18. Differenciálszámítás

I. Elméleti összefoglaló

Függvény határértéke

Definíció: Az $x_0 \in \mathbb{R}$ **környezetei** az $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ nyílt intervallumok, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Definíció: Az *f* függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ **véges helyen vett határértéke** az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha *f* értelmezve van az x_0 valamely környezetében (kivéve esetleg magát az x_0 pontot), és teljesül az alábbi két (ekvivalens) feltétel bármelyike:

- minden x_0-hoz tartó x_n számsorozatra, ahol $x_n \in D_f$ és $x_n \neq x_0$, teljesül, hogy a függvényértékek $f(x_n)$ számsorozata *A*-hoz tart.
- bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Definíció: Az *f* függvény **végtelenben vett határértéke** az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha *f* értelmezve van a $+\infty$ (illetve a $-\infty$) egy környezetében (azaz valamilyen $K \in \mathbb{R}$ számra a $]K; +\infty[$, illetve a $]-\infty; K[$ intervallumon), és teljesül az alábbi két (ekvivalens) feltétel bármelyike:

- minden $+\infty$-hez (illetve $-\infty$-hez) tartó x_n számsorozatra teljesül, hogy a függvényértékek $f(x_n)$ számsorozata *A*-hoz tart.
- bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{R}$ küszöbérték, hogy minden $x > N$ esetén ($-\infty$-re minden $x < N$ esetén) $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, illetve $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Definíció: Az *f* függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ **véges helyen vett határértéke** $+\infty$ (illetve $-\infty$), ha *f* értelmezve van az x_0 valamely környezetében (kivéve esetleg magát az x_0 pontot), és teljesül az alábbi két (ekvivalens) feltétel bármelyike:

- minden x_0-hoz tartó x_n számsorozatra, ahol $x_n \in D_f$ és $x_n \neq x_0$, teljesül, hogy a függvényértékek $f(x_n)$ számsorozata $+\infty$-hez (illetve $-\infty$-hez) tart.
- bármely $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy minden $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) > K$ ($-\infty$ esetén $f(x) < K$).

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, illetve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Definíció: Az *f* függvény **+ végtelenben vett határértéke** $+\infty$ (illetve $-\infty$), ha *f* értelmezve van a $+\infty$ egy környezetében, és teljesül az alábbi két (ekvivalens) feltétel bármelyike:

- minden $+\infty$-hez tartó x_n számsorozatra teljesül, hogy a függvényértékek $f(x_n)$ számsorozata $+\infty$-hez (illetve $-\infty$-hez) tart.
- bármely $K\in\mathbb{R}$-hez van olyan $N\in\mathbb{R}$ küszöbérték, hogy minden $x>N$ esetén $f(x)>K$ (illetve $-\infty$ esetén $f(x)<K$).

Jelölés: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, illetve $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

Definíció: Az *f* függvény **– végtelenben vett határértéke** $+\infty$ (illetve $-\infty$), ha *f* értelmezve van a $-\infty$ egy környezetében, és teljesül az alábbi két (ekvivalens) feltétel bármelyike:

- minden $-\infty$-hez tartó x_n számsorozatra teljesül, hogy a függvényértékek $f(x_n)$ számsorozata $+\infty$-hez (illetve $-\infty$-hez) tart.
- bármely $K\in\mathbb{R}$-hez van olyan $N\in\mathbb{R}$ küszöbérték, hogy minden $x<N$ esetén $f(x)>K$ (illetve $-\infty$ esetén $f(x)<K$).

Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, illetve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Tétel: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Folytonos függvények

Definíció: Az *f* függvény **folytonos az x_0 pontban**, ha *f* értelmezve van az x_0 valamely környezetében, és teljesül az alábbi három (ekvivalens) feltétel bármelyike:

- minden x_0-hoz tartó x_n számsorozatra, ahol $x_n\in D_f$, teljesül, hogy a függvényértékek $f(x_n)$ számsorozata $f(x_0)$-hoz tart.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- bármely $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy minden $|x-x_0|<\delta$ esetén $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Megjegyzés: Ha tehát az *f* függvény folytonos az $x_0\in D_f$ pontban, akkor ott szükségképpen van határértéke is, és a határértéke éppen $f(x_0)$.

Definíció: Az *f* függvény **folytonos az $]a;b[$ intervallumon**, ha minden $x_0\in]a;b[$ pontban folytonos. Az *f* függvény **folytonos**, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Megjegyzés: Az *f* függvény folytonosságát kiterjeszthetjük zárt $[a;b]$ intervallumra is, ekkor a végpontokban csak egyoldali folytonosságról beszélünk: a-ban jobboldali, b-ben baloldali folytonosságról. Az előbbi esetén minden $x_n \to a$, $x_n > a$ számsorozatra, az utóbbi esetén minden $x_n \to b$, $x_n < b$ számsorozatra ($x_n \in D_f$) követeljük meg, hogy $f(x_n) \to a$, illetve $f(x_n) \to b$ teljesüljön.

Definíció: Az *f* függvénynek **szakadási helye** van az $x_0 \in D_f$ pontban, ha ott értelmezve van, de nem folytonos.

Tétel: Legyen $f(x)$ és $g(x)$ is folytonos az $x_0 \in D_f \cap D_g$ pontban. Ekkor az x_0 pontban a következő függvények is folytonosak: $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (ha $g(x_0) \neq 0$), illetve $c \cdot f(x)$ (ahol $c \in \mathbb{R}$).

Tétel (az összetett függvény folytonossága): Legyen $g(x)$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, továbbá $f(x)$ folytonos a $g(x_0) \in D_g$ pontban. Ekkor $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ is folytonos az x_0 pontban.

Tétel: A következő függvények folytonosak (a teljes értelmezési tartományukon):

- polinomfüggvények ($f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x^1 + a_0$), illetve ezek hányadosai
- trigonometrikus alapfüggvények ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$)
- exponenciális és logaritmusfüggvények

Tétel: Legyen $f(x)$ egy zárt $[a; b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Ekkor igazak a következők:

- az *f* függvénynek létezik minimuma és maximuma $[a; b]$-n (tehát *f* korlátos)
- az *f* függvény az $[a; b]$-n minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz
  (speciálisan: ha $f(a)$ és $f(b)$ értéke ellentétes előjelű, akkor *f*-nek van zérushelye $[a; b]$-n)

Differenciálható függvények

Definíció: Az *f* függvény $a \in D_f$ pontjához tartozó **különbségihányados-függvénye** (vagy **differenciahányados-függvénye**) a $D_f \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ függvény.

Definíció: Az *f* függvény **differenciálható** (vagy **deriválható**) **az** $a \in D_f$ **pontban**, ha létezik és véges a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték. Ekkor ezt az értéket az *f* függvény ***a*-beli differenciálhányadosának** (vagy **deriváltjának**) nevezzük.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Definíció: Az *f* függvény **differenciálható az** $]a;b[$ **intervallumon**, ha minden $x_0 \in]a;b[$ pontban differenciálható. Az *f* függvény **differenciálható**, ha értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

Definíció: Az *f* függvény **differenciálhányados-függvénye** (vagy **deriváltfüggvénye**) az az *f'* függvény, amely azokban az $a \in D_f$ pontokban értelmezett, ahol *f* differenciálható, és ott értéke $f'(a)$.

Definíció: Ha az *f'* deriváltfüggvény deriválható, akkor az $f''(x)=(f')'(x)$ függvényt az *f* **második deriváltfüggvényének** nevezzük. Ha az *f* függvény $n-1$-edik deriváltfüggvénye is deriválható ($n \in \mathbb{Z}^+$), akkor az *f*-et ***n*-szer deriválhatónak** nevezzük, az *n*-edik deriváltfüggvényt $f^{(n)}(x)$ jelöli.

Tétel: Ha az *f* függvény differenciálható az $a \in D_f$ pontban, akkor *f* folytonos is *a*-ban.

Differenciálási szabályok

Tétel: Legyenek *f* és *g* differenciálható függvények. Ekkor igazak a következők ($x \in D_f \cap D_g$):

- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$ (ahol $c \in \mathbb{R}$)
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ (ahol $g(x) \neq 0$)
- „láncszabály": $(f \circ g)'(x) = \left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ (ahol $x \in D_g$ és $g(x) \in D_f$)

Tétel (az alapfüggvények deriváltjai):

- $f(x) = c$ (ahol $c \in \mathbb{R}$) deriváltja $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ (ahol $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) deriváltja $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- $f(x) = \sin x$ deriváltja $f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$ deriváltja $f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ deriváltja $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ deriváltja $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $f(x) = a^x$ (ahol $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) deriváltja $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ ($f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$)

- $f(x) = \log_a x$ (ahol $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) deriváltja $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ($f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$)

Függvénygörbe érintőjének meghatározása

Tétel: Legyen *f* differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban. Ekkor az $(x_0;\, f(x_0))$ pontban az *f* függvény grafikonjához húzott érintőegyenes meredeksége éppen $f'(x_0)$. Ekkor az érintő egyenesének egyenlete: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Differenciálható függvények vizsgálata

Tétel: Legyen *f* differenciálható az $]a;\, b[$ intervallumon. Ekkor igazak a következők:

- *f* akkor és csak akkor monoton növekvő $]a;\, b[$-n, ha minden $x \in \,]a;\, b[$ esetén $f'(x) \geq 0$.
- Ha minden $x \in \,]a;\, b[$ esetén $f'(x) > 0$, akkor az *f* függvény $]a;\, b[$-n szigorúan monoton növekvő.
- *f* akkor és csak akkor monoton csökkenő $]a;\, b[$-n, ha minden $x \in \,]a;\, b[$ esetén $f'(x) \leq 0$.
- Ha minden $x \in \,]a;\, b[$ esetén $f'(x) < 0$, akkor az *f* függvény $]a;\, b[$-n szigorúan monoton csökkenő.

Tétel: Legyen *f* differenciálható az $]a;\, b[$ intervallumon és $x_0 \in \,]a;\, b[$. Ekkor igazak a következők:

- Ha az x_0 pontban *f*-nek szigorú lokális minimuma vagy maximuma van, akkor $f'(x_0) = 0$ (szükséges feltétel).
- Ha $f'(x_0) = 0$ és *f’* az x_0-ban előjelet vált, akkor *f*-nek x_0-ban szigorú lokális szélsőértéke van, a következők szerint (elégséges feltétel):
  - Ha $f'(x_0) = 0$ és *f’* az x_0-ban negatívból pozitívba vált (azaz létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $x \in \,]x_0 - \varepsilon;\, x_0[$ esetén $f'(x) < 0$ és minden $x \in \,]x_0;\, x_0 + \varepsilon[$ esetén $f'(x) > 0$), akkor *f*-nek x_0-ban szigorú lokális minimuma van.
  - Ha $f'(x_0) = 0$ és *f’* az x_0-ban pozitívból negatívba vált (azaz létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $x \in \,]x_0 - \varepsilon;\, x_0[$ esetén $f'(x) > 0$ és minden $x \in \,]x_0;\, x_0 + \varepsilon[$ esetén $f'(x) < 0$), akkor *f*-nek x_0-ban szigorú lokális maximuma van.
- Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor *f*-nek x_0-ban szigorú lokális szélsőértéke van, a következők szerint (elégséges feltétel):
  - Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor *f*-nek x_0-ban szigorú lokális minimuma van.
  - Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor *f*-nek x_0-ban szigorú lokális maximuma van.

Definíció: Legyen *f* egy tetszőleges (nyílt, zárt, illetve félig nyílt – félig zárt) *I* intervallumon értelmezett függvény. Ha tetszőleges $a \in I,\ b \in I,\ a < b$ esetén minden $x \in]a;\, b[$-re

- a függvénygörbe $(x;\, f(x))$ pontja az $(a;\, f(a))$ és $(b;\, f(b))$ pontokat összekötő húr alatt vagy a húron található, akkor az *f*-et **az *I* intervallumon (alulról) konvex függvénynek** nevezzük.
- a függvénygörbe $(x;\, f(x))$ pontja az $(a;\, f(a))$ és $(b;\, f(b))$ pontokat összekötő húr felett vagy a húron található, akkor az *f*-et **az *I* intervallumon (alulról) konkáv függvénynek** nevezzük.
- Ha a vizsgált $(x;\, f(x))$ pontok egyike sem lehet rajta a húron (csak végig alatta vagy végig felette), akkor az *f*-et **az *I* intervallumon (alulról) szigorúan konvex (konkáv) függvénynek** nevezzük.

Tétel: Legyen *f* kétszer differenciálható az $]a;\, b[$ intervallumon. Ekkor igazak a következők:

- *f* akkor és csak akkor konvex az $]a;\, b[$-n, ha minden $x \in]a;\, b[$ esetén $f''(x) \geq 0$.
- Ha minden $x \in]a;\, b[$ esetén $f''(x) > 0$, akkor az *f* függvény szigorúan konvex $]a;\, b[$-n.
- *f* akkor és csak akkor konkáv az $]a;\, b[$-n, ha minden $x \in]a;\, b[$ esetén $f''(x) \leq 0$.
- Ha minden $x \in]a;\, b[$ esetén $f''(x) < 0$, akkor az *f* függvény szigorúan konkáv $]a;\, b[$-n.

Definíció: Legyen *f* kétszer differenciálható az $x_0 \in D_f$ pont valamely környezetében. Az *f*-nek **inflexiós pontja van x_0-ban,** ha teljesül az alábbi két (ekvivalens) feltétel bármelyike:

- *f* az x_0-ban görbületet vált (konvexből konkávba vagy konkávból konvexbe), vagyis vannak olyan $a < x_0 < b$ értékek, hogy *f* az $[a;\, x_0]$-on konvex és az $[x_0;\, b]$-n konkáv (vagy fordítva).
- $f''(x_0) = 0$ és f'' az x_0-ban előjelet vált (negatívból pozitívba vagy pozitívból negatívba).

Tétel: Legyen *f* háromszor differenciálható az $x_0 \in D_f$ pont valamely környezetében. Ha $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor *f*-nek inflexiós pontja van x_0-ban (elégséges feltétel).

Fizikai alkalmazások

Ha egy test egyenes vonalú mozgást végez, és a kezdőponttól mért előjeles távolságát *t* idő elteltével az $s(t)$ függvény írja le, akkor a pillanatnyi sebesség ezen *s* függvény első deriváltja, vagyis $v(t) = s'(t)$, míg a *t* időpontban a test gyorsulása a függvény második deriváltja, vagyis $a(t) = s''(t)$. A fizikában használatosak még a $v(t) = \dot{s}(t)$ és az $a(t) = \ddot{s}(t)$ jelölések is.

II. Kidolgozott feladatok

1. Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (ha léteznek)!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x}{3x^2-5}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 7}(2x-3)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

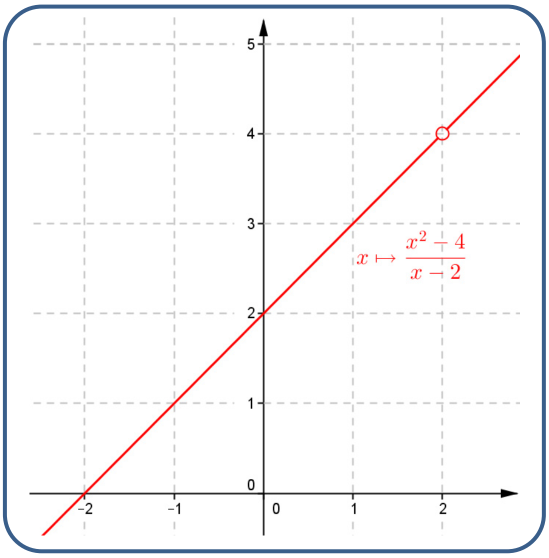
d) $\lim\limits_{x\to 3}[x]$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$

Megoldás:

a) Az $x\mapsto \dfrac{x^2+2x}{3x^2-5}$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{\dfrac{5}{3}}; \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right\}$. Ez a függvény értelmezve van a $+\infty$ egy környezetében, és ott folytonos is. A számlálót és a nevezőt is x^2-tel végigosztva az $\dfrac{x^2+2x}{3x^2-5}=\dfrac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{5}{x^2}}$ alakhoz jutunk, amelyre alkalmazhatjuk a határérték műveleti tulajdonságait: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{5}{x^2}}=\dfrac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}=\dfrac{1+0}{3-0}=\dfrac{1}{3}$.

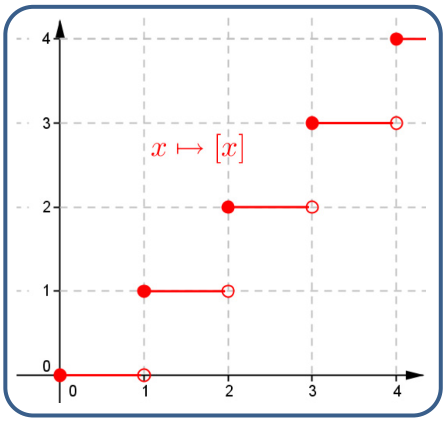
b) Az $x\mapsto 2x-3$ minden valós számra értelmezett folytonos függvény, amelynek $x=7$-beli határértéke megegyezik az $x=7$-ben felvett függvényértékkel, így $\lim\limits_{x\to 7}(2x-3)=2\cdot 7-3=11$.

c) Az $x\mapsto \dfrac{x^2-4}{x-2}$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, tehát ez a függvény nincs értelmezve a vizsgált $x=2$ helyen. Az $\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$ átalakítást alkalmazva megállapíthatjuk, hogy a függvény képe megegyezik az $\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x+2$ függvény képével, amely egy majdnem teljes ($x=2$-ben nem értelmezett) egyenes:



Így a keresett határérték $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$, hiszen minden $x=2$-höz tartó $x_n\neq 2$ sorozatra a függvényértékek $f(x_n)$ sorozata 4-hez tart.

d) Az $f:x\mapsto[x]$ minden valós számra értelmezett függvény, amely azonban nem folytonos, az $x\in\mathbb{Z}$ helyeken szakadási pontja van. Ennek a függvénynek az $x=3$-ban nincsen határértéke, hiszen például $a_n=3-\frac{1}{n}$ és $b_n=3+\frac{1}{n}$ esetén $f(a_n)=\left[3-\frac{1}{n}\right]=2$, de $f(b_n)=\left[3+\frac{1}{n}\right]=3$.

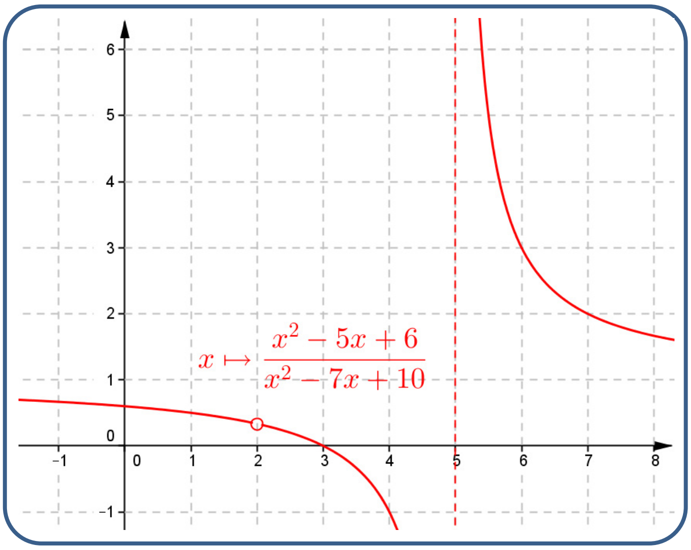


Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=2$ és $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=3$, de a határérték definíciója alapján e két (3-hoz tartó) számsorozat mentén a függvényértékeknek közös határértékhez kellene tartania, ami jelen esetben nem teljesül. Tehát $\lim\limits_{x\to 3}[x]$ nem létezik.

(**Megjegyzés**: ha a kétoldaliság követelményétől eltekintünk, és csak az egyik oldalról közelítjük a vizsgált x helyet, akkor tágabb értelemben mondhatjuk azt, hogy az $f:x\mapsto[x]$ függvénynek $x=3$-ban a baloldali határértéke 2, a jobboldali határértéke pedig 3.)

e) Az $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, tehát ez a függvény nincs értelmezve a vizsgált $x=0$ helyen. Mivel például az $a_n=\frac{1}{n}$ sorozatra $f(a_n)=n$, továbbá a $b_n=-\frac{1}{n}$ sorozatra $f(b_n)=-n$, ezért e két (0-hoz tartó) számsorozat mentén a függvényértékek határértéke különböző (hiszen $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=-\infty$), így $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nem létezik (csupán bal- és jobboldali határértéket tudnánk külön-külön értelmezni).

f) Az $x\mapsto\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$, tehát ez a függvény nincs értelmezve a vizsgált $x=2$ helyen. Az $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}=\frac{x-3}{x-5}=1+\frac{2}{x-5}$ átalakítást alkalmazva a függvény $x\neq 2$ esetén megegyezik az $x\mapsto 1+\frac{2}{x-5}$ folytonos függvénnyel, így a keresett határérték $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2}{x-5}\right)=1+\frac{2}{2-5}=\frac{1}{3}$.



2. Folytonosak-e az alábbi függvények? (A függvények értelmezési tartománya legyen a valós számok azon lehető legbővebb részhalmaza, amelyre az adott kifejezés értelmezhető.)

$a(x)=\frac{1}{x}$ $\qquad$ $b(x)=\frac{x\cdot(x-2)}{x-2}$ $\qquad$ $c(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x\neq 2 \\ 5, & \text{ha } x=2 \end{cases}$

$d(x)=\{2x-1\}$ $\qquad$ $e(x)=\operatorname{ctg} 2x$ $\qquad$ $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Megoldás:

a) Az $a(x)=\frac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Mivel bármilyen $x_0\neq 0$, $x_n\to x_0$ esetén $\lim_{n\to\infty} a(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_0}=a(x_0)$ teljesül, ezért a függvény folytonos, hiszen értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. (Úgy is indokolhatunk, hogy a megadott függvény a folytonos $x\mapsto 1$ és $x\mapsto x$ függvények hányadosa.)

b) A $b(x)=\frac{x\cdot(x-2)}{x-2}$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Mivel bármilyen $x\neq 2$ esetén $b(x)$ értéke megegyezik a folytonos $x\mapsto x$ függvény értékével, ezért a függvény folytonos.

c) A $c(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x\neq 2 \\ 5, & \text{ha } x=2 \end{cases}$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}$. Mivel bármilyen $x\neq 2$ esetén $c(x)=x$, így $\lim_{x\to 2} c(x)=\lim_{x\to 2} x=2$, viszont $c(2)=5\neq\lim_{x\to 2} c(x)$, ezért a függvény nem folytonos az $x=2$ pontban, ott szakadási helye van. Tehát a függvény nem folytonos.

d) A $d(x)=\{2x-1\}$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}$. Mivel az $x=\frac{k}{2};\ k\in\mathbb{Z}$ helyeken a függvénynek szakadási helye van (ezekben a pontokban a függvénynek nincs határértéke), ezért a függvény nem folytonos. (Úgy is indokolhatunk, hogy például $x_0=1$ esetén az $a_n=1+\frac{1}{n}$ és a $b_n=1-\frac{1}{n}$ x_0-hoz tartó sorozatok választásával $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n)=1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} d(b_n)=0$, tehát x_0-ban a *d* függvénynek nincs határértéke, így ott nem is lehet folytonos.)

e) Az $e(x)=\operatorname{ctg}2x$ függvény értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}$. A függvény értelmezési tartományának minden pontjában folytonos (hiszen az $x\mapsto 2x$ és az $x\mapsto\operatorname{ctg}x$ függvények folytonosak, így ezek összetétele is folytonos), tehát ez a függvény folytonos.

f) Az $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ függvény (az úgynevezett Dirichlet-függvény) értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}$. Mivel bármely intervallumban található racionális és irracionális szám is, ezért bármely *x* szám tetszőleges környezetében végtelen sok racionális és irracionális szám van, így ez a függvény minden intervallumon végtelen sokszor felveszi az 1-et és a 0-t is, vagyis semelyik *x* pontban nem folytonos. Tehát ez a függvény nem folytonos.

3. Tekintsük az $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ függvényt. Ez egy folytonos függvény, amely nincs értelmezve $x=1$-ben. Hogyan lehetne kiterjeszteni az értelmezési tartományát $x=1$-re is úgy, hogy a függvény továbbra is folytonos maradjon?

Megoldás: Mivel $\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$, ezért minden $x\neq 1$ esetén $f(x)$ értéke megegyezik az $x\mapsto x^2+x+1$ függvény értékével. Tehát $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3$. Ha *f*-et folytonosan szeretnénk kiterjeszteni $x=1$-re, akkor az $x=1$-beli függvényértéknek meg kell egyeznie az $x=1$-beli függvényhatárértékkel, így a kiterjesztett függvénynek $x=1$-ben 3-at kell felvennie. Vagyis a függvény folytonos kiterjesztése az $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1}, & \text{ha } x\neq1\\ 3, & \text{ha } x=1\end{cases}$ függvény.

4. Írjuk fel az alábbi függvények $x_0=1$ ponthoz tartozó differenciahányados-függvényét és differenciálhányadosát!

$a(x)=\frac{1}{2x}$ $\qquad$ $b(x)=x^3-2x^2$ $\qquad$ $c(x)=\sqrt{x}$

Megoldás:

a) A differenciahányados-függvény: $x\mapsto\dfrac{\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\cdot1}}{x-1}=\dfrac{\frac{1-x}{2x}}{x-1}=\dfrac{1-x}{2x(x-1)}=-\dfrac{1}{2x}$ ($x\notin\{0;1\}$).

A differenciálhányados értéke: $a'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{2x}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

b) A differenciahányados-függvény: $x\mapsto \dfrac{\left(x^3-2x^2\right)-\left(1^3-2\cdot 1^2\right)}{x-1}$ ($x\neq 1$). A számláló tovább alakítva: $x^3-1^3-2\left(x^2-1^2\right)=(x-1)\left(\left(x^2+x+1\right)-2(x+1)\right)=(x-1)\left(x^2-x-1\right)$. Elvégezve az $\dfrac{(x-1)\cdot\left(x^2-x-1\right)}{x-1}=x^2-x-1$ egyszerűsítést, a differenciálhányados értéke a következő: $b'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-x-1\right)=1-1-1=-1$.

c) A differenciahányados-függvény: $x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1}$ ($x\geq 0$ és $x\neq 1$). Elvégezve a (számlálót gyöktelenítő) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{1}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{1}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ átalakítást, a differenciálhányados értéke: $c'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

5. Igaz-e mindig, hogy ha egy függvény folytonos valamely pontban, akkor ott differenciálható is?

Megoldás: Nem, hiszen például az $f(x)=|x|$ függvény folytonos $x=0$-ban, de ott nem differenciálható. Ugyanis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-0}{x-0}$ lenne, de az $\dfrac{|x|}{x}$ függvénynek nincsen határértéke $x=0$-ban (hiszen negatív *x*-ekre -1-et, pozitív *x*-ekre $+1$-et vesz fel).

6. Deriváljuk az alábbi függvényeket! (A függvények értelmezési tartománya legyen a valós számok azon lehető legbővebb részhalmaza, amelyre az adott kifejezés értelmezhető.)

$a(x)=x^3+x^2-2x$ $\quad b(x)=2\cdot\cos x-\sqrt{x}$ $\quad c(x)=2\cdot e^x+x\cdot\ln x$

$d(x)=\sin\left(e^x\right)$ $\quad e(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{\log_7(2x-2)}$

Megoldás:

a) $a'(x)=3\cdot x^2+2\cdot x-2$.

b) Mivel $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, ezért $b'(x)=2\cdot(-\sin x)-\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=-2\sin x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) Mivel $(x)'=1$ és $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ezért $c'(x)=2\cdot e^x+1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=2\cdot e^x+\ln x+1$.

d) Mivel $\left(e^x\right)'=e^x$, ezért $d'(x)=\cos\left(e^x\right)\cdot e^x$.

e) Mivel $(\sin x)' = \cos x$ és $(x)' = 1$, ezért $e'(x) = \dfrac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$.

f) Mivel $\left(\sqrt[3]{x}\right) = x^{\frac{1}{3}}$, $(2x-2)' = 2$ és $\left(\log_7(2x-2)\right)' = \dfrac{1}{(2x-2)\cdot \ln 7} \cdot 2$, ezért

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\log_7(2x-2)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{(2x-2)\cdot \ln 7} \cdot 2 = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\log_7(2x-2)\right)^2} \cdot (2x-2) \cdot \ln 7}.$$

7. Az $y = x^2$ egyenletű parabola mely pontjában húzott érintő lesz merőleges az $y = \dfrac{2}{3}x + 5$ egyenletű egyenesre? Írjuk fel az érintő egyenletét!

Megoldás: A parabola $\left(x_0;\, x_0^2\right)$ pontjában húzott érintő meredeksége egyenlő a parabola deriváltjának adott pontbeli értékével. Mivel az $f(x) = x^2$ függvény deriváltja $f'(x) = 2x$, ezért az $\left(x_0;\, x_0^2\right)$ pontban az érintő meredeksége $2 \cdot x_0$. A megadott $y = \dfrac{2}{3}x + 5$ egyenes meredeksége $m_1 = \dfrac{2}{3}$, a rá merőleges egyenes meredeksége $m_2 = \dfrac{-1}{m_1} = -\dfrac{3}{2}$, így $x_0 = -\dfrac{3}{4}$. Tehát a keresett pont a $\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{9}{16}\right)$, az érintő egyenlete pedig: $y = -\dfrac{3}{2} \cdot \left(x - \left(-\dfrac{3}{4}\right)\right) + \dfrac{9}{16} = -\dfrac{3}{2} \cdot x - \dfrac{9}{16}$.

8. Jellemezzük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ függvényt monotonitás, szélsőértékek, konvexitás és inflexiós pont szempontjából!

Megoldás: A függvény vizsgálatát az első és a második derivált segítségével végezzük el.

$f'(x) = x^2 - 4x - 5$, amelynek zérushelyei $x_1 = -1$ és $x_2 = 5$. Mivel f' képe egy felfelé nyíló parabola, ezért $f'(x) > 0$, ha $x < -1$ vagy $x > 5$, illetve $f'(x) < 0$, ha $-1 < x < 5$.

Tehát *f* menete a következő:

- *f* szigorúan monoton növekvő, ha $x < -1$ vagy $x > 5$
- *f* szigorúan monoton csökkenő, ha $-1 < x < 5$
- *f*-nek szigorú lokális maximuma van $x = -1$-ben, szigorú lokális minimuma $x = 5$-ben
- *f*-nek nincsenek abszolút szélsőértékei, ugyanis $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ és $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f''(x) = 2x - 4$, amelynek zérushelye $x = 2$. Mivel f'' képe egy pozitív meredekségű egyenes, ezért $f''(x) > 0$, ha $x > 2$, illetve $f''(x) < 0$, ha $x < 2$.

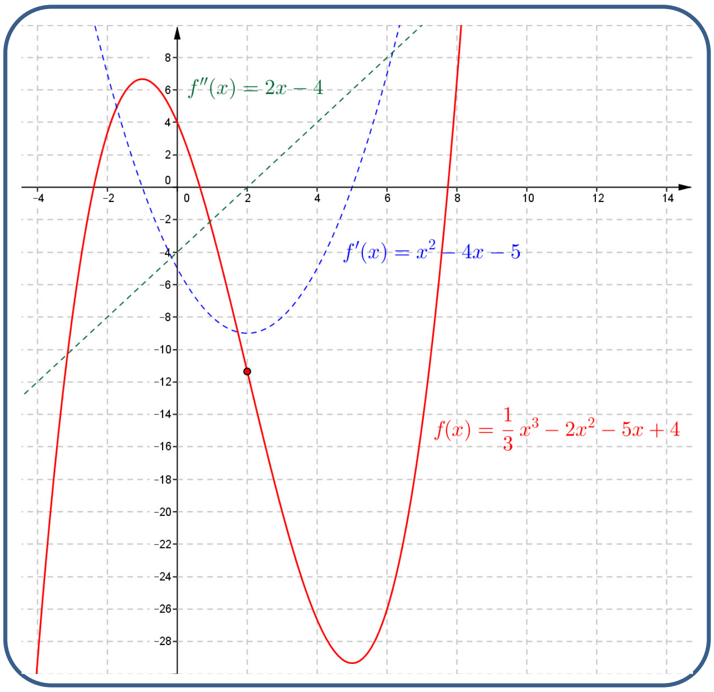
Tehát *f* görbülete a következő:

- *f* szigorúan konvex, ha $x > 2$

- f szigorúan konkáv, ha $x < 2$
- f-nek inflexiós pontja van $x = 2$-ben

Mindezt a következő táblázatban is összefoglalhatjuk:

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<2$	$x=2$	$2<x<5$	$x=5$	$x>5$
f'	+	0	–	–	–	0	+
f	↗	lok. max.		↘		lok. min.	↗
f''	–	–	–	0	+	+	+
f		konkáv		infl. pont		konvex	



9. A 100 cm^2 területű téglalapok közül melyiknek minimális a kerülete?

Megoldás: Jelölje a téglalap egyik oldalát centiméterben mérve x, ekkor a másik oldal hossza centiméterben mérve $\frac{100}{x}$, a téglalap kerülete $2\cdot\left(x+\frac{100}{x}\right)$, ahol $0<x$. Vagyis keressük a $k:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $k(x)=2\cdot\left(x+\frac{100}{x}\right)$ függvény minimumát. Mivel a k függvény a teljes értelmezési tartományán deriválható, és $k'(x)=2-\frac{200}{x^2}$, ezért a szélsőérték létezésének szükséges feltételeként a $2-\frac{200}{x^2}=0$ egyenletet kell megvizsgálnunk, amelynek pozitív megoldása $x=10$. Mivel $k''(x)=\frac{400}{x^3}$, így $k''(10)=\frac{4}{10}>0$, vagyis k-nak valóban szigorú lokális (és abszolút) minimuma van $x=10$-ben. Ekkor $\frac{100}{x}=10$, tehát a vizsgált téglalapok közül a minimális kerületű a 10 cm oldalú négyzet (amelynek kerülete 40 cm).

10. Egy pontszerű test egy egyenes vonalú pályán mozog az $s(t)=15-(5-t)(3-t)$ kitérési szabály szerint a 0 időponttól egészen addig, amíg a sebessége nullává nem válik. Mekkora utat tesz meg ezalatt?

Megoldás: A test pillanatnyi sebességét az $s'(t)$ függvény határozza meg. Mivel $s(t)=15-(15-8t+t^2)=-t^2+8t$, így $s'(t)=-2t+8$, ami akkor lesz 0, ha $t=4$. Ekkor $s(4)=15-(5-4)\cdot(3-4)=15+1=16$, tehát a test 16 egységnyi utat tesz meg a vizsgált időszakban.

11. Határozzuk meg a $[-2;1]$ intervallumon értelmezett $f(x)=x^3-2x$ függvény szélsőértékeit!

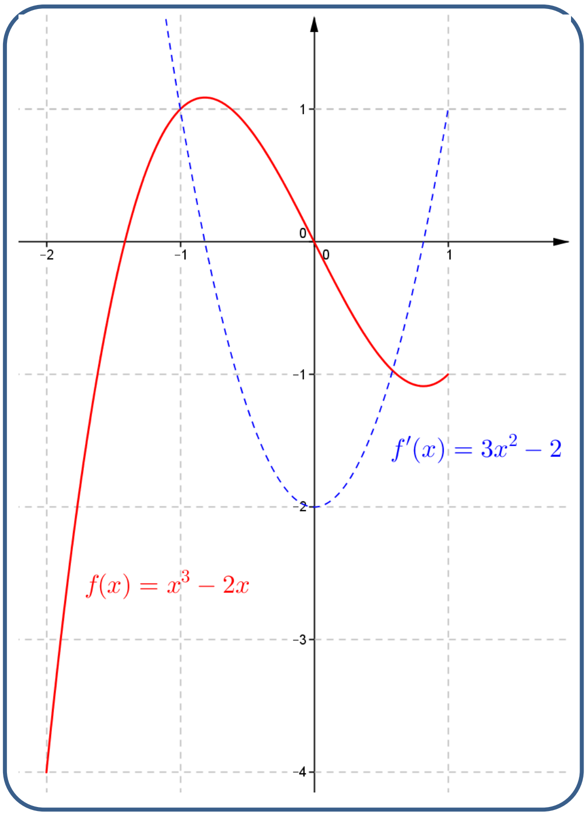
Megoldás: A függvény zárt intervallumon értelmezett, viszont deriválni csak belső pontokban, vagyis a $]-2;1[$ nyílt intervallum pontjaiban tudjuk (hiszen a különbségihányados-függvény határértékét bármely pontban mindkét oldalról kell tudnunk közelíteni). Ezekben a pontokban $f'(x)=3x^2-2$, amelynek zérushelyei $x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ és $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Az $f'(x)$ függvény x_1-ben pozitívból negatívba, x_2-ben negatívból pozitívba vált, emiatt x_1 szigorú lokális maximumhely, x_2 pedig szigorú lokális minimumhely.

Mivel a függvény a $\left[-2;-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ és a $\left[\sqrt{\frac{2}{3}};1\right]$ intervallumokon szigorúan monoton nő, továbbá a $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ intervallumon szigorúan monoton csökken, ezért az abszolút minimumhely csak a szigorú lokális minimumhely (x_2) vagy az értelmezési tartomány bal végpontja ($x=-2$) lehet. Ugyanígy az abszolút maximumhely csak a szigorú lokális maximumhely (x_1) vagy az értelmezési tartomány jobb végpontja ($x=1$) lehet.

Mivel $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\sqrt{\frac{8}{27}}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\approx-1{,}09$ és $f(-2)=-8+4=-4$, ezért az abszolút minimumhely $x=-2$.

Mivel $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\sqrt{\frac{8}{27}}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\approx1{,}09$ és $f(1)=1-2=-1$, ezért az abszolút maximumhely $x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Tehát a függvény minimumértéke -4, maximumértéke $-\sqrt{\frac{8}{27}}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\approx1{,}09$.



III. Ajánlott feladatok

1. Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (ha léteznek)!

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 - 9x}{x^2 + 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2x + 7}{x + 3}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1000}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 7}{x + 3}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

2. Adjunk meg olyan függvényt, amelynek van határértéke az $x_0 = 3$ helyen, de ott nem folytonos!

3. Folytonosak-e az alábbi függvények? (A függvények értelmezési tartománya legyen a valós számok azon lehető legbővebb részhalmaza, amelyre az adott kifejezés értelmezhető.)

$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $b(x) = \sin x + \sqrt{3^{\operatorname{tg} 2x}}$ $c(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$

4. Legyen $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 2, \text{ ha } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Mely pontban folytonos a függvény?

5. Adjunk meg olyan függvényt, amely mindenütt értelmezve van, és az $x_0 = 1$ helyen nem folytonos!

6. Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény $x_0 = a$ ponthoz tartozó differenciahányados-függvényét és differenciálhányadosát! Számítsuk ki a differenciálhányados (a-tól függő) értékét!

7. Adjunk meg olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényt, amely csak az $x_1=0$, az $x_2=1$ és az $x_3=2$ pontokban nem differenciálható!

8. Adjuk meg azokat a helyeket, ahol az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-5x+1$ függvény differenciálhányadosa 0 !

9. Deriváljuk az alábbi függvényeket! (A függvények értelmezési tartománya legyen a valós számok azon lehető legbővebb részhalmaza, amelyre az adott kifejezés értelmezhető.)

$a(x)=\sin(2x+3)$ $\quad$ $b(x)=(3x-5)^3$ $\quad$ $c(x)=\log_3(3x)$

$d(x)=2^x\cdot\sin\sqrt{x}$ $\quad$ $e(x)=\dfrac{x^3-5x^2+1}{x-4}$ $\quad$ $f(x)=x^x$

10. Az $y=x^2+4x-3$ parabola mely pontjához tartozó érintő megy át a $P(3;\,4)$ ponton?

11. Írjuk fel az $f(x)=3\cdot\cos x$ függvény grafikonjához a $\frac{\pi}{3}$ abszcisszájú pontjában húzható érintő egyenletét!

12. Van-e inflexiós pontja az $a(x)=\sin x$, $b(x)=\cos x$, $c(x)=\operatorname{tg} x$ függvényeknek? Ha igen, mely pontokban?

13. Jellemezzük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3+9x^2-15x+7$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sin 2x+2\cos x$ függvényt monotonitás, szélsőértékek, konvexitás és inflexiós pont szempontjából!

14. Határozzuk meg, hogy mely intervallumokon konvex, illetve konkáv az $y=x^5+5x+4$ egyenletű görbe!

15. Milyen hosszúak az élei annak a négyzetes hasábnak, amelynek térfogata 32 cm^3, és felszíne minimális?

16. Határozzuk meg a 10 cm sugarú körbe írt téglalapok közül a legnagyobb területűt!

17. Milyen értéket kell adnunk *m*-nek ahhoz, hogy az $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+4x+m}$ függvénynek ne legyen lokális szélsőértéke? (f -et a valós számhalmaz lehető legbővebb részhalmazán értelmezzük.)

18. Egy pont az $[1;\,5]$ időintervallumban egyenes pályán mozog, az $s(t)=2t^2+3t+5$ kitérési szabálynak megfelelően (az időt másodpercben, a kitérést méterben mérjük). Mekkora a mozgás átlagsebessége? Van-e olyan $t_0\in[1;\,5]$ időpont, amelyben a pillanatnyi sebesség egyenlő az átlagsebességgel?

19. A $[0;\,T]$ időintervallumban folyó harmonikus rezgőmozgás kitérés-időfüggvénye a következő: $f:[0;\,T]\to\mathbb{R}$, $f(t)=A\cdot\sin(\omega t)$, ahol *A* az amplitúdót, ω a körfrekvenciát jelölő konstans. Határozzuk meg a mozgás $g(t)$ gyorsulásfüggvényét, majd igazoljuk, hogy minden $t\in[0;\,T]$ esetén $g(t)=-\omega^2\cdot f(t)$!

20. Egy duatlon verseny rajtja egy egyenes tengerparton van, célja pedig a vízben. Az egyik lehetőség a táv teljesítésére, hogy először 4 km-t futunk közvetlenül a parton, majd 90°-kal elfordulva 1 km-t úszunk a tengerben. Azonban megengedett bármikor letérni a futópályáról, és úszni kezdeni a cél felé. A rajtvonaltól mérve mekkora távolságra érdemes beugrani a vízbe ahhoz, hogy minél hamarabb célba érjünk, ha a tengerparton 6 km/h, a vízben pedig 2 km/h a sebességünk?

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (ha léteznek)!

a) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-9x}{x^2+3x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+7}{x+3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1000}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{x+3}$ **e)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$

Megoldás:

a) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-9x}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x(x-3)(x+3)}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to-3}(x-3)=-6$.

b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+7}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\left(2+\dfrac{1}{x+3}\right)$ nem létezik, mert például az $a_n=-3+\dfrac{1}{n}$ sorozat mentén a függvényértékek sorozata $+\infty$-hez, a $b_n=-3-\dfrac{1}{n}$ sorozat mentén $-\infty$-hez tart.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1000}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1000}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}}=2$ (mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0$).

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}+1)=1+1=2$.

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}\right)=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$.

2. Adjunk meg olyan függvényt, amelynek van határértéke az $x_0=3$ helyen, de ott nem folytonos!

Megoldás: Jó megoldás például minden olyan $\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, amely egy $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény leszűkítéséből ($x\neq3$) adódik. Ilyenek például: $x\mapsto\dfrac{x\cdot(x-3)}{x-3}$ vagy

$x \mapsto \frac{x-3}{x-3}$. Ezek az $x_0 = 3$ helyen nem értelmezettek, így ott nem is lehetnek folytonosak, viszont van határértékük: $\lim_{x \to 3} \frac{x \cdot (x-3)}{x-3} = 3$ és $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$.

Szintén jó megoldás bármely olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek az $x_0 = 3$ pont szakadási helye, de minden más helyen folytonos. Ilyen például az $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 3 \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \end{cases}$ függvény. Ez $x_0 = 3$-ban nem folytonos, továbbá $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$.

3. Folytonosak-e az alábbi függvények? (A függvények értelmezési tartománya legyen a valós számok azon lehető legbővebb részhalmaza, amelyre az adott kifejezés értelmezhető.)

$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $b(x) = \sin x + \sqrt{3^{\operatorname{tg} 2x}}$ $\qquad$ $c(x) = \frac{x^2 - x}{x-1}$

Megoldás:

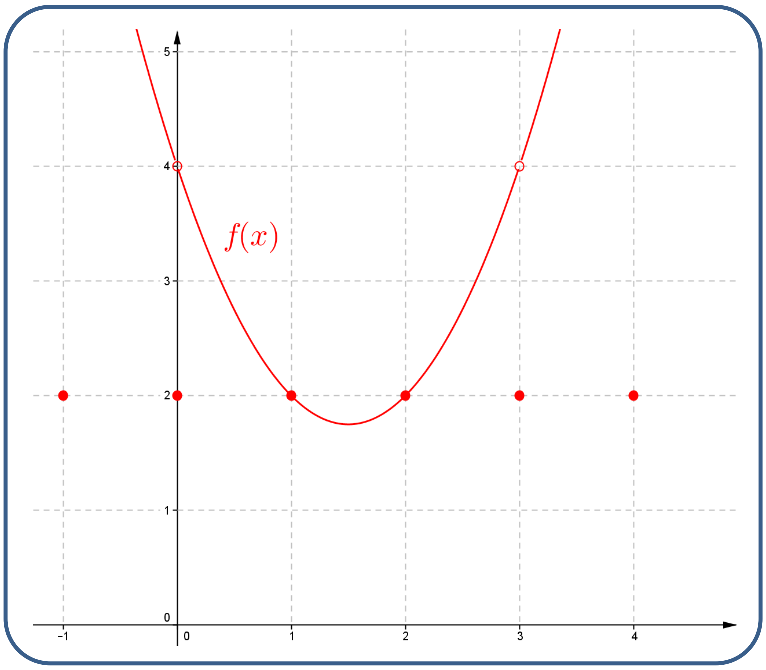
Az a függvény folytonos (értelmezési tartománya $x \in]0; +\infty[$).

A b függvény is folytonos, mert folytonos függvények összege és összetétele is folytonos (értelmezési tartománya a tangensfüggvény miatt $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$).

A c függvény szintén folytonos, értelmezési tartománya $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, és ott $c(x) = x$.

4. Legyen $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 2, & \text{ha } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Mely pontban folytonos a függvény?

Megoldás:



A függvény folytonos minden nem egész pontban, továbbá azon egész x_0 pontokban, amelyekre $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2-3x+4\right)=2$. Az $x^2-3x+4=2$ egyenlet megoldásai $x_1=1$ és $x_2=2$, így az *f* függvény az $x\in\left(\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\right)\cup\{1;\,2\}\right)$ pontokban folytonos.

5. Adjunk meg olyan függvényt, amely mindenütt értelmezve van, és az $x_0=1$ helyen nem folytonos!

Megoldás: Bármilyen olyan $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény megfelelő, amelynek $x_0=1$-beli határértéke vagy nem létezik, vagy nem egyezik meg az ott felvett függvényértékkel. Néhány lehetséges példa:

- $x\mapsto[x]$, $x\mapsto\{x\}$ (ezeknek nincs határértéke $x_0=1$-ben),
- $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x=1\\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\end{cases}$ (ennek van határértéke $x_0=1$-ben, de $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0\neq f(1)=1$).

6. Írjuk fel az $f(x)=\sin x$ függvény $x_0=a$ ponthoz tartozó differenciahányados-függvényét és differenciálhányadosát! Számítsuk ki a differenciálhányados (a-tól függő) értékét!

Megoldás: A differenciahányados-függvény: $x\mapsto\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. A differenciálhányados ennek határértéke $x_0=a$-ban, vagyis $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. Mivel $\sin x-\sin a=2\cdot\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\sin\dfrac{x-a}{2}$, így

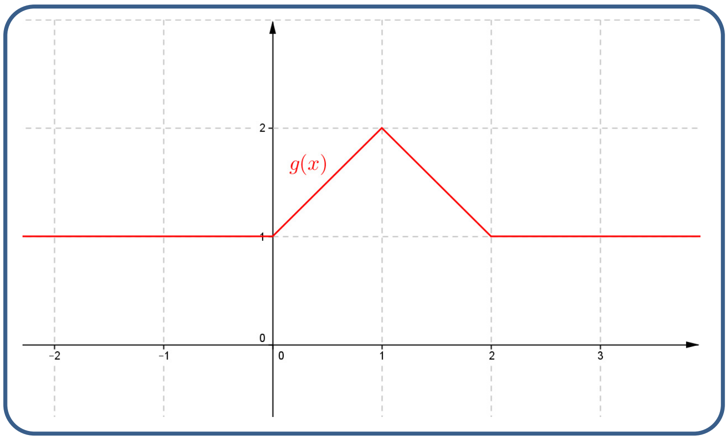
$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right)=\cos\frac{2a}{2}\cdot 1=\cos a.$$

Vagyis az a pontban a differenciálhányados értéke $\cos a$. (Ezzel levezettük a $\sin'(x)=\cos x$ összefüggést.)

7. Adjunk meg olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényt, amely csak az $x_1=0$, az $x_2=1$ és az $x_3=2$ pontokban nem differenciálható!

Megoldás: Az $f(x)=|x|$ függvény nem differenciálható a 0-ban (mivel a differenciahányados-függvény határértéke balról közelítve -1, jobbról közelítve $+1$ lenne, vagyis nem létezik). Ezek alapján jó megoldás például minden olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, amely az $x_1=0$, az $x_2=1$ és az $x_3=2$ pontokban „megtörik”, például az $f(x)=\big||x-1|-1\big|$ függvény.

További megfelelő függvényeket készíthetünk szakaszonkénti megadással, amennyiben ezek a végpontokban különböző meredekségű érintőkkel csatlakoznak. Erre példa a következő függvény: $g(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x<0\\ x+1, & \text{ha } 0\le x<1\\ 3-x, & \text{ha } 1\le x<2\\ 1, & \text{ha } 2\le x\end{cases}$.



8. Adjuk meg azokat a helyeket, ahol az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-5x+1$ függvény differenciálhányadosa 0 !

Megoldás: Az *f* függvény *x* helyen vett differenciálhányadosa $f'(x)=x^2-2x-5$, ez akkor vesz fel 0 értéket, ha $x_1=1-\sqrt{6}$ vagy $x_2=1+\sqrt{6}$.

9. Deriváljuk az alábbi függvényeket! (A függvények értelmezési tartománya legyen a valós számok azon lehető legbővebb részhalmaza, amelyre az adott kifejezés értelmezhető.)

$a(x)=\sin(2x+3)$ $\quad$ $b(x)=(3x-5)^3$ $\quad$ $c(x)=\log_3(3x)$

$d(x)=2^x\cdot\sin\sqrt{x}$ $\quad$ $e(x)=\dfrac{x^3-5x^2+1}{x-4}$ $\quad$ $f(x)=x^x$

Megoldás:

$a'(x)=\cos(2x+3)\cdot 2$.

$b'(x)=3\cdot(3x-5)^2\cdot 3=9\cdot(3x-5)^2$, vagy a $b(x)=27x^3-135x^2+225x-125$ alakból kiindulva $b'(x)=81x^2-270x+225$ (természetesen a két végeredmény ugyanaz).

$c'(x)=\dfrac{1}{3x\cdot\ln 3}\cdot 3=\dfrac{1}{x\cdot\ln 3}$, vagy a $c(x)=\log_3 3+\log_3 x$ alakból kiindulva $c'(x)=0+\dfrac{1}{x\cdot\ln 3}$.

$$d'(x)=\left(2^x\cdot\ln 2\right)\cdot\sin\sqrt{x}+2^x\cdot\left(\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=2^x\cdot\ln 2\cdot\sin\sqrt{x}+\frac{2^{x-1}\cdot\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$e'(x)=\frac{\left(3x^2-10x\right)\cdot(x-4)-\left(x^3-5x^2+1\right)\cdot 1}{(x-4)^2}=\frac{2x^3-17x^2+40x-1}{(x-4)^2}.$$

$f(x)=x^x$ esetében nem alkalmazhatjuk sem a hatvány-, sem az exponenciális függvény deriválási szabályát, hiszen az *x* változó a hatvány alapjában és kitevőjében is szerepel. Azonban az $x=e^{\ln x}$ átalakítással $f(x)=\left(e^{\ln x}\right)^x=e^{x\cdot\ln x}$, így $f'(x)=e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x\cdot(\ln x+1)$.

10. Az $y = x^2 + 4x - 3$ parabola mely pontjához tartozó érintő megy át a $P(3;\,4)$ ponton?

Megoldás: Mivel az $f(x) = x^2 + 4x - 3$ függvény deriváltja $f'(x) = 2x + 4$, így a parabola $(x_0;\, y_0)$ pontjában az érintő meredeksége $m = 2x_0 + 4$. Mivel $y_0 = x_0^2 + 4x_0 - 3$, ezért az érintőegyenes egyenlete (behelyettesítve az $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ képletbe): $2x_0 + 4 = \dfrac{y - \left(x_0^2 + 4x_0 - 3\right)}{x - x_0}$.

Ha az érintő átmegy a $P(3;\,4)$ ponton, akkor $2x_0 + 4 = \dfrac{4 - \left(x_0^2 + 4x_0 - 3\right)}{3 - x_0}$ teljesül. Ez x_0-ra egy másodfokú egyenlet, amelyből $(x_0)_1 = 3 - \sqrt{14}$ és $(x_0)_2 = 3 + \sqrt{14}$ adódik. Ezekhez az $y_0 = x_0^2 + 4x_0 - 3$ összefüggésből $(y_0)_1 = 32 - 10\sqrt{14}$ és $(y_0)_2 = 32 + 10\sqrt{14}$ tartozik. Vagyis a parabola $\left(3 - \sqrt{14};\, 32 - 10\sqrt{14}\right)$ és $\left(3 + \sqrt{14};\, 32 + 10\sqrt{14}\right)$ pontjához tartozó érintők mennek át a $P(3;\,4)$ ponton.

11. Írjuk fel az $f(x) = 3 \cdot \cos x$ függvény grafikonjához a $\dfrac{\pi}{3}$ abszcisszájú pontjában húzható érintő egyenletét!

Megoldás: Mivel $f'(x) = -3 \cdot \sin x$, így az $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$-ban $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -3 \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ az érintő meredeksége. Mivel $y_0 = f(x_0) = 3 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$, így az érintő egyenlete (behelyettesítve az $y = m \cdot (x - x_0) + y_0$ képletbe): $y = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{\sqrt{3} \cdot \pi + 3}{2}$.

12. Van-e inflexiós pontja az $a(x) = \sin x$, $b(x) = \cos x$, $c(x) = \operatorname{tg} x$ függvényeknek? Ha igen, mely pontokban?

Megoldás: A függvények második deriváltjainak zérushelyeit vizsgáljuk előjelváltás szempontjából.

$a''(x) = -\sin x$, ennek zérushelyei: $x \in \left\{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ezek mind inflexiós pontok, ugyanis a második derivált itt előjelet vált.

$b''(x) = -\cos x$, ennek zérushelyei: $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ezek mind inflexiós pontok, ugyanis a második derivált itt előjelet vált.

$c''(x) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)' = \dfrac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x}$, ennek zérushelyei: $x \in \left\{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ezek mind inflexiós pontok, ugyanis a második derivált itt előjelet vált (a számláló előjelet vált, a nevező nem).

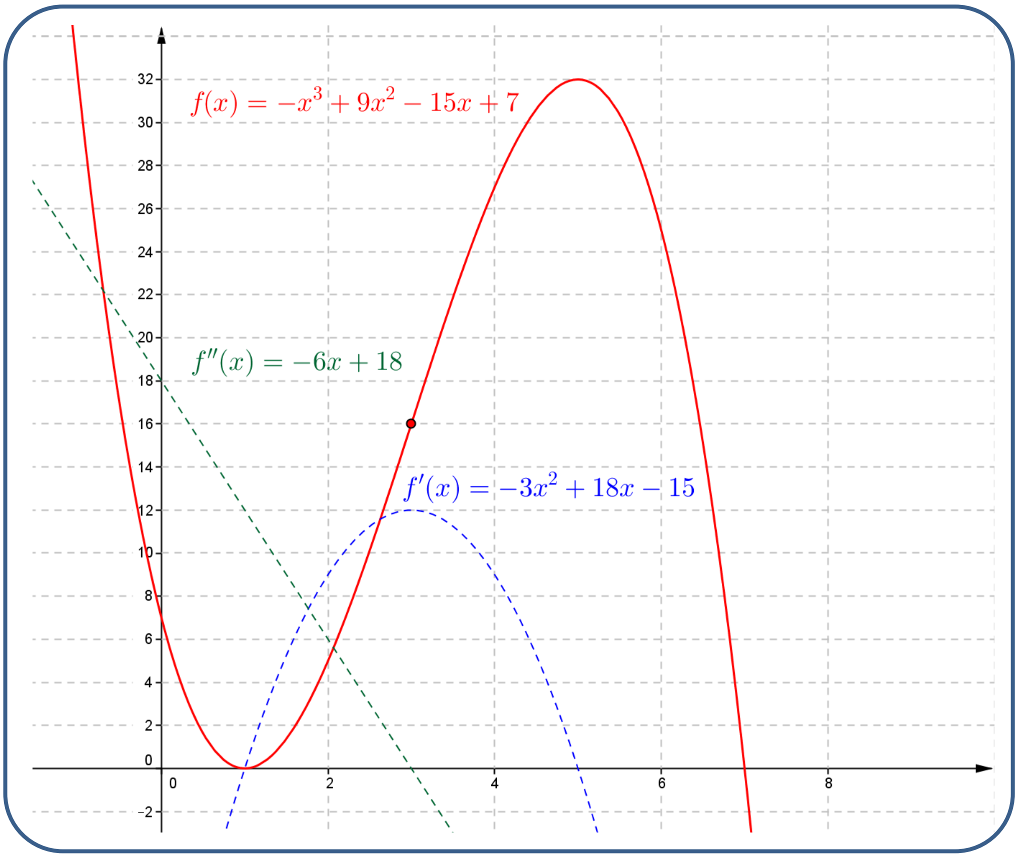
13. Jellemezzük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$ és a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin 2x + 2\cos x$ függvényt monotonitás, szélsőértékek, konvexitás és inflexiós pont szempontjából!

Megoldás: $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$, ennek zérushelyei $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$. A két zérushely között f' pozitív, az x_1-nél kisebb és az x_2-nél nagyobb helyeken negatív. Tehát *f* szigorúan monoton csökken a $]-\infty; 1]$ és $[5; +\infty[$ intervallumokon, illetve szigorúan monoton nő az $[1; 5]$ intervallumon. A függvénynek szigorú lokális minimuma van $x = 1$-ben (itt $f(x) = 0$), illetve szigorú lokális maximuma van $x = 5$-ben (itt $f(x) = 32$). Abszolút szélsőértékei nincsenek, ugyanis $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ és $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

$f''(x) = -6x + 18$, ennek zérushelye $x = 3$. Az $x \leq 3$ helyeken f'' nemnegatív, az $x \geq 3$ helyeken f'' nempozitív. Tehát *f* konvex a $]-\infty; 3]$ intervallumon, illetve konkáv a $[3; +\infty[$ intervallumon. A függvénynek inflexiós pontja van $x = 3$-ban.

Táblázatban összefoglalva:

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
f'	–	0	+	+	+	0	–
f	↘	lok. min.	↗			lok. max.	↘
f''	+	+	+	0	–	–	–
f	konvex			infl. pont	konkáv		

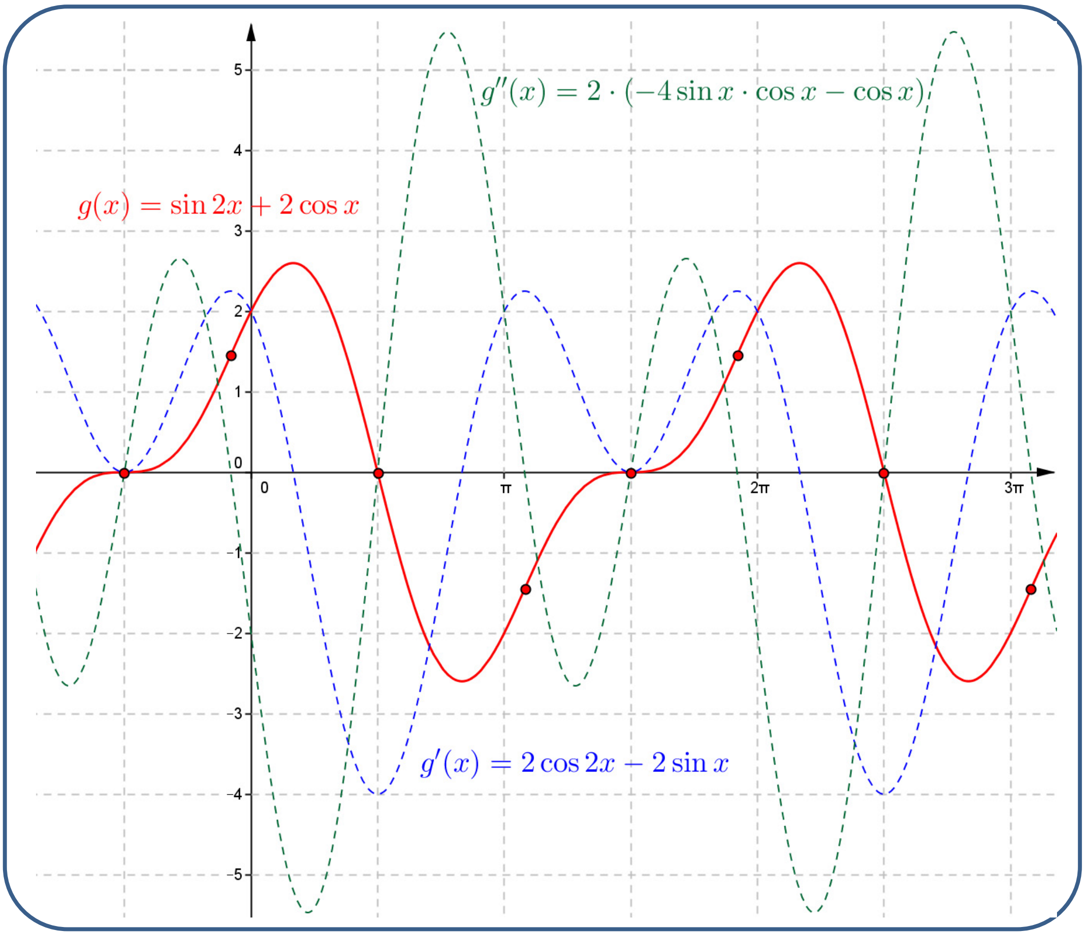


$g'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x = 2\cdot\left(\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x\right) = 2\cdot\left(-2\sin^2 x - \sin x + 1\right)$. Ez a kifejezés $\sin x$-ben másodfokú és negatív főegyütthatójú, zérushelyeire $\sin x_1 = -1$ és $\sin x_2 = \frac{1}{2}$ teljesül. Az első esetben $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$, a második esetben $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$, illetve $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Tudjuk, hogy $g'(x) > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $-1 < \sin x < \frac{1}{2}$, vagyis $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi + 2k\pi \ \left(x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$, illetve $g'(x) < 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\sin x > \frac{1}{2}$, vagyis $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Tehát g szigorúan monoton csökken a $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ intervallumokon, illetve szigorúan monoton nő az $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right] \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ intervallumokon. A függvénynek szigorú lokális minimuma van az $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ helyeken (itt $g(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$), szigorú lokális maximuma van az $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ helyeken (itt $g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$). Mivel a g függvény minden valós számra értelmezett periodikus függvény (periódusa 2π), ezért a szigorú lokális szélsőértékek egyben abszolút szélsőértékek is, tehát a függvény abszolút minimuma $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, abszolút maximuma $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. (Az $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ helyeken $g'(x) = 0$, de a derivált nem vált előjelet, így ezek nem szélsőértékhelyek.)

$g''(x) = 2\cdot\left(-4\sin x\cdot\cos x - \cos x\right) = -2\cos x\cdot\left(4\sin x + 1\right)$, ennek zérushelyeire $\cos x_1 = 0$ és $\sin x_2 = -\frac{1}{4}$ teljesül. Az első esetben $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$, a második esetben $x_2 \approx -0{,}253 + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$, illetve $x_3 = \pi - x_2 \approx 3{,}395 + 2k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Mindhárom zérushelyen g'' előjelet váltva 0, tehát az $x_1,\ x_2,\ x_3$ helyeken g-nek inflexiós pontja van.

$g''(x) \geq 0$, ha $\cos x \geq 0$ és $4\cdot\sin x + 1 \leq 0$, illetve $\cos x \leq 0$ és $4\cdot\sin x + 1 \geq 0$. Ezeknek feltételeknek a $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -0{,}253 + 2k\pi\right] \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ és a $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 3{,}395 + 2k\pi\right] \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ intervallumok tesznek eleget, ezen intervallumokon g konvex.

$g''(x) \leq 0$, ha $\cos x \geq 0$ és $4\cdot\sin x + 1 \geq 0$, illetve $\cos x \leq 0$ és $4\cdot\sin x + 1 \leq 0$. Ezeknek a feltételeknek a $\left[-0{,}253 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ és a $\left[3{,}395 + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ intervallumok tesznek eleget, ezen intervallumokon g konkáv.



14. Határozzuk meg, hogy mely intervallumokon konvex, illetve konkáv az $y = x^5 + 5x + 4$ egyenletű görbe!

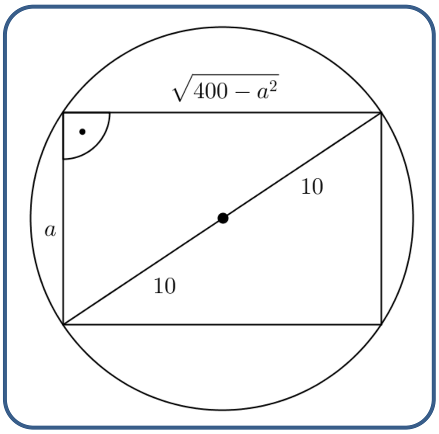
Megoldás: Az $f(x) = x^5 + 5x + 4$ függvény második deriváltja $f''(x) = 20x^3$. $f''(x) \geq 0$, ha $x \geq 0$ és $f''(x) \leq 0$, ha $x \leq 0$. Tehát az eredeti függvény konkáv a $]-\infty; 0]$ intervallumon, illetve konvex a $[0; +\infty[$ intervallumon (továbbá 0-ban a függvénynek inflexiós pontja van).

15. Milyen hosszúak az élei annak a négyzetes hasábnak, amelynek térfogata 32 cm^3, és felszíne minimális?

Megoldás: Legyen a hasáb alapélének hossza (centiméterben mérve) a, ekkor a magassága (centiméterben mérve) $\frac{32}{a^2}$. A test felszíne a függvényében: $A(a) = 2a^2 + 4a \cdot \frac{32}{a^2} = 2a^2 + \frac{128}{a}$, ahol $a > 0$. Az A függvény a teljes értelmezési tartományán deriválható, továbbá a deriváltja $A'(a) = 4a - \frac{128}{a^2}$, ennek zérushelye $a = \sqrt[3]{32}$. Mivel $A''(a) = 4 + \frac{256}{a^3}$, így $A''\left(\sqrt[3]{32}\right) > 0$, tehát A-nak valóban szigorú lokális (és abszolút) minimuma van $a = \sqrt[3]{32}$-ben. Így a keresett hasáb egy $\sqrt[3]{32}$ cm élhosszúságú kocka (amelynek felszíne $6 \cdot \left(\sqrt[3]{32}\right)^2$ cm^2).

16. Határozzuk meg a 10 cm sugarú körbe írt téglalapok közül a legnagyobb területűt!

Megoldás: Legyen a téglalap egyik oldalának hossza (centiméterben mérve) a. Mivel a téglalap átlója a kör átmérője (vagyis 20 cm hosszú), ezért a Pitagorasz-tétel alapján a téglalap másik oldalának hossza ekkor $\sqrt{400-a^2}$.



A terület a függvényében: $T(a)=a\cdot\sqrt{400-a^2}$, ahol $0<a<20$, hiszen mindkét oldal biztosan rövidebb az átmérőnél. A T függvény a teljes értelmezési tartományán deriválható, és $T'(a)=\sqrt{400-a^2}+a\cdot\frac{-2a}{2\sqrt{400-a^2}}=\sqrt{400-a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{400-a^2}}$, ennek zérushelyeit az $a^2=200$ egyenlet megoldásai adják, amiből az értelmezési tartomány miatt $a=10\sqrt{2}$ adódik.

A deriváltfüggvény közös nevezőre hozva $T'(a)=\frac{400-2a^2}{\sqrt{400-a^2}}$ alakú. Ennek nevezője $0<a<20$ esetén biztosan pozitív, számlálója pedig egy lefelé nyíló parabola, amely $0<a<10\sqrt{2}$ esetén pozitív, $10\sqrt{2}<a<20$ esetén negatív. Így a T' függvény $a=10\sqrt{2}$-ben pozitívból negatívba váltva 0, ezért a T függvénynek valóban szigorú lokális (és abszolút) maximuma van $a=10\sqrt{2}$ esetén, ekkor a másik oldal is $10\sqrt{2}$ cm hosszúságú. Tehát a legnagyobb területű téglalap egy $10\sqrt{2}$ cm oldalhosszúságú négyzet, amelynek területe 200 cm^2.

Megjegyzés: A szélsőérték egyszerűbben is meghatározható, ugyanis a $T(a)=a\cdot\sqrt{400-a^2}$ függvény $0<a<20$ esetén pozitív, így maximumát ugyanott veszi fel, ahol a négyzete, vagyis az $F(a)=T^2(a)=a^2\cdot\left(400-a^2\right)$ függvény. Ekkor a deriválás rövidebb: $F'(a)=-4a^3+800a$, így a $-4a^3+800a=0$ egyenlet megoldásait ($a_1=0$, $a_{2,3}=\pm10\sqrt{2}$) az értelmezési tartomány-nyal összevetve szintén $a=10\sqrt{2}$ lesz a maximumhely (igazolható, hogy itt F' valóban pozitív-ból negatívba vált). Természetesen a maximum értékét nem a vizsgált F, hanem az eredeti T függvénybe helyettesítve kapjuk.

17. Milyen értéket kell adnunk m-nek ahhoz, hogy az $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x^2+4x+m}$ függvénynek ne legyen lokális szélsőértéke? (f -et a valós számhalmaz lehető legbővebb részhalmazán értelmezzük.)

Megoldás: Ha az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke, akkor deriváltja sehol nem vált előjelet, tehát az f' függvény végig azonos előjelű (a 0 érték is megengedett). A derivált:

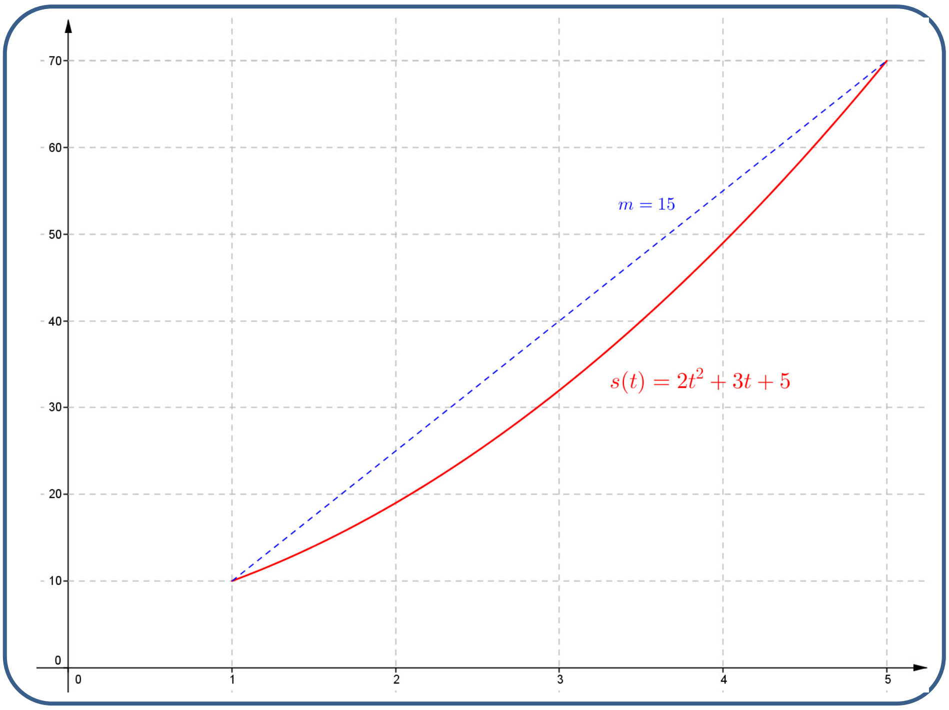
$$f'(x)=\frac{(2x-6)\cdot\left(x^2+4x+m\right)-\left(x^2-6x+5\right)\cdot(2x+4)}{\left(x^2+4x+m\right)^2}=\frac{10x^2+(2m-10)x-(6m+20)}{\left(x^2+4x+m\right)^2},$$

amely értelmezve van az f függvény teljes értelmezési tartományán. Mivel a nevező biztosan pozitív (esetleges zérushelyein f sincsen értelmezve), így f' előjelét a számláló előjele határozza meg. A számláló egy másodfokú függvény, amely akkor és csak akkor nem vált előjelet, ha legfeljebb egy gyöke van, vagyis diszkriminánsa nempozitív (0 vagy negatív). Tehát $D=(2m-10)^2+40\cdot(6m+20)=4m^2+200m+900\le 0$, amely m-ben másodfokú, pozitív főegyütthatójú kifejezés, gyökei $m_1=-45$ és $m_2=-5$. A kifejezés a két gyök között negatív, így a keresett m értékek a $[-45;-5]$ intervallumban találhatóak. Minden más esetben a derivált előjelet vált, ekkor az eredeti függvénynek lokális szélsőértéke lenne. Vagyis az f függvénynek $-45\le m\le -5$ esetén nincsen lokális szélsőértéke.

18. Egy pont az $[1;\,5]$ időintervallumban egyenes pályán mozog, az $s(t)=2t^2+3t+5$ kitérési szabálynak megfelelően (az időt másodpercben, a kitérést méterben mérjük). Mekkora a mozgás átlagsebessége? Van-e olyan $t_0\in[1;\,5]$ időpont, amelyben a pillanatnyi sebesség egyenlő az átlagsebességgel?

Megoldás: Mivel $s'(t)=4t+3>0$, ha $t\in[1;\,5]$, ezért a kitérésfüggvény a megadott intervallumban szigorúan monoton növő, így a pont folyamatosan egy irányba halad (távolodik) a pályán. Így a megtett út $\Delta s=s(5)-s(1)=70-10=60$ méter, az eltelt idő $\Delta t=5-1=4$ másodperc. Emiatt a mozgás átlagsebessége $v_{átl}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{60\text{ m}}{4\text{ s}}=15\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, amely megfelel az $s(t)$ függvénygrafikonon a mozgás kezdő- és végpontját összekötő szakasz meredekségének.

A pillanatnyi sebesség értéke $v(t)=s'(t)=4t+3$, ez a $4t+3=15$ egyenlet alapján a $t_0=3$ időpontban lesz egyenlő az átlagsebességgel.



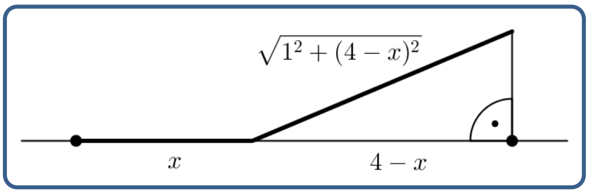
Megjegyzés: A megoldásból megkaptuk, hogy az $s(t)$ görbe $(3;\,32)$ pontbeli érintője párhuzamos a görbe $(1;\,10)$ és $(5;\,70)$ pontjain átmenő szelővel.

19. A $[0;T]$ időintervallumban folyó harmonikus rezgőmozgás kitérés-időfüggvénye a következő: $f:[0;T]\to\mathbb{R}$, $f(t)=A\cdot\sin(\omega t)$, ahol A az amplitúdót, ω a körfrekvenciát jelölő konstans. Határozzuk meg a mozgás $g(t)$ gyorsulásfüggvényét, majd igazoljuk, hogy minden $t\in[0;T]$ esetén $g(t)=-\omega^2\cdot f(t)$!

Megoldás: $f'(t)=A\cdot\cos(\omega t)\cdot\omega$ és $f''(t)=A\cdot\omega\cdot(-\sin(\omega t))\cdot\omega$**.** Mivel a gyorsulás megegyezik a második deriválttal, így $g(t)=f''(t)=-\omega^2\cdot A\cdot\sin(\omega t)=-\omega^2\cdot f(t)$.

20. Egy duatlon verseny rajtja egy egyenes tengerparton van, célja pedig a vízben. Az egyik lehetőség a táv teljesítésére, hogy először 4 km-t futunk közvetlenül a parton, majd 90°-kal elfordulva 1 km-t úszunk a tengerben. Azonban megengedett bármikor letérni a futópályáról, és úszni kezdeni a cél felé. A rajtvonaltól mérve mekkora távolságra érdemes beugrani a vízbe ahhoz, hogy minél hamarabb célba érjünk, ha a tengerparton 6 km/h, a vízben pedig 2 km/h a sebességünk?

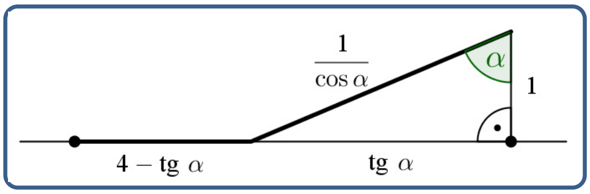
Megoldás: Jelölje a parton megtett távolság hosszát kilométerben mérve x, ahol $0\le x\le 4$. Ekkor a vízben megtett út egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói 1 és $4-x$ hosszúságúak, így a teljes megtett út hossza $x+\sqrt{1^2+(4-x)^2}$ km.



Tudjuk, hogy egyenes vonalú egyenletes mozgásnál az eltelt idő a megtett út és a sebesség hányadosa. Így a futás és az úszás együttes ideje $t(x)=\dfrac{x}{6}+\dfrac{\sqrt{1^2+(4-x)^2}}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{\sqrt{x^2-8x+17}}{2}$ óra, ezt a t függvényt szeretnénk minimalizálni a vizsgált $[0;4]$ intervallumon (itt a gyökös kifejezés valóban értelmezve van). Az intervallum végpontjaiban $t(0)=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$, illetve $t(4)=\dfrac{7}{6}$.

A deriváltfüggvény $t'(x)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{2x-8}{4\sqrt{x^2-8x+17}}$, ennek zérushelyeit az $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2x-8}{4\sqrt{x^2-8x+17}}=0$ egyenlet megoldásai adják. Az egyenlet $6\cdot(2x-8)=-4\cdot\sqrt{x^2-8x+17}$ alakját 4-gyel elosztva, majd négyzetre emelve a $9x^2-72x+144=x^2-8x+17$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $x_1=4-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ és $x_2=4+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Ezek közül x_1 valóban megoldás, x_2 viszont nincs az értelmezési tartományban. Mivel a második derivált $t''(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{(x^2-8x+17)^3}}$, amely x_1-ben pozitív, így x_1-ben a t függvénynek valóban szigorú lokális minimuma van, és ott $t\left(4-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}$. Ez kisebb a $t(0)$ és $t(4)$ értékeknél, így a t függvény az értelmezési tartományán az abszolút minimumát $x_1 = 4 - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 3,65$ -ben veszi fel. Vagyis a rajttól mérve kb. 3,65 km megtétele után érdemes beugrani a vízbe.

Másképpen: Megtehetjük, hogy nem távolságot, hanem szöget választunk ismeretlennek. Jelölje az ábrán megadott szöget α, ahol $0° < \alpha < 90°$. Ekkor a vízben megtett út hossza $\frac{1}{\cos\alpha}$, a szárazföldön megtett út hossza pedig $4 - \operatorname{tg}\alpha$.



Az előző megoldásban leírtak alapján most a $t(\alpha) = \frac{4 - \operatorname{tg}\alpha}{6} + \frac{1}{2\cos\alpha}$ függvény minimumát keressük a $0° < \alpha < 90°$ nyílt intervallumon. A deriváltfüggvény $t'(\alpha) = -\frac{1}{6\cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}$, ennek zérushelyét $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ esetén kapjuk. Itt a derivált negatívról pozitívra vált, tehát valóban minimumot kapunk. Továbbá $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, így $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, amiből a szárazföldön megtett útszakasz hosszára szintén $4 - \frac{\sqrt{2}}{4}$ km-t kapunk.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (ha léteznek)!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2}{10x^2 + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x - 10}{x^2 - 10x + 25}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

2. Folytonosak-e a következő függvények az $x_0 = -3$ pontban?

$a(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ $b(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{ha } x < -3 \\ 3 - x, & \text{ha } x \geq -3 \end{cases}$ $c(x) = \left[\frac{3x + 10}{2}\right]$

3. Legyen $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & \text{ha } x \leq 2 \\ x + b, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$. Adjuk meg b értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen!

4. Soroljuk fel az összes olyan x értéket, amely x pontokban az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\left||x - 2| - 2\right| - 2\right|$ függvény nem differenciálható!

5. Deriváljuk az alábbi függvényeket! (A függvények értelmezési tartománya legyen a valós számok azon lehető legbővebb részhalmaza, amelyre az adott kifejezés értelmezhető.)

$a(x)=\left(1+2x-x^2\right)^3$ $\quad$ $b(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ $\quad$ $c(x)=\dfrac{x^2}{2x-8}$

$d(x)=\sqrt[3]{\cos x}$ $\quad$ $e(x)=2^{(\sin 2x-\cos 2x)^2}$ $\quad$ $f(x)=e^{x^3-1}\cdot 3^{x+1}$

6. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$ egyenletű görbe azon pontjait, amelyekhez tartozó érintők párhuzamosak az x tengellyel!

7. Mely pontokban van inflexiós pontja az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2(x)$ függvénynek?

8. Határozzuk meg k értékét úgy, hogy az $f(x)=k\cdot x^2-\ln x$ ($x>0$) függvény $x=3$ koordinátájú pontjába húzott érintőjének meredeksége 2 legyen! Írjuk fel az érintő egyenletét!

9. Jellemezzük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+2x^2-7$ függvényt monotonitás, szélsőértékek, konvexitás és inflexiós pont szempontjából!

10. Osszuk fel a 4-et két pozitív részre úgy, hogy az első rész négyzetének és a második rész köbének az összege minimális legyen!

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (ha léteznek)!

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2}{10x^2+1}$ $\quad$ **b)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{x^2-10x+25}$ $\quad$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

Megoldás:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2}{10x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-\frac{2}{x^2}}{10+\frac{1}{x^2}}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{x^2-10x+25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2(x-5)}{(x-5)^2}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2}{x-5}$, ami nem létezik, hiszen az $a_n=5+\frac{1}{n}$ sorozatra $+\infty$, míg a $b_n=5-\frac{1}{n}$ sorozatra $-\infty$ lenne a felvett függvényértékek sorozatának határértéke.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

2. Folytonosak-e a következő függvények az $x_0 = -3$ pontban?

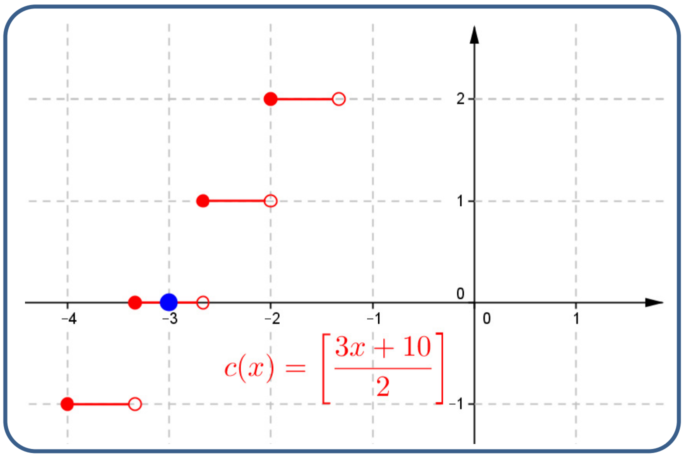
$$a(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3} \qquad b(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{ha } x < -3 \\ 3-x, & \text{ha } x \geq -3 \end{cases} \qquad c(x) = \left[\frac{3x+10}{2}\right]$$

Megoldás:

a nem folytonos $x_0 = -3$-ban, mivel ott nincsen értelmezve.

b nem folytonos $x_0 = -3$-ban, mivel $b(-3) = 3-(-3) = 6 \neq \lim\limits_{x \to -3}(2x+3) = -3$.

c folytonos $x_0 = -3$-ban, mivel $[x]$ csak az egész helyeken szakad, minden más helyen folytonos, így c szakadási pontjai: $\left\{\frac{2k-10}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, viszont a -3 nem ilyen alakú.

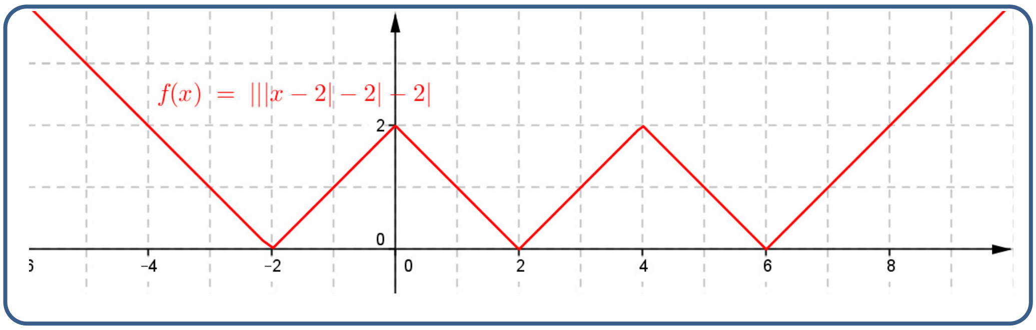


3. Legyen $f(x) = \begin{cases} x^2-6x+11, & \text{ha } x \leq 2 \\ x+b, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$. Adjuk meg b értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen!

Megoldás: $\lim\limits_{x \to 2}(x+b) = 2+b$, a folytonosság esetén $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3$, vagyis $2+b=3$, ahonnan $b=1$.

4. Soroljuk fel az összes olyan x értéket, amely x pontokban az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\left||x-2|-2\right|-2\right|$ függvény nem differenciálható!

Megoldás: Függvénytranszformációk segítségével ábrázolhatjuk f-et:



Az ábráról leolvasható, hogy a függvénygrafikonhoz nem húzható érintő az $x \in \{-2; 0; 2; 4; 6\}$ helyeken, így a keresett x értékek: $-2; 0; 2; 4; 6$.

5. Deriváljuk az alábbi függvényeket! (A függvények értelmezési tartománya legyen a valós számok azon lehető legbővebb részhalmaza, amelyre az adott kifejezés értelmezhető.)

$a(x)=(1+2x-x^2)^3$ $\qquad b(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ $\qquad c(x)=\dfrac{x^2}{2x-8}$

$d(x)=\sqrt[3]{\cos x}$ $\qquad e(x)=2^{(\sin 2x-\cos 2x)^2}$ $\qquad f(x)=e^{x^3-1}\cdot 3^{x+1}$

Megoldás:

$a'(x)=3\cdot(1+2x-x^2)^2\cdot(-2x+2)$, vagy $a(x)=-x^6+6x^5-9x^4-4x^3+9x^2+6x+1$ alapján $a'(x)=-6x^5+30x^4-36x^3-12x^2+18x+6$.

$b'(x)=2\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)$, vagy $b(x)=\sin 2x$ alapján $b'(x)=2\cdot\cos 2x=2\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)$.

$$c'(x)=\frac{2x\cdot(2x-8)-x^2\cdot 2}{(2x-8)^2}=\frac{2x^2-16x}{(2x-8)^2}=\frac{x^2-8x}{2\cdot(x-4)^2}.$$

$$d'(x)=\frac{-\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$$

$e'(x)=2^{(\sin 2x-\cos 2x)^2}\cdot\ln 2\cdot 2\cdot(\sin 2x-\cos 2x)\cdot(2\cos 2x+2\sin 2x)$, a $\cos^2 2x-\sin^2 2x=\cos 4x$ átalakítás alapján $e'(x)=2^{(\sin 2x-\cos 2x)^2}\cdot(-4)\cdot\cos 4x\cdot\ln 2$.

$f'(x)=e^{x^3-1}\cdot 3x^2\cdot 3^{x+1}+e^{x^3-1}\cdot 3^{x+1}\cdot\ln 3=e^{x^3-1}\cdot 3^{x+1}\cdot(3x^2+\ln 3)$.

6. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$ egyenletű görbe azon pontjait, amelyekhez tartozó érintők párhuzamosak az x tengellyel!

Megoldás: Az $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$ függvény deriváltja $f'(x)=x^2-4x+3$. Az x tengellyel párhuzamos egyenesek meredeksége 0, így $f'(x)=0$ alapján $x_1=1$ és $x_2=3$. Mivel $f(x_1)=-\frac{11}{3}$ és $f(x_2)=-5$, ezért a keresett két pont: $\left(1; -\frac{11}{3}\right)$ és $(3; -5)$. ($f(1)$ és $f(3)$ egyben a függvény lokális szélsőértékei is.)

7. Mely pontokban van inflexiós pontja az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2(x)$ függvénynek?

Megoldás: $f'(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$ és $f''(x)=2\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cdot\cos 2x$, ennek zérushelyei: $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ezekben $f\,''$ előjelet váltva 0, így ezek mindegyike valóban inflexiós pont.

8. Határozzuk meg k értékét úgy, hogy az $f(x) = k \cdot x^2 - \ln x$ ($x > 0$) függvény $x = 3$ koordinátájú pontjába húzott érintőjének meredeksége 2 legyen! Írjuk fel az érintő egyenletét!

Megoldás: $f\,'(x) = 2k \cdot x - \frac{1}{x}$, így az $x = 3$-beli érintő meredeksége $f\,'(3) = 6k - \frac{1}{3}$. A feltételből $6k - \frac{1}{3} = 2$, innen $k = \frac{7}{18}$. A vizsgált pont y koordinátája $\frac{7}{18} \cdot 3^2 - \ln 3 = 3{,}5 - \ln 3$, így az érintő egyenlete: $y = 2 \cdot (x - 3) + 3{,}5 - \ln 3 = 2x - 2{,}5 - \ln 3$.

9. Jellemezzük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 - 7$ függvényt monotonitás, szélsőértékek, konvexitás és inflexiós pont szempontjából!

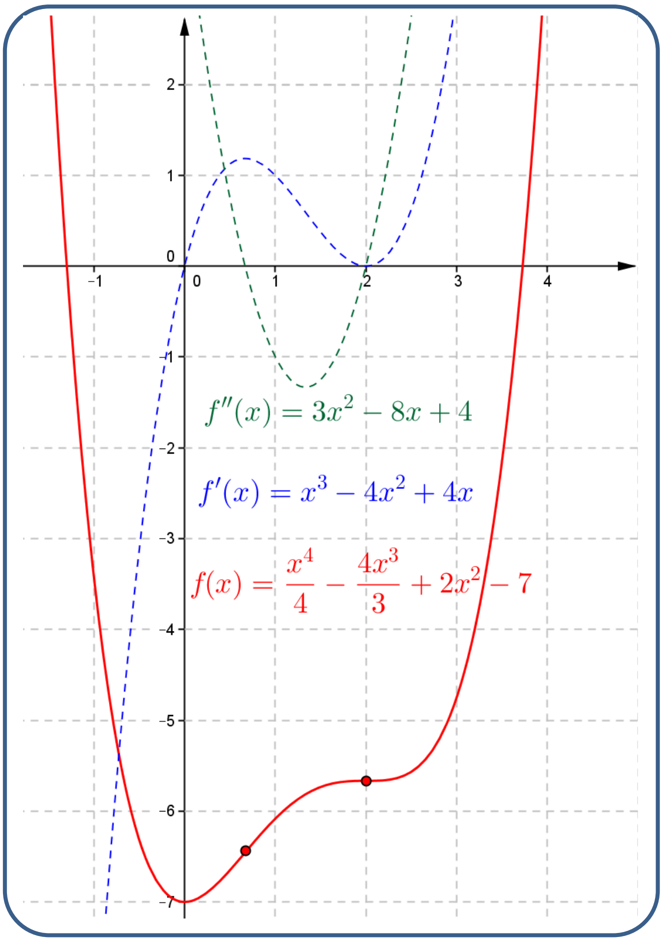
Megoldás: $f\,'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x - 2)^2$, ennek zérushelyei $x_1 = 0$ és $x_2 = x_3 = 2$. $f\,'$ negatív, ha $x < 0$, továbbá $f\,'$ pozitív, ha $0 < x < 2$ vagy $2 < x$. Tehát f szigorúan monoton csökken a $\left]-\infty;\, 0\right]$ intervallumon, illetve szigorúan monoton nő a $\left[0;\, +\infty\right]$ intervallumon. A függvénynek szigorú lokális minimuma van $x = 0$-ban (ez egyben abszolút minimum is), lokális maximuma nincsen.

$f\,''(x) = 3x^2 - 8x + 4$, ennek zérushelyei $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = 2$. $f\,'' \geq 0$, ha $x \leq \frac{2}{3}$ vagy $x \geq 2$, továbbá $f\,'' \leq 0$, ha $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$. Tehát f konvex a $\left]-\infty;\, \frac{2}{3}\right]$ és a $\left[2;\, +\infty\right[$ intervallumon, illetve konkáv a $\left[\frac{2}{3};\, 2\right]$ intervallumon. A függvénynek inflexiós pontja van $x_1 = \frac{2}{3}$-ban és $x_2 = 2$-ben.

Táblázatban összefoglalva:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{2}{3}$	$x = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f\,'$	–	0	+	+	+	0	+
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$				
$f\,''$	+	+	+	0	–	0	+
f	konvex			infl. pont	konkáv	infl. pont	konvex

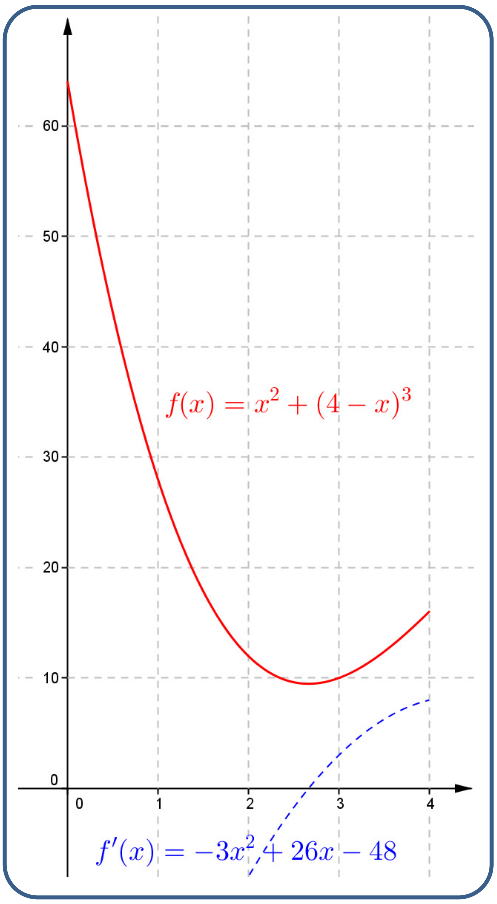
Az f, $f\,'$ és $f\,''$ függvények grafikonja a következő ábrán látható.



10. Osszuk fel a 4-et két pozitív részre úgy, hogy az első rész négyzetének és a második rész köbének az összege minimális legyen!

Megoldás: Jelölje az első részt *x*, így a keresett kifejezést az $f(x) = x^2 + (4 - x)^3$ függvény írja le, ahol $0 < x < 4$. Ekkor $f(x) = -x^3 + 13x^2 - 48x + 64$, amely a teljes értelmezési tartományán deriválható, és $f'(x) = -3x^2 + 26x - 48$, amelynek zérushelyei $x_1 = \frac{8}{3}$ és $x_2 = 6$. Ezek közül csak x_1 esik a $]0;4[$ intervallumba, és itt f' előjele negatívból pozitívba vált, vagyis ez valóban szigorú lokális minimumhely. Mivel a $\left]0;\frac{8}{3}\right]$ intervallumon *f* szigorúan monoton csökken, valamint a $\left[\frac{8}{3};4\right[$ intervallumon *f* szigorúan monoton nő, így $x = \frac{8}{3}$ a megadott (nyílt) értelmezési tartományon egyben abszolút minimumhely is. Tehát az első rész $\frac{8}{3}$, a második pedig $4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$, a vizsgált összeg minimuma $\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{9} + \frac{64}{27} = \frac{256}{27}$.

Az *f* és f' függvények grafikonja a következő ábrán látható.



$f(x) = x^2 + (4-x)^3$
$f'(x) = -3x^2 + 26x - 48$
60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4