1. Halmazok

I. Elméleti összefoglaló

Halmazok

A **halmaz** és a halmaz **eleme** matematikai alapfogalmak, amelyeket külön nem definiálunk. A halmazokat általában latin nagybetűvel jelöljük, elemeiket kapcsos zárójelek közé, pontosvesszővel elválasztva írjuk. Egy halmazt az elemeinek egyértelmű meghatározásával adhatunk meg.

A halmaz megadása történhet:

- elemeinek **felsorolásával**, például $A = \{11; 13; 15; 17; 19\}$;
- **képlettel**, például $B = \{2k+1 \mid 5 \le k \le 9;\ k \in \mathbb{Z}\}$;
- **körülírással**, például $C = \{$10-nél nagyobb, 20-nál kisebb páratlan számok$\}$.

Két halmazt akkor és csak akkor nevezünk **egyenlőnek**, ha elemeik megegyeznek, vagyis az egyik halmaz minden eleme a másik halmaznak is eleme, illetve a másik halmaz minden eleme az egyik halmaznak is eleme. (A fenti példában $A = B = C$.)

Két halmazt akkor és csak akkor nevezünk **diszjunktnak**, ha nincs közös elemük.

Az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subseteq B$. Minden halmaz részhalmaza saját magának.

Az A halmaz **valódi részhalmaza** a B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, de a B halmaznak van olyan eleme, amely nem eleme az A halmaznak. (Vagyis A részhalmaza B-nek, de nem egyenlő vele.) Jele: $A \subset B$ (amely ugyanazt jelenti, mint $A \subseteq B$ és $A \neq B$ együttesen.)

Az **üres halmaznak** nincsen eleme, jele: $\varnothing$ vagy $\{\ \}$. (Vigyázat, $\{\varnothing\}$ nem az üres halmazt jelöli, hanem egy olyan egyelemű halmazt, amelynek egyetlen eleme az üres halmaz!) Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Tétel: Egy n-elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

Számhalmazok

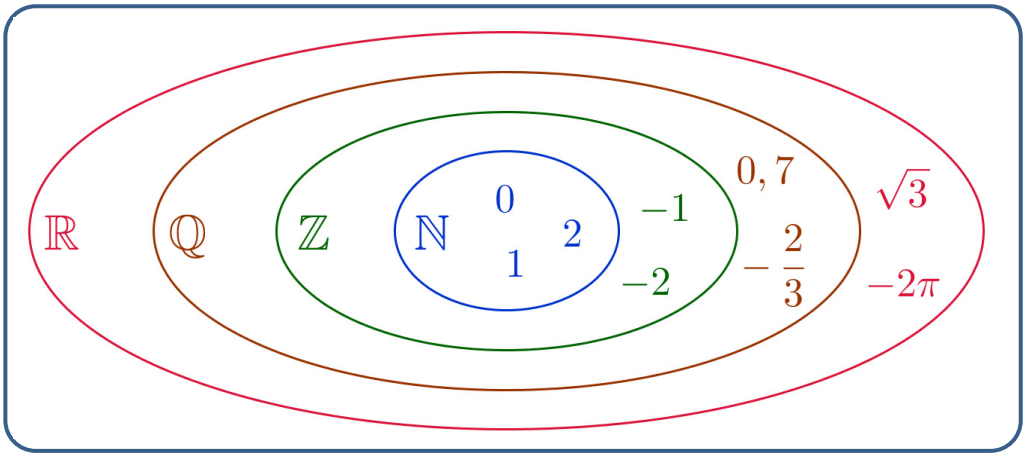
A leggyakrabban használt számhalmazok a következők:

- **természetes számok halmaza** ($\mathbb{N}$): a 0 és a pozitív egész számok halmaza;
- **egész számok halmaza** ($\mathbb{Z}$): a 0, a pozitív egészek ($\mathbb{Z}^+$) és a negatív egészek ($\mathbb{Z}^-$) halmaza;
- **racionális számok halmaza** ($\mathbb{Q}$): a két egész szám hányadosaként felírható valós számok halmaza (tizedestört-alakjuk véges, illetve végtelen szakaszos);
- **irracionális számok halmaza** ($\mathbb{Q}^*$): a két egész szám hányadosaként fel nem írható valós számok halmaza (tizedestört-alakjuk végtelen, nem szakaszos);

- **valós számok halmaza** ($\mathbb{R}$): a racionális és irracionális számok halmaza (vagy: a tizedestört-alakban megadható számok halmaza).

A középiskolában a legbővebb számhalmaznak a valós számok halmazát tekintjük. Léteznek azonban ennél bővebb számhalmazok is (pl. komplex számok).

A fenti halmazokra fennállnak az $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ összefüggések. A halmazok kapcsolatát, illetve néhány jellemző elemüket a következő ábra szemlélteti:



A valós számok halmazát a **számegyenes** pontjaival is azonosíthatjuk. A számegyenes szakaszait **intervallumoknak** nevezzük, amelyek részhalmazai a valós számok halmazának:

- az $[a; b]$ zárt intervallum azon x valós számok halmaza, amelyekre $a \leq x \leq b$ teljesül;
- az $]a; b[$ nyílt intervallum azon x valós számok halmaza, amelyekre $a < x < b$ teljesül;
- az $[a; b[$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum azon x valós számok halmaza, amelyekre $a \leq x < b$ teljesül;
- az $]a; b]$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum azon x valós számok halmaza, amelyekre $a < x \leq b$ teljesül.

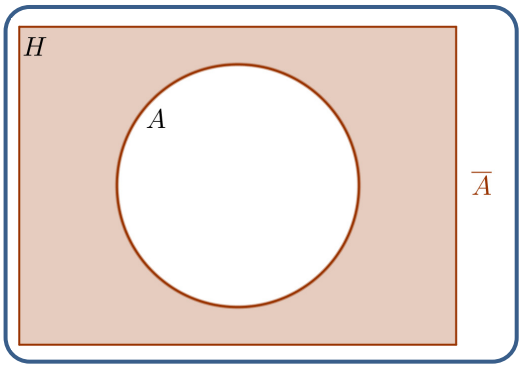
Az intervallum fogalmát kiterjeszthetjük arra az esetre is, ha valamelyik végpontja $+\infty$, illetve $-\infty$. Ebben az esetben a valamelyik végtelent tartalmazó végpontnál az intervallum kötelezően nyílt. Például: $]-\infty; b[$, $]-\infty; b]$, $]a; +\infty[$, $[a; +\infty[$, illetve $]-\infty; +\infty[$.

Műveletek halmazokkal

Tetszőleges halmazokból további halmazokat képezhetünk a következő oldalakon felsorolt műveletek segítségével.

Egyváltozós halmazművelet:

- **komplementerképzés**: ha $A \subseteq H$, akkor az A halmaz H alaphalmazra vonatkozó komplementerébe a H halmaz azon elemei tartoznak, amelyek nem elemei A-nak. Jele: $\overline{A}$.

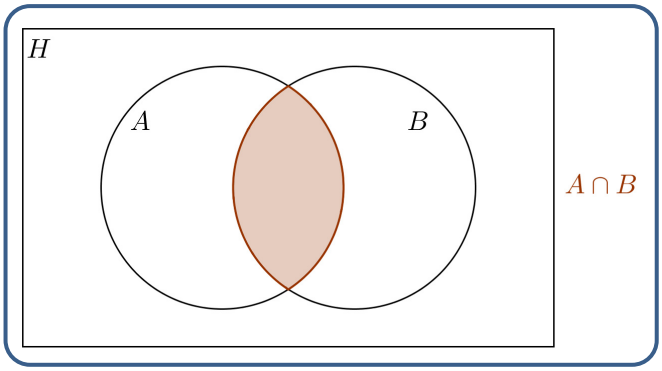


Megjegyzés: A komplementerképzés nem értelmezhető az alaphalmaz ismerete nélkül. Például a $\mathbb{Z}^+$ halmaznak önmagában nincsen komplementere, csak az alaphalmaz megadásával együtt. Például, ha az alaphalmaz $\mathbb{N}$, akkor $\overline{\mathbb{Z}^+} = \{0\}$, míg ha az alaphalmaz $\mathbb{Z}$, akkor $\overline{\mathbb{Z}^+} = \{\text{a 0 és a negatív egészek}\}$.

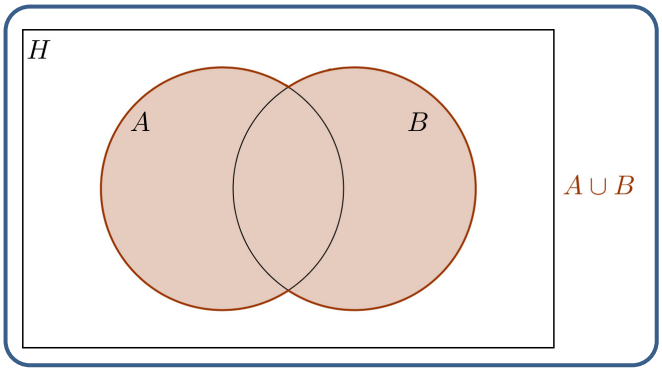
Megjegyzés: $\overline{\overline{A}} = A$, azaz egy halmaz komplementerének komplementere az eredeti halmaz.

Kétváltozós halmazműveletek:

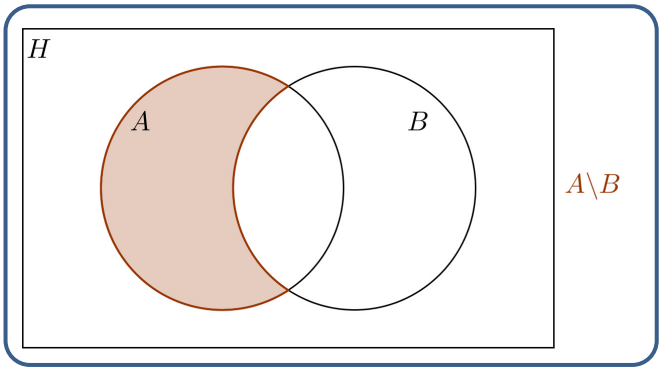
- **metszetképzés:** az A és a B halmaz metszetébe azok az elemek tartoznak, amelyek az A és a B halmaznak is elemei. Jele: $A \cap B$.



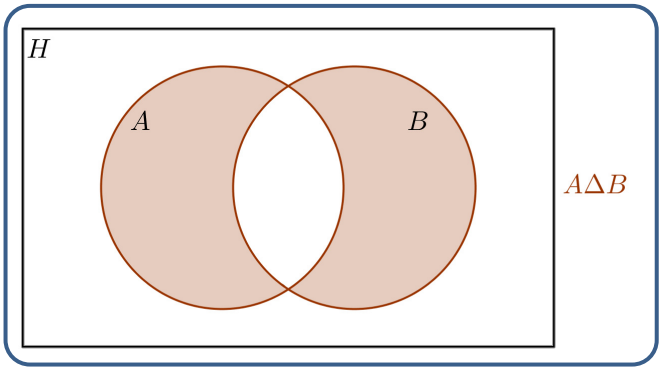
- **unióképzés:** az A és a B halmaz uniójába azok az elemek tartoznak, amelyek az A és a B halmaz közül legalább az egyiknek elemei. Jele: $A \cup B$.



- **különbségképzés:** az A és a B halmaz (ebben a sorrendben vett) különbségébe azok az elemek tartoznak, amelyek elemei az A halmaznak, de nem elemei a B halmaznak. Jele: $A \setminus B$.



- **szimmetrikus differencia-képzés:** az A és a B halmaz szimmetrikus differenciájába azok az elemek tartoznak, amelyek az A és a B halmaz közül pontosan az egyiknek elemei. Jele: $A \Delta B$. Az eddigi jelölésekkel: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



A halmazműveletek tulajdonságai:

- **kommutativitás:** a metszet, az unió és a szimmetrikus differencia kommutatív művelet ($A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ és $A \Delta B = B \Delta A$), a különbség viszont nem ($A \setminus B \neq B \setminus A$).

- **asszociativitás:** a metszet, az unió és a szimmetrikus differencia asszociatív művelet: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ és $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$, a különbség viszont nem: $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.

- **disztributivitás:** a metszet disztributív az unióra nézve: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, illetve az unió disztributív a metszetre nézve: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- A metszet-, az unió- és a komplementerképzés között fennállnak a **De Morgan-azonosságok**:
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, illetve $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Tulajdonságaik alapján a kétváltozós műveleteket kettőnél több halmazra is kiterjeszthetjük, például $A \cap B \cap C$ azon elemek halmaza, amelyek az A, B és C halmazok mindegyikének elemei (az asszociativitás miatt a műveletet nem kell zárójeleznünk). Mivel a különbségképzés nem asszociatív, ezért az $A \setminus B \setminus C$ kifejezést „balról jobbra”, vagyis $(A \setminus B) \setminus C$ jelentéssel értelmezzük.

Halmazok számossága

Egy halmazt **végesnek** nevezünk, ha elemeinek száma megadható egy természetes számmal (vagyis csak véges sok elemet tartalmaz). Egy véges halmaz **számosságán** a halmaz elemeinek számát értjük, az A halmaz számosságát $|A|$ jelöli. Például az $E=\{2;\,3;\,5;\,7\}$ halmaz számossága $|E|=4$.

Léteznek olyan halmazok is, amelyeknek **végtelen** sok elemük van. A H végtelen halmaz számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezünk, ha a H halmaz és a természetes számok halmaza között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. A H végtelen halmaz számosságát **kontinuumnak** nevezzük, ha a H halmaz és a valós számok halmaza között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető.

Két vagy több halmaz uniójának számossága meghatározható a **szita-formulával**:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

A szita-formula háromnál több halmazra is általánosítható. Ekkor az összes halmaz uniójának elemszámát megkapjuk, ha összeadjuk külön-külön az egyes halmazok elemszámait, ebből levonjuk az összes lehetséges módon előálló két-két halmaz metszetének elemszámait, majd hozzáadjuk az összes lehetséges módon előálló három-három halmaz metszetének elemszámait, és ezt a váltakozó előjeles összegzést folytatjuk egészen addig, amíg elérkezünk az összes halmaz metszetének elemszámáig.

Nevezetes ponthalmazok

A sík pontjain mint alaphalmazon értelmezhetjük a következő ponthalmazokat:

- A **körvonal** a síkban egy adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza.
- A **körlap** a síkban egy adott ponttól egy megadottnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmaza.
- A **szakaszfelező merőleges a síkban** egy szakasz két végpontjától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza (amely egy egyenes).
- A **szögfelező** a síkban egy konvex szögtartományon belül a szög két szárától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza (amely egy félegyenes).
- A **parabola** azon síkbeli pontok halmaza, amelyek egy adott ponttól és egy, az adott pontra nem illeszkedő egyenestől egyenlő távolságra vannak.
- Az **ellipszis** azon síkbeli pontok halmaza, amelyek két adott ponttól vett távolságának összege a két pont távolságánál nagyobb állandó.
- A **hiperbola** azon síkbeli pontok halmaza, amelyek két adott ponttól vett távolsága különbségének abszolútértéke a két pont távolságánál kisebb állandó.

A tér pontjain mint alaphalmazon értelmezhetjük a következő ponthalmazokat:

- A **gömbfelület** a térben egy adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza.
- A **gömbtest** a térben egy adott ponttól egy megadottnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmaza.

- A **szakaszfelező merőleges a térben** egy szakasz két végpontjától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza (amely egy sík).

A ponthalmazokat derékszögű koordináta-rendszerben is ábrázolhatjuk, ekkor az egyes geometriai ponthalmazok leírhatók az elemeik koordinátái közötti összefüggésekkel (egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel). Erről bővebben a Koordinátageometria fejezetben olvashatunk (egyenes, kör és parabola egyenlete).

II. Kidolgozott feladatok

1. Tekintsük a $H=\{x \mid 1\le x\le 18,\ x\in\mathbb{Z}\}$ alaphalmazon a következő három halmazt:

$A=\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12\}$

$B=\{b\in\mathbb{Z} \mid b=2k;\ 4\le k<10;\ k\in\mathbb{Z}\}$

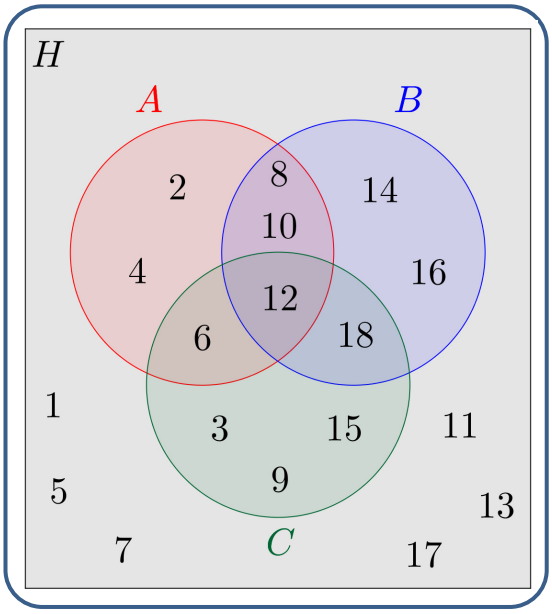
$C=$ {a 20-nál kisebb, 3-mal osztható pozitív egész számok}

Soroljuk fel a következő halmazok elemeit:

a) $C\setminus B$ **b)** $A\cap(B\cup C)$ **c)** $\overline{C}\cap\overline{B}$

d) $B\setminus(A\setminus C)$ **e)** $C\Delta(A\cap B)$ **f)** $(\overline{A\cup C})\cap B$

Megoldás: Először felsoroljuk a B és a C halmazok elemeit is: $B=\{8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18\}$, illetve $C=\{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15;\ 18\}$. A halmazokat és elemeiket célszerű a következőképpen, úgynevezett Venn-diagramon ábrázolni:



A kérdéses halmazok elemeit leolvashatjuk az ábráról, vagy megadhatjuk az A, B, C halmazok elemeinek egyenkénti ellenőrzésével felsorolva is:

a) $C\setminus B=\{3;\ 6;\ 9;\ 15\}$.

b) $A\cap(B\cup C)=\{6;\ 8;\ 10;\ 12\}$.

c) $\overline{C} \cap \overline{B} = \overline{C \cup B} = \{1; 2; 4; 5; 7; 11; 13; 17\}$.

d) $A \setminus C = \{2; 4; 8; 10\}$, így $B \setminus (A \setminus C) = \{12; 14; 16; 18\}$.

e) $A \cap B = \{8; 10; 12\}$, így $C \Delta (A \cap B) = \{3; 6; 8; 9; 10; 15; 18\}$.

f) $(\overline{A \cup C}) \cap B = \{14; 16\}$.

2. Adottak az R, S és T halmazok. Írjuk fel halmazműveleti jelek segítségével azon elemek halmazát, amelyek

a) elemei R-nek vagy S-nek, de nem elemei S-nek is és T-nek is;

b) a három halmaz közül pontosan kettőnek elemei;

c) a három halmaz közül legalább egynek elemei, de ha elemei T-nek, akkor nem elemei R-nek!

Megoldás:

a) Az $R \cup S$ halmaz azon elemeit kell megadnunk, amelyek nem elemei $S \cap T$-nek. Így a keresett halmaz $(R \cup S) \setminus (S \cap T)$.

b) Az $R \cap S$, $R \cap T$ és $S \cap T$ halmazok azon elemeit kell megadnunk, amelyek nem elemei $R \cap S \cap T$-nek. Így a keresett halmaz $((R \cap S) \cup (R \cap T) \cup (S \cap T)) \setminus (R \cap S \cap T)$.

c) Az $R \cup S \cup T$ halmaz azon elemeit kell megadnunk, amelyek nem elemei $T \cap R$-nek. Így a keresett halmaz $(R \cup S \cup T) \setminus (T \cap R)$.

3. Soroljuk fel a következő halmazok összes részhalmazát!

a) $[-4; 3[\cap \mathbb{N}$ **b)** $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \Delta \mathbb{N}$ **c)** $\{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}\} \setminus \mathbb{Q}^*$

Megoldás:

a) $[-4; 3[\cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2\}$, ennek a 3-elemű halmaznak 8 részhalmaza van: $\{\ \}$; $\{0\}$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{0; 1\}$; $\{0; 2\}$; $\{1; 2\}$; $\{0; 1; 2\}$.

b) Mivel $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = \mathbb{N}$ és tetszőleges A halmazra $A \Delta A = \varnothing$, ezért a megadott halmaz az üres halmaz, amelynek 1 részhalmaza van: $\{\ \}$.

c) $\{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}\} \setminus \mathbb{Q}^* = \{\sqrt{1}; \sqrt{4}\} = \{1; 2\}$, hiszen $\sqrt{n}$ pontosan akkor irracionális, ha n nem négyzetszám. Ennek a 2-elemű halmaznak 4 részhalmaza van: $\{\ \}$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{1; 2\}$.

4. Írjuk fel a következő intervallumokat rövidebben!

a) $[-3{,}5; 0] \cup]-1; 2{,}5[$ **b)** $[-5; 7] \cap]4; 8]$ **c)** $]2; 10[\setminus]-3; 5]$

Megoldás:

a) Mivel a két intervallum metszi egymást, ezért uniójuk egyetlen intervallum lesz, amely a következő: $[-3{,}5;\,0]\cup]-1;\,2{,}5[=[-3{,}5;\,2{,}5[$.

b) Mivel a két intervallum metszi egymást, ezért metszetük is egy intervallum lesz, amely a következő: $[-5;\,7]\cap]4;\,8]=]4;\,7]$.

c) Mivel $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$, ezért a $]2;\,10[$ intervallumból a $]2;\,10[\cap]-3;\,5]=]2;\,5]$ intervallumot kell kivennünk, így a megoldás: $]2;\,10[\ \setminus\ ]-3;\,5]=]2;\,10[\ \setminus\ ]2;\,5]=]5;\,10[$.

5. Hány eleműek az A, B és C halmazok, ha $|A\cup B\cup C|=10$, $|A\cup B|=8$, $|A\setminus B|=3$, $|A\cap B|=3$, $|A\cap B\cap C|=2$, $|A\cap C|=3$ és $|B\setminus C|=2$?

Megoldás: Az elemszámok meghatározásakor „belülről kifelé”, vagyis $A\cap B\cap C$-től kezdve érdemes haladnunk, hiszen például $A\cap B$ tartalmazza $A\cap B\cap C$-t is, így ez utóbbit a csak A-ba és B-be tartozó elemek számának meghatározásakor már nem kell figyelembe vennünk.

Mivel $|A\cap B\cap C|=2$ és $|A\cap B|=3$, ezért $|(A\cap B)\setminus C|=3-2=1$.

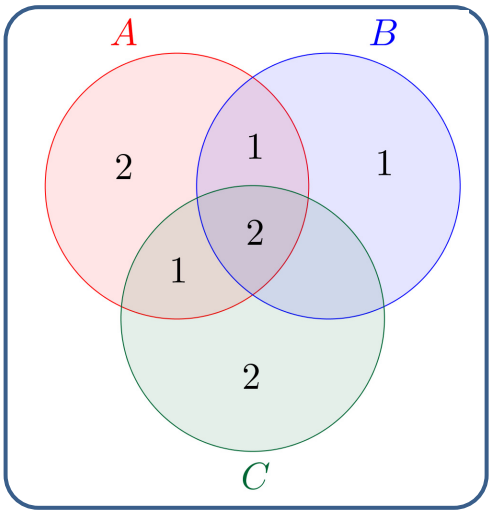
Mivel $|A\cap B\cap C|=2$ és $|A\cap C|=3$, ezért $|(A\cap C)\setminus B|=3-2=1$.

Mivel $|A\setminus B|=3$ és $|(A\cap C)\setminus B|=|(A\setminus B)\cap C|=1$, ezért $|A\setminus(B\cup C)|=3-1=2$.

Mivel $|A\cup B\cup C|=10$ és $|A\cup B|=8$, ezért $|C\setminus(A\cup B)|=10-8=2$.

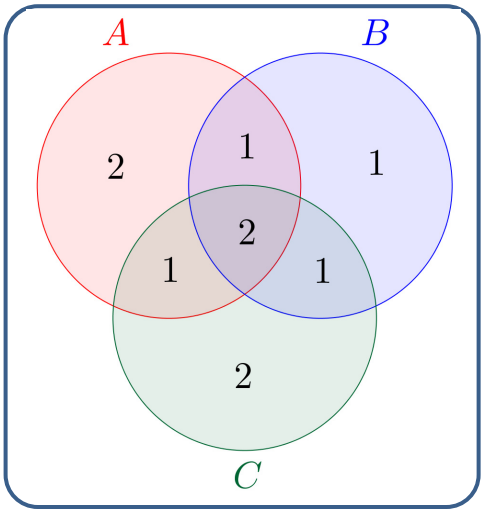
Mivel $|B\setminus C|=2$ és $|(A\cap B)\setminus C|=|(B\setminus C)\cap A|=1$, ezért $|B\setminus(A\cup C)|=2-1=1$.

Az eddigiek alapján elkészíthetjük a következő Venn-diagramot. A halmazábra most nem a halmazok elemeit jelzi, hanem a megfelelő részhalmazokban lévő elemek számát:



Hátra van még $|(B\cap C)\setminus A|$ meghatározása. Mivel $|A\cup B|=8$, továbbá az ábráról leolvasható,

hogy $A \cup B$-ben a $(B \cap C) \setminus A$ részhalmazt leszámítva idáig összesen $2+1+1+1+2=7$ elem szerepel, így $|(B \cap C) \setminus A| = 8-7=1$, tehát a teljes halmazábra a következő:



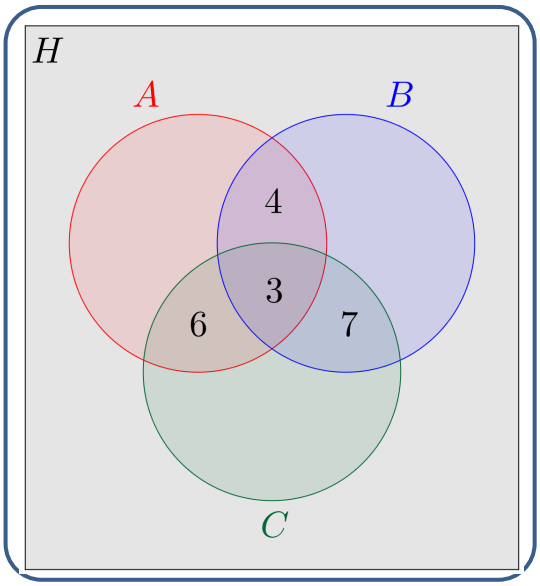
Az A, B és C halmazok elemszámát az ábráról olvashatjuk le:

$$|A| = 2+1+1+2=6\,,\ |B| = 1+1+2+1=5 \text{ és } |C| = 1+2+1+2=6\,.$$

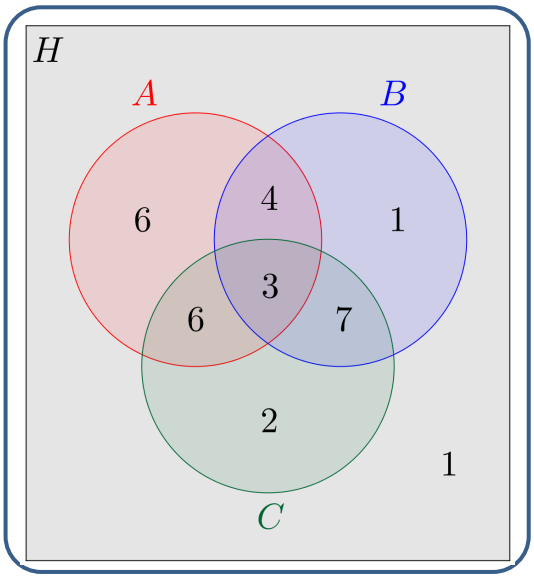
6. Egy matematikaversenyen 3 feladatot tűztek ki. A 30 induló közül az első feladatot 19-en, a másodikat 15-en, a harmadikat 18-an oldották meg hibátlanul. Az első és második feladatra 7, a második és harmadik feladatra 10, az első és harmadik feladatra 9 tanuló adott helyes megoldást. Mindhárom feladat megoldása 3 diáknak sikerült. Hányan nem tudtak egyetlen feladatot sem megoldani?

I. Megoldás: Készítsünk halmazábrát! A H alaphalmaz legyen az induló versenyzők halmaza. Az A halmazba kerüljenek az első feladatot, a B-be a második feladatot, a C-be a harmadik feladatot hibátlanul megoldók. A Venn-diagramot az előző feladathoz hasonlóan, belülről kifelé töltjük ki, az ábrán most is az egyes részhalmazok elemszámait tüntetjük fel.

Tudjuk, hogy $|A \cap B \cap C| = 3$. Ekkor $|(A \cap B) \setminus C| = 7-3=4$, $|(B \cap C) \setminus A| = 10-3=7$, illetve $|(A \cap C) \setminus B| = 9-3=6$. Idáig a halmazábra a következőképpen néz ki:



A feladat szövege és az ábráról leolvasott értékek alapján $|A\setminus(B\cup C)|=19-(4+3+6)=6$, $|B\setminus(A\cup C)|=15-(4+3+7)=1$, illetve $|C\setminus(A\cup B)|=18-(6+3+7)=2$.

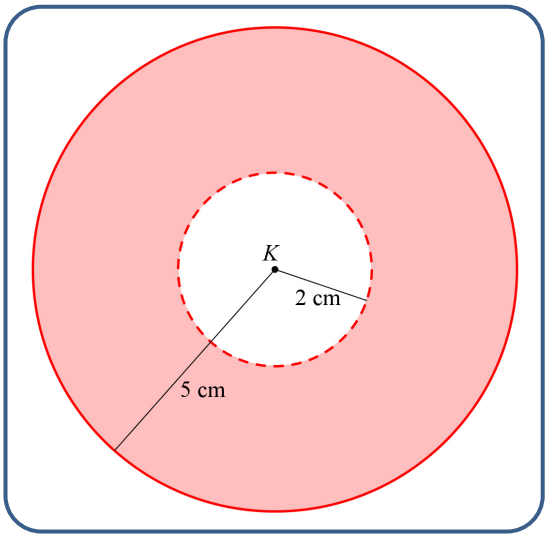


Az ábra alapján $|A\cup B\cup C|=6+4+1+6+3+7+2=29$, így összesen $30-29=1$ induló nem tudott egyetlen feladatot sem megoldani a versenyen.

II. Megoldás: A szita-formulát alkalmazzuk: $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-$ $-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=19+15+18-7-9-10+3=29$. Így $|H\setminus(A\cup B\cup C)|=30-29=1$, tehát 1 olyan versenyző volt, aki egyetlen feladatot sem tudott megoldani.

7. Adott az S síkban a K pont. Ábrázoljuk az S sík azon pontjainak halmazát, amelyeknek K-tól való távolsága nagyobb 2 cm-nél, de nem nagyobb 5 cm-nél!

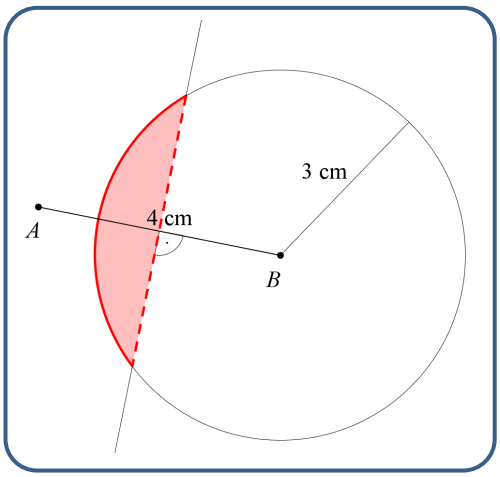
Megoldás: A keresett pontok egy K középpontú körgyűrű pontjai, amelynek belső sugara 2 cm, külső sugara 5 cm. A 2 cm sugarú határoló körvonal nem része a halmaznak, az 5 cm sugarú határoló körvonal viszont igen. Tehát a keresett ponthalmaz a következőképpen ábrázolható:



Megjegyzés: Ponthalmazok esetében, ha a határvonal beletartozik a halmazba, akkor azt vastagítással jelezzük, míg ha a határvonal nem része a halmaznak, akkor szaggatott vonallal jelöljük.

8. Vegyünk fel az S síkban egy 4 cm hosszú AB szakaszt. Ábrázoljuk az S sík azon pontjainak halmazát, amelyek közelebb vannak A-hoz, mint B-hez, valamint B-től való távolságuk nem nagyobb 3 cm-nél!

Megoldás: A keresett pontok az AB szakaszfelező merőlegese által határolt, A-t tartalmazó nyílt (a határvonala nélküli) félsík és a B középpontú, 5 cm sugarú zárt (a határvonalát tartalmazó) körlap metszetének pontjai. Tehát a keresett ponthalmaz a következőképpen ábrázolható:

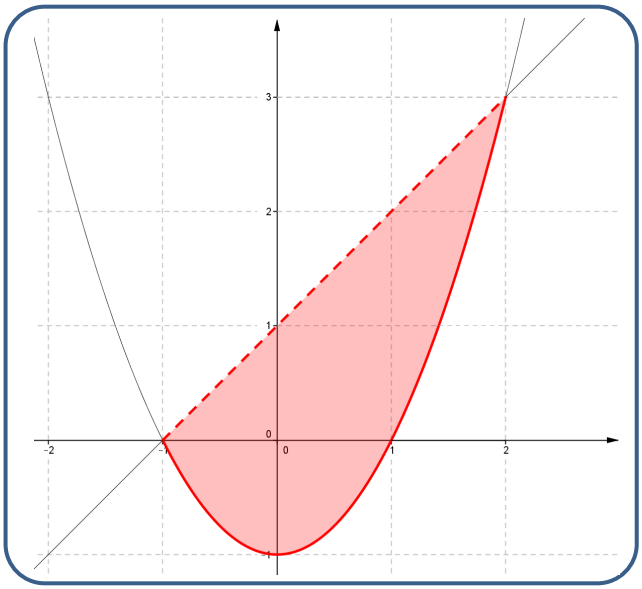


9. Ábrázoljuk a koordinátasík azon $P(x; y)$ ponthalmazait, amelyek koordinátáira teljesülnek a következők:

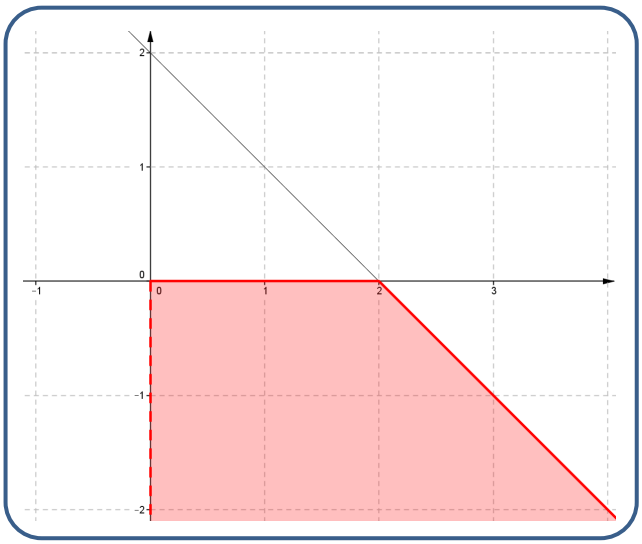
a) $y \geq x^2 - 1$ és $y < x + 1$ **b)** $x \leq 2 - y$, $y \leq 0$ és $x > 0$

Megoldás:

a) A keresett pontok koordinátáinak két feltételt kell teljesítenie: egyrészt a pontok az $y = x^2 - 1$ egyenletű parabolaív fölött helyezkednek el (a parabolaív pontjait is megengedve), másrészt a pontok az $y = x + 1$ egyenletű egyenes alatt helyezkednek el (az egyenes pontjait meg nem engedve). Így a keresett ponthalmaz a következő:



b) Az $x \le 2-y$ feltételt érdemes y-ra átrendeznünk, így $y \le 2-x$ alakban vizsgálnunk. A keresett pontok koordinátáinak három feltételt kell teljesítenie: egyrészt a pontok az $y=2-x$ egyenletű egyenes alatt helyezkednek el (az egyenes pontjait is megengedve), másrészt a pontok y koordinátája nempozitív, harmadrészt a pontok x koordinátája pozitív. Az utóbbi két feltétel együttesen azt jelenti, hogy a keresett pontok a IV. síknegyedben helyezkednek el, a határoló félegyenesek közül az x-tengely pozitív félegyenesét (illetve az $y \le 2-x$ feltétel miatt csak egy szakaszát) megengedve, de az y tengely negatív félegyenesét és az origót meg nem engedve. Így a keresett ponthalmaz a következő:



10. Hány olyan 3000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelyik nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel?

Megoldás: A megoldásban a szita-módszert célszerű alkalmaznunk (így elkerülhetjük, hogy bizonyos számokat a szükségesnél többször számoljunk meg).

Legyen a H alaphalmaz az 1-től 3000-ig terjedő egész számok halmaza. Ennek A részhalmaza legyen a 2-vel, B részhalmaza a 3-mal, C részhalmaza pedig az 5-tel osztható számok halmaza. A Venn-diagram elkészítése helyett közvetlenül a szita-formulát fogjuk felhasználni.

Mivel 1-től 3000-ig minden második szám osztható 2-vel, így $|A| = 3000:2 = 1500$. Ugyanígy H-nak minden harmadik eleme osztható 3-mal, így $|B| = 3000:3 = 1000$. Végül H minden ötödik eleme osztható 5-tel, így $|C| = 3000:5 = 600$.

Tudjuk, hogy $A \cap B$ azokat az elemeket tartalmazza, amelyek oszthatók 2-vel és 3-mal is, vagyis oszthatók 6-tal. Ezek száma az előző gondolatmenethez hasonlóan $|A \cap B| = 3000:6 = 500$. Ugyanígy a 2-vel és 5-tel is (azaz a 10-zel) osztható elemek száma $|A \cap C| = 3000:10 = 300$, míg a 3-mal és 5-tel is (azaz a 15-tel) osztható elemek száma $|B \cap C| = 3000:15 = 200$. Végül a 2-vel, 3-mal és 5-tel is osztható, vagyis a 30-cal osztható elemek száma $|A \cap B \cap C| = 3000:30 = 100$.

Így $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 1500 + 1000 + 600 - 500 - 300 - 200 + 100 = 2200$. Tehát 2200 olyan eleme van H-nak, amely osztható a 2, 3 és 5

számok legalább egyikével. Mivel $|H| = 3000$, így $|H \setminus (A \cup B \cup C)| = 3000 - 2200 = 800$. Tehát összesen 800 olyan egész szám van 1 és 3000 között, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel.

Megjegyzés: A szita-formula alkalmazása olyankor célszerű, amikor az egyes halmazok metszeteinek elemszáma könnyen meghatározható (lásd a fenti példát). Ha a metszetek elemszámai ilyen formában nem (vagy nem mind) ismertek (hanem például $|(A \cap B) \setminus C|$ és ehhez hasonló elemszámok adottak), akkor a Venn-diagram elkészítése célszerű.

III. Ajánlott feladatok

1. Egy zenei osztályban kétszer annyi diák tanul zongorázni, mint ahány hegedül. Öten mindkét hangszeren játszanak. Hányan zongoráznak és hányan hegedülnek ebben az osztályban, ha összesen 22 tanuló játszik a két hangszer valamelyikén?

2. Az erdei rókaiskolában három tantárgyból gyűjthetnek csirkecombot a kisrókák. Mind a három tantárgyból 12-12 kisróka kapott combot. A tyúkszámlálásból combot érdemlők közül hárman libalopásból is, ketten rókalyukásásból is szereztek combot. Négyen voltak, akik libalopásból és rókalyukásásból is kaptak csirkecombot. Mindhárom tárgyból csak egy kisróka kapott combot. Hány kisróka jár az iskolába, ha mindegyikük kapott csirkecombot legalább egy tárgyból?

3. Egy 30 fős osztályban a diákok három nyelvet tanulhatnak: angolt, németet vagy oroszt. Angolul 16-an, németül 18-an, oroszul 14-en tanulnak. Tudjuk, hogy mindenki tanul legalább egy nyelvet, és 16 tanuló pontosan két nyelvet tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

4. Egy sporttagozatos osztályban – ahol mindenki sportol – atletizálnak, birkóznak és cselgáncsoznak a tanulók. Négy olyan diák van, aki mindhárom sportot űzi. Akik pontosan két sportot űznek, 13-mal kevesebben vannak, mint azok, akik pontosan egy sportot űznek. Akik csak birkóznak, háromszor annyian vannak, mint akik csak atletizálnak, és harmadannyian vannak, mint akik csak cselgáncsoznak. Tudjuk, hogy az osztálylétszám 39 főnél több, de 45 főnél kevesebb. Hány fős lehet az osztály?

5. Legyen a négyszögek N alaphalmazán H a húrnégyszögek, D a deltoidok, T a trapézok halmaza. Határozzuk meg a $H \cap D \cap \overline{T}$ halmazt!

6. Mennyi a legkisebb és a legnagyobb érték, amit $|A \cup B \cup C|$ felvehet, ha $|A \cup B| = 8$, $|A \cup C| = 7$ és $|B \cup C| = 6$?

7. Adjunk meg három olyan halmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike:

1. bármely kettőnek van közös eleme;
2. a három halmaz metszete üres halmaz;
3. a halmazok elemszáma egyenlő;
4. a halmazok elemszáma a lehető legkisebb!

8. Adott három polinomfüggvény: $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$. Zérushelyeik halmaza rendre F, G és H. Fejezzük ki a megadott halmazokkal a következő egyenletek gyökeinek halmazát!

a) $f(x)\cdot g(x)=0$ **b)** $\dfrac{f(x)}{g(x)\cdot h(x)}=0$ **c)** $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=0$ **d)** $f^2(x)+g^2(x)=0$

9. Hányféleképpen adhatók meg az A és B halmazok, ha $A\cap B=\{1;\,2\}$ és $A\cup B=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5\}$?

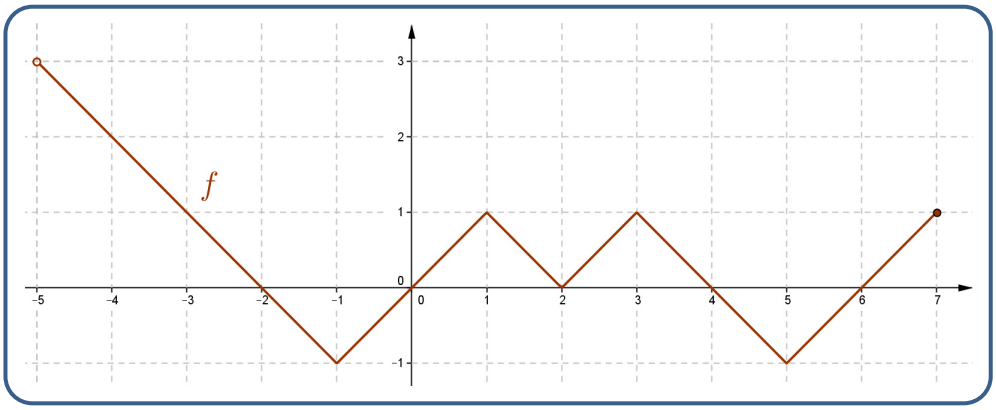
10. Adottak a következő intervallumok: $A=[-2;\,3[$, $B=\left[\sqrt{2};\sqrt{15}\right]$, $C=]3;\,10\pi[$ és $D=]-6;\,-1]$. Az alaphalmaz legyen a valós számok halmaza. Határozzuk meg a következő számhalmazokat!

a) $(A\cup C)\cap B$ **b)** $D\setminus(A\cap\mathbb{Q})$ **c)** $\overline{B}\Delta C$ **d)** $(D\cup B)\setminus C$

11. Legfeljebb hány részhalmazát választhatjuk ki egy n elemű halmaznak ($n>1$) úgy, hogy semelyik két kiválasztott részhalmaz ne legyen diszjunkt?

12. Adott az ábrán látható $f:]-5;\,7]\to\mathbb{R}$ függvény. Határozzuk meg a következő halmazokat:

$A=\{x\mid f(x)>0\}$ $B=\{x\mid f(x)=f(-x)\}$ $C=\{y\mid y=f(x)\}$



13. Adott az S síkban a 4 cm hosszú AB szakasz. Határozzuk meg az S sík azon pontjait, amelyek A-tól 3 cm-nél nagyobb távolságra, B-től pedig 2 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak!

14. Adott az S síkban az ABC háromszög, amelyre teljesül, hogy $AB=5$ cm, $BC=3$ cm és $AC=4$ cm. Határozzuk meg az S sík azon pontjait, amelyek közelebb vannak B-hez, mint C-hez, továbbá van az ABC háromszögnek legalább egy olyan csúcsa, amelytől legfeljebb 2 cm-re vannak!

15. Ábrázoljuk a koordinátasík azon $P(x;\,y)$ ponthalmazait, amelyek koordinátáira teljesülnek a következők:

a) $3y\geq x-2$ és $x^2<4$ **b)** $(x+2)\cdot(y-3)\leq 0$ **c)** $x^2<y+2$ és $x^2+y^2\leq 16$

d) $|x|+|y|=4$ **e)** $x^2+2x+y^2\leq 9$ **f)** $y<4-x^2$, $x^2\geq 1$ és $3+y>0$

16. Hány olyan legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 7-tel?

17. Hány olyan legfeljebb nyolcjegyű természetes szám van, amelyben az 5, 6, 7 számjegyek mindegyike legalább egyszer szerepel?

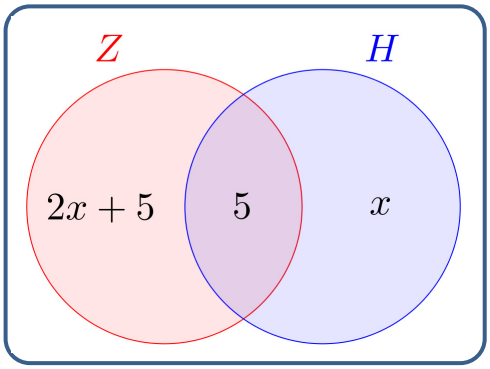
18. Hány olyan 12 hosszú karaktersorozat alkotható az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* és *f* betűkből, amelyben mindegyik betű kétszer szerepel, de nincs két azonos betű egymás mellett?

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Egy zenei osztályban kétszer annyi diák tanul zongorázni, mint ahány hegedül. Öten mindkét hangszeren játszanak. Hányan zongoráznak és hányan hegedülnek ebben az osztályban, ha összesen 22 tanuló játszik a két hangszer valamelyikén?

I. Megoldás: A mindkét hangszeren játszókat duplán számolva összesen $22+5=27$ zongora- vagy hegedűórára járnak a diákok. Mivel a zongorát tanulók száma duplája a hegedűt tanulókénak, ezért $27:3=9$-en hegedülnek és $2\cdot 9=18$-an zongoráznak ebben az osztályban.

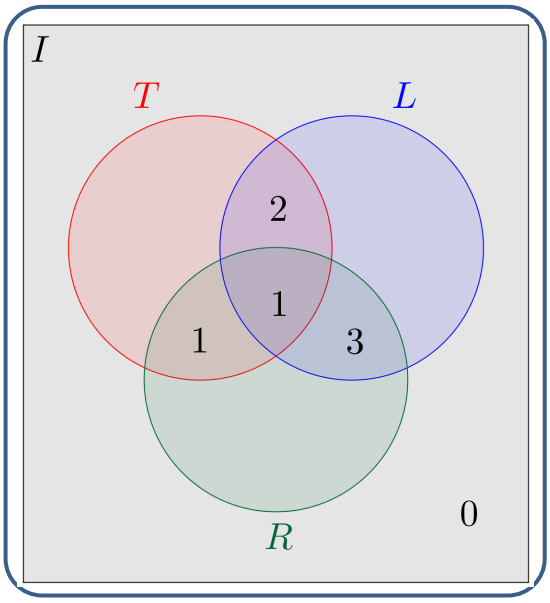
II. Megoldás: Jelölje a csak hegedülők számát x. Ekkor $x+5$-en hegedülnek, és kétszer ennyien, vagyis $2x+10$-en zongoráznak, tehát a csak zongorázók száma $2x+10-5=2x+5$. Mindezt a következő Venn-diagramon is ábrázolhatjuk (Z a zongorázók, H a hegedülők halmaza):



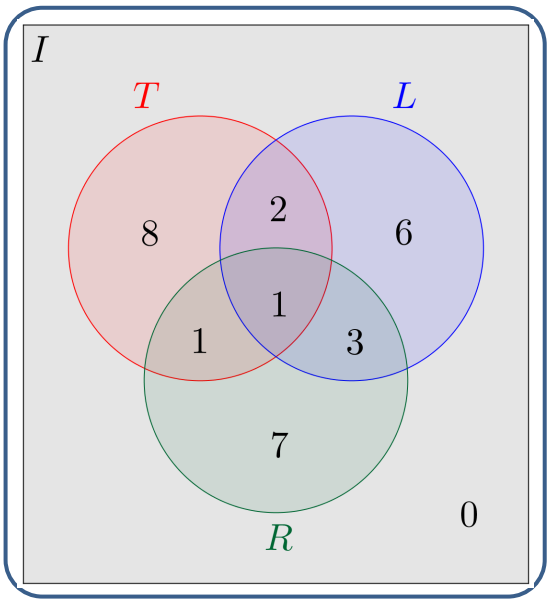
Az ábráról leolvasható, hogy a $Z\cup H$ halmaz elemszáma $2x+5+5+x=3x+10=22$. Innen $x=4$, vagyis $2x+5+5=18$-an zongoráznak, $5+x=9$-en hegedülnek az osztályban.

2. Az erdei rókaiskolában három tantárgyból gyűjthetnek csirkecombot a kisrókák. Mind a három tantárgyból 12-12 kisróka kapott combot. A tyúkszámlálásból combot érdemlők közül hárman libalopásból is, ketten rókalyukásásból is szereztek combot. Négyen voltak, akik libalopásból és rókalyukásásból is kaptak csirkecombot. Mindhárom tárgyból csak egy kisróka kapott combot. Hány kisróka jár az iskolába, ha mindegyikük kapott csirkecombot legalább egy tárgyból?

I. Megoldás: Legyen az alaphalmaz I, a három részhalmaz pedig a tantárgyak kezdőbetűi alapján T, L és R.. Tudjuk, hogy $|T\cap L\cap R|=1$, $|T\cap L|=3$, $|T\cap R|=2$ és $|L\cap R|=4$. Az eddigiek alapján a következő oldalon látható Venn-diagramot rajzolhatjuk fel.



Tudjuk még azt is, hogy $|T|=|L|=|R|=12$, így a kitöltés a következőképpen fejezhető be:



Az ábráról leolvasható, hogy összesen $8+2+6+1+1+3+7=28$ kisróka jár az iskolába.

II. Megoldás: A szita-formulával a Venn-diagram elkészítése nélkül is megkaphatjuk a végeredményt: $|T\cup L\cup R|=|T|+|L|+|R|-|T\cap L|-|T\cap R|-|L\cap R|+|T\cap L\cap R|=12+12+12-3-$ $-2-4+1=28$ kisróka jár az iskolába.

3. Egy 30 fős osztályban a diákok három nyelvet tanulhatnak: angolt, németet vagy oroszt. Angolul 16-an, németül 18-an, oroszul 14-en tanulnak. Tudjuk, hogy mindenki tanul legalább egy nyelvet, és 16 tanuló pontosan két nyelvet tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

Megoldás: Az egyes nyelveket tanulók halmazait A-val, N-nel és O-val jelölve felírható a szita-formula: $|A\cup N\cup O|=|A|+|N|+|O|-|A\cap N|-|A\cap O|-|N\cap O|+|A\cap N\cap O|$. Tudjuk, hogy $|A\cup N\cup O|=30$, $|A|=16$, $|N|=18$ és $|O|=14$. Legyen $|A\cap N\cap O|=x$. Ekkor az $A\cap N$, $A\cap O$ és $N\cap O$ halmazok elemszámait összeadva a pontosan két nyelvet tanulókat egyszer, a

mindhárom nyelvet tanulókat háromszor számoltuk meg: $|A\cap N|+|A\cap O|+|N\cap O|=16+3x$. Behelyettesítve a szita-formulába: $30=16+18+14-(16+3x)+x$. Innen $x=1$, tehát egy diák tanulja mindhárom nyelvet.

4. Egy sporttagozatos osztályban – ahol mindenki sportol – atletizálnak, birkóznak és cselgáncsoznak a tanulók. Négy olyan diák van, aki mindhárom sportot űzi. Akik pontosan két sportot űznek, 13-mal kevesebben vannak, mint azok, akik pontosan egy sportot űznek. Akik csak birkóznak, háromszor annyian vannak, mint akik csak atletizálnak, és harmadannyian vannak, mint akik csak cselgáncsoznak. Tudjuk, hogy az osztálylétszám 39 főnél több, de 45 főnél kevesebb. Hány fős lehet az osztály?

Megoldás: Jelölje a csak atletizálók létszámát x, ekkor a csak birkózók száma $3x$, a csak cselgáncsozók száma $9x$, így a pontosan egy sportot űzők száma $x+3x+9x=13x$. A pontosan két sportot űzők száma $13x-13$, a mindhárom sportot űzők száma 4, és mivel mindenki sportol az osztályban, így az osztálylétszám $13x+13x-13+4=26x-9$ fő. A $26x-9$ kifejezés csak $x=2$ esetén vesz fel 39-nél nagyobb és 45-nél kisebb értéket, ekkor $26x-9=43$. Tehát az osztály létszáma 43 fő.

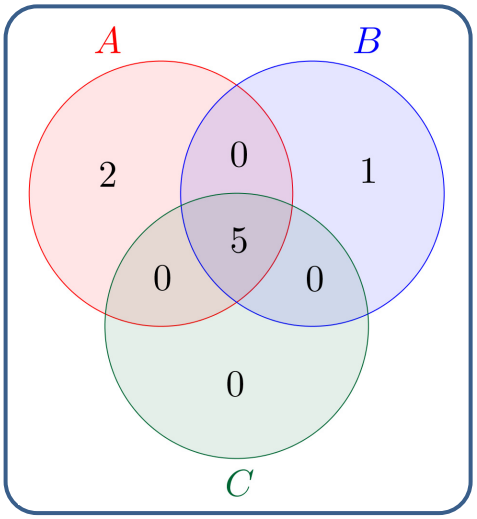
5. Legyen a négyszögek N alaphalmazán H a húrnégyszögek, D a deltoidok, T a trapézok halmaza. Határozzuk meg a $H\cap D\cap\overline{T}$ halmazt!

Megoldás: A keresett halmazba azon négyszögek tartoznak, amelyek húrnégyszögek és deltoidok is, de nem trapézok. Ezen négyszögek szemközti szögeinek összege 180°, továbbá van két szemközti szögük, amelyek egyenlők, így 90°-osak. Mivel ezek a négyszögek nem lehetnek trapézok, ezért a másik két szögük nem lehet 90°-os.

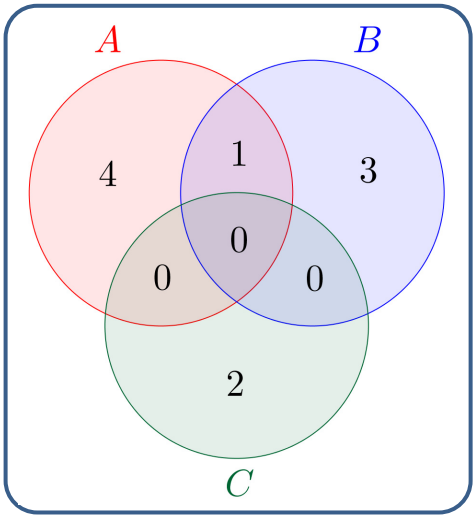
Tehát a $H\cap D\cap\overline{T}$ halmazba azon deltoidok tartoznak, amelyek nem négyzetek, és a két különböző hosszúságú oldaluk derékszöget zár be.

6. Mennyi a legkisebb és a legnagyobb érték, amit $|A\cup B\cup C|$ felvehet, ha $|A\cup B|=8$, $|A\cup C|=7$ és $|B\cup C|=6$?

Megoldás: Mivel már $A\cup B$-ben is 8 elem van, ezért biztos, hogy $|A\cup B\cup C|\geq 8$. A minimum valóban 8, egy lehetséges példa $|A\cup B\cup C|=8$-ra a következő:



A maximum eléréséhez jelöljük x-szel az A, B és C közül csak egy halmazba tartozó elemek számát, y-nal pedig a legalább két halmazba tartozókét. Ekkor $|A\cup B|+|A\cup C|+|B\cup C|=2x+3y$, ugyanis a csak egy halmazba tartozó elemeket két összeadandóban számoltuk meg (például a csak A-ba tartozókat $|A\cup B|$-ben és $|A\cup C|$-ben), míg a legalább két halmazba tartozókat mindhárom-ban (hiszen mindhárom összeadandóból csak olyan elemek hiányoznak, amelyek pontosan egy halmaznak elemei, pl. $|A\cup B|$ csak azokat az elemeket nem tartalmazza, amelyek csak C-nek elemei). Tudjuk tehát, hogy $2x+3y=8+7+6=21$, és keressük $|A\cup B\cup C|=x+y$ maximumát. Mivel $2x+3y$ értéke rögzített, továbbá $x+y$ ugyanakkor maximális, amikor $2x+2y$, ezért $(2x+3y)-(2x+2y)=y$ értékét kell minimalizálnunk. Mivel $2x+3y=21$ és $2x$ biztosan páros, ezért y értéke nem lehet 0, a lehetséges minimum $y=1$, ekkor $x=9$. Ez meg is valósítható, egy lehetséges példa $|A\cup B\cup C|=10$-re a következő:

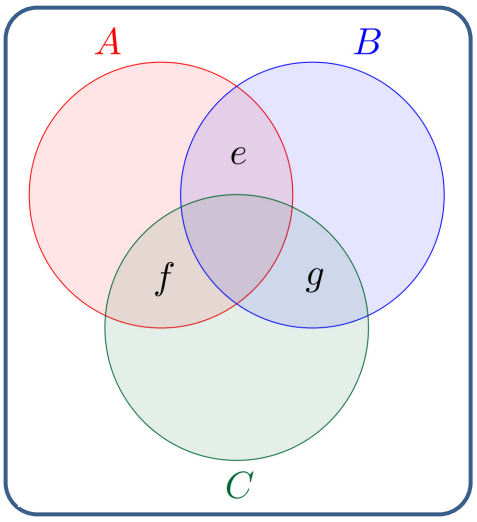


Tehát $|A\cup B\cup C|$ értékének lehetséges minimuma 8, maximuma 10.

7. Adjunk meg három olyan halmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike:

1. bármely kettőnek van közös eleme;
2. a három halmaz metszete üres halmaz;
3. a halmazok elemszáma egyenlő;
4. a halmazok elemszáma a lehető legkisebb!

Megoldás: Mivel semelyik két halmaz metszete nem üres, ezért a lehető legkisebb elemszámokat akkor kapjuk, ha nincs olyan elem, amelyik csak egy halmazba tartozik a három közül, vagyis minden elem pontosan két halmazba tartozik. Ekkor az elemszámok egyenlősége miatt bármely két halmaz metszetébe ugyanannyi elemnek kell tartoznia. Egy lehetséges megoldás a következő oldalon látható.



Vagyis például az $\{e; f\}$, $\{e; g\}$ és $\{f; g\}$ halmazok megfelelőek.

8. Adott három polinomfüggvény: $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$. Zérushelyeik halmaza rendre F, G és H. Fejezzük ki a megadott halmazokkal a következő egyenletek gyökeinek halmazát!

a) $f(x)\cdot g(x)=0$ **b)** $\dfrac{f(x)}{g(x)\cdot h(x)}=0$ **c)** $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=0$ **d)** $f^2(x)+g^2(x)=0$

Megoldás:

a) Mivel egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért a keresett halmaz $F\cup G$.

b) Mivel egy tört értéke akkor 0, ha a számlálója 0, de a nevezője nem lehet 0, ezért a keresett halmaz $F\setminus(G\cup H)$.

c) A keresett halmaz $F\cup G\cup H$.

d) Mivel egy kifejezés négyzete mindig nemnegatív, ezért két négyzetes kifejezés összege csak úgy lehet 0, ha külön-külön mindkettő értéke 0, tehát a keresett halmaz $F\cap G$.

9. Hányféleképpen adhatók meg az A és B halmazok, ha $A\cap B=\{1; 2\}$ és $A\cup B=\{1; 2; 3; 4; 5\}$?

Megoldás: Mivel $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\{3; 4; 5\}$, ezért a halmazok megadásakor a 3, 4, 5 elemekről egyesével szabadon eldönthetjük, hogy azok csak A-ba, illetve csak B-be tartozzanak-e. (Az 1, 2 elemek kötelezően a két halmaz metszetébe kerülnek.) Ez mind a három elem esetében 2-féle lehetőség, így összesen $2^3=8$-féleképpen adhatók meg az A és B halmazok.

10. Adottak a következő intervallumok: $A=[-2; 3[$, $B=\left[\sqrt{2};\sqrt{15}\right]$, $C=]3; 10\pi[$ és $D=]-6; -1]$. Az alaphalmaz legyen a valós számok halmaza. Határozzuk meg a következő számhalmazokat!

a) $(A\cup C)\cap B$ **b)** $D\setminus(A\cap\mathbb{Q})$ **c)** $\overline{B}\Delta C$ **d)** $(D\cup B)\setminus C$

Megoldás: Felhasználjuk, hogy $-6<-2<-1<\sqrt{2}<3<\sqrt{15}<10\pi$.

a) $(A\cup C)\cap B=([-2;\,3[\cup]3;\,10\pi[)\cap\left[\sqrt{2};\sqrt{15}\right]=([-2;\,10\pi[\setminus\{3\})\cap\left[\sqrt{2};\sqrt{15}\right]=\left[\sqrt{2};\,\sqrt{15}\right]\setminus\{3\}$.

b) $D\setminus(A\cap\mathbb{Q})=]-6;\,-1]\setminus([-2;\,3[\cap\mathbb{Q})=]-6;\,-2[\cup([-2;\,-1]\cap\mathbb{Q}^*)$.

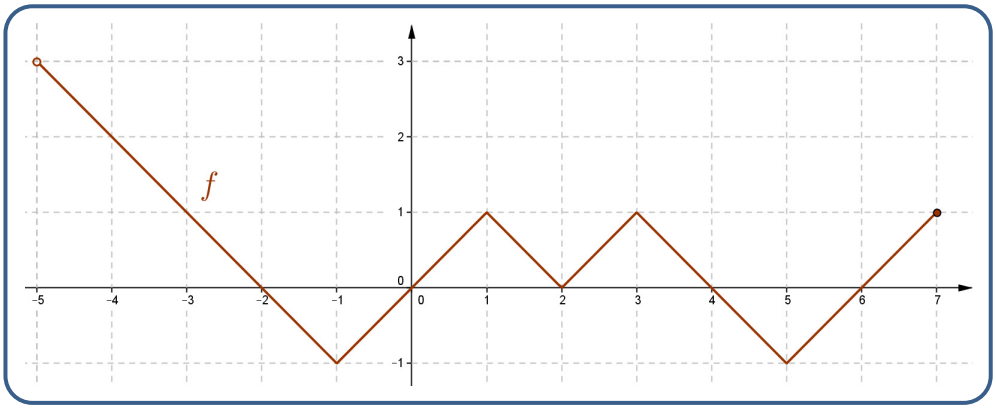
c) $\overline{B}\Delta C=\overline{B\Delta C}=\overline{\left(\left[\sqrt{2};\,3\right]\cup\left]\sqrt{15};\,10\pi\right[\right)}=]-\infty;\,\sqrt{2}[\cup]3;\,\sqrt{15}]\cup[10\pi;\,\infty[$.

11. Legfeljebb hány részhalmazát választhatjuk ki egy n elemű halmaznak ($n>1$) úgy, hogy semelyik két kiválasztott részhalmaz ne legyen diszjunkt?

Megoldás: Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van. Mivel tetszőleges részhalmaz és a komplementere diszjunkt halmazok, ezért ha az összes részhalmazt párba állítjuk a komplementerével, akkor minden ilyen párból legfeljebb az egyiket választhatjuk csak ki, tehát 2^{n-1}-nél több részhalmazt biztosan nem választhatunk. A 2^{n-1} részhalmaz viszont meg is valósítható, ha rögzítünk egy tetszőleges elemet, majd vesszük az n elemű halmaz összes olyan részhalmazát, amely tartalmazza ezt a rögzített elemet. Ezen részhalmazok száma megegyezik a maradék $n-1$ elem részhalmazainak számával, vagyis 2^{n-1}-gyel. Tehát legfeljebb 2^{n-1} részhalmaz választható ki a kívánt módon.

12. Adott az ábrán látható $f:]-5;\,7]\to\mathbb{R}$ függvény. Határozzuk meg a következő halmazokat:

$A=\{x\mid f(x)>0\}$ $\qquad$ $B=\{x\mid f(x)=f(-x)\}$ $\qquad$ $C=\{y\mid y=f(x)\}$



Megoldás:

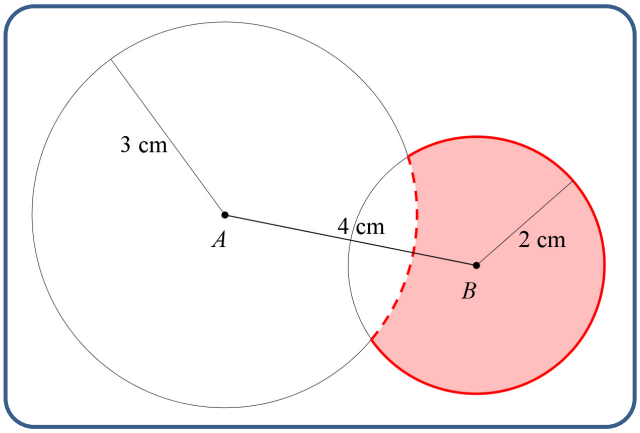
$A=]-5;\,-2[\cup]0;\,2[\cup]2;\,4[\cup]6;\,7]$.

$B=[-3;\,-2]\cup\{0\}\cup[2;\,3]$.

$C=[-1;\,3[$, amely egyben az f függvény értékkészlete is.

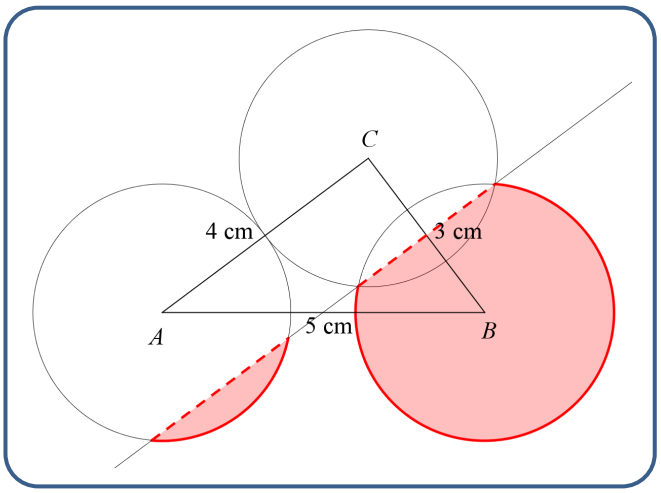
13. Adott az S síkban a 4 cm hosszú AB szakasz. Határozzuk meg az S sík azon pontjait, amelyek A-tól 3 cm-nél nagyobb távolságra, B-től pedig 2 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak!

Megoldás: A keresett pontok az A középpontú, 3 cm sugarú zárt körlap (S síkra vonatkozó) komplementere és a B középpontú, 2 cm sugarú zárt körlap metszetének pontjai (lásd a következő oldalon):



14. Adott az S síkban az ABC háromszög, amelyre teljesül, hogy $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm és $AC = 4$ cm. Határozzuk meg az S sík azon pontjait, amelyek közelebb vannak B-hez, mint C-hez, továbbá van az ABC háromszögnek legalább egy olyan csúcsa, amelytől legfeljebb 2 cm-re vannak!

Megoldás: A keresett pontok a BC szakaszfelező merőlegese által határolt, B-t tartalmazó nyílt félsík, valamint az A, B és C csúcsok körül rajzolt 2 cm sugarú zárt körlapok metszetének pontjai:



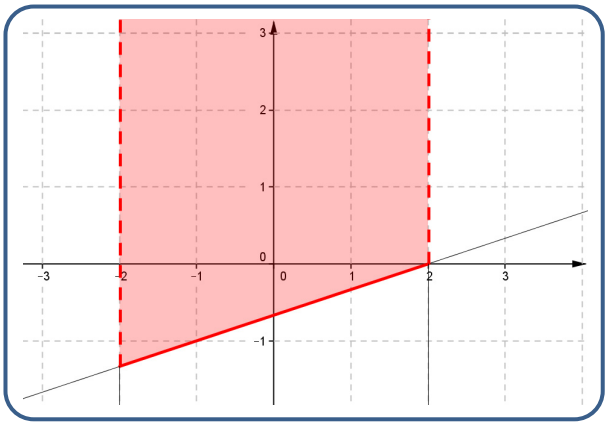
15. Ábrázoljuk a koordinátasík azon $P(x; y)$ ponthalmazait, amelyek koordinátáira teljesülnek a következők:

a) $3y \geq x-2$ és $x^2 < 4$ **b)** $(x+2)\cdot(y-3) \leq 0$ **c)** $x^2 < y+2$ és $x^2+y^2 \leq 16$

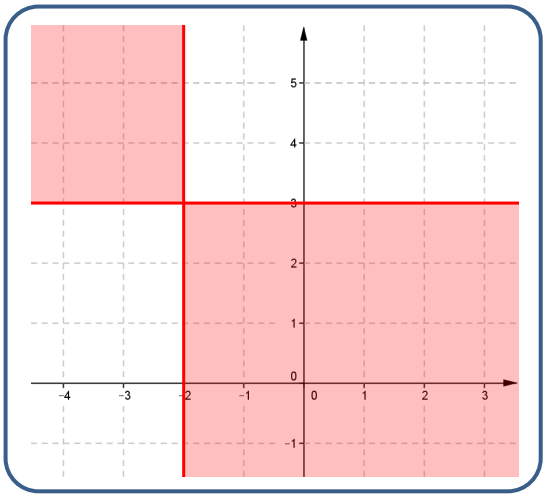
d) $|x|+|y|=4$ **e)** $x^2+2x+y^2 \leq 9$ **f)** $y < 4-x^2$, $x^2 \geq 1$ és $3+y>0$

Megoldás:

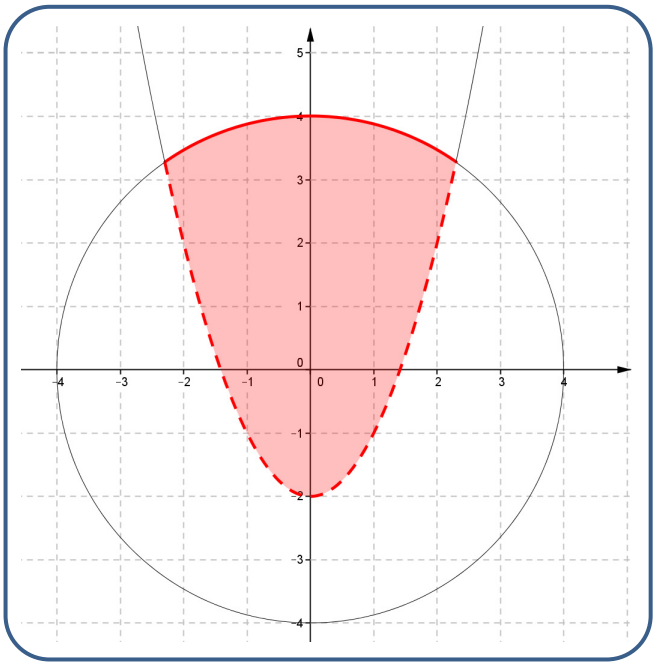
a) A keresett pontok az $y = \dfrac{x-2}{3}$ egyenes fölötti zárt félsík és a $-2 < x < 2$ nyílt sáv metszetének pontjai (lásd a következő oldalon):



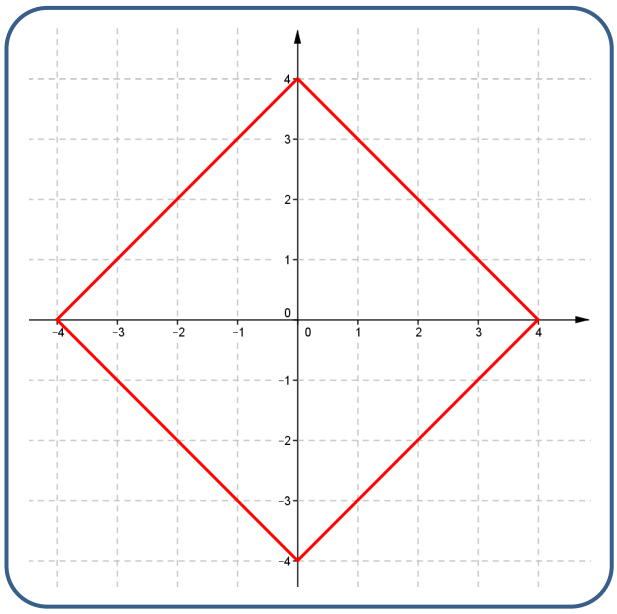
b) A keresett pontok az $x=-2$ és $y=3$ egyenesek által határolt négy zárt negyedsík közül annak a kettőnek a pontjai, amelyekben $x+2$ és $y-3$ előjele különböző (ekkor lesz szorzatuk negatív), a határoló egyenesek pontjait is megengedve (ekkor lesz a szorzat 0):



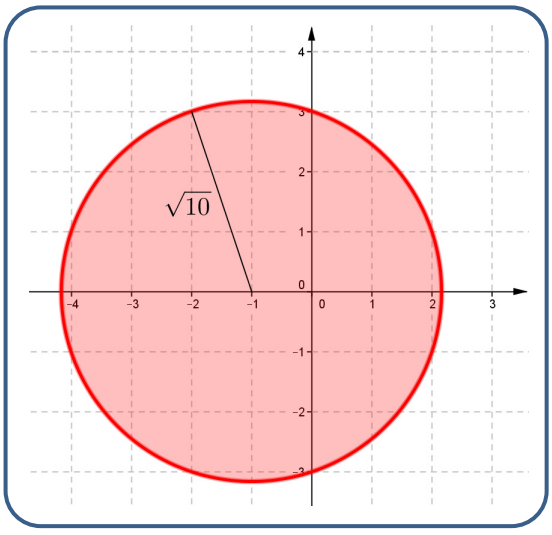
c) A keresett pontok az $y=x^2-2$ parabola fölötti nyílt síkrész és az origó középpontú, 4 egység sugarú zárt körlap metszetének pontjai:



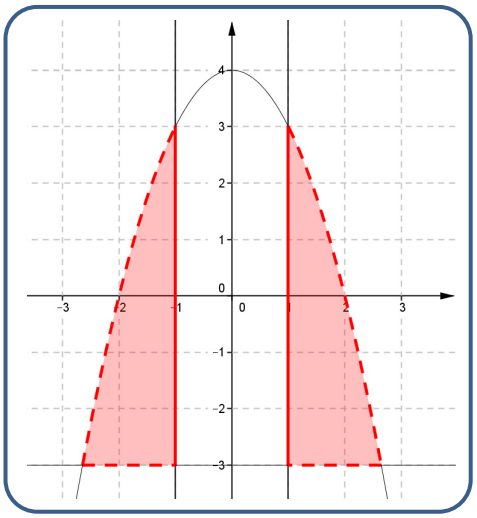
d) A megoldást megkaphatjuk például y előjele szerinti esetszétválasztással: ha $y<0$, akkor a feltételből $y=|x|-4$, ha pedig $y\geq 0$, akkor $y=4-|x|$. A keresett pontok az $y=\pm x\pm 4$ egyenletű egyenesek által határolt, origó középpontú négyzet oldalainak pontjai:



e) Az $(x+1)^2+y^2\leq 10$ átalakítás alapján a keresett pontok a $(-1;\,0)$ középpontú, $\sqrt{10}$ sugarú zárt körlap pontjai:



f) A keresett pontok az $y=-x^2+4$ parabola alatti nyílt síkrész, az $x\leq -1$ és $x\geq 1$ zárt félsíkok uniója, valamint az $y=-3$ egyenes fölötti nyílt félsík metszetének pontjai (lásd a következő oldalon):



16. Hány olyan legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 7-tel?

Megoldás: Legyen a H alaphalmaz a legfeljebb háromjegyű pozitív egész számok halmaza, ekkor $|H| = 999$. Ezen belül jelölje az A halmaz a 2-vel osztható, a B halmaz a 3-mal osztható, a C halmaz pedig a 7-tel osztható számok halmazát. A feladatunk $|H \setminus (A \cup B \cup C)|$ meghatározása. Ehhez a szita-formulát fogjuk alkalmazni.

Mivel $999 : 2 = 499{,}5$, és az 500-adik pozitív páros szám az 1000, amely már nem tartozik A-ba, ezért $|A| = 499$. Mivel $999 : 3 = 333$, ezért $|B| = 333$. Továbbá $999 : 7 \approx 142{,}7$, és a 143-adik pozitív 7-tel osztható szám a $143 \cdot 7 = 1001$, amely már nem tartozik C-be, ezért $|C| = 142$. (Ez utóbbit úgy is indokolhatjuk, hogy a H halmaz elemei 1-ről indulnak, és minden 7. eleme osztható 7-tel, ezért az osztás eredményét lefelé kell kerekítenünk ahhoz, hogy megkapjuk a keresett elemszámot.)

Hátra van még a metszetek elemszámának meghatározása. $A \cap B$-be a 6-tal osztható számok tartoznak, továbbá $999 : 6 = 166{,}5$, ezért $|A \cap B| = 166$. $A \cap C$-be a 14-gyel osztható számok tartoznak, továbbá $999 : 14 \approx 71{,}4$, ezért $|A \cap C| = 71$. $B \cap C$-be a 21-gyel osztható számok tartoznak, továbbá $999 : 21 \approx 47{,}6$, ezért $|B \cap C| = 47$. $A \cap B \cap C$-be a 42-vel osztható számok tartoznak, továbbá $999 : 42 \approx 23{,}8$, ezért $|A \cap B \cap C| = 23$.

A szita-formula alapján $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
$= 499 + 333 + 142 - 166 - 71 - 47 + 23 = 713$, így $|H \setminus (A \cup B \cup C)| = 999 - 713 = 286$. Tehát a keresett számok száma 286.

Megjegyzés: Ha a H alaphalmaz elemei nem 1-gyel kezdődtek volna, hanem mondjuk 7-től 1005-ig terjedtek volna, akkor például a $999 : 7 \approx 142{,}7$ osztás eredményét felfelé kellett volna kerekítenünk, hiszen a 7, 8, …, 1005 számok között 143 darab 7-tel osztható van.

17. Hány olyan legfeljebb nyolcjegyű természetes szám van, amelyben az 5, 6, 7 számjegyek mindegyike legalább egyszer szerepel?

Megoldás: Legyen a H alaphalmaz a legfeljebb nyolcjegyű természetes számok halmaza. Ezen belül jelölje A azoknak a számoknak a halmazát, amelyekben nincsen 5-ös számjegy; B azokét, amelyekben nincs 6-os számjegy; végül C azokét, amelyekben nincs 7-es számjegy. A feladatunk $\left|H \setminus (A \cup B \cup C)\right|$ meghatározása, ezt szita-formulával fogjuk megoldani.

Tudjuk, hogy $|H| = 10^8$, hiszen ha a szám elején álló 0-kat is kiírjuk, akkor mind a 8 helyiértékre 10-féle számjegyből választhatunk. Az A halmaz elemei nem tartalmaznak 5-ös számjegyet, így itt mind a 8 helyiértékre csak 9-féle számjegyből választhatunk, tehát $|A| = 9^8$. Hasonlóképpen $|B| = 9^8$ és $|C| = 9^8$.

Az $A \cap B$ halmaz elemei nem tartalmaznak 5-ös és 6-os számjegyet, így $|A \cap B| = 8^8$, hasonlóképpen $|A \cap C| = 8^8$ és $|B \cap C| = 8^8$. Végül $|A \cap B \cap C| = 7^8$.

A szita-formula alapján $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
$= 3 \cdot 9^8 - 3 \cdot 8^8 + 7^8$, így $\left|H \setminus (A \cup B \cup C)\right| = 10^8 - 3 \cdot 9^8 + 3 \cdot 8^8 - 7^8 = 15426684$.

Tehát 15426684 olyan legfeljebb 8-jegyű szám van, amelyben az 5, 6, 7 számjegyek mindegyike legalább egyszer szerepel.

Megjegyzés: A szita-formulát ehhez a feladathoz hasonlóan gyakran a következő alakban is használjuk: $\left|H \setminus (A \cup B \cup C)\right| = |H| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$.

Megjegyzés: Ugyanezt az eredményt kapnánk akkor is, ha a természetes számok helyett a legfeljebb nyolcjegyű pozitív egészek halmazán kellene megoldani a feladatot, azonban a fenti módon – ha a 0-t is bevesszük H-ba – egyszerűbb a számolás.

18. Hány olyan 12 hosszú karaktersorozat alkotható az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* és *f* betűkből, amelyben mindegyik betű kétszer szerepel, de nincs két azonos betű egymás mellett?

Megoldás: A feladatot szita-formulával fogjuk megoldani. Legyen a H alaphalmaz az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* és *f* betűk mindegyikének kétszeri felhasználásával alkotható 12 hosszú karaktersorozatok halmaza. Ezen belül jelölje A azoknak a karaktersorozatoknak a halmazát, amelyekben a két *a* betű egymás mellett áll. Hasonlóképpen jelölje B, C, D, E, illetve F rendre azoknak a karaktersorozatoknak a halmazát, amelyekben a két *b*, *c*, *d*, *e*, illetve *f* betű egymás mellett áll. A feladatunk $\left|H \setminus (A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F)\right|$ meghatározása. Ehhez a szita-formulát fogjuk általánosítani 6 halmazra.

Az ismétléses permutáció képlete alapján $|H| = \frac{12!}{2^6}$.

Az A halmaz elemszámának meghatározásához a két szomszédos *a* betűt egynek tekinthetjük, így $|A| = \frac{11!}{2^5}$. Hasonlóképpen a B, C, D, E, illetve F halmazok elemszáma is ugyanennyi.

Ha két halmaz metszetének elemszámát, például $|A \cap B|$-t akarjuk meghatározni, akkor a két-két megfelelő szomszédos azonos betűt (például a két *a*-t és a két *b*-t) kell egynek tekintenünk, ezek

alapján $|A \cap B| = \frac{10!}{2^4}$. Ugyanennyi lesz bármely két halmaz metszetének elemszáma; a két halmazt összesen $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk ki.

Három halmazt $\binom{6}{3}$-féleképpen választhatunk ki, a metszetük elemszáma $\frac{9!}{2^3}$.

Négy halmazt $\binom{6}{4}$-féleképpen választhatunk ki, a metszetük elemszáma $\frac{8!}{2^2}$.

Öt halmazt $\binom{6}{5}$-féleképpen választhatunk ki, a metszetük elemszáma $\frac{7!}{2}$.

Végül a hat halmaz közös metszetét $\binom{6}{6} = 1$-féleképpen választhatjuk ki, elemszáma $\frac{6!}{1} = 6!$.

Jelölje minden $i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ esetén H_i a 6 halmazból az összes lehetséges módon kiválasztható i darab halmaz metszetei elemszámának összegét. Ekkor az eddigiek alapján például $H_1 = 6 \cdot \frac{11!}{2^5}$, $H_2 = \binom{6}{2} \cdot \frac{10!}{2^4}$, és így tovább, általában $H_i = \binom{6}{i} \cdot \frac{(12-i)!}{2^{6-i}}$. (Ha az $i = 0$ lehetőséget is megengednénk, akkor a $H_0 = |H|$ összefüggést kapnánk.)

Az általánosított szita-formula ezekkel a jelölésekkel a következőképpen írható fel:

$$|H \setminus (A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F)| = |H| - H_1 + H_2 - H_3 + H_4 - H_5 + H_6 .$$

A konkrét számokat behelyettesítve a kifejezés értéke:

$$\frac{12!}{2^6} - 6 \cdot \frac{11!}{2^5} + \binom{6}{2} \cdot \frac{10!}{2^4} - \binom{6}{3} \cdot \frac{9!}{2^3} + \binom{6}{4} \cdot \frac{8!}{2^2} - \binom{6}{5} \cdot \frac{7!}{2} + \binom{6}{6} \cdot 6! = 2631600 .$$

Tehát a keresett karaktersorozatok száma 2631600.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Egy harmincfős osztály három tagja sem matematika, sem számítástechnika szakkörre nem jár. Matematika szakkörre kétszer annyian járnak, mint számítástechnikára. Az utóbbi szakkörösök háromnegyed része mindkét szakkörre jár. Hány tagja van az egyes szakköröknek?

2. Kovács úr megbízásából porszívót keresünk egy internetes áruházban. Három elvárásunk van a géppel kapcsolatban: a szívóteljesítmény, a motor előtti szűrő megléte, illetve az, hogy a légtérbe visszafújt levegő filteren át jön-e. A feltételek egyikével sem rendelkezik 5 porszívó (ezek morzsa- illetve gépkocsi-porszívók), és ugyanennyi teljesíti mindhárom kívánalmat. A legtöbb porszívó a szívás erősségének tesz eleget, ez 90 darab, a motor előtti szűrést 20 fajta teljesíti, és 35

típus felel meg a filteres szűrés kívánalmának. Az utóbbiak hat hetede valamelyik egyéb feltételnek is eleget tesz, például 15 fajta egyben jó motor előtti szűrőt is tartalmaz. 70 fajta olyan porszívót árulnak, amelyik jól szív, de nem filteres, így az allergizáló szennyeződést visszafújja a légtérbe. Sajnos hasonló a helyzet azzal az 5 fajta géppel is, amelyik tartalmaz aktív szenes szűrőt a motor előtt, így az nem koszolódik annyira, de nem szereltek rá filtert, vagyis jól felkavarja a levegőt, de nem tisztít. Az áruház 113 fajta porszívót kínál. Hány olyan porszívót kínálnak, amely Kovács úr három igénye közül csak a szívás teljesítményének tesz eleget?

3. Legyen K a középpontosan szimmetrikus négyszögek halmaza, T pedig a tengelyesen szimmetrikus négyszögek halmaza. Határozzuk meg a $K \cap T$ halmazt!

4. Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $|A \setminus B| = 5$, $|B \setminus C| = 5$, $|C \setminus A| = 4$, $|A \cap B \cap C| = 1$, $|A \cup B| = 13$, $|A \cup C| = 12$ és $|C| = 7$. Határozzuk meg az A és B halmazok elemszámát és részhalmazaik számát!

5. Egy 30 fős társaságban franciául 20-an, németül 22-en, angolul 25-en beszélnek. Tudjuk, hogy mindegyikük beszéli a három nyelvből legalább az egyiket.

a) Hányan beszélhetnek mindhárom nyelven?

b) Legalább hányan beszélnek egynél több nyelven?

6. Adottak a következő intervallumok: $P = \left[\frac{3}{2}; 6\right[$, $Q =]-1; 4]$, $R = [-\pi; \pi]$ és $S =]\sqrt{2}; 13[$. Az alaphalmaz legyen a valós számok halmaza. Határozzuk meg a következő számhalmazokat!

a) $Q \cap R \cap \mathbb{Z}$ **b)** $P \setminus S$ **c)** $(P \cup Q)\Delta(R \cap S)$ **d)** $\overline{P} \cap \big((R \setminus S) \cup (S \setminus R)\big)$

7. Adott az S síkban az 5 cm hosszú AB szakasz. Határozzuk meg az S sík azon C pontjainak halmazát, amelyekre $CA > CB$ és $2\text{ cm} < CB < 3\text{ cm}$ teljesül!

8. Ábrázoljuk a koordinátasík azon $P(x; y)$ ponthalmazait, amelyek koordinátáira teljesülnek a következők:

a) $y > |2x - 4|$ és $y < -x^2 + 4x + 1$ **b)** $x^2 + 3x > 0$ és $y^2 - 2y \leq 0$

c) $2 < |x| + |y| \leq 5$ és $(x+1)^2 + (y-3)^2 < 16$ **d)** $x \cdot y \leq 1$ és $x^2 > 1$

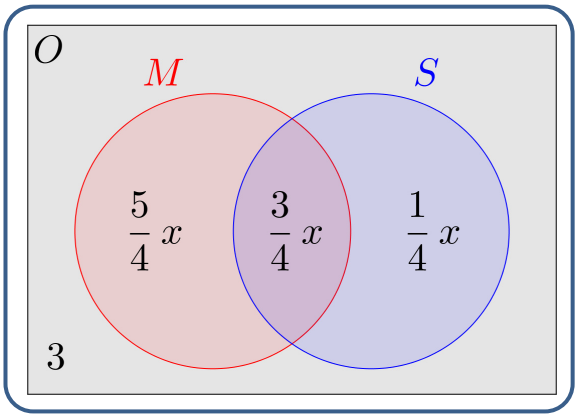
9. Hány olyan 10-jegyű pozitív egész szám van, amely csak az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

Az ellenőrző feladatok megoldásai

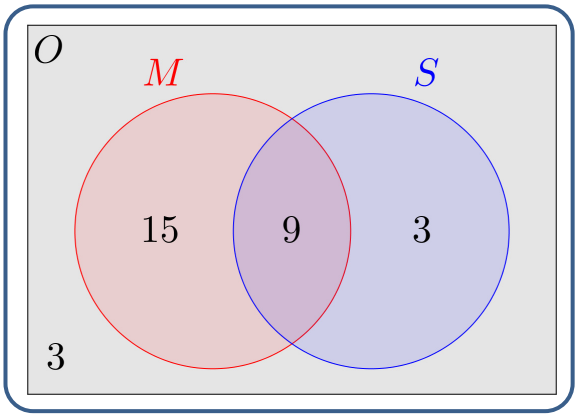
1. Egy harmincfős osztály három tagja sem matematika, sem számítástechnika szakkörre nem jár. Matematika szakkörre kétszer annyian járnak, mint számítástechnikára. Az utóbbi szakkörösök háromnegyed része mindkét szakkörre jár. Hány tagja van az egyes szakköröknek?

Megoldás: Jelölje a számítástechnika szakkörre járók számát x, ekkor a matematika szakkörre já-

rók száma $2x$. Tudjuk, hogy $\frac{3}{4}x$ tanuló jár matematika és számítástechnika szakkörre is, továbbá $\frac{1}{4}x$ tanuló jár csak számítástechnika szakkörre. Így csak matematika szakkörre $2x-\frac{3}{4}x=\frac{5}{4}x$ diák jár. Venn-diagramon ábrázolva (ahol O az alaphalmaz, M a matematika szakkörre járók halmaza, S pedig a számítástechnika szakkörre járóké):



Tudjuk, hogy $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x+3=30$, vagyis $\frac{9}{4}x=27$, ebből $x=12$. Tehát matematika szakkörre 24-en, számítástechnika szakkörre 12-en járnak. A teljes halmazábra a következő:

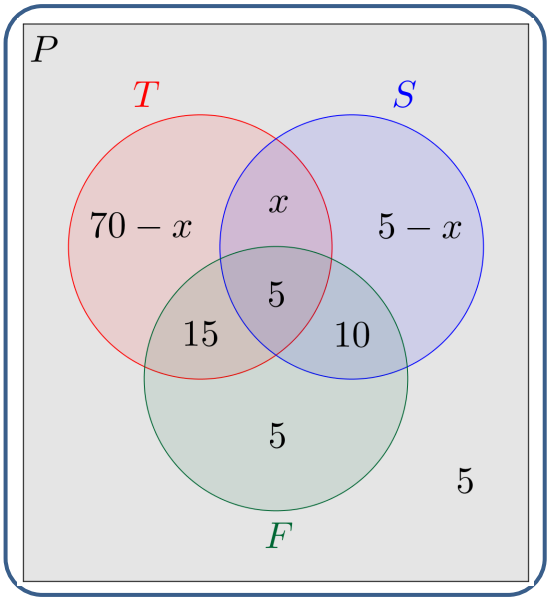


2. Kovács úr megbízásából porszívót keresünk egy internetes áruházban. Három elvárásunk van a géppel kapcsolatban: a szívóteljesítmény, a motor előtti szűrő megléte, illetve az, hogy a légtérbe visszafújt levegő filteren át jön-e. A feltételek egyikével sem rendelkezik 5 porszívó (ezek morzsa- illetve gépkocsi-porszívók), és ugyanennyi teljesíti mindhárom kívánalmat. A legtöbb porszívó a szívás erősségének tesz eleget, ez 90 darab, a motor előtti szűrést 20 fajta teljesíti, és 35 típus felel meg a filteres szűrés kívánalmának. Az utóbbiak hat hetede valamelyik egyéb feltételnek is eleget tesz, például 15 fajta egyben jó motor előtti szűrőt is tartalmaz. 70 fajta olyan porszívót árulnak, amelyik jól szív, de nem filteres, így az allergizáló szennyeződést visszafújja a légtérbe. Sajnos hasonló a helyzet azzal az 5 fajta géppel is, amelyik tartalmaz aktív szenes szűrőt a motor előtt, így az nem koszolódik annyira, de nem szereltek rá filtert, vagyis jól felkavarja a levegőt, de nem tisztít. Az áruház 113 fajta porszívót kínál. Hány olyan porszívót kínálnak, amely Kovács úr három igénye közül csak a szívás teljesítményének tesz eleget?

Megoldás: Jelölje a porszívók alaphalmazát P, ezen belül a megfelelő szívóteljesítményű porszívók halmazát T, a motor előtti szűrővel rendelkező porszívókét S, míg a filterrel rendelkező por-

szívókét F. Ekkor tudjuk, hogy $|P\setminus(T\cup S\cup F)=5|$, $|T\cap S\cap F|=5$, $|T|=90$, $|S|=20$ és $|F|=35$. Tudjuk még, hogy az F-beli elemek hat hetede nem csak F-ben van, tehát $|F\cap(T\cup S)|=30$, ezen belül $|F\cap S|=15$. Tudjuk még, hogy $|T\setminus F|=70$ és $|S\setminus F|=5$, továbbá $|P|=113$. A feladatunk $|T\setminus(S\cup F)|$ meghatározása.

Mivel $|T\cap S\cap F|=5$ és $|F\cap S|=15$, ezért $|(F\cap S)\setminus T|=10$, továbbá $|F\cap(T\cup S)|=30$ alapján $|(T\cap F)\setminus S|=15$. Legyen $|(T\cap S)\setminus F|=x$, ekkor $|T\setminus(S\cup F)|=70-x$ és $|S\setminus(T\cup F)|=5-x$. Venn-diagramon ábrázolva:



Az elemszámokat összeadva $70-x+x+5-x+15+5+10+5+5=113$, ahonnan $x=2$. Így $|T\setminus(S\cup F)|=70-2=68$ olyan porszívót kínál az áruház, amely a három igény közül csak a szívás teljesítményének tesz eleget.

3. Legyen K a középpontosan szimmetrikus négyszögek halmaza, T pedig a tengelyesen szimmetrikus négyszögek halmaza. Határozzuk meg a $K\cap T$ halmazt!

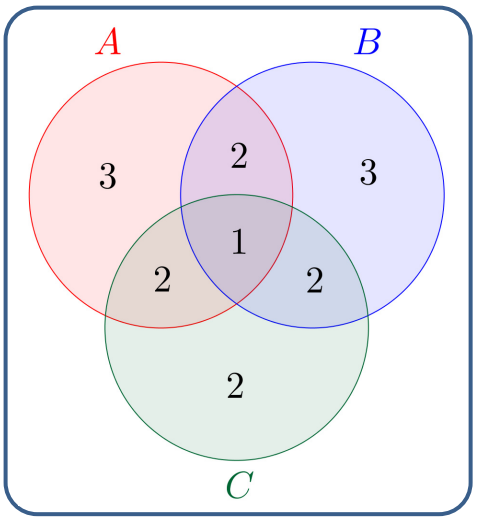
Megoldás: Ha a négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor szemközti szögei (és oldalai) egyenlők, tehát a négyszög paralelogramma. Innentől két esetet különböztetünk meg. Ha a szimmetriatengely átmegy valamelyik csúcson, akkor a négyszög két-két szomszédos oldala egyenlő, vagyis mind a négy oldal egyenlő, tehát a négyszög rombusz. Ha a szimmetriatengely két szemközti oldal felezőpontján megy át, akkor pedig a négyszög két-két szomszédos szöge egyenlő, vagyis mind a négy szöge egyenlő, tehát a négyszög téglalap.

Így tehát $K\cap T=\{\text{rombuszok}\}\cup\{\text{téglalapok}\}$.

4. Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $|A\setminus B|=5$, $|B\setminus C|=5$, $|C\setminus A|=4$, $|A\cap B\cap C|=1$, $|A\cup B|=13$, $|A\cup C|=12$ és $|C|=7$. Határozzuk meg az A és B halmazok elemszámát és részhalmazaik számát!

Megoldás: Mivel $|A\setminus B|+|B\setminus C|+|C\setminus A|+|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|$, ezért $|A\cup B\cup C|=15$. Így

$|C \setminus (A \cup B)| = 15 - 13 = 2$ és $|B \setminus (A \cup C)| = 15 - 12 = 3$. Ekkor $|(B \setminus C) \cap A| = 5 - 3 = 2$ és $|(C \setminus A) \cap B| = 4 - 2 = 2$, továbbá $|(C \setminus B) \cap A| = 7 - (2 + 2 + 1) = 2$. Végül – például $|A \cup B| = 13$ alapján – $|A \setminus (B \cup C)| = 3$. Az elemszámokat Venn-diagramon ábrázolva:



Az ábráról leolvasható, hogy az A és a B halmaznak is 8 eleme van, így részhalmazaik száma $2^8 = 256$.

5. Egy 30 fős társaságban franciául 20-an, németül 22-en, angolul 25-en beszélnek. Tudjuk, hogy mindegyikük beszéli a három nyelvből legalább az egyiket.

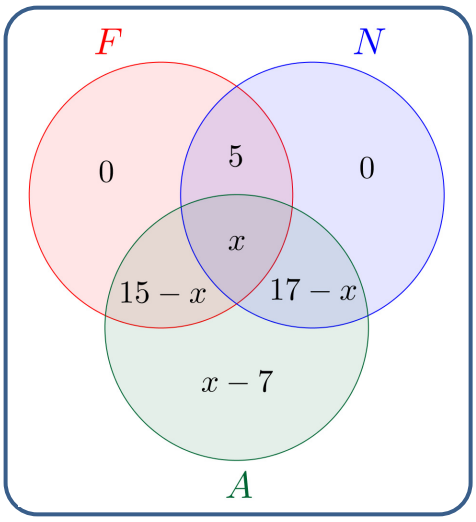
a) Hányan beszélhetnek mindhárom nyelven?

b) Legalább hányan beszélnek egynél több nyelven?

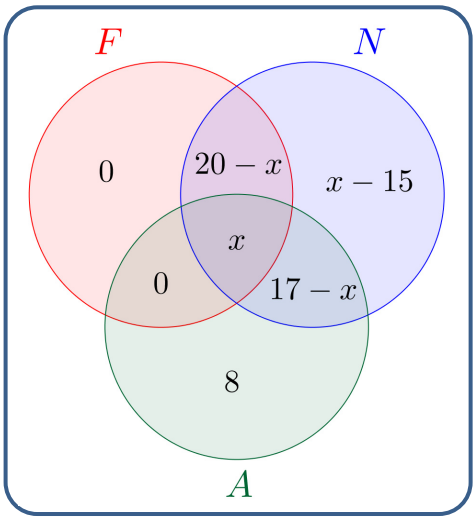
Megoldás: Jelöljük a mindhárom nyelven beszélők számát x-szel, a pontosan két nyelven beszélőkét y-nal. Ekkor $20 + 22 + 25 = 30 + y + 2x$, hiszen a bal oldalon mindenkit annyiszor számoltunk meg, ahány nyelven beszél, a jobb oldalon pedig a 30 mindenkit egyszer tartalmaz, így a pontosan két nyelven beszélőket még egyszer, a pontosan három nyelven beszélőket még kétszer kell vennünk. Ebből $2x + y = 37$, ahol x és y természetes számok.

a) A $2x + y = 37$ összefüggésből $x + y \leq 30$ miatt $7 \leq x \leq 18$ adódik. A két határ között x minden egész értéket felvehet, például a következőképpen (a nyelveknek megfelelő halmazokat a kezdőbetűk alapján F, N és A jelöli):

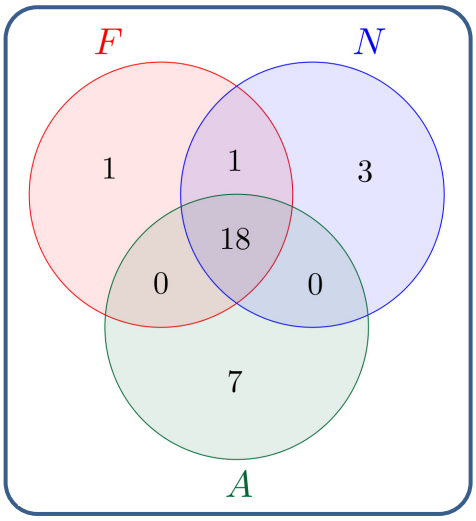
Ha $7 \leq x \leq 15$, akkor a következő oldalon látható elrendezés megfelelő:



Ha $16 \leq x \leq 17$, akkor a következő elrendezés megfelelő:



Végül $x = 18$ esetén a következő elrendezés megfelelő:



Tehát a mindhárom nyelvet beszélők száma 7 és 18 között bármilyen egész szám lehet.

b) A $2x + y = 37$ feltételből az a) feladatban levezetett $x \leq 18$ miatt $x + y \geq 19$ adódik. Az egyenlőség meg is valósulhat, az a) feladat utolsó ábrája példát mutat az $x + y = 19$ esetre. Tehát

legalább 19-en beszélnek egynél több nyelven.

6. Adottak a következő intervallumok: $P=\left[\frac{3}{2};\,6\right[$, $Q=]-1;\,4]$, $R=[-\pi;\,\pi]$ és $S=\left]\sqrt{2};\,13\right[$. Az alaphalmaz legyen a valós számok halmaza. Határozzuk meg a következő számhalmazokat!

a) $Q\cap R\cap\mathbb{Z}$ **b)** $P\setminus S$ **c)** $(P\cup Q)\Delta(R\cap S)$ **d)** $\overline{P}\cap\big((R\setminus S)\cup(S\setminus R)\big)$

Megoldás: Felhasználjuk, hogy $-\pi<-1<\sqrt{2}<\frac{3}{2}<\pi<4<6<13$.

a) $Q\cap R\cap\mathbb{Z}=]-1;\,\pi]\cap\mathbb{Z}=\{0;\,1;\,2;\,3\}$.

b) $P\setminus S=\varnothing$.

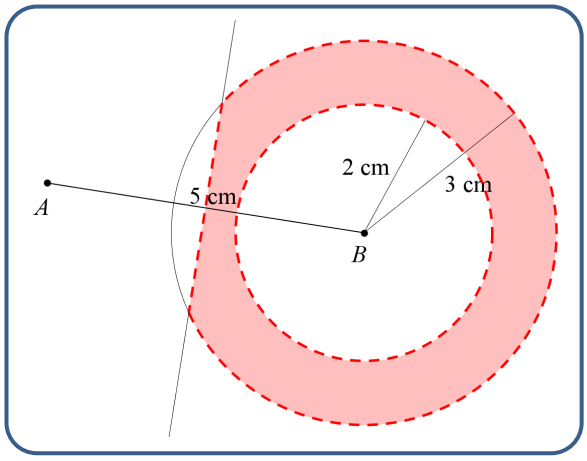
c) $(P\cup Q)\Delta(R\cap S)=]-1;\,6[\Delta\left]\sqrt{2};\,\pi\right]=\left]-1;\,\sqrt{2}\right]\cup]\pi;\,6[$.

d) $\overline{P}\cap\big((R\setminus S)\cup(S\setminus R)\big)=\overline{P}\cap(R\Delta S)=(R\Delta S)\setminus P=\left(\left[-\pi;\,\sqrt{2}\right]\cup]\pi;\,13[\right)\setminus\left[\frac{3}{2};\,6\right[=$

$=\left[-\pi;\,\sqrt{2}\right]\cup[6;\,13[$.

7. Adott az S síkban az 5 cm hosszú AB szakasz. Határozzuk meg az S sík azon C pontjainak halmazát, amelyekre $CA>CB$ és $2\text{ cm}<CB<3\text{ cm}$ teljesül!

Megoldás: A keresett pontok az AB szakaszfelező merőlegese által határolt, B-t tartalmazó nyílt félsík, valamint a B középpontú, 2 cm és 3 cm sugarú nyílt körgyűrű metszetének pontjai:



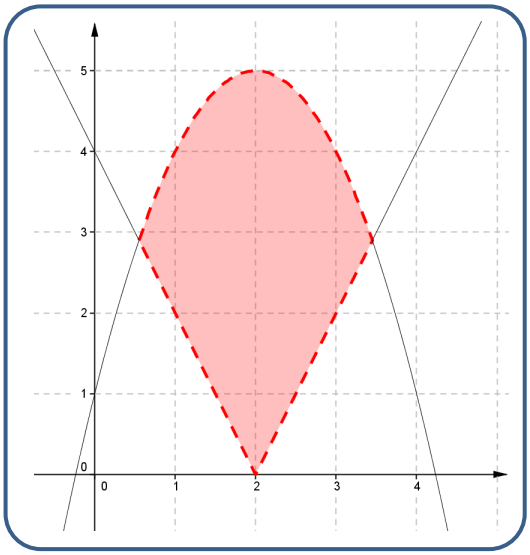
8. Ábrázoljuk a koordinátasík azon $P(x;\,y)$ ponthalmazait, amelyek koordinátáira teljesülnek a következők:

a) $y>|2x-4|$ és $y<-x^2+4x+1$ **b)** $x^2+3x>0$ és $y^2-2y\le 0$

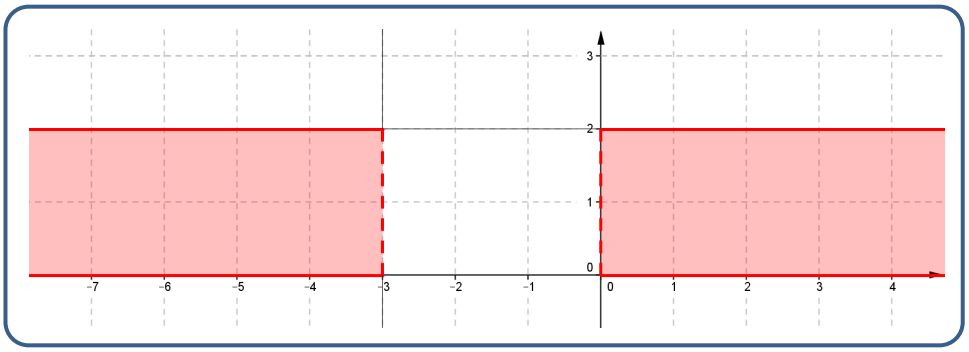
c) $2<|x|+|y|\le 5$ és $(x+1)^2+(y-3)^2<16$ **d)** $x\cdot y\le 1$ és $x^2>1$

Megoldás:

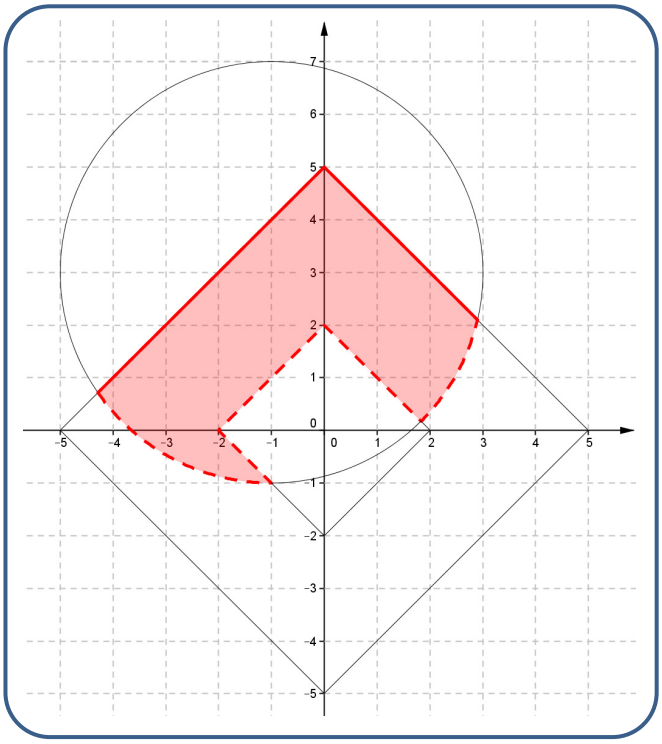
a)



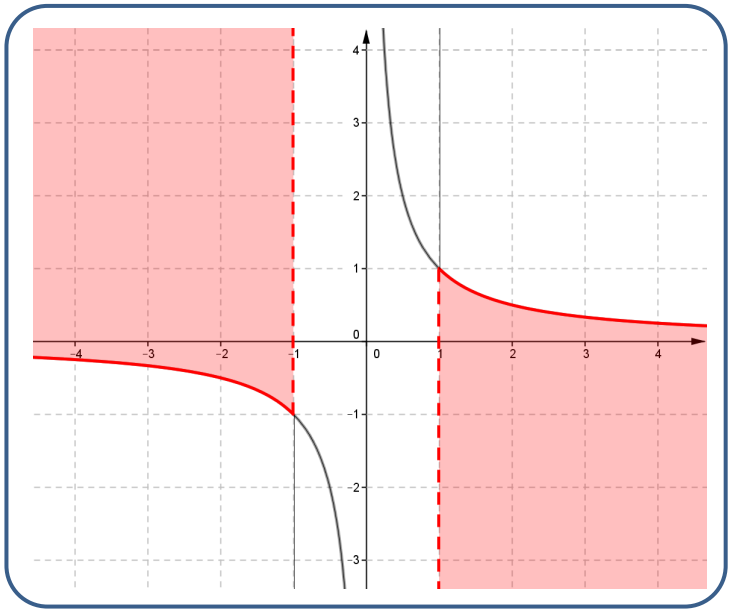
b)



c)



d)



9. Hány olyan 10-jegyű pozitív egész szám van, amely csak az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

Megoldás: Szita-formulát alkalmazunk. Legyen a H alaphalmaz az 1, 2, 3 számjegyekből alkotható 10-jegyű pozitív egész számok halmaza. Ezen belül jelölje A az 1-es számjegyet nem tartalmazó, B a 2-es számjegyet nem tartalmazó, C a 3-as számjegyet nem tartalmazó számok halmazát. A feladatunk $\left|H \setminus (A \cup B \cup C)\right|$ meghatározása.

Az elemszámok: $|H| = 3^{10}$, $|A| = |B| = |C| = 2^{10}$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1^{10}$, $|A \cap B \cap C| = 0$.
Így $\left|H \setminus (A \cup B \cup C)\right| = 3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 1^{10} - 0 = 55980$ a keresett számok száma.