ד. הנגזרת השנייה מקבלת קיצון כאשר הנגזרת הראשונה קעורה כלפי מעלה כלומר $1 < x < 4$.

ה.



7. א. $f(x)$ היא פרבולה שהקודקוד שלה נמצא בראשית הצירים לכן מתאימה לגרף I.

II מתאים לגרף $g(x)$

ב. נגזור את הפונקציה $\frac{(x^2 + 128)^{1.5}}{3}$ ונראה שהיא שווה ל- $g(x)$

$$\left(\frac{(x^2 + 128)^{1.5}}{3}\right)' = \frac{1.5(x^2 + 128)^{0.5} \cdot 2x}{3} = x\sqrt{x^2 + 128} = g(x)$$

ולכן ניתן להגיד ש- $\int g(x)dx = \frac{(x^2 + 128)^{1.5}}{3} + c$

$$3x^2 = x\sqrt{x^2 + 128} \Rightarrow x(3x - \sqrt{x^2 + 128}) = 0$$

$$(x \geq 0 \text{ נתון}) \quad x = 0 \text{ or } 3x = \sqrt{x^2 + 128} \Rightarrow 9x^2 = x^2 + 128 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$f(x) = 75 \Rightarrow 3x^2 = 75 \Rightarrow x = 5 \quad - \quad y = 75$$

$$.S = \int_0^4 (75 - g(x))dx + \int_4^5 (75 - f(x))dx = 75x \Big|_0^5 - \frac{(x^2 + 128)^{1.5}}{3} \Big|_0^4 - x^3 \Big|_4^5 = 220.718$$

$$V = \pi \int_0^4 (g^2(x) - f^2(x))dx = \pi \int_0^4 (x^2(x^2 + 128) - 9x^4)dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (128x^2 - 8x^4)dx = \pi \left(\frac{128}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^5 \Big|_0^4 \right) = 1092.266\pi$$

8. א.ב. נמצא את האסימפטוטות של $f(x) = 2 \tan x$ - $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

נמצא את האסימפטוטות של $g(x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$$1 - \tan^2 x = 0 \Rightarrow \tan x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

ניתן לראות גם $f(0) = 2 \tan 0 = 0$. לכן ברור שגרף 1 מתאים ל $f(x)$ וגרף 2 ל $g(x)$

בנוסף האסימפטוטות הן: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. האסימפטוטה השלישית בתחום לא מסומנת.

$$AB = 2 \tan x - \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2 \tan x \left(1 - \frac{1}{1 - \tan^2 x} \right) = -2 \tan x \left(\frac{\tan^2 x}{1 - \tan^2 x} \right) = -\frac{2 \tan^3 x}{1 - \tan^2 x}$$

$$AB' = 2 \frac{-\frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} (1 - \tan^2 x) - \frac{2 \tan x \cdot \tan^3 x}{\cos^2 x}}{(1 - \tan^2 x)^2} = 2 \frac{\tan^2 x (\tan^2 x - 3)}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)^2} = 0$$

$$\tan x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$$

הפתרון בתחום שבין האסימפטוטות הוא $x = \frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$AB' = \frac{2 \tan^2 x (\tan^2 x - 3)}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)^2} = \text{positive} \cdot (\tan^2 x - 3) \quad - \text{נבדוק איזה פתרון נותן מינימום}$$

$$AB'' = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} \Rightarrow AB''(\pi/3) > 0 \Rightarrow \text{min} \quad - \text{לכן ניתן לגזור רק את החלק הלא חיובי}$$

$$AB(\pi/3) = 3\sqrt{3} \quad (\text{יחידות אורך})$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{AB \cdot x_A}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{4} = 2.72 \quad \text{ד. (יחידות שטח)}$$