Békési Bertold mk. főhadnagy
főiskolai oktató
Repülő szakág tanszék

A REPÜLŐGÉP HOSSZIRÁNYÚ MOZGÁSÁNAK MATEMATIKAI MODELLJE

Bevezetés

A repülőgép mozgását két mozgás formájában képzelhetjük el: a tömegközéppont adott pályán történő és a repülőgép, mint szilárd test e középpont körüli mozgása . Ezen mozgások hat szabadságfokkal rendelkeznek.

A tömegközéppont helyzetét egy adott koordinátarendszerhez viszonyítva, lineáris koordináták határozzák meg: a H repülési magasság, X megtett út, Z oldaleltérés. A lineáris koordináták mellett még szögkoordináták is jellemzik a repülőgép helyzetét. Ezen kívül még figyelembe kell venni a repülés azon paramétereit is, amelyek a repülőgép mozgását a levegőhöz viszonyítva jellemzik: V sebesség, α állásszög, β csúszásszög.

A kormányzott repülés végrehajtása céljából változtatni kell a repülőgépre ható F erőket és M nyomatékokat. A feladat végrehajtása céljából a mozgás pillanatnyi paramétereit állandóan összehasonlítják a szükséges paraméterekkel, majd az összehasonlítás eredményeként vezérlő jeleket alakítanak ki. A repülőgép bonyolult mozgását egy sor egyszerű mozgásra bontják és így tanulmányozzák valamennyit. A légi járművek repülésdinamikájának vizsgálatát derékszögű és polár koordinátarendszerek segítségével végzik el.

1. A repülőgép térbeli mozgásának egyenletei

A repülőgép egyenleteinek meghatározására a következő koordinátarendszereket használják fel:

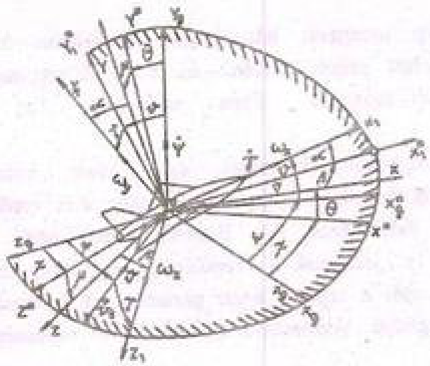
a.) Földi koordinátarendszer.

b.) Földi koordinátarendszer a repülőgép tömegközéppontú origóval.

c.) A repülőgéppel összekapcsolt koordinátarendszer.

d.) Sebességi koordinátarendszer.

A repülőgép térbeli mozgását tanulmányozva a földi koordinátarendszerhez viszonyítva az idő függvényében , a kinematikai törvényszerűségeket is figyelembe véve két derékszögű koordinátarendszert használnak: $O X_0 Y_0 Z_0$ földi és $O X_1 Y_1 Z_1$ repülőgéppel összekapcsolt koordinátákat.



1.ábra
Koordinátarendszerek

A repülőgép tömegközéppontját az $O X_0 Y_0 Z_0$ koordinátarendszerben három lineáris koordináta: L megtett út, Z oldaleltérés, h repülési magasság,és a repülőgéppel összekapcsolt $O X_1 Y_1 Z_1$ koordinátáknak, a földi koordináta rendszerhez viszonyított szögkoordináták: ψ irány, ϑ bólintási és γ bedöntési szöge határozzák meg. A repülés folyamán fontos paraméter az α állásszög és a β csúszásszög.

Kinematikai összefüggés , amely összekapcsolja a ϑ bólintási α állás és θ pályaszögeket :

$$\vartheta = \Theta + \alpha \qquad (1)$$

A repülőgép földi koordinátarendszerhez viszonyított mozgásának teljes elemzéséhez a kinematikai egyenletek nem elegendőek, szükséges még ismerni a repülőgépre ható erők és nyomatékok megoszlását. Ezek a repülőgép stabilitását és kormányozhatóságát határozzák meg. [1.,3.,4.,5.,6.,7.,8.,10.,12.,14.]

A dinamika a rendszerek mozgása közötti kapcsolatot a rájuk ható erők és nyomatékok figyelembevételével vizsgálja, a repülőgép térbeli mozgását leíró matematikai modell létrehozását teszi lehetővé.

A merev repülőgép térbeli mozgásegyenleteit megkaphatjuk az impulzus megmaradás (2) és a perdület - tétel (3) törvényeiből.

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \sum F \tag{2}$$

$$\frac{d\overline{\pi}}{dt} = \sum M \tag{3}$$

ahol m - a repülőgép tömege

$\overline{V}$ - tömegközéppont mozgási sebessége

$\sum F$ - a repülőgépre ható erők eredője

$\overline{\pi} = I\overline{\omega}$ - a repülőgép perdület tételének nyomatéka

I - a tehetetlenségi tenzor

$\sum M$ - a külső erők eredő nyomatéka

A repülőgép térbeli mozgását hat dinamikai egyenlet írja le. A repülőgép mozgásegyenleteit felírjuk a test koordinátarendszerben (OXYZ). Ezeket komponens egyenleteknek nevezzük:

$$\begin{aligned} m\left(\dot{V}_x + \omega_y V_z - \omega_z V_y\right) &= F_x \\ m\left(\dot{V}_y + \omega_z V_x - \omega_x V_z\right) &= F_y \\ m\left(\dot{V}_z + \omega_x V_y - \omega_y V_x\right) &= F_z \end{aligned} \tag{4}$$

ahol $F_x F_y F_z$ - a külső erők vektorának vetülete a test koordinátarendszer tengelyeire.

A forgó mozgás egyenletei (OXYZ) rögzített koordinátarendszer tengelyei körül:

$$\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\,\omega_y\,\omega_z &= M_x \\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\,\omega_x\,\omega_z &= M_y \\ I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\,\omega_x\,\omega_y &= M_z \end{aligned} \tag{5}$$

ahol $M_x M_y M_z$ - a külső erők nyomatékának komponens összetevői.

Ezeket az egyenletrendszereket két különböző mozgásra lehet szétbontani:

1. Hosszirányú mozgásra - X_1 és Y_1 mentén mozog és az $O\,Z_1$ tengely körüli forgásra.
2. Oldalirányú mozgásra - Z_1 mentén mozog és az X_1 és Y_1 körüli forgásra.

2. A repülőgép hosszirányú mozgás egyenletei

Az oldalirányú mozgás hatása a hosszirányú mozgásra elhanyagolható $(V_z, \omega_x, \omega_y) = 0$

Ha áttérünk a sebességi koordinátarendszerre akkor $V_x = V$, $V_y = 0$ és

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\Theta} \tag{6}$$

akkor kapjuk

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= \sum F_x \\ mV\omega_z &= \sum F_y \\ I_z\frac{d\omega_z}{dt} &= \sum M_z \end{aligned} \tag{7}$$

A mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} &m\dot{V} = P\cos\alpha - X_a - m\,g\sin\Theta \\ &mV\,\dot{\Theta} = Y_a + P\sin\alpha - m\,g\cos\Theta \\ &I_z\,\dot{\omega}_z = M_z \quad , \quad \dot{\vartheta} = \omega_z \\ &V_{x_g} = V\cos\Theta\,, V_{y_g} = V\sin\Theta \\ &\alpha = \vartheta - \Theta \end{aligned} \tag{8}$$

Az egyenletrendszer továbbra is nemlineáris marad, mivel trigonometrikus összefüggéseket tartalmaz, az aerodinamikai erők és nyomatékok együtthatói szintén nemlineáris függvények. [1.,3.,4.,5.,6.,7.,10.,11.,12.,14.]

3. A hosszirányú mozgásegyenletek linearizálása.

Tételezzük fel :

1. Zavarásmentes állapotban $V = 0$, $V_b = 0$.
2. A repülőgép tömegét és tehetetlenségi nyomatékait állandónak vesszük.

Legyen a kiindulási stacionárius állapot állandó magasságokon végrehajtott egyenesvonalú egyenletes repülés. Ebben a kiindulási állapotban a változókat jelöljük "0" indexszel. A mozgásegyenletek linearizálása $V_0 ; P_0 ; \alpha_0$, ... és így tovább állandó értékekkel jellemezhető, és a zavartalan mozgáshoz viszonyítva a mozgás kismértékű változásait vesszük figyelembe $\Delta V ; \Delta P ; \Delta\alpha$, ... , és így tovább.
A kis zavarások módszerével a változókat a következő alakban írhatjuk fel:

$$V = V_0 + \Delta V \ , \ P = P_0 + \Delta P \ , \ \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \quad \text{stb.}$$

Mivel a kiindulási állapot paramétereinek deriváltjai nullával egyenlőek, ezért egyértelműek a következő kifejezések: $\dot{V} = \Delta\dot{V}$, $\dot{\vartheta} = \Delta\dot{\vartheta}$ és így tovább. Az erők és nyomatékok linearizálásánál figyelembe kell venni, hogy azok linearizálása a nyugalmi pontban történik. Ez az adott pillanatban megfelel az egyenesvonalú egyenletes mozgásnak, csúszás nélkül, így ezek a mennyiségek azonosan egyenlőek nullával.[1.,2.,10.,12.,13.]

Az aerodinamikai erők és nyomatékok, mint ismeretes, a következő állandók segítségével határozhatók meg:

$$Y_a = c_{y_a} \frac{\rho V^2}{2} S \ ; \ X_a = c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \ ; \ M_z = m_z \frac{\rho V^2}{2} S\, b_A \qquad (9)$$

ahol X_a - légellenállási erő
Y_a - aerodinamikai felhajtóerő
M_z - a bólintási nyomaték

c_{x_a} - légellenállási tényező

c_{y_a} - aerodinamikai felhajtóerő tényezője

m_z - bólintási nyomaték együtthatója

S - a szárny felülete

b_A - közepes aerodinamikai húr (KAH)

Az aerodinamikai erők és nyomatékok együtthatóira a következő összefügést lehet felírni:

$$\begin{aligned} c_{y_a} &\cong c_{y_a}(V, h, \alpha); \\ c_{x_a} &\cong c_{x_a}(V, h, \alpha); \\ m_z &= m_z(V, h, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, \delta_B). \end{aligned} \tag{10}$$

A hajtómű tolóerejére a következő összefüggést lehet felírni:

$$P = P(V, h, \delta_p) \tag{11}$$

Az (8) egyenletrendszer első egyenletének linearizálása

$$m\frac{dV}{dt} = P\cos\alpha - X_a - mg\sin\Theta \tag{12}$$

$$\frac{d(V_0 + \Delta V)}{dt} = \frac{dV_0}{dt} + \frac{d\Delta V}{dt} = \frac{d\Delta V}{dt} \tag{13}$$

ahol $\frac{dV_0}{dt} = 0$

behelyettesítve az (12) egyenletbe az (13) kifejezést kapjuk

$$m\frac{d\Delta V}{dt} = (P_0 + \Delta P)\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) - (X_{a_0} + \Delta X) - mg\sin(\Theta_0 + \Delta\Theta) \tag{14}$$

$$\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \cos\alpha_0\cos\Delta\alpha - \sin\alpha_0\sin\Delta\alpha \tag{15}$$

$$\sin(\Theta_0 + \Delta\Theta) = \sin\Theta_0\cos\Delta\Theta + \cos\Theta_0\sin\Delta\Theta \tag{16}$$

$$m\frac{d\Delta V}{dt}=P_0\cos\alpha_0\cos\Delta\alpha-P_0\sin\alpha_0\sin\Delta\alpha+\Delta P\cos\alpha_0\cos\Delta\alpha-\Delta P\sin\alpha_0\sin\Delta\alpha-$$
$$-X_{a_0}-\Delta X-m\,g\sin\Theta_0\cos\Delta\Theta-m\,g\cos\Theta_0\sin\Delta\Theta \qquad (17)$$

Legyen

$$\sin\Delta\alpha\approx\Delta\alpha\,;\cos\Delta\alpha\approx1 \qquad (18)$$

Az (17),(18) egyenletből kapjuk

$$m\frac{d\Delta V}{dt}=-P_0\sin\alpha_0\,\Delta\alpha+\Delta P\cos\alpha_0-\Delta X-m\,g\cos\theta_0\Delta\theta \qquad (19)$$

továbbá

$$X=X(V,h,\alpha) \qquad (20)$$

Feltételezzük, hogy a linearizálni kívánt függvény nemlineáris összefüggései a kiindulási stacionárius állapotban és annak környezetében akárhányszor differenciálható így azok Taylor - sorba fejthetők. A munkapont körüli változásokra szorítkozva a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk.
Sorbafejtjük az (11) és (20) nemlineáris funkciókat

$$P=P_0+\left(\frac{\partial\Delta P}{\partial V}\right)_{V=V_0}\Delta V+\left(\frac{\partial\Delta P}{\partial h}\right)_{h=h_0}\Delta H+\left(\frac{\partial\Delta P}{\partial\delta_p}\right)_{\delta_p=\delta_{p0}}\Delta\delta_p \qquad (21)$$

Vezessük be a következő általános kifejezést $\frac{\partial F}{\partial X}=F^X$ akkor kapjuk

$$P=P_0+P^V\Delta V+P^h\Delta h+P^{\delta_p}\Delta\delta_p \qquad (22)$$

vagyis a következő egyenletet kapjuk

$$m\frac{d\Delta V}{dt}=-P_0\sin\alpha_0\,\Delta\alpha+\left(P^V\Delta V+P^h\Delta h+P^{\delta_p}\Delta\delta_p\right)\cos\alpha_0-$$
$$-\left(X^V\Delta V+X^h\Delta h+X^\alpha\Delta\alpha\right)-m\,g\cos\Theta_0\,\Delta\Theta \qquad (23)$$

A második egyenlet linearizálásakor feltételezzük, hogy $P = P(V, h)$ vagyis elhanyagoljuk a nehézségi erőt a vezérlőkarok helyzetétől $(P^{\delta_p}, \sin\alpha = 0)$.

A hosszirányú mozgás lineáris modellje a következő:

$$
\begin{aligned}
&\dot{V} + a_x^V V + a_x^\Theta \Theta + a_x^\alpha \alpha + a_x^h h = a_x^{\delta_p} \delta_p \\
&\dot{\Theta} + a_y^V V + a_y^\Theta \Theta + a_y^\alpha \alpha + a_y^h h = 0 \\
&\dot{\omega}_z + a_{m_z}^V V + a_{m_z}^\Theta \Theta + a_{m_z}^{\omega_z} \omega_z + a_{m_z}^\alpha \alpha + a_{m_z}^h h = a_{m_z}^{\delta_p} \delta_p \\
&\dot{\alpha} - a_y^V V - a_y^\Theta \Theta - \omega_z - a_y^\alpha \alpha - a_y^h h = 0 \\
&\dot{h} = a_h^V V + a_h^\Theta \Theta = 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Az (24) egyenletrendszert néha szokás kiegésziteni $\dot{\vartheta} = \omega_z$; $\vartheta = \theta + \alpha$ ami lehetővé teszi a pályaszög kizárását. Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$
\begin{aligned}
&\dot{V} + a_x^V V + a_x^\vartheta \vartheta + \left(a_x^\alpha - a_x^\Theta\right) \alpha + a_x^h h = a_x^{\delta_p} \delta_p \\
&\dot{\omega}_z + a_{m_z}^V V + a_{m_z}^\Theta \vartheta + a_{m_z}^{\omega_z} \omega_z + \left(a_{m_z}^\alpha - a_{m_z}^\Theta\right) \alpha + a_{m_z}^h h = a_{m_z}^{\delta_p} \delta_B \\
&\dot{\alpha} - a_y^V V - a_y^\Theta \vartheta - \omega_z - \left(a_y^\alpha - a_y^\Theta\right) \alpha - a_y^h h = 0 \\
&\dot{h} + a_h^V V + a_h^\Theta \vartheta - a_h^\Theta \alpha = 0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Az (24) egyenletrendszer derivatív együtthatói amelyek a hosszirányú mozgást írják le, a következők:

$$
\begin{aligned}
&a_x^V = \frac{1}{r_a}\left(c_{x_a} + \frac{V}{2} c_{x_a}^V\right) - \frac{\cos\alpha}{m} P^V ; \quad a_x^\vartheta = \frac{g}{V}\cos\theta ; \\
&a_x^\alpha = \frac{c_{x_a}^\alpha}{2 r_a} + \frac{P \sin\alpha}{mV} ; \quad a_x^{\delta_p} = \frac{P^{\delta_p}}{mV}\cos\alpha ; \\
&a_x^h = \frac{V T^h}{2 T_h}\left[\frac{r_a P^V \cos\alpha}{m} - c_{x_a}\left(1 + \frac{1}{R_g T^h}\right) - \frac{V c_{x_a}^V}{2}\right] ; \\
&a_y^V = -\frac{1}{r_a}\left(c_{y_a} + \frac{V}{2} c_{y_a}^V\right) - \frac{P^V}{m}\sin\alpha ; \quad a_y^\Theta = -\frac{g}{V}\sin\Theta ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_y^h &= \frac{VT^h}{2T_h}\left[\frac{\tau_a P^V \sin\alpha}{m} + c_{y_a}\left(1+\frac{1}{R_0 T^h}\right)+\frac{Vc_{y_a}^V}{2}\right];\\
a_y^\alpha &= \frac{c_{y_a}^\alpha}{2\tau_a}\,\frac{P\cos\alpha}{mV};\\
a_{m_z}^V &= -\chi\left(V\, m_z^V + 2m_z + \frac{b_A}{V} m_z^{\bar{\alpha}} a_y^\alpha\right); \quad a_{m_z}^\Theta = -\chi \frac{b_A}{V} m_z^{\bar{\alpha}} a_y^\Theta;\\
a_{m_z}^{\omega_z} &= -\chi \frac{b_A}{V}\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right); \quad a_{m_z}^\alpha = -\chi\left(m_z^\alpha + \frac{b_A}{V} m_z^{\bar{\alpha}} a_y^\alpha\right);\\
a_{m_z}^h &= \chi\left\{\frac{VT^h}{2T_h}\tau_a\left[m_z^V V + 2m_z\left(1+\frac{1}{R_0 T^h}\right)\right] - \frac{b_A}{V} m_z^{\bar{\alpha}} a_y^h\right\};
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

$$
a_{m_z}^{\delta_B} = \chi m_z^{\delta_B}; \quad a_h^V = -\frac{\sin\Theta}{\tau_a}; \quad a_h^\Theta = -\frac{\cos\Theta}{\tau_a}; \quad \chi = \frac{\rho V^2}{2} S \frac{b_A}{I_z}; \quad \tau_a = \frac{m}{\rho V S}.
$$

Az (25) differenciális egyenletrendszer a következő mátrix alakban írható fel

$$
\dot{x} = A\,x + Bu
$$

ahol

$$
x = \begin{vmatrix} V \\ \Theta \\ \omega_z \\ \alpha \\ h \end{vmatrix}; \quad A = \begin{vmatrix} -a_x^V & -a_x^\Theta & 0 & -a_x^\alpha & -a_x^h \\ -a_y^V & -a_y^\Theta & 0 & -a_y^\alpha & -a_y^h \\ -a_{m_z}^V & -a_{m_z}^\Theta & -a_{m_z}^{\omega_z} & -a_{m_z}^\alpha & -a_{m_z}^h \\ a_y^V & a_y^\Theta & 1 & a_y^\alpha & a_y^h \\ -a_h^V & -a_h^\Theta & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad u = \begin{vmatrix} a_x^{\delta_P}\delta_P \\ 0 \\ a_{m_z}^{\delta_B}\delta_B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \qquad (27)
$$

Az (27) egyenlet és az (25) összefüggés teljes egészében leírja a repülőgép hosszirányú mozgását. A gyakorlatban az $a_x^h; a_y^h; a_{m_z}^h$ el lehet hanyagolni, ami valamelyest leegyszerűsíti a matematikai modellt, mivel a kinematikai egyenlet

$$
\dot{h} + a_h^V V + a_h^\Theta \Theta = 0 \qquad (28)
$$

nincs hatással az egyenletrendszer többi egyenletére.

Alkalmazva a Laplace transzformációt ehhez az egyenletrendszerhez nulla kezdeti feltételek mellett, a hosszirányú mozgás matematikai modelljét a következő alakban kapjuk.

$$
\begin{aligned}
&\left(s+a_x^V\right)V(s)+a_x^\theta\Theta(s)+a_x^\alpha\alpha(s)=a_x^{\delta_p}\delta_p\\
&a_y^V V(s)+\left(s+a_y^\theta\right)\Theta(s)+a_y^\alpha\alpha(s)=0\\
&a_{m_z}^V V(s)+a_{m_z}^\theta\Theta(s)+\left(s+a_{m_z}^{\omega_z}\right)\omega_z(s)+a_{m_z}^\alpha\alpha(s)=a_{m_z}^{\delta_p}\delta_p(s)\\
&-a_y^V V(s)-a_y^\theta\Theta(s)-\omega_z(s)+\left(s-a_y^\alpha\right)\alpha(s)=0
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Az (28) egyenletnek a következő karakterisztikus egyenlet felel meg

$$
\begin{aligned}
D(s)=&\begin{vmatrix}
\left(s+a_x^V\right) & a_x^\theta & 0 & a_x^\alpha\\
a_y^V & \left(s+a_y^\theta\right) & 0 & a_y^\alpha\\
a_{m_z}^V & a_{m_z}^\theta & \left(s+a_{m_z}^{\omega_z}\right) & a_{m_z}^\alpha\\
-a_y^V & -a_y^\theta & -1 & \left(s-a_y^\alpha\right)
\end{vmatrix}=\\
&=s^4+q_3s^3+q_2s^2+q_1s+q_0=0
\end{aligned}
\tag{30}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
q_0&=a_{m_z}^\alpha\left(a_x^V a_y^\theta-a_x^\theta a_y^V\right)+a_{m_z}^\theta\left(a_x^\alpha a_y^V-a_x^V a_y^\alpha\right)+a_{m_z}^V\left(a_x^\theta a_y^\alpha-a_x^\alpha a_y^\theta\right)\\
q_1&=a_{m_z}^{\omega_z}\left[a_y^V\left(a_x^\alpha-a_x^\theta\right)-a_x^V\left(a_y^\alpha-a_y^\theta\right)\right]+\left(a_x^V a_{m_z}^\alpha-a_x^\alpha a_{m_z}^V\right)+\left(a_y^\theta a_{m_z}^\alpha-a_y^\alpha a_{m_z}^\theta\right)\\
q_2&=a_y^V\left(a_x^\alpha-a_x^\theta\right)-a_x^V\left(a_y^\alpha-a_y^\theta\right)+a_{m_z}^\alpha+a_{m_z}^{\omega_z}\left(a_x^V+a_y^\theta-a_y^\alpha\right)\\
q_3&=a_{m_z}^{\omega_z}+a_x^V+a_y^\theta-a_y^\alpha
\end{aligned}
\tag{31}
$$

A karakterisztikus egyenletnek öt gyöke van. Az egyik egyenlő nullával. Ez azt jelenti, hogy a repülőgép semlegesen viselkedik a magasságváltozást illetően (aerodinamikai erők és nyomatékok nem függenek a magasságtól). A többi négy gyök komplex konjugált és jelentős mértékben különbözik egymástól. Ezért a hosszirányú mozgás tranziens folyamatát két mozgásformában írhatjuk le: hosszú periódusú (sebesség szerint) és rövid periódusú (állásszög szerint).

4. A hosszirányú mozgás átviteli függvényei

Az automatikus irányítási rendszerek analízise és szintézise során széles körben használatosak az átviteli függvények. Átviteli függvénynek nevezik azt a viszonyt amely a kimeneti értékeket írja le a bemeneti értékeknek nulla kezdeti feltételek mellett. Azonban a repülőgép átviteli függvényeiben, amelyeket nemsokára megkapunk, a bemeneti értékek (a bólintási irány elfordulását) ellentétes előjellel veszik. Ezt azzal lehet megmagyarázni, hogy az aerodinamikában ezt az irányt veszik a pozitívnak. Például, $W_{\vartheta}^{\delta}(s) = \dfrac{\vartheta\,(s)}{-\delta_{B}(s)}$.

Az átviteli függvények lehetőséget adnak a tranziens (átmeneti) folyamatok és frekvenciajellemzők tanulmányozására. A repülőgép mozgására vonatkozóan pedig a rövid és hosszú periódusú, valamint a bedöntés és elfordulás szerinti mozgásainak vizsgálatára.[1.,2.,9.,10.,13.]

A repülőszerkezetekre ható külső zavarás legyen függőleges irányú széllökés. Kezdetben a repülőszerkezet tehetetlensége miatt a repülés sebességének abszolut értéke V, valamint a pályaszög Θ gyakorlatilag nem változik. Ekkor az állásszög α és a bólintási szög ϑ intenzív változását figyelhetjük meg. Mivel az állásszög és a bólintási szög nagy frekvenciával változik, tehát a vizsgált paraméterek $(\alpha;\vartheta)$ periódusideje kicsi, ezért ezt a mozgást szokás rövidperiódikus mozgásnak nevezni (RPM).

A rövidperiódikus mozgás befejeztével jelentőssé válik a repülés sebességvektorának (abszolút értékének V és irányának Θ) megváltozása. Mivel ekkor az állásszög állandónak tekinthető, ezért a pályaszög változása követi a bólintási szög változását: $\vartheta = \Theta + \alpha$. Ez a mozgás kisfrekvenciájú, nagy periódusidővel rendelkezik, ezért szokás hosszúperiódikus mozgásnak nevezni.

Az eddig elhangzottak alapján a rövidperiódikus mozgásra igaz: $\Delta V = 0; \Delta\Theta = 0$.

Az (29) egyenletrendszer összefüggéseiben az $a_y^V, a_{m_z}^V, a_y^{\Theta}, a_{m_z}^{\Theta}$ állandókat el lehet hanyagolni. Ez lehetővé teszi, hogy a rövidperiódusú hosszirányú mozgásra egy egyszerű modellt kapjunk.

$$\begin{aligned} &\left(s + a_{m_z}^{\omega_z}\right)\omega_z(s) + a_{m_z}^{\alpha}\alpha(s) = a_{m_z}^{\delta_B}\delta_B(s) \\ &-\omega_z(s) + \left(s - a_y^{\alpha}\right)\alpha(s) = 0 \end{aligned} \qquad (32)$$

ahol $a_{m_z}^{\omega_z}, a_{m_z}^{\alpha}, a_y^{\alpha}$ - állandók, a repülőgép hosszirányú csatornájának erős összefüggései.

A repülőgép ω_z szerinti átviteli függvénye $W^{B}_{\omega_z}(s) = \dfrac{\omega_z(s)}{-\delta_B(s)}$

Az (32) egyenletrendszerből a CRAMER szabály segítségével határozzuk meg az átviteli függvényt:

$$\omega_z = \frac{D_{\omega_z}}{D_1}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} s + a^{\omega_z}_{m_z} & a^{\alpha}_{m_z} \\ -1 & s - a^{\alpha}_{y} \end{vmatrix} = \left(s + a^{\omega_z}_{m_z}\right)\left(s - a^{\alpha}_{y}\right) + a^{\alpha}_{m_z} = a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \quad (33)$$

$$D_{\omega_z} = \begin{vmatrix} a^{\delta_B}_{m_z}\delta_B(s) & a^{\alpha}_{m_z} \\ 0 & s - a^{\alpha}_{y} \end{vmatrix} = \left(s - a^{\alpha}_{y}\right) a^{\delta_B}_{m_z}\delta_B(s) \quad (34)$$

ahol $\quad a_1 = a^{\omega_z}_{m_z} - a^{\alpha}_{y}; \;\; a_2 = a^{\alpha}_{m_z} - a^{\alpha}_{y}\, a^{\omega_z}_{m_z}$

Tehát

$$\omega_z = \frac{D_{\omega_z}}{D_1} = \frac{(s - a^{\alpha}_{y}) a^{\delta_B}_{m_z}\delta_B(s)}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} \quad (35)$$

Az (34) egyenletnek, amely a rövidperiódusú hosszirányú mozgást leírja, a következők a megoldásai:

$$\omega_z(s) = \frac{a^{\delta_B}_{m_z}\left(s - a^{\alpha}_{y}\right)}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}\,\delta_B(s) \quad (36)$$

$$\alpha(s) = \frac{a^{\delta_B}_{m_z}}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}\,\delta_B(s) \quad (37)$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$\omega_n^2 = a_2; \;\; \xi_n = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}; \;\; T_0 = \frac{1}{a^{\alpha}_{y}}; \;\; K^{B}_{\alpha} = \frac{a^{\delta_B}_{m_z}}{\omega_n^2}; \;\; K^{B}_{\omega_z} = \frac{K^{B}_{\alpha}}{T_0}. \quad (38)$$

Figyelembevéve az (25), (36), (37), (38), összefüggéseket megkapjuk az átviteli függvényeket bólintási, irány és bedöntési szögek alapján.

$$W_{\alpha}^{B}(s)=\frac{\alpha(s)}{-\delta_{B}(s)}=\frac{K_{\alpha}^{B}\omega_{\alpha}^{2}}{s^{2}+2\xi_{\alpha}\omega_{\alpha}s+\omega_{\alpha}^{2}} \tag{39}$$

$$W_{\omega_z}^{B}(s)=\frac{\omega_{z}(s)}{-\delta_{B}(s)}=\frac{K_{\vartheta}^{B}\omega_{\alpha}^{2}(T_{\theta}s+1)}{s^{2}+2\xi_{\alpha}\omega_{\alpha}s+\omega_{\alpha}^{2}} \tag{40}$$

$$W_{\vartheta}^{B}(s)=W_{\omega_z}^{B}(s)\frac{1}{s}=\frac{\vartheta(s)}{-\delta_{B}(s)}=\frac{K_{\vartheta}^{B}\omega_{\alpha}^{2}(T_{\theta}s+1)}{(s^{2}+2\xi_{\alpha}\omega_{\alpha}s+\omega_{\alpha}^{2})s} \tag{41}$$

$$W_{\Theta}^{B}(s)=W_{\vartheta}^{B}(s)-W_{\alpha}^{B}(s)=\frac{\Theta(s)}{-\delta_{B}(s)}=\frac{K_{\vartheta}^{B}\omega_{\alpha}^{2}}{(s^{2}+2\xi_{\alpha}\omega_{\alpha}s+\omega_{\alpha}^{2})s} \tag{42}$$

ahol

$$K_{\vartheta}^{B}=\frac{a_{m_z}^{\delta_B}}{\omega_{\alpha}^{2}}a_{y}^{\alpha}=-\frac{a_{m_z}^{\delta_B}}{\omega_{\alpha}^{2}T_{\theta}}$$

Határozzuk meg a repülőgép átviteli függvényét az n_y normál túlterhelés szerint, amely igen fontos szerepet játszik a repülési folyamatok irányításában.

$$W_{n_y}^{B}(s)=\frac{n_{y}(s)}{-\delta_{B}(s)}=\frac{K_{n_y}^{B}\omega_{\alpha}^{2}}{s^{2}+2\xi_{\alpha}\omega_{\alpha}s+\omega_{\alpha}^{2}} \tag{43}$$

ahol

$K_{n_y}^{B}=K_{\alpha}^{B}\dfrac{V}{gT_{\theta}}$ - a túlterhelés arányossági tényezője

Felhasznált irodalom

[1] - Aszlanjan A. E. Szisztyemi avtomatyicseszkovo upravlenyija poljotom letatyelnih apparatov, Kijevszkoje viszsee voennoe aviacionnoe inzsenyernoe ucsilise, Kijev, 1984.

[2] - Bajborogyina J. V. Bortovije szisztyemi upravlenyija poljotom, Transzport, Moszkva, 1984.

[3] - Belogorodszkij Sz. L. Automatizacija upravlenyija poszadkoj szamoljota, Transzport, Moszkva, 1972.
[4] - Blakelock H. John Automatic Control of Aircraft and Missiles. John Wiley & Sons,Inc. New York/London/Sydney, 1965.
[5] - Bjusgensz G. Sz., Sztudnev R. V. Dinamika prodolnovo i bokovovo dvizsenyija. Masinosztroenyije, Moszkva, 1979.
[6] - Bjusgensz G. Sz., Sztudnev R. V. Dinamika poljota. Prosztransztvennoje dvizsenyije, Masinosztroenyije, Moszkva, 1983.
[7] - Dickinson B. Aircraft Stability and Control for Pilots and Engineers, Sir Isaac Pitman & Sons LTD, London, 1968
[8] - Dobrolenszkij J. P. Dinamika poljota v nyeszpakojnoj atmoszfere,Masinosztroenyije, Moszkva, 1969.
[9] - Hacker T. Flight Stability and Control, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1970.
[10] - Horváth Dezső A repülőgép dinamikai tulajdonságának vizsgálata hosszirányú mozgás esetén. Tudományos Kiképzési Közlemények, Szolnok, 1994/2-3.
[11] - McCormick W. B. Aerodinamics,Aeronautics, and Flight Mechanics, John Wiley & Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto, 1964.
[12] - Dr. Rácz Elemér Repülőgépek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
[13] - Szabolcsi Róbert Légijárművek nemlineáris mozgásegyenleteinek linearizálása Tudományos Kiképzési Közlemények, Szolnok, 1992/2-3.
[14] - Sznyesko J. I. Iszledovanyija v poljote usztojcsivosztyi i upravljaemosztyi szamoljota. Masinosztroenyije, Moszkva, 1971.