SONDERABDRUCK AUS JAHRESBERICHT
DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG
45. Band. 1935. Heft 1/4

Mit besten Danke
D. V.

Friedrich Engel

Friedrich Schur

LEIPZIG / B. G. TEUBNER / BERLIN

Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XLV. 1935. Heft 1/4.
Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Friedrich Schur.

Von FRIEDRICH ENGEL in Gießen.

Mit einem Bildnisse aus dem Jahre 1887.

Nur die langjährige Freundschaft, die mich mit F. Schur verbunden hat, kann rechtfertigen, daß ich es übernommen habe, ihm einen Nachruf zu widmen. Er war ja ganz vorwiegend Geometer, der letzte noch ursprünglich aus der Breslauer Schule hervorgegangene. Ich aber kann nicht den Anspruch erheben, seine Leistungen auf dem Gebiete der Geometrie mit vollem Sachverständnisse zu würdigen. Das muß ich einer berufeneren Feder überlassen.

Als Sohn evangelischer Eltern ist Friedrich Schur geboren am 27. 1. 1856 in Maciejewo im Kreise Krotoschin der damaligen Provinz Posen. Sein Vater war der Fürstlich Thurn- und Taxissche Domänenpächter, Amtsrat Paul Schur, seine Mutter Mathilde, geb. Koeppel. Durch Privatunterricht vorbereitet, besuchte er von 1865 ab zehn Jahre lang das Königliche Gymnasium zu Krotoschin. Einer seiner dortigen Schulfreunde war K. I. Neumann, den er später als Kollegen, und zwar als Vertreter der alten Geschichte, an der Universität Straßburg vorfand.

Der stark philosophisch-geschichtliche Unterricht des greisen Direktors Gladisch hat auf Schurs ganze geistige Richtung einen nachhaltigen Einfluß ausgeübt. Aber besonders eng schloß er sich an den Lehrer der Mathematik Schoenborn an, den er in der Vita seiner Dissertation als den auctor et adiutor seiner mathematischen Studien bezeichnet und dem er sich für immer verpflichtet fühlte. Durch diesen wurde er weit über die auf der Schule behandelten Gebiete hinaus gefördert. So konnte er bei der Reifeprüfung die fünf mathematischen Aufgaben, für die fünf Stunden Arbeitszeit vorgesehen waren, in einer Stunde erledigen und löste dann noch freiwillig in 1½ Stunden vier erheblich schwerere.

Ostern 1875 bezog er die Universität Breslau, wo er während dreier Semester bei Schroeter und Rosanes Vorlesungen hörte. Während der beiden ersten war er Mitglied des von Schroeter geleiteten mathematischen Seminars und nahm im dritten an den von Rosanes abgehaltenen Übungen teil. Ursprünglich hatte er sich der Astronomie widmen wollen, da ihn aber der Unterricht Galles nicht fesseln konnte und da sein auf die Anschauung gerichteter Geist besonders in der von Schroeter gepflegten synthetischen Geometrie ein ihm zusagendes Arbeitsgebiet fand, war er bald ganz zur Mathematik übergegangen. Dabei hat wohl Schroeter den größeren Einfluß auf ihn ausgeübt, doch rühmte er stets auch die Eleganz der Vorlesungen von Rosanes. Mit diesem sollte er viele Jahre später als Kollege und sogar Nachfolger an der Universität Breslau wieder zusammentreffen.

Den Abschluß seines Studiums bildeten fünf Semester an der Universität Berlin, wo er Vorlesungen bei Kirchhoff, Kronecker, Kummer und Weierstraß hörte und die ganze Zeit Mitglied des mathematischen Seminars war, das die beiden letztgenannten leiteten. Als seinen einflußreichsten Berliner Lehrer pflegte er Kummer zu bezeichnen, dem er auch seine Dissertation gewidmet hat. Doch empfing er nicht minder von Weierstraß bleibende Anregungen und hatte später immer dessen Büste in seinem Arbeitszimmer stehen. Bei ihm hat er eine Zeitlang das Amt des Anschreibers versehen, dessen Aufgabe war, die von dem Meister mündlich entwickelten Formeln auf der Tafel festzuhalten. Dabei mußten nicht selten Versehen oder Ungenauigkeiten des Vorgetragenen berichtigt werden.

In Berlin, wie auch vorher schon in Breslau, war Schur Mitglied des Mathematischen Vereins, der damals noch den unbestrittenen Mittelpunkt für die Mathematikstudierenden bildete. Ein Semester lang war er Kneipwart und hatte noch mindestens ein zweites die Leitung des Vortragswesens. Unter der großen Zahl wissenschaftlich strebender Studiengenossen, die er in dem Vereine traf, gewann er A. Hurwitz und F. Rudio zu Freunden fürs Leben. Außerdem standen ihm besonders nahe der früh verstorbene Wiltheiß und der noch jetzt in Freiburg i. Br. tätige O. Bolza; auch R. v. Lilienthal und Franz Meyer gehörten seinem Kreise an.

Am 8. 3. 1879 promovierte er zu Berlin[1]) mit einer Dissertation: „Geometrische Untersuchungen über Strahlenkomplexe ersten und

1) Eine Abschrift der darauf bezüglichen Akten verdanke ich dem Dekane der philosophischen Fakultät, Herrn Prof. Hartung.

zweiten Grades."[2]) Das von Kummer erstattete Gutachten ist vom 29. 12. 1878 und lautet:

„Die eingereichte Dissertation behandelt die Strahlenkomplexe erster und zweiter Ordnung und die damit zusammenhängenden oder in ihnen enthaltenen Strahlensysteme, Flächen etc. nach rein synthetischer Methode, von welcher nur einmal da abgewichen werden muß, wo es sich darum handelt, zu zeigen, daß die Strahlenkomplexe zweiten Grades, welche aus denen ersten Grades konstruiert werden, wirklich auch die allgemeinsten sind, d. h. diejenigen, welche in der allgemeinen Gleichung derselben enthalten sind.

„Die Arbeit zeichnet sich durch Selbständigkeit der geometrischen Forschung aus, da eine ähnliche rein synthetische Behandlung der Strahlenkomplexe zweiten Grades bisher noch nicht ausgeführt worden ist. Sie zeichnet sich auch durch gute Kenntnisse der bisherigen Literatur über diesen Gegenstand aus und zeigt überhaupt, daß ihr Verf. sehr gründliche Studien über diesen Gegenstand gemacht hat. Ich nehme daher keinen Anstand, mich für die Annahme und für die Zulassung zur Doktorprüfung auszusprechen."

Mit dieser Beurteilung erklärte sich Weierstraß unterm 11. 1. 1879 einverstanden.

Die mündliche Prüfung am 23. 1. 1879 eröffnete Weierstraß. Er fragte nach den Erzeugungen der Flächen zweiten Grades. Schur kannte zwar die Seydewitzsche Erzeugung genau, wußte aber weder deren Urheber anzugeben, noch wo sie erschienen war. Das veranlaßte Weierstaß zu der Bemerkung: „Nun, kennen Sie nicht die Oase in der Wüste des Grunertschen Archivs?"[3]) Nach Kummer prüften dann noch Kirchhoff in Physik, Vahlen im Lateinischen, wo Schur eine Stelle aus Cicero übersetzen und einige grammatische Fragen beantworten mußte, endlich Zeller in Philosophie. Der Kandidat wurde mit dem Prädikate multa cum laude zur Promotion zugelassen, die Dissertation erhielt die Bezeichnung: Diligentiae et ingenii testimonium. Von den drei Thesen, die Schur am 8. 3. 1879 bei seiner öffentlichen Disputation verteidigte, sei nur die eine angeführt: „Die Ausschließung des Imaginären aus der synthetischen Geometrie ist nicht berechtigt." Wiltheiß war einer der Opponenten.

Für eine Dissertation ist Schurs Arbeit zweifellos eine ungewöhnliche Leistung. Da Kummer ausdrücklich die Selbständigkeit des Verf. betont, darf man vielleicht annehmen, daß Schur ganz von

2) Nr. 3 des am Schlusse folgenden Schriftenverzeichnisses.

3) Nach einem Briefe Schurs vom 23. 3. 1912.

sich aus auf den Gedanken gekommen ist, zu versuchen, ob sich nicht die Theorie der Strahlenkomplexe zweiten Grades rein geometrisch entwickeln lasse.

Schur stellt auf sehr einfache und schöne Weise eine Abbildung her, bei der den Geraden eines linearen Komplexes C die Punkte des Raumes entsprechen. Schade nur, daß er, wie das auch Reyes Art war, unterläßt, dem Leser das Verständnis zu erleichtern durch grundsätzliche Unterscheidung zwischen Objekt- und Bildraum.

Er denkt sich in einem Raume r die Schar aller ∞^3 linearen Komplexe, die zwei Gerade q_1, q_2 enthalten, und bezieht diese Komplexe projektiv auf die Ebenen eines Raumes R. Jedem Punkte $\mathfrak{p}$ von R, als dem Träger eines Ebenenbündels, ist dann in r eine Regelfläche zweiten Grades $\mathfrak{P}$ zugeordnet. Er nimmt sodann in r einen linearen Komplex C hinzu, der q_1, q_2 nicht enthält, und bekommt so auf $\mathfrak{P}$ zwei Gerade p_1, p_2 von C.

Nun bestimmt C mit jedem der ∞^3 zuerst angenommenen linearen Komplexe eine lineare Kongruenz, deren Leitlinien s_1, s_2 reziproke Polaren in bezug auf C sind. Der Inbegriff aller dieser Paare von Leitlinien bildet in r wiederum einen linearen Komplex K, und in bezug auf diesen sind die beiden Geraden p_1, p_2 immer reziproke Polaren. Man hat damit die Punkte von R eindeutig umkehrbar auf gewisse Geradenpaare des Raumes r abgebildet, nämlich auf alle dem linearen Komplexe C angehörigen Paare von solchen Geraden, die reziproke Polaren sind in bezug auf den linearen Komplex K.

Dabei tritt in R eine Fläche zweiten Grades χ^2 auf, der Ort aller Punkte, denen in r je zwei zusammenfallende Gerade p_1, p_2 entsprechen, nämlich die Geraden der C und K gemeinsamen Kongruenz. Diese Fläche kann beliebig gewählt werden, wenn man über q_1, q_2, C und K geeignet verfügt. Ist K insbesondere ausgeartet, so wird χ^2 ein Kegelschnitt, und wenn man diesen mit dem Kugelkreise zusammenfallen läßt, erhält man Lies berühmte Berührungstransformation, bei der die Kugeln in die geraden Linien übergehen.

Es ist auffallend, daß Schur zwar diese Ausartung, neben den beiden andern noch möglichen, erwähnt, daß er aber Lie nicht nennt, sondern nur Noether. Dieser hatte nämlich 1869 die entsprechende Abbildung gelegentlich veröffentlicht, war aber weit davon entfernt gewesen, ihre ungeheure Tragweite zu erkennen. Erst Lie hatte diese 1870/71 ins Licht gesetzt und insbesondere bewiesen, daß die Transformation die Krümmungslinien der Euklidischen Geometrie in die Haupttangentenkurven überführt.

Daß Lie nicht genannt wird, ist um so auffallender, als Schur die gemeinsame Arbeit von Klein und Lie erwähnt, in der diese 1870 die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche bestimmt haben, eine Bestimmung, deren Möglichkeit gerade Lie zuerst vermöge seiner Transformation erkannt hatte. Offenbar hat also Kummer, der jene Arbeit von Klein und Lie der Berliner Akademie vorgelegt hatte, Schur nicht auf die Liesche Entdeckung hingewiesen. Diese scheint vielmehr an Kummer geradezu spurlos vorübergegangen zu sein. Fast noch auffallender ist es freilich, daß auch in dem Wiederabdrucke von Schurs Dissertation, der noch 1879 in Bd. XV der Mathematischen Annalen erschienen ist (Nr. 4), nicht auf Lies Leistung hingewiesen wird. Man sollte doch eigentlich erwarten, daß Klein als Herausgeber der Annalen für Nachholung des in der Dissertation Versäumten gesorgt hätte. Da das nicht geschehen ist, muß man wohl annehmen, daß Klein die Schursche Arbeit nicht genau genug gelesen hat.

Ich bin hier auf die Nichterwähnung Lies so ausführlich eingegangen, weil ich andererseits feststellen muß, daß der allgemeine Fall der von Schur betrachteten Abbildung 1879 neu und auch von Lie noch nicht gegeben war. Ist nämlich die Fläche zweiten Grades χ^2 nicht ausgeartet, so stellt sich, wie Schur zeigt, heraus, daß jedem Punkte von r in R eine ganz bestimmte Tangente von χ^2 zugeordnet ist. Die Beziehung zwischen r und R ist also folgende: den Punkten von r entsprechen die Geraden des Linienkomplexes zweiten Grades, der aus den Tangenten von χ^2 besteht; den Punkten von R aber entsprechen in r Geradenpaare des linearen Linienkomplexes C. Nun hatte Lie 1871 in seiner Doktordissertation ganz allgemein die Beziehungen zwischen zwei Räumen behandelt, die möglich sind, wenn den Punkten jedes der beiden Räume in dem andern die Geraden eines Linienkomplexes entsprechen sollen. Dabei hatte er sogar geglaubt, es lasse sich beweisen, daß der von Schur gefundene Fall überhaupt nicht eintreten kann.[4])

Wir wissen nicht, wann Lie zu der Erkenntnis gekommen ist, daß er sich in diesem Punkte geirrt hatte. Jedenfalls hatte er, als Schurs Dissertation erschien, noch nichts darüber veröffentlicht. Schur war also, ohne es selbst zu bemerken, in dieser Beziehung weiter gekommen als die bis dahin erschienenen Arbeiten von Lie, denn er hatte tatsächlich gezeigt, daß der Fall, den Lie 1871 für

4) Lie, Ges. math. Abh. I, Abh. XI (1871), S. 129—131. Ebenso in der Neubearbeitung seiner Dissertation, Math. Ann. 5 (1872), S. 166 f. (Ges. Abh. II, Abh. I, § 7, Nr. 23, S. 24 f.).

unmöglich gehalten hatte, doch eintritt. Lie wies nunmehr darauf hin, daß die von Schur aufgestellte Transformation die nichteuklidischen Krümmungslinien in die Haupttangentenkurven überführt, eine Eigenschaft, die wiederum Schur entgangen war. Zugleich bemerkte er, daß diese Transformation ersetzt werden kann durch die Aufeinanderfolge zweier Transformationen, nämlich dadurch, daß man zuerst die Liesche Berührungstransformation ausführt und dann eine von Darboux angegebene Punkttransformation, bei der die euklidischen Krümmungslinien in die nichteuklidischen übergehen.[5])

Über den sonstigen Inhalt der Schurschen Dissertation müssen wir uns kürzer fassen, denn er bringt in der Hauptsache nur damals schon bekannte Ergebnisse von Plücker und F. Klein, aber mit neuer Begründung und daher auch in neuer Beleuchtung. Schur benutzt seine Abbildung, um die in einem linearen Linienkomplexe enthaltenen Linienkongruenzen und deren Brennflächen zu untersuchen, insbesondere um alle derartigen Kongruenzen zweiten Grades aufzuzählen. Endlich gibt er eine Erzeugung des allgemeinen Komplexes vom zweiten Grade und wird dadurch in den Stand gesetzt, das vollständige System der in dem Komplexe enthaltenen Regelflächen zweiten Grades anzugeben, ferner die Schar der Komplexe mit gemeinsamer Singularitätenfläche usw.

Wie sehr Schur von seinen Berliner Lehrern geschätzt wurde, geht daraus hervor, daß sie sich seiner für die Herausgabe der Steinerschen Werke bedienten. In der vom 7. 3. 1882 datierten Vorrede zu dem in demselben Jahre erschienenen Bande II dieser Werke erwähnt Weierstraß auf S. VII, daß Dr. Schur Bgn. 21 bis 42, also S. 322—659, vor dem Abdrucke sorgfältig revidiert habe. Soviel ich weiß, ist ihm der Auftrag hierzu noch während seiner Berliner Studienzeit erteilt worden.

Im Sommer 1879 ging Schur nach Göttingen. Den Plan, sich dort zu habilitieren, gab er jedoch schon nach wenigen Wochen auf, weil sich herausstellte, daß der Charakter von H. A. Schwarz mit dem seinigen unvereinbar war. Den Winter darauf brachte er in Breslau zu, um sich auf die Prüfung für das höhere Lehramt vorzubereiten, die er am 7. 5. 1880 vor der kgl. wiss. Prüfungskommission für die Provinzen Schlesien und Posen ablegte. Er erhielt ein Zeugnis ersten Grades mit der Berechtigung zum Unterrichte in Mathematik und Physik für alle Klassen und in philosophischer Propädeutik für

5) Lie, a. a. O. III, Abh. XXXVIII (1882), S. 542 u. XXXVIIIa (1885), S. 547.

Prima. Den Sommer 1880 benutzte er, um auf dem väterlichen Gute in Maciejewo in aller Ruhe und unbeeinflußt von irgendeinem Meister die selbstgewählte Habilitationsschrift auszuarbeiten. Es traf sich so, daß W. Scheibner aus Leipzig in den Herbstferien bei Verwandten in der Nähe zu Besuch weilte. Das gab den Anstoß dazu, daß Schur beschloß, sich in Leipzig zu habilitieren.

Näher hätte es eigentlich gelegen, die Habilitation in Berlin zu versuchen. Aber bei den jungen Mathematikern jener Zeit herrschte der Aberglaube, daß die großen Berliner Mathematiker keine Privatdozenten neben sich wünschten, ein Glaube, der auch lange nachher noch fortlebte und sich zu der Äußerung verdichtete, die man einem späteren Berliner Ordinarius in den Mund gelegt hat: „Und wenn Abel und Jacobi in eigener Person kämen, ich würde sie nicht zur Habilitation zulassen.“ Schur hatte deshalb mit keinem der Berliner Herren über seine Pläne gesprochen. Als er nun bald nach seiner Habilitation Weierstraß besuchte, fragte ihn dieser: „Warum sind Sie denn nicht zu uns gekommen?“ und drückte dann, als er den Grund erfuhr, sein lebhaftes Bedauern darüber aus, daß sich Schur durch so haltloses Gerede habe abschrecken lassen.

Mag sein, daß Schur damals für den Augenblick selbst bedauert hat, sich nicht in Berlin habilitiert zu haben. Jedenfalls aber hat er später die getroffene Wahl nicht bereut. Als Berliner Privatdozent wäre er vielleicht früher in ein Ordinariat berufen worden, aber er wäre dann ohne die Anregungen geblieben, die ihm die Leipziger Jahre durch den Verkehr mit F. Klein und nachher mit S. Lie geboten haben, und ein großer Teil der Abhandlungen, die er später veröffentlicht hat, wäre nicht geschrieben worden.

Im Oktober 1880 siedelte F. Klein von München nach Leipzig über, wo er die neu geschaffene Professur für Geometrie übernahm. Eine seiner ersten Amtshandlungen war die Begutachtung der Habilitationsschrift: „Über die durch kollineare Grundgebilde erzeugten Kurven und Flächen“ (Nr. 7), die Schur am 20. 10. 1880 eingereicht hatte. Kleins unterm 22. 11. 1880 abgegebenes Gutachten hat folgenden Wortlaut[6]):

„Der Prozeß der Erzeugung höherer algebraischer Gebilde durch projektivische Zuordnung linearer Formen, den Steiner seinen geometrischen Entwickelungen voranstellte, erwies sich zunächst zur Untersuchung der Kurven und Flächen zweiten und dritten Grades

6) Eine Abschrift der Habilitationsakten verdanke ich dem Dekan der Leipziger philosophischen Fakultät, Herrn Prof. Weickmann.

von Vorteil. Aber es wurde schon von verschiedenen Autoren (Cremona, Folie u. a.) bemerkt, daß er, richtig verallgemeinert, auch bei Raumformen höheren Grades nützliche Dienste leisten kann. Der Verf. der vorliegenden Schrift hat diesen Gedanken selbständig erfaßt und mit einer Durchführung desselben begonnen. Dabei treten gewisse Raumkurven sechster Ordnung (mit sieben scheinbaren Doppelpunkten) in den Vordergrund der Untersuchung. Die Arbeit ist, wie es die Fragestellung mit sich bringt, vor allem von *systematischer* Bedeutung. Aber ich möchte mit Anerkennung hervorheben, daß der Verf. sich nicht mit der Formulierung allgemeiner Prinzipien oder der Neuableitung anderweitig bekannter Resultate begnügt hat (wie es so oft in rein synthetischen Arbeiten der Fall ist), sondern daß er zur Auffindung wirklich neuer Theoreme hindurchgedrungen ist. Ich rechne dahin zumal den Inhalt der §§ 5, 9, 10, 11. — Auch kann ich den Stil der Darstellung unter Rücksichtnahme auf die durch die synthetische Betrachtung hineingebrachte komplizierte Bezeichnungsweise nur rühmen. Da überdies eine Reihe anderweitiger Publikationen des Verf. vorliegt, so beantrage ich: Die Fakultät möge die vorliegende Arbeit als Habilitationsschrift akzeptieren und den Kandidaten zu den übrigen Habilitationsleistungen zulassen.

gez. Dr. F. Klein."

Da die geometrischen Betrachtungen des Verf. seiner eigenen wissenschaftlichen Richtung fernlagen, begnügte sich Scheibner damit, sich dem Votum des ersten Referenten durchaus anzuschließen, hob jedoch hervor, „die vollständige Beherrschung des Stoffes und die freie Selbständigkeit in der Behandlung desselben seien nicht zu verkennen".

Die drei Themen, die Schur für die Probevorlesung vorgeschlagen hatte, waren:

1. „Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie."
2. „Über die Dupinsche Zyklide."
3. „Über nichteuklidische Geometrie."

Von diesen wählte die Fakultät auf Kleins Vorschlag das zweite, und darüber hielt Schur am 12. 1. 1881 die Probevorlesung.

In der Einleitung zu seiner Habilitationsschrift sagt Schur, er wolle die Untersuchungen Reyes, der seinerseits an Steiner angeknüpft habe, fortsetzen und beginne da, wo Reye aufgehört habe, nämlich bei den Flächen dritter Ordnung, die durch drei kollineare Ebenenbündel erzeugt werden. Er stellt zunächst die Reyeschen Sätze über die Erzeugung der Raumkurven und der Flächen dritter Ordnung zusammen und behandelt dann die Erzeugung der ebenen Kurven dritter Ordnung. Die vollständige Reihe der Erzeugungen einer solchen Kurve durch drei kollineare ebene Systeme wird aufgestellt. Jedes solche Netz liefert eine eindeutige Transformation der Kurve in sich, und diese Erzeugung ist in neun besonderen Fällen linear. Drei weitere Fälle führen auf die drei Kegelschnittnetze, deren Tripelkurve die Kurve ist. Die Frage nach einem analogen Zusammenhange der Flächen dritter Ordnung mit den Flächenbündeln zweiten Grades erledigt Schur mit Hilfe eines neuen Satzes, der aussagt, daß die Geraden einer Schläflischen Doppelsechs reziproke Polaren sind in bezug auf eine Fläche zweiten Grades. Es folgt die Untersuchung der Kurven sechster Ordnung, die durch vier kollineare Ebenenbündel erzeugt werden. Während diese Kurven schon von M. Noether unter einem andern Gesichtspunkte kurz behandelt waren, betritt Schur schließlich ein noch gar nicht bebautes Feld mit der Behandlung der Flächen vierter Ordnung, welche durch vier kollineare räumliche Systeme erzeugt werden.

Ich erinnere mich, daß mir F. Klein einmal die Schursche Habilitationsschrift als Muster vorhielt gegenüber der meinigen, von der er, sicher mit Unrecht, meinte, sie mache den Eindruck, als sei sie ad hoc geschrieben. „An der Schurschen Arbeit sieht man doch, wie der Mann Geometrie treibt", sagte er. Das ist gewiß unbestreitbar. Andrerseits ist Tatsache, daß Schur nur noch eine größere Arbeit in derselben Richtung veröffentlicht hat: Nr. 11. „Über eine besondere Klasse von Flächen vierter Ordnung", erschienen 1882 in Bd. XX der Annalen. Er geht darin ausführlicher auf die Flächen ein, deren Untersuchung er schon in der Habilitationsschrift begonnen hatte. Dieses Verlassen der ursprünglich verfolgten Richtung kann ich mir nicht anders erklären, als daß er selbst das Gefühl hatte, eine Grenze erreicht zu haben, über die hinauszugehen nicht ratsam war. Es ist das die Grenze, die sich in der synthetischen Geometrie, früher oder später, unvermeidlich einstellt; wo keine Kunst der Darstellung mehr imstande ist, die verwirrende Mannigfaltigkeit der auftretenden Gebilde verschiedener Art und ihre verwickelten gegenseitigen Beziehungen so vorzuführen, daß der Leser folgen kann, ohne ein Maß von Anstrengung aufzuwenden, das keinen Genuß mehr aufkommen läßt. Gewiß stößt man auch in der Analysis auf solche Grenzen, und von den Mathematikern werden diese oft genug überschritten; aber durch die Arbeit aufeinanderfolgender Geschlechter von Mathematikern werden sie immer weiter hinausgeschoben. In der synthetischen Geometrie ist Ähnliches kaum zu hoffen.

Übrigens darf nicht unerwähnt bleiben, daß Schurs geometrische Arbeiten auch außerhalb Deutschlands Anerkennung fanden. So wählte ihn 1885 die Royale Académie des Sciences de Liège zum Korrespondenten.

Als sich Schur in Leipzig habilitierte, waren da an Mathematikern außer Scheibner und Klein noch C. Neumann und A. Mayer sowie ein Privatdozent, K. Rohn, habilitiert seit 1879. Dazu kam der mathematische Physiker von der Mühll, und im Winterhalbjahre 1881—82 trat noch der Astronom K. Bruns hinzu. Es habilitierte sich ferner im Jahre 1882 W. Dyck. Als dieser 1884 als Ordinarius an die Technische Hochschule München kam, wurde Schur sein Nachfolger als Kleins Assistent beim Mathematischen Seminare, eine Stellung, die er auch unter Lie beibehielt, solange er noch in Leipzig war. Er hatte da regelmäßig Vorlesungen und Übungen über Darstellende Geometrie zu halten, eine gute Vorbereitung für seine spätere Wirksamkeit an den Technischen Hochschulen Aachen und Karlsruhe. Schließlich habilitierten sich 1885 F. Engel und E. Study, und Ostern 1886 wurde S. Lie der Nachfolger F. Kleins, der nach Göttingen übersiedelte.

An mathematischem Verkehr fehlte es also Schur während seiner Leipziger Zeit nicht. Außerdem lernte er unter den Schülern Kleins und unter denen, die zeitweilig an dessen mathematischem Seminare teilnahmen, eine ganze Reihe von Mathematikern kennen, die sich später einen Namen gemacht haben. Ich nenne nur A. Hurwitz, O. Hölder, G. Pick, Molien, Fricke, D. Hilbert, Wälsch und Wilhelm Weiß. Nicht vergessen darf ich auch die nichtmathematischen Leipziger Kollegen, in deren Kreise er damals dauernde Freundschaften schloß: die alten Historiker Ed. Meyer und Holzapfel, den Theologen Guthe, den Botaniker Alfred Fischer, den Germanisten K. v. Bahder, die Slawisten Scholvin und W. Wollner, den Philosophen R. von Schubert-Soldern, den Mediziner Strümpell. Von allen diesen Leipziger Kollegen sind heute nur noch Guthe und ich übriggeblieben.

Am 19. 5. 1885 wurde Schur zum ao. Professor in der philosophischen Fakultät der Universität Leipzig ernannt, und am 24. 10. 1885 hielt er seine Antrittsvorlesung: „Die Bedeutung der projektiven Geometrie." Diese ist ungedruckt geblieben und, wie es scheint, nicht einmal mehr handschriftlich erhalten. Das ist um so mehr zu bedauern, als ich mich zu erinnern glaube, daß er darin eine Art von Programm für Untersuchungen aufstellte, mit denen er damals beschäftigt war.

Es handelt sich hier um die drei Arbeiten Nr. 19—21, die 1886 und 1887 in den Math. Ann. erschienen sind und deren Gegenstand die Räume beliebiger Dimensionenzahl mit quadratischem Bogenelemente bilden, namentlich die Deformation dieser Räume. Er arbeitet dabei hauptsächlich mit dem Riemannschen Krümmungsmaße eines solchen Raumes, das damals noch keineswegs wie heutzutage ein Allgemeingut aller Mathematiker war. Dieses Krümmungsmaß ändert sich bekanntlich nicht bloß von Punkt zu Punkt, sondern es hat im allgemeinen auch in jedem Punkte unendlich viele verschiedene Werte, entsprechend den durch den Punkt gehenden ebenen Büscheln von Fortschreitungsrichtungen (Linienelementen). Die durch die Richtungen eines solchen Büschels gehenden geodätischen Linien erzeugen nämlich eine sogenannte geodätische Fläche, deren Gaußsches Krümmungsmaß in dem betreffenden Punkte eben der zu dem Büschel gehörige Wert des Riemannschen ist.

Nun sind die Räume, in denen die projektive Geometrie gilt, dadurch gekennzeichnet, daß das Axiom der Ebene erfüllt ist, daß also jede geodätische Fläche ∞^2 geodätische Linien des Raumes enthält und somit für jeden ihrer Punkte geodätische Fläche ist. Nach Beltrami und Schläfli tritt das dann und nur dann ein, wenn das Riemannsche Krümmungsmaß konstant ist, also in jedem Punkte einen von der Büschelrichtung unabhängigen Wert hat, der für alle Punkte des Raumes derselbe ist. Diesen bekannten Sätzen fügt Schur mehrere neue hinzu, von denen wir hier drei anführen, allerdings in etwas veränderter Fassung (Nr. 20, S. 563, 560, 562):

„Ist das Riemannsche Krümmungsmaß in jedem Punkte von der Büschelrichtung unabhängig, so hängt es auch von der Lage des Punktes nicht ab und ist also überall konstant."

„Gibt es einen Punkt von solcher Beschaffenheit, daß für alle ebenen Büschel von Linienelementen, denen ein Linienelement einer durch den Punkt gehenden geodätischen Linie angehört, das Riemannsche Krümmungsmaß denselben konstanten Wert hat, so enthält jede durch den Punkt gehende geodätische Fläche ∞^2 geodätische Linien des Raumes. Das Umgekehrte gilt ebenfalls."

„Soll das Riemannsche Krümmungsmaß konstant sein, so ist notwendig und hinreichend, daß es zwei verschiedene Punkte von der eben erklärten Beschaffenheit gibt."

Noch im Sommer 1931 erlebte Schur die Freude, daß É. Cartan, der auf der Durchreise in Breslau war und den dortigen Mathematikern einen Vortrag hielt, im Gespräche den letzten Satz als un théorème classique bezeichnete.

Daß die Liesche Theorie der Transformationsgruppen für die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie von Bedeutung sein müsse, hatte Schur sicher schon erkannt, als er die eben besprochenen Untersuchungen begann. Die Übersiedelung Lies nach Leipzig veranlaßte ihn, sich gründlich mit der Lieschen Theorie bekannt zu machen. Lie hatte zunächst genug damit zu tun, sich in den neuen Leipziger Verhältnissen zurechtzufinden, und beauftragte mich, im Sommerhalbjahre 1886 eine vierstündige Vorlesung über Transformationsgruppen zu halten, die ich im Winterhalbjahre 1886—87 fortsetzte. Ich hatte dabei die Freude, neben A. Mayer und E. Study auch Schur zum Zuhörer zu haben und ihm so das Eindringen in die Theorie zu erleichtern. Der erste Band der Transformationsgruppen ist ja erst 1888 erschienen.

Schur hat allerdings seine Kenntnis der Theorie nicht unmittelbar für die Grundlagen der Geometrie verwertet. Er fing vielmehr bald nachher an, selbst auf dem Gebiete der Transformationsgruppen zu arbeiten und hat da schöne und wichtige Entdeckungen gemacht. Meine Stellung zwischen zwei so selbstbewußten Mathematikern wie Lie und Schur war freilich nicht so ganz einfach. Lie war ja der Schöpfer der Theorie, dem ich auf diesem Gebiete alles verdankte. Schur, der nahe Kollege und Freund, konnte mir nicht so maßgebend sein. Lie war oft, zum Teil mit Recht, unzufrieden mit der Art, wie Schur ihn erwähnte, und konnte sich namentlich gar nicht damit versöhnen, daß sich Schur ebensowenig wie Maurer seinen wohldurchdachten, in jahrelanger Arbeit erprobten Bezeichnungen anschloß. Durch die Änderung der Bezeichnungen wurden beider Arbeiten für ihn fast unlesbar. Ich habe da oft zwischen Lie und Schur die wenig dankbare Rolle des Vermittlers spielen müssen, wobei es mir wenigstens immer gelungen ist, die Meinungsverschiedenheiten so weit auszugleichen, daß sie nicht an die Öffentlichkeit kamen.

Einen Gegensatz zwischen Lie und Schur konnte freilich auch ich nicht aus der Welt schaffen, die verschiedene Auffassung über das, was einfach ist und was weniger einfach. Schon A. Mayer gegenüber hatte Lie einmal bemerkt, „daß der Begriff: Leicht sich nach der Natur der Sache für uns beide verschieden stellt, weil unsre Denkweise verschieden ist“. [7]) So muß auch ich für meine Person bekennen, daß Schur, den ich in dieser Beziehung als ausgesprochenen Vertreter der Berliner Schule ansehen darf, Entwickelungen als einfach betrachtete, die ich keineswegs als einfach anerkennen konnte. Ich

7) Lie, Ges. Abh. Bd. III (1922), S. 588.

sah Dinge, die mir längst bekannt waren, auf neue Weise begründet, aber es kostete mich wirkliche Anstrengung, die neue Begründung bis in alle Einzelheiten zu verfolgen und nachzuprüfen. Auch heute, wo inzwischen so viele Jahre vergangen sind, kann ich nicht zu einem anderen Urteile gelangen.

Gleich bei Schurs erster Arbeit auf gruppentheoretischem Gebiete trat dieser Gegensatz zwischen uns beiden zutage. Sie ist 1888 erschienen unter dem Titel: „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Zahlen“ (Nr. 22). Dabei legte Schur selbst auf die Anwendung auf die höheren komplexen Zahlen wenig Gewicht. Den Zusammenhang dieser Zahlen mit gewissen Gruppen hatte ja Poincaré schon 1884 gelegentlich betrachtet und viel tiefer aufgefaßt. Für Schur war das Wichtigste die neue Begründung, die er von der Theorie der einfach transitiven Gruppen gab, und gerade mit dieser Begründung konnte ich mich nicht befreunden.

Die Arbeit ist noch in Leipzig, im März 1888, abgeschlossen. Bald darauf folgte Schur einer Berufung nach Dorpat, als Nachfolger von Helmling, der in den Ruhestand getreten war. Von dort aus begann er den freundschaftlichen Briefwechsel mit mir, der, zeitweilig sogar sehr rege, bis zu seinem Tode nie ganz unterbrochen worden ist.

Ehe wir die gruppentheoretischen Arbeiten weiterverfolgen, müssen wir noch nachtragen, daß sich Schur schon am 1. 8. 1887 mit Laura, geb. Schmidt, der Tochter des Leipziger Pandektisten Adolf Schmidt, verheiratet hatte. Mit seiner jungen Gattin gründete er ein Heim, an das viele mit Freude und Dankbarkeit zurückdenken. Ich selbst erinnere mich noch lebhaft und gern einer Woche, die ich im August 1895 in Aachen als Gast dieses Heims habe zubringen dürfen. In seiner überaus glücklichen Ehe sind ihm drei Söhne geboren worden, zwei in Dorpat und einer in Aachen. Darunter haben zwei, nach dem Vorbilde ihres Vaters, die akademische Laufbahn ergriffen. Leider hat Schur noch in seinen letzten Lebensjahren im Kreise seiner Familie mehrere höchst schmerzliche Verluste zu beklagen gehabt, den schmerzlichsten 1930, als ihm sein Sohn Axel, gerade der, der sich für Mathematik habilitiert hatte, durch eine tückische Krankheit entrissen wurde.

Hier muß unbedingt auch seiner Schwiegermutter, Auguste Schmidt, geb. Friedrich gedacht werden, die sich schon in Schurs Leipziger Freundeskreise allgemeiner Verehrung erfreute. Sie lebte nach dem Tode ihres Mannes viele Jahre ganz in der Schurschen Familie, und alle, die in dieser verkehrten, konnten sie sich gar nicht daraus wegdenken. Sie ist erst im November 1926 in Breslau fast neunundachtzigjährig gestorben.

Ende April 1889 vollendete Schur in Dorpat seine zweite gruppentheoretische Abhandlung (Nr. 24), die, ganz anders als die erste, wirklich neue und wichtige Ergebnisse brachte, Ergebnisse, die er bald nachher in vollständig ungeahnter Weise weiterführen und vervollständigen sollte. Wir gehen auf diese Abhandlung etwas näher ein, verwenden aber dabei die gewohnten Lieschen Bezeichnungen.

Ist $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)$ eine r-gliedrige Gruppe des R_n, so bestehen gewisse Identitäten von der Gestalt:

$$(1) \qquad f_i(f(x, a), b) \equiv f_i(x, \varphi(a, b)) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

und daraus folgt, daß die x_i' als Funktionen der a die sogenannten grundlegenden Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_j^{1\ldots r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r)\, \xi_{ji}(x_1', \ldots, x_n')$$

befriedigen. Lie besaß schon 1884 eine Ableitung dieser Differentialgleichungen, bei der er auf die Voraussetzung verzichtete, daß die Gruppe die identische Transformation und paarweise inverse Transformationen enthält. Diese Ableitung, die auf begrifflichen Überlegungen beruht und die meiner Meinung nach an Einfachheit nicht übertroffen werden kann, hat er aber erst 1893 im 25. Kap. des III. Bd. seiner Transformationsgruppen bekanntgemacht. Im I. Bd. (1888) wagte er das noch nicht und wählte eine rein analytische Ableitung, von der zugestanden werden muß, daß sie dem Leser eine gewisse Anstrengung zumutet.

Schur gab nun eine neue Ableitung der grundlegenden Differentialgleichungen für beliebige r-gliedrige Gruppen, und zwar auf demselben Wege, den er in Abh. Nr. 22 für einfach transitive benutzt hatte. Er setzt dabei von vornherein voraus, daß die Gruppe die identische Transformation und paarweise inverse Transformationen enthält. Erst später (in § 7, S. 194—197) zeigt er durch funktionentheoretische Betrachtungen, die mir wenigstens auch heute noch recht schwierig erscheinen, daß jede r-gliedrige Gruppe als Teil in einer solchen r-gliedrigen enthalten ist, welche diese besonderen Voraussetzungen erfüllt.

Indem er annimmt, daß $a_1 = 0, \ldots, a_r = 0$ die Parameter der identischen Transformation sind, entwickelt er in (1) beide Seiten nach Potenzen der b_k und vergleicht die Koeffizienten. Es gelingt ihm,

nachzuweisen, daß die durch Vergleichung der Glieder erster Ordnung erhaltenen Beziehungen

$$(3) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial b_k} f_i(f(x, a), b)\right]_{b=0} = \sum_j^{1\ldots r} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_j} \left[\frac{\partial \varphi_j(a, b)}{\partial b_k}\right]_{b=0}$$

durch Differentiation nach den a_j alle anderen nach sich ziehen. Die hierzu erforderlichen Rechnungen mit Potenzreihen erscheinen mir weder einfach noch bequem, und sie sind, für meinen Geschmack, sicher nicht einfacher als die Lieschen Rechnungen, bei denen keine Potenzreihen benutzt werden. Jedenfalls liefert aber (3) sofort die grundlegenden Differentialgleichungen, und zwar in der Gestalt

$$(2') \qquad \xi_{ki}(f(x, a)) = \sum_j^{1\ldots r} w_{kj}(a) \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_j}.$$

Da überdies die Gleichungen $a_k' = \varphi_k(a, b)$ ebenfalls eine Gruppe darstellen, nämlich die sogenannte erste Parametergruppe, findet man gleichzeitig

$$(4) \qquad w_{k\mu}(\varphi(a, b)) = \sum_j^{1\ldots r} w_{kj}(b) \frac{\partial \varphi_\mu(a, b)}{\partial b_j}.$$

Hier sind die Ausdrücke

$$\sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad \sum_j^{1\ldots r} w_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j}$$

im Sinne von Lie die infinitesimalen Transformationen der ursprünglichen Gruppe und der Parametergruppe.

Hat man sich mit dem Rechnen mit Potenzreihen abgefunden, so ist zuzugeben, daß die Form (2′), in der Schur die grundlegenden Differentialgleichungen erhält, gewisse Vorzüge vor der Form (2) besitzt, in der diese bei Lie zunächst erscheinen. Durch Bildung der Integrabilitätsbedingungen von (4) findet nun Schur die bekannten Lieschen Gleichungen

$$(5) \qquad \sum_\mu^{1\ldots r} \left\{ w_{k\mu}(a) \frac{\partial w_{j\nu}}{\partial a_\mu} - w_{j\mu}(a) \frac{\partial w_{k\nu}}{\partial a_\mu} \right\} = \sum_s^{1\ldots r} c_{kjs} w_{s\nu}(a),$$

wo die c_{kjs} Konstanten sind. Er stellt sich die Aufgabe, diese Gleichungen durch Potenzreihen $w_{k\mu} = \varepsilon_{k\mu} + \cdots$ zu befriedigen, wo $\varepsilon_{k\mu}$ für $k \neq \mu$ verschwindet und für $k = \mu$ den Wert 1 hat. Dabei ergeben sich für die c_{kjs} die bekannten Lieschen Relationen

$$(6) \qquad c_{iks} + c_{kis} = 0 \qquad \sum_\mu (c_{ik\mu} c_{\mu js} + c_{kj\mu} c_{\mu is} + c_{ji\mu} c_{\mu ks}) = 0,$$

und Schur bemerkt, daß die $w_{k\mu}$ vollständig bestimmt sind, wenn man zu (5) noch die Gleichungen

$$\sum_{k}^{1\ldots r} a_k w_{kj}(a) = a_j \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{7}$$

hinzufügt. Er findet in diesem Falle für die w_{kj} gewöhnliche Potenzreihen, die er vollständig hinschreiben kann und die innerhalb eines angebbaren Gebietes unbedingt konvergieren.

Die hiermit gefundenen infinitesimalen Transformationen $\Sigma w_{kj}(\partial f_i : \partial a_j)$ erzeugen, nach Lies Benennung, die erste kanonische Parametergruppe, und es ist hiermit ein neuer und zum ersten Male ein ganz direkter Beweis für den dritten Lieschen Fundamentalsatz erbracht, daß zu jedem Systeme von r^3 Konstanten c_{iks}, welches (6) erfüllt, eine r-gliedrige einfach transitive Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} gefunden werden kann. Lie hatte das damals nur bewiesen, indem er sich auf seine Theorie der Funktionengruppen stützte (Ges. Abh. Bd. VI, Abh. V vom 13. 2. 1888 und Bd. V, Abh. XXIII, 1888).

Andrerseits sind hier zum ersten Male die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe, die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehört, wirklich hingeschrieben. Lie hatte vorher nur gezeigt, daß dies möglich ist, wenn man ein simultanes System von linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten integriert hat. Bei seinem Beweise hatte er überdies die Voraussetzung gemacht, daß eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} bereits bekannt ist (Ges. Abh. Bd. V, Abh. IV [1878], S. 78—84). Daß die von ihm gefundenen infinitesimalen Transformationen stets eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, war also nur deshalb bewiesen, weil er auf anderem Wege das Vorhandensein einer solchen Gruppe nachzuweisen imstande war.

Aus den infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe konnte Schur nunmehr für jeden Typus von r-gliedrigen transitiven Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} einen Repräsentanten ableiten, dessen infinitesimale Transformationen angebbare gewöhnliche Potenzreihen waren. Doch war das eigentlich nur eine einfache Anwendung der Vorschriften, die Lie zur Aufstellung solcher Repräsentanten gegeben hatte.

In den von Schur gefundenen Formeln für die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe traten gewisse Zahlenkoeffizienten auf. Scheibner machte ihn darauf aufmerksam, daß diese in einem sehr einfachen Zusammenhange mit den Bernoullischen Zahlen standen. Sie sind in der Tat nichts anderes als die Koeffizienten der Reihenentwickelung der Funktion

$$\frac{1}{2} i x \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2} i x\right) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2} x.$$

Nunmehr erkannte Schur sofort, daß die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe Quotienten gewisser beständig konvergenter Potenzreihen sind. Diese Quotienten haben gemeinsamen Nenner, und die Reihen schreiten nach einem sehr einfachen Gesetze fort. Zugleich ergab sich der höchst merkwürdige Satz, daß jede transitive Gruppe auf eine solche Form gebracht werden kann, daß ihre infinitesimalen Transformationen Quotienten beständig konvergenter Potenzreihen werden mit gemeinsamem Nenner.

Nach Lie gehört nämlich zu jeder $(r-n)$-gliedrigen Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe ein Typus von solchen transitiven Gruppen, die mit der r-gliedrigen holoedrisch oder meroedrisch isomorph sind. Man kann ferner für jeden dieser Typen die endlichen oder die infinitesimalen Transformationen eines Repräsentanten aufstellen, sobald man die endlichen oder die infinitesimalen Transformationen einer einfach transitiven Gruppe von der betreffenden Zusammensetzung kennt. Man kann ferner aus der Zusammensetzung der Untergruppe jederzeit leicht erkennen, ob der Isomorphismus holoedrisch oder meroedrisch ist. Indem man dann alle Fälle wegläßt, wo er meroedrisch ist, erhält man Repräsentanten aller möglichen Typen r-gliedriger transitiver Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung.

Schur bemerkte nun, daß man stets für jeden solchen Typus die endlichen Transformationen eines Repräsentanten hinschreiben kann, wenn man die endlichen Transformationen der kanonischen Parametergruppe kennt. Durch Berechnung der infinitesimalen Transformationen jener Repräsentanten fand er dann, daß diese infinitesimalen Transformationen Quotienten beständig konvergenter Potenzreihen sind, und zwar wieder Quotienten mit gemeinsamem Nenner.

Es versteht sich von selbst, daß der von Schur gefundene Repräsentant durch das von Lie angegebene Verfahren herstellbar sein muß. Schur ist aber diesen Weg nicht gegangen, sondern er hat, wie er in einem Briefe vom 20. 9. 1891 sagt, die Gleichungen der endlichen Transformationen der repräsentierenden Gruppe durch Probieren gefunden. Sein Beweis dafür, daß eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit herauskommt, ist äußerst kurz: er umfaßt nur zwei Seiten (Abh. Nr. 25, Leipz. Ber. 1890, S. 4—6). Jedoch ist allerdings die Kürze erreicht durch Weglassung zahlreicher Zwischengleichungen, die nur ein Leser ergänzen kann, der ganz in diesen Dingen drin ist. Wenn man diesen Beweis liest, kann man nicht umhin, Schur zu bewundern, daß er durch Probieren zum Ziele gekommen ist. Man kann sich aber unmöglich damit zufrieden geben, denn Schurs Beweis ist doch nur die rechnerische Bestätigung der Richtigkeit gewisser Gleichungen, die wie vom Himmel gefallen sind. Es scheint mir daher nötig, zu zeigen, wie die Schurschen Formeln planmäßig abgeleitet werden können.

Es sei

$$(8)\qquad \mathfrak{x}_i' = \varphi_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r;\, u_1, \ldots, u_r) = \varphi_i(\mathfrak{x}_i;\, u) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

die kanonische erste Parametergruppe, die zu einer r-gliedrigen Zusammensetzung c_{iks} gehört. Dann ist $\varphi_i(u;\, \varphi(v;w)) = \varphi_i(\varphi(u;v)w)$, ferner $\varphi_i(-x;\, -u) \equiv -\varphi_i(u;\, x)$, also wird die zweite kanonische Parametergruppe durch die Gleichungen

$$(9)\qquad \mathfrak{x}_i' = \varphi_i(-u;\, \mathfrak{x}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

dargestellt, und zwar so, daß sie auf die erste holoedrisch isomorph bezogen ist. Durch $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$ sei eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe bestimmt. Wir betrachten die entsprechende Untergruppe

$$(10)\qquad \mathfrak{x}_i' = \varphi_i(0_1, \ldots, 0_n, -u_{n+1}, \ldots, u_r;\, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

der zweiten kanonischen Parametergruppe. Diese Untergruppe zerlegt den R_r in eine Schar von ∞^n invarianten M_{r-n}, die wir durch die Gleichungen

$$(11)\qquad \mathfrak{x}_i = \varphi_i(0_1, \ldots, 0_n, -\mathfrak{u}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{u}_r;\, x_1, \ldots, x_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_r) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

darstellen können, unter den $\mathfrak{u}_{n+k}$ unabhängige Veränderliche verstanden, während $x_1, \ldots, x_n$ die Parameter der Schar sind.

Die ∞^n Mannigfaltigkeiten der Schar (11) werden nach Lie bei den Transformationen der ersten kanonischen Parametergruppe (8) unter einander vertauscht, und zwar durch eine isomorphe transitive Gruppe. Führen wir nun (8) auf (11) aus, so erhalten wir die Schar

$$(12)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{x}_i' &= \varphi_i(\varphi(0_1, \ldots, 0_n, -\mathfrak{u}_{n+1}, \ldots, -\mathfrak{u}_r;\, x_1, \ldots, x_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_r);\, u)\\ &= \varphi_i(0_1, \ldots, 0_n, -\mathfrak{u}_{n+1}, \ldots, -\mathfrak{u}_r;\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_r;\, u)),\end{aligned}$$

die in der Form

$$(13)\qquad \mathfrak{x}_i' = \varphi_i(0_1, \ldots, 0_n, -\mathfrak{u}_{n+1}', \ldots, -\mathfrak{u}_r';\, x_1', \ldots, x_n', 0_{n+1}, \ldots, 0_r)$$

darstellbar sein muß. Aus (13) folgt aber

$$\begin{aligned} x_\nu' &= \varphi_\nu(0_1, \ldots, 0_n, \mathfrak{u}_{n+1}', \ldots, \mathfrak{u}_r';\, \mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_r') && (\nu = 1, \ldots, n)\\ 0 &= \varphi_{n+k}(0_1, \ldots, 0_n, \mathfrak{u}_{n+1}', \ldots, \mathfrak{u}_r';\, \mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_r') && (k = 1, \ldots, r-n),\end{aligned}$$

mithin, wenn wir die Werte $\mathfrak{x}_i'$ aus (12) einsetzen und umgestalten:

$$(14)\qquad \begin{cases} x_\nu' = \varphi_\nu(\Psi;\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_r;\, u)) & (\nu = 1, \ldots, n)\\ 0 = \varphi_{n+k}(\Psi;\, \varphi(x_1, \ldots, x_n;\, 0_{n+1}, \ldots, 0_r;\, u)) & (k = 1, \ldots, r-n),\end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\varphi(0_1, \ldots, 0_n, \mathfrak{u}_{n+1}', \ldots, \mathfrak{u}_r';\, 0_1, \ldots, 0_n, -\mathfrak{u}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{u}_r) = \Psi$$

gesetzt ist.

Da $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$ eine Untergruppe ist, haben wir

$$(15)\qquad \varphi_\nu(0_1, \ldots, 0_n, \mathfrak{u}_{n+1}', \ldots, \mathfrak{u}_r';\, 0_1, \ldots, 0_n, -\mathfrak{u}_{n+1}, \ldots, -\mathfrak{u}_r) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

während wir

$$(16)\qquad \varphi_\nu(0_1, \ldots, 0_n, \mathfrak{u}_{n+1}', \ldots, \mathfrak{u}_r';\, 0_1, \ldots, 0_n, -\mathfrak{u}_{n+1}, \ldots, -\mathfrak{u}_r) = \mathfrak{v}_{n+k} \qquad (k = 1, \ldots, r-n)$$

setzen können. Also ergibt sich aus (14)

$$(17)\qquad x_\nu' = \varphi_\nu(0_1, \ldots, 0_n, \mathfrak{v}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{v}_r;\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_r;\, u)) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wo die $\mathfrak{v}_{n+k}$ vermöge

$$(18)\qquad 0 = \varphi_{n+k}(0_1, \ldots, 0_n, \mathfrak{v}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{v}_r;\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_r;\, u)) \qquad (k = 1, \ldots, r-n)$$

zu eliminieren sind. Diese Elimination führt man aus, indem man die Gleichungen (17), (18) nach $0_1, \ldots, 0_n, \mathfrak{v}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{v}_r$ auflöst und nur die n ersten der so erhaltenen Gleichungen hinschreibt:

$$(19)\qquad 0 = \varphi_\nu(x_1', \ldots, x_n', 0_{n+1}, \ldots, 0_r;\, -\varphi(x_1, \ldots, x_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_r;\, u)) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Unsere Gleichungen (17), (18) entsprechen den Gleichungen (17), (18) von Schur, Leipz. Ber. 1890, S. 5, während unsere Gleichungen (19) den Schurschen Gleichungen (14) auf S. 4 ebd. entsprechen. Dabei stellt sich aber eine Abweichung heraus: in den Gleichungen (17), (18) von Schur ist nämlich u durch $-u$ ersetzt. Diese Abweichung beruht auf einem Umstande, den Schur nicht beachtet hat und der sich bei ihm auf S. 6 in Gl. (26) bemerklich macht. Dort steht nämlich $\varphi(v,\, u)$ statt, wie eigentlich herauskommen müßte, $\varphi(u,\, v)$. Ersetzt man aber bei ihm u, v durch $-u, -v$, so wird $\varphi(-v,\, -u) = -\varphi(u,\, v)$ und alles ist in schönster Ordnung. Die Gruppe, die Schur angegeben hat, ist ebenso isomorph auf die erste Parametergruppe bezogen, daß der Transformation u der Schurschen Gruppe die Transformation $\mathfrak{x}_i' = \varphi_i(\mathfrak{x}, -u)$ dieser Parametergruppe entspricht.

In Abh. 28, Ann. XXXVIII, S. 282, teilt Schur die von ihm gefundene Gruppe auch mit, ohne den Beweis für die Gruppeneigenschaft zu wiederholen. In den dortigen Gleichungen (89) der Gruppe sind die x und x' durch $-x$ und $-x'$ ersetzt, doch ändert das nichts an der Art, wie seine Gruppe auf die erste Parametergruppe isomorph bezogen ist.

Alle die eben besprochenen wichtigen Ergebnisse sind schon in der Abh. 25 mitgeteilt, allerdings in sehr knapper Fassung. Auf die ausführliche Darstellung in Abh. 28 wollen wir nicht näher eingehen. Erwähnt sei wenigstens ein neuer Beweis für die Umkehrung von Lies erstem Fundamentalsatze. Es handelt sich darum, zu zeigen, daß eine Schar von ∞^r Transformationen eine Gruppe bildet, wenn sie Differentialgleichungen von der Form (2) befriedigt und außerdem die identische Transformation enthält. Lie benutzt dabei den Umstand, daß die ∞^r Transformationen der Schar in ∞^{r-1} eingliedrige Gruppen zerlegt werden können, was aus der besonderen Gestalt der Gleichungen (2) sehr leicht folgt — Schur vermeidet das. Der Grundgedanke seines Beweises kommt darauf hinaus, daß man die Hauptlösungen des vollständigen Systems verwertet, auf welches das System (2) zurückgeführt werden kann. Legt man Gewicht auf die Reinheit der Methode, so erscheint der Schursche Beweis befriedigender, denn der Liesche Beweis führt einen neuen Gedanken ein, der für sich behandelt zu werden verdient, weil er einen ganz neuen Einblick in das Wesen der r-gliedrigen Gruppe eröffnet. Im übrigen bringt Abh. Nr. 28 sehr wesentliche Vereinfachungen der früher von Schur gegebenen Begründung seiner Sätze. Es ist jedoch zu bemerken, daß man eine noch einfachere Begründung dieser Sätze geben kann und überdies einen wesentlich tieferen Einblick in ihrem Zusammenhang gewinnt, wenn man sich auf Entwickelungen stützt, die Lie schon 1878 veröffentlicht hat (Ges. Abh. Bd. V, Abh. IV, S. 78—84). Dort sind tatsächlich alle Hilfsmittel vorhanden, um zu allen wichtigen Schurschen Sätzen zu gelangen und sie auf die denkbar einfachste Art zu begründen. Ich verweise in dieser Beziehung auf Bd. III der Transformationsgruppen, S. 788—800, wo das alles auseinandergesetzt wird. Es ist sehr merkwürdig, daß sich Lie diese Folgerungen aus seinen eigenen Entwickelungen hat entgehen lassen und daß Schur auf einen ganzen anderen, viel schwierigeren Wege zu diesen Ergebnissen gelangt ist. Die Anerkennung, die man Schurs Leistung zollen muß, wird dadurch nur gesteigert.

Wir kommen zu Schurs letzter rein gruppentheoretischer Arbeit, Nr. 33. Lie hatte 1890 den Satz aufgestellt, daß jede transitive endliche kontinuierliche Gruppe, deren Gleichungen eine gewisse Anzahl Differentiationen zulassen, mit einer durch analytische Gleichungen darstellbaren Gruppe ähnlich ist. Daraus folgt, daß alle seine früheren Sätze über die transitiven analytischen Gruppen und ebenso die Schurschen Sätze auch für diese nichtanalytischen Gruppen gültig bleiben. In Abh. 33 löste nun Schur die Aufgabe, die Art und die Zahl der Differentiationen, die man voraussetzen muß, genauer zu bestimmen. Er zeigt, daß man mit gewissen Differentiationen tatsächlich auskommt, während die Frage offen bleibt, ob deren Zahl noch weiter herabgedrückt werden kann.

Aus Schurs Entwickelungen geht insbesondere hervor, daß die Lieschen Relationen (6) zwischen den Konstanten c_{iks} der Zusammensetzung ohne Benutzung der Jacobischen Identität gewonnen werden können, daß also die Ausdrücke für die infinitesimalen Transformationen der Gruppe nur einmal differentiierbar zu sein brauchen.

Jetzt sind noch zwei Arbeiten zu erwähnen, zu denen Schur durch seine Beschäftigung mit der Gruppentheorie veranlaßt worden ist. In Nr. 30 betrachtet er ein q-gliedriges vollständiges System

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q),$$

das nach den Ableitungen $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ auflösbar sei. Er zeigt, daß die Bestimmung der Lösungen sofort geleistet werden kann, wenn man das simultane System

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k^{1\ldots q} \lambda_k \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i = x_i^0$ für $t = 0$ integriert hat, was

$$x_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1 t, \ldots, \lambda_q t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

ergeben möge.

Die Gleichungen (21) stellen eine q-fach ausgedehnte, durch den Punkt $x_1^0, \ldots, x_n^0$ gehende Mannigfaltigkeit M_q dar, die erzeugt wird von den durch diesen Punkt gehenden Bahnkurven der ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$. Dabei folgt aus den Eigenschaften eines vollständigen Systems, daß diese Mannigfaltigkeit M_q bei den infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \ldots, X_q f$ invariant bleibt, daß sie also stets wieder erhalten wird, wenn man durch irgendeinen ihrer Punkte die hindurchgehenden Bahnkurven der $\Sigma \lambda_k X_k f$

legt. Schur betrachtet nun alle die M_q (21), die durch die Punkte $x_1^0, \ldots, x_n^0$ einer $(n-q)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit:

(22) $$x_\mu^0 = \varphi_\mu(x_{q+1}^0, \ldots, x_n^0) \qquad (\mu = 1, \ldots, q)$$

gehen, und zwar wählt er (22) so, daß ein darauf liegender Punkt $x_1^0, \ldots, x_n^0$ von allgemeiner Lage bei keiner infinitesimalen Transformation $\Sigma \lambda_k X_k f$ auf der Mannigfaltigkeit bleibt. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$\mathrm{Det.}\left(\xi_{k\mu} - \sum_\tau^{1\ldots n-q} \xi_{k,q+\tau} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{q+\tau}}\right) \qquad (k, \mu = 1, \ldots, q)$$

bei der Substitution $x_\mu = \varphi_\mu(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ nicht identisch verschwindet. Die Gleichungen

(23) $$x_i = f_i(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_q^0, x_{q+1}^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1 t, \ldots, \lambda_q t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

stellen dann ∞^{n-q} verschiedene M_q dar, die den Raum $x_1, \ldots, x_n$ gerade einmal erfüllen, und sind infolgedessen nach $x_{q+1}^0, \ldots, x_n^0$, $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_q t$ auflösbar. Benutzt man diese n Größen als neue Koordinaten, so werden die $\infty^{n-q} M_q$ durch die Gleichungen: $x_{q+k}^0 = \mathrm{const.}$ $(k = 1, \ldots, n-q)$, dargestellt. Die infinitesimalen Transformationen $X_\mu f$, bei denen die $\infty^{n-q} M_q$ alle einzeln invariant bleiben, erhalten daher die Form

$$X_\mu f = \sum_\tau^{1\ldots q} \eta_{\mu\tau}(x_{q+1}^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1 t, \ldots, \lambda_q f) \frac{\partial f}{\partial(\lambda_\tau t)} \qquad (\mu = 1, \ldots, q).$$

Die Funktionen $x_{q+1}^0, \ldots, x_n^0$ der x_i, die man durch Auflösung der Gleichungen (23) erhält, sind daher unabhängige Lösungen des ursprünglichen vollständigen Systems.

Damit ist der Satz, den Schur zu Beginn der Abhandlung aufgestellt hat, bewiesen, und es ist zugleich der dem Satze zugrundeliegende Gedankeninhalt herausgeschält. Schur hat, wie das seine Art ist, so viel in den Satz hineingepackt, daß der wahre Gedankeninhalt verborgen bleibt. Wir haben, um den deutlich zu machen, das Vorhandensein der Lösungen als bekannt vorausgesetzt. Schur hat, was für seine Denkweise und für die Art seiner Darstellung kennzeichnend ist, den Satz so gefaßt, daß er in seinem Beweise zugleich das Vorhandensein der Lösungen zeigen muß. Es sind das die Entwickelungen auf S. 179—181, wo er den Hauptteil seines Satzes beweist. Hierin steckt tatsächlich ein wirklich neuer Beweis dafür, daß jedes q-gliedrige vollständige System in n Veränderlichen $n-q$ unabhängige Lösungen hat. Aber dieser Beweis wirkt in Schurs Darstellung so, daß der Leser zwar von seiner Richtigkeit überzeugt wird, aber keine Ahnung

bekommt, warum gerade die hier benutzten Betrachtungen zum Ziele führen. Mir scheint, daß gewisse Eigentümlichkeiten der Art, wie Weierstraß manche seiner Beweise zu führen pflegt, hier auf die Spitze getrieben sind.

Ein Irrtum ist es, wenn Schur behauptet, das Mayersche Theorem ergebe sich als ein besonderer Fall seines Satzes. Das Mayersche Theorem besagt nämlich keineswegs bloß, daß sich die Integration eines q-gliedrigen vollständigen Systems in n Veränderlichen auf die einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in $n-q+1$ zurückführen läßt. Die Bedeutung des Theorems liegt vielmehr darin, daß aus jeder Lösung der betreffenden Differentialgleichung mindestens eine Lösung des vollständigen Systems gewonnen werden kann. Darüber aber sagt der Schursche Satz gar nichts aus.

Am Schlusse von Nr. 30 spricht Schur einen Satz aus, der sich auf Systeme von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bezieht. Den Beweis dafür erbringt er in Abhandlung 36. Auch über diese wäre allerhand zu sagen, doch würde das zu viel Raum erfordern.

In Dorpat fühlte sich Schur ganz wohl, zumal er erfreuliche Lehrerfolge hatte. So schreibt er im Februar 1892: „In meiner Funktionentheorie habe ich in diesem Semester die stolze Zahl von zwanzig Zuhörern; das erinnert mich an meine besten Leipziger Zeiten.“ Erwähnt zu werden verdient auch, daß während seiner Dorpater Zeit Th. Molien mit einer besonders hervorragenden Arbeit über Systeme komplexer Zahlen promovierte (Math. Ann. Bd. 41 u. 42). In bezug auf diese äußert sich Schur am 1. 2. 1893, schon aus Aachen: „An der Dissertation schreibe ich mir gar keinen Anteil zu, wohl aber daran, daß sie überhaupt das Licht der Welt erblickte; ich saß ihm immer auf der Pelle.“

Immerhin ist es begreiflich, daß er den dringenden Wunsch hatte, ins deutsche Vaterland zurückkehren zu können, schon mit Rücksicht auf das ja immer drohende Gespenst der Russifizierung. Er wurde zwar 1892 in Münster in erster Linie vorgeschlagen, aber „den durch das Fallen des Volksschulgesetzes erzürnten Klerikalen zum Opfer gebracht“ (Brief vom 21. 5. 1892). Berufen wurde nämlich Killing, wogegen an sich nichts einzuwenden war, denn dieser war neun Jahre älter als Schur und hätte längst an eine Universität gehört.

Unter diesen Umständen nahm Schur mit Freuden für das Winterhalbjahr 1892—93 eine Berufung als Professor der darstellenden Geometrie an die Technische Hochschule zu Aachen an. Er mußte sich allerdings erst gehörig in die neue Tätigkeit einarbeiten und hatte überdies sehr über Assistentennöte zu klagen, bis er 1894 in Fr. Schilling einen sehr tüchtigen Assistenten gewann, der ihn 1897 auch nach Karlsruhe begleitet hat.

Im April 1897 siedelte Schur als Nachfolger Chr. Wieners nach Karlsruhe über. Obwohl auch dieser Wechsel ihm viel Arbeit brachte, konnte er da sein schon in Aachen begonnenes Lehrbuch der Analytischen Geometrie zum Abschluß bringen, das 1898 erschien (Nr. 42). Er schreibt am 27. 6. 1898: „Das Buch hat mir schließlich doch viel mehr Arbeit gemacht, als ich damals in meinem jugendlichen Leichtsinne angenommen habe." Doch belohnte sich die darauf verwandte Arbeit, denn er konnte 1912 eine zweite, verbesserte und vermehrte Auflage erscheinen lassen (Nr. 53), und die erste war 1500 Exemplare stark gewesen.

Im W.-H. 1899—1900 hielt er in Karlsruhe eine einstündige Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie, die ihm viel Arbeit machte. Er schreibt am 10. 12. 1899: „Ich könnte es mir ja leicht machen, indem ich mich auf nichteuklidische Geometrie beschränkte, aber die neuesten Publikationen auf diesem Gebiete haben doch wohl gezeigt, daß man Unrecht tut, sich bei der Untersuchung des logischen Zusammenhanges der Axiome auf das Parallelenaxiom zu beschränken. Es ist ja das der Standpunkt, den ich schon lange einnehme, und ich freue mich sehr, daß er einen so wirksamen Verfechter wie Hilbert gefunden hat. Dessen Schrift lege ich meiner Vorlesung zugrunde, habe sie aber noch in vielen Punkten ergänzen können, da Hilbert zu Unrecht die Italiener kaum berücksichtigt hat. Für mich ist an der Hilbertschen Schrift hauptsächlich der Nachweis interessant und neu, daß das Axiom des Archimedes von den übrigen unabhängig ist, zumal dieser Beweis so außerordentlich einfach ist und frei ist von allen Betrachtungen über das aktuale Unendlich."

Er hatte allerdings auch nach den früher besprochenen Abhandlungen Nr. 19—21 öfters Beiträge zu den Grundlagen der Geometrie veröffentlicht, so 1891 „Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in der projektiven Geometrie" (Nr. 29), ferner 1892 „Über den Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren" (Nr. 32), namentlich 1898 den ersten von jedem Stetigkeitsaxiome unabhängigen Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie (Nr. 40). Jetzt unternahm er es, die ganze Frage zusammenhängend zu bearbeiten. Im Jahre 1901 erschien eine größere Abhandlung über

den Gegenstand (Nr. 44)[8]), der 1903, 1904 kleinere Beiträge folgten (Nr. 45, 47), aber erst 1909 konnte er seine „Grundlagen der Geometrie" (Nr. 52) veröffentlichen. Er war damals schon in Straßburg, hatte jedoch das Werk noch in Karlsruhe vollenden können.

Schurs Ziel war, zur Begründung der Geometrie ein möglichst lückenloses System von Axiomen aufzustellen, das auch keine entbehrlichen Bestandteile enthält. Unter seinen Vorgängern stehen Pasch und Hilbert bei weitem an erster Stelle; diese sind es auch, denen er am meisten verdankt. Ich fühle mich jedoch außerstande, seine Leistung im Vergleiche mit denen seiner Vorgänger zu würdigen. Auch auf eine Inhaltsübersicht muß ich verzichten, da diese doch nicht in kurzen Worten gegeben werden kann. Jedenfalls war die Anerkennung redlich verdient, die seinem Werke im Dezember 1912 durch die Verleihung des Lobatschefskij-Preises zuteil geworden ist. Überhaupt wird Schurs Name in der Geschichte der geometrischen Axiomatik neben den beiden genannten dauernd seine Stellung behaupten.

Aus der Karlsruher Zeit ist jetzt noch allerhand zu berichten. Schur gewann im W.-H. 1899—1900 Disteli zum Assistenten. Als er dann den größten Teil des Sommerhalbjahres 1900 durch eine ernste Erkrankung verhindert war, seine Vorlesungen zu halten, hatte er an Disteli einen vorzüglichen Stellvertreter. Unter seinen späteren Assistenten sind noch W. Ludwig und G. Faber, sowie H. Mohrmann zu nennen.

Im Jahre 1904 wurde Schur zum Rektor der Technischen Hochschule Karlsruhe gewählt und trat dieses Amt am 18. November an mit einer Rede über I. H. Lambert als Geometer (Nr. 48 und 50). Einen Ruf nach Charlottenburg als Nachfolger von Hauck, den er 1905 erhielt, lehnte er nach längerem Schwanken schließlich doch ab. Die geringe finanzielle Verbesserung, die herausgekommen wäre, konnte ihn nicht bestimmen, die angenehmen Verhältnisse, unter denen er lebte, zu verlassen und in das Häusermeer Berlins überzusiedeln. Wesentlich leichter fiel es ihm, im Frühjahre 1909 die Berufung nach Straßburg anzunehmen; entsprach doch der mathematische Unterricht an einer Universität ganz entschieden seinen Neigungen und auch seiner Begabung viel mehr als der an einer technischen Hochschule. Überdies wurde er ja der Nachfolger Reyes, was für ihn als Geometer noch besonders ins Gewicht fiel. Doch blieb er

8) Er wollte damit einer Verdunkelung der Prioritätsansprüche vorbeugen, die er in bezug auf den ersten Beweis der Unabhängigkeit gewisser Sätze vom Archimedischen Postulate machte. Brief vom 27. 10. 1900.

auch von Straßburg aus in reger Verbindung mit dem ihm lieb gewordenen Kreise der Karlsruher Kollegen, dem seit 1902 Krazer und seit 1908 Stäckel angehörte. In Straßburg selbst wirkte er zusammen mit H. Weber; besonders anregend fand er aber, wie er schreibt, Wellstein und den Vertreter der angewandten Mathematik, v. Mises.

Die Zahl der Veröffentlichungen aus der Straßburger Zeit ist nicht groß. Dafür erschien eine ganze Reihe geometrischer Dissertationen, die er angeregt hat.

Eine nachträgliche Frucht seiner langjährigen Tätigkeit an technischen Hochschulen waren die „Vorlesungen über graphische Statik" (Nr. 56), die Schur 1915 veröffentlichte. Ihr Erscheinen war durch den Krieg zunächst in Frage gestellt worden.

Am 1. 10. 1910 übernahm er das Amt eines Vorsitzenden der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Der Zufall wollte, daß er mich darin ablöste. Er leitete dann im September 1911 die Jahresversammlung der Vereinigung, die in dem ihm so vertrauten Karlsruhe abgehalten wurde.

Nach Kriegsschlusse erlebte Schur in Straßburg noch die ersten Zeiten der französischen Besetzung. Unmittelbar zu leiden hatte er darunter nicht. Er erteilt den französischen Soldaten das Zeugnis, daß sie sich sehr gut benommen haben. Aber die an sich so trübe Stimmung wurde noch ganz wesentlich gesteigert durch die Sorge um seine beiden ältesten Söhne. Diese, bereits aus dem Kriegsdienste entlassen, waren im Vertrauen auf die Waffenstillstandsbedingungen nach Straßburg zurückgekehrt und standen nun fortwährend in Gefahr, interniert zu werden. Alle Versuche, sie nach Deutschland zu bringen, schlugen fehl. Unter diesen Umständen war die Ausweisung sämtlicher Professoren geradezu eine Wohltat, denn jetzt konnten sie als seine Söhne mit hinauskommen. Die Familie durfte verhältnismäßig viel Gepäck mitnehmen, mußte aber die Möbel zurücklassen; doch hat Schur später sein Eigentum zum größten Teile wiederbekommen.

Als er in Kehl den Extrazug, in dem die Professoren befördert worden waren, verließ, wurde ihm schon eine Berufung in seine alte Karlsruher Stellung überreicht. Tags darauf kam aber eine Berufung nach Breslau, der er den Vorzug gab, weil ihn der Gedanke an die Wiederübernahme des Übungsbetriebes mit den vielen Zeichnungen abschreckte. Da in Breslau kein Zwischensemester abgehalten wurde, brauchte er erst Ende April dort zu sein und fand, nach fast sechs Wochen Hotelleben in Bruchsal, Offenburg und Würzburg, an dem

letztgenannten Orte eine angenehme vorläufige Unterkunft. Er wurde da sogar aufgefordert, eine kleine Vorlesung zu halten, was er sehr gern tat, als Ablenkung von dem ewigen Grübeln über die schrecklichen Zustände des deutschen Vaterlandes.[9])

In Breslau, wo er die Stelle seines alten Lehrers Rosanes inne hatte, lebte sich Schur sehr schnell ein und übte eine recht umfassende Lehrtätigkeit aus, bei der er besonders die Geometrie pflegte. Er setzte diese Lehrtätigkeit auch noch fort, nachdem er 1924 in den Ruhestand versetzt worden war. Die Schlaflosigkeit, über die er schon früher geklagt hatte, nahm freilich mit den Jahren zu, so daß während des Semesters seine Kraft durch die Vorlesungen verbraucht wurde und zu sonstiger wissenschaftlicher Arbeit nicht mehr ausreichte.

Da er sich immer noch mit Vorliebe der Zeit in Karlsruhe erinnerte, bereitete es ihm eine ganz besondere Freude, daß seine alte Technische Hochschule ihm 1925 bei ihrem Jubiläum den Dr.-Ing. ehrenhalber verlieh „in Anerkennung seiner Verdienste um die Hochschule und seiner Leistungen in den technischen Wissenschaften". Schon zu seinem 70. Geburtstage 1926 wurden ihm von Freunden und Schülern zahlreiche Beweise der Anhänglichkeit und Dankbarkeit zuteil. In noch viel höherem Maße war das der Fall bei seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 8. März 1929. Sein Breslauer Kollege Kneser, mit dem er schon in Dorpat einige Zeit zusammen gewesen war, beglückwünschte ihn als damaliger Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mit einem Schreiben, das ein so feines Verständnis von Schurs Arbeiten verriet, daß dieser wünschte, es möchte später bei einem Nachrufe auf ihn zugrunde gelegt werden (Brief vom 18. 3. 1929). Leider hat aber dieses Schreiben bis jetzt noch nicht aufgefunden werden können.

Im Januar 1931 konnte Schur ziemlich gleichzeitig seinen 75. Geburtstag und sein fünfzigjähriges Dozentenjubiläum feiern. Leider wurde er gerade im Januar von einer üblen Grippe heimgesucht. Im Februar konnte er dann, allerdings nur unter Aufbietung aller Kräfte, seine Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie zu Ende führen. Bei der ersten Vorlesung nach seiner Genesung bereiteten ihm die mathematischen Kollegen von der Universität und von der Technischen Hochschule eine sehr nette Ovation. Sie waren nämlich sämtlich erschienen, und sein Nachfolger Rademacher hielt eine Ansprache (Brief vom 12. 3. 1931).

9) Nach einem Briefe aus Würzburg vom 9. 3. 1919.

Im W.-H. 1931—32 las Schur noch einmal in voller geistiger Frische seine geliebte projektive Geometrie. Wenige Tage nach Semesterschluß packte ihn eine Grippe mit Lungenentzündung, der er nach zwölf Tagen schwerer Krankheit am 18. 3. 1932 erlag.

Über Schur als Lehrer und Menschen kann ich eine Äußerung von G. Faber in München anführen, der uns schon als sein Assistent in Karlsruhe begegnet ist. Er hat als solcher bei Schurs Übungen mitgeholfen und dessen Vorlesungen über Darstellende Geometrie und Graphische Statik gehört. Er schreibt mir unterm 30. 4. 1933:

„Das Kennzeichen des Lehrers (wie auch des Menschen) Schur war seine unverrückbare, sich auf das große Ganze wie auf das Einzelne erstreckende Gewissenhaftigkeit. Seine Vorlesungen waren Tag für Tag aufs gewissenhafteste vorbereitet, die Beweise von voller Sauberkeit. An den Übungen nahm er stets selbst teil; die Zeichnungen, die er zu benoten hatte, hat er stets sehr genau angesehen und oft noch Mängel entdeckt, die der vorhergehenden Begutachtung durch die Assistenten entgangen waren.

„Auch in der Verwaltungsarbeit war Schur von dem gleichen kategorischen Imperativ der Pflichterfüllung beseelt wie in seiner Lehrtätigkeit. Den süddeutschen Kollegen mag diese herbe Art manchmal etwas kühl und humorlos erschienen sein. Um so menschlicher, wärmer und heiterer erschien Schur dem, der Gelegenheit hatte, ihn im Kreise seiner Familie kennenzulernen.

„Die ersten Straßburger Jahre waren eine besonders glückliche Zeit seines Lebens. Insbesondere freute er sich über seine erfolgreiche Lehrtätigkeit an der Universität; an der Technischen Hochschule hatte er im allgemeinen doch nicht die seiner Lehrbefähigung entsprechenden Hörer gefunden.

„Seinen Freunden blieb er bis zum Ende unerschütterlich treu. Seine Briefe, deren klare, schöne Schrift sich nie veränderte, ließen nie allzu lange auf sich warten; sie zeugten davon, wie rege Schurs Anteil blieb an den Geschicken Deutschlands, der Mathematik und insbesondere seiner näheren Bekannten und Freunde."

Die Persönlichkeit Schurs scheint mir hier so treffend gekennzeichnet, daß ich nichts hinzufügen möchte. Wer auch immer ihm nähergetreten ist, wird denselben Eindruck empfangen haben und mit Dankbarkeit sein Gedächtnis in Ehren halten.

(Eingegangen am 10. 4. 1934.)

Schriftenverzeichnis.

1. Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften der ebenen Kurven. Ztschr. f. Math. u. Phys. **22** (1877), S. 220—233. Datiert: „Im September 1876."
2. Synthetischer Beweis der Identität einer Tripelkurve mit dem Erzeugnis eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projektiven Strahlenbüschels. Ztschr. f. Math. u. Phys. **24** (1879), S. 119—123.
3. Geometrische Untersuchungen über Strahlenkomplexe ersten und zweiten Grades. Inauguraldissertation der Berliner philos. Fak. Öffentlich verteidigt am 8. 3. 1879. Gewidmet E. E. Kummer. Berlin, Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Franke). 4 + 52 S. 8°.
4. Geometrische Untersuchungen über Strahlenkomplexe ersten und zweiten Grades. Math. Ann. **15**, Heft 3 u. 4, S. 432—464, ausgeg. 22. 10. 1879. Nur wenig gekürzter Abdruck von Nr. 3.
5. Über die gemeinsamen Tangenten zweier Flächen zweiten Grades, welche ein windschiefes Viereck gemein haben. Ztschr. f. Math. u. Phys. **25** (1880), S. 414—416.
6. Zur Theorie der Strahlenkomplexe zweiten Grades. Ann. **17**, Heft 1, S. 107—109, ausgeg. 23. 9. 1880.
7. Über die durch kollineare Grundgebilde erzeugten Kurven und Flächen. Ann. **18**, Heft 2, S. 1—32, ausgeg. 25. 4. 1881. Habilitationsschrift, durch die Schur zu seiner am 12. 1. 1881 zu haltenden Probevorlesung einlud.
8. Über den Fundamentalsatz der projektivischen Geometrie. Ann. **18**, Heft 2 u. 3, S. 252—254, ausgeg. 7. 7. 1881.
9. Modelle von Flächen dritter Ordnung von Dr. Carl Rodenberg. Ztschr. f. Math. u. Phys. **28** (1883), II. Abt., S. 33—35. Datiert: Leipzig im Mai 1882.
10. Über besondere Lagen zweier Tetraeder. Ann. **19**, Heft 3, S. 429—432, ausgeg. 28. 1. 1882.
11. Über eine besondere Klasse von Flächen vierter Ordnung. Ann. **20**, Heft 2, S. 254—296, ausgeg. 5. 7. 1882.
12. Über einen das System zweier Flächen zweiten Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlenkomplex zweiten Grades. Ann. **21**, Heft 4, S. 515—527, ausgeg. 17. 4. 1883.
13. Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. Crelle Bd. **95**, Heft 3, S. 207—217. Datiert: Leipzig im Februar 1883.
14. Die Lösung eines Paradoxons, welches bei der Konstruktion der Flächen n-ter Ordnung aus gegebenen Punkten auftritt. Leipz. Ber. math. phys. Klasse. 1883, S. 59, 60. Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 14. 11. 1883.
15. Über die Konstruktion der Flächen n-ter Ordnung. Ann. **23**, Heft 3, S. 437—446, ausgeg. 7. 4. 1884.
16. Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. Leipz. Ber. 1884, S. 128—131. Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 14. 11. 1874.
17. Über den Pohlkeschen Satz. Ann. **25**, Heft 4, S. 596—597, ausgeg. 25. 6. 1885.
18. Sur la surface tétraédrale-symétrique du quatrième ordre. Mém. de la Soc. Roy. des Sciences de Liège, 2. Serie Bd. **11** (1885), 5 S.
19. Über die Deformation der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes. Ann. **27**, Heft 2, S. 163—176, ausgeg. 20. 4. 1886.

20. Über den Zusammenhang der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes mit den projektiven Räumen. Ann. **27**, Heft 4, S. 537—567, ausgeg. 4. 8. 1886.
21. Über die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume. Ann. **28**, Heft 3, S. 343—353, ausgeg. 12. 1. 1887.
22. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Zahlen. Ann. 33, Heft 1, S. 49—60, ausgeg. 3. 12. 1888. Datiert: Leipzig im März 1888.
23. Über die kanonische Form der Parametergruppe. Leipz. Ber. 1889, Heft 2—4, S. 229—231, abgeliefert 25. 2. 1890. Vorgelegt von S. Lie in der Sitzung vom 6. 5. 1889.
24. Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen. Ann. **35**, Heft 1 u. 2, S. 161—197, ausgeg. 25. 11. 1889. Zuerst erschienen als Festschrift der Universität Dorpat zur Feier des fünfzigjährigen Bestehens der Nikolai-Hauptsternwarte Pulkowa.
25. Beweis für die Darstellbarkeit der infinitesimalen Transformationen aller transitiven endlichen Gruppen durch Quotienten beständig konvergenter Potenzreihen. Leipz. Ber. 1890, Heft 1, S. 1—7, abgeliefert 23. 7. 1890. Vorgelegt von W. Scheibner in der Sitzung vom 13. 1. 1890.
26. Über die Horopterkurve. Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschergesellschaft, Bd. **9** (1890), S. 162—164.
27. Über die sogenannten vollständigen Systeme von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Crelle Bd. **108** (1891), S. 313—324.
28. Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen. Ann. **38**, Heft 2, S. 263—286, ausgeg. 1. 4. 1891.
29. Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projektive Geometrie. Ann. **39**, Heft 1, S. 113—124, ausgeg. 24. 8. 1891.
30. Über die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Leipz. Ber. 1892, Heft 2, S. 177—183, abgeliefert 15. 8. 1892. Vorgelegt von A. Mayer in der Sitzung vom 9. 5. 1892.
31. Die Parallelenfrage im Lichte der modernen Geometrie. Krumme, Archiv f. math. u. naturw. Unterricht. 1892, 8 S.
32. Über den Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren. Dorpater Ber. Bd. **10** (1892), S. 2—6.
33. Über den analytischen Charakter der eine endliche kontinuierliche Transformationsgruppe darstellenden Funktionen. Ann. **41**, Heft 4, S. 509—538, ausgeg. 16. 1. 1893.
34. Sull' area delle figure piane limitate da linee rette. Periodico di Mat. 8 (1893), S. 153—155. Übersetzung von Nr. 32.
35. Über die Projektion von fünf Punkten einer Ebene in fünf Punkte eines Kreises. Ztschr. f. Math. u. Physik. Bd. **39** (1894), S. 247—249.
36. Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipz. Ber. 1894, Heft 1, S. 38—48, abgeliefert 2. 5. 1894. Vorgelegt von S. Lie in der Sitzung vom 8. 1. 1894.
37. Über die reziproken Figuren der graphischen Statik. Ztschr. f. Math. u. Physik Bd. 40 (1895), S. 48—55.
38. Über den Pohlkeschen Satz. Crelle **117** (1896), S. 24—28.
39. Über ebene einfache Fachwerke. Ann. **48**, Heft 1 u. 2, S. 142—194, ausgeg. 11. 9. 1896.
40. Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Ann. **51** (1898). S. 401—409.

41. Besprechung von: P. Stäckel u. F. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig 1895. Fortschr. d. Math. **26** (1895), S. 57—60, Berlin 1898.
42. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig, Veit & Comp. X + 216 S. gr. 8°, 1898.
43. Die Deformation einer geradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Änderung der Längen ihrer Geraden. Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. **44** (1899), S. 62—64.
44. Über die Grundlagen der Geometrie. Ann. **55** (1901), S. 265—292.
45. Zur Proportionslehre. Ann. **57** (1903), S. 205—208.
46. Über die Zusammensetzung von Vektoren. Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. **49** (1903), S. 352—361. Datiert: Karlsruhe, Juni 1903.
47. Zur Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie. Ann. **59** (1904), S. 314—320.
48. Johann Heinrich Lambert als Geometer. Festrede bei dem feierlichen Akte des Rektoratswechsels an der Großherzoglichen Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe am 18. 11. 1904. Karlsruhe. 20 S. gr. Lex. 8°.
49. Über die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Festschrift für Adolph Wüllner. Leipzig (1905), S. 69—76.
50. Johann Heinrich Lambert als Geometer. Jahresbericht der Deutsch. Math.-Verein. Bd. **14** (1905), S. 186—198. Abdruck von Nr. 48.
51. Über die Bewegung eines starren Körpers durch Abschroten. Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. **55** (1908), S. 408—415.
52. Grundlagen der Geometrie. Leipzig, B. G. Teubner 1909, X u. 192 S. gr. 8°. Selbstanzeige: Jahresbericht Bd. 18 (1909), 2. Abt., S. 117.
53. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig, Veit & Comp. 1912. XII u. 248 S. 8°.
54. Über die Erzeugung der Flächen zweiten Grades durch korrelative Bündel. Festschrift Heinrich Weber gewidmet. Leipzig, 1912, S. 291—297.
55. Über die berührenden Strahlennetze einer Kongruenz. Annali di Matem. (3), Bd. **21** (1913), S. 219—224.
56. Vorlesungen über graphische Statik. Herausgegeben unter Mitwirkung von Wolfgang Vogt. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig, Veit & Comp., VIII u. 219 S. 8° (1915).
57. Theodor Reye. Amer. Journ. of Math. Bd. **82** (1920—21), 3 S.
58. Theodor Reye. Ann. Bd. **82** (1921), S. 165—167.
59. Karl Rohn. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. **32** (1923), S. 201—211.
60. Über die Erzeugung der Flächen zweiten Grades durch korrelative Bündel. Math. Ztschr. Bd. **22** (1925), S. 86—88.
61. Über den Hauptsatz der Polarentheorie der Kegelschnitte. Münchn. Ber. 1927, S. 259—260.
62. Nachruf auf Martin Disteli. Jahresber. Bd. **36** (1927), S. 170—172.
63. Konstruktion von Lobatschefskijs Parallelen. In memoriam N. I. Lobatschevskij. Vol. II. Kasan 1927, S. 99—102.
64. Zum Weierstraßschen Beweise des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie. Jahresber. Bd. 38 (1929), S. 284—288, eingegangen 11. 10. 1928.
65. Nachruf auf Otto Staude. Jahresber. Bd. **40** (1931), S. 219—221, eingeg. 9. 10. 1930.