

## PROPOJENÍ ANIMACE A MATEMATIKY PŘI STAVOVÝCH ZMĚNÁCH IDEÁLNÍHO PLYNU

FILÍPEK Josef – NAVRÁTIL Miroslav, ČR

### Resumé

V příspěvku je znázorněna plynulá změna stavových veličin ideálního plynu při izotermické a adiabatické kompresi i expanzi v závislosti na velikosti vnější síly. Vzájemné souvislosti jsou zobrazeny pomocí animovaných modelů, prostorových a plošných diagramů včetně matematického odvození objemové práce vykonané soustavou.

**Klíčová slova:** stavové změny plynu, animované modely, práce plynu.

### CONNECTION OF ANIMATION AND MATHEMATICS FOR DESCRIPTION OF IDEAL GAS STATE CHANGES

#### Abstract

The paper presents continuous changes of state quantities of ideal gas during isothermal and adiabatic compression depending on the degree of external force. Mutual relationships are illustrated with the use of animated models, spatial and area diagrams, including mathematical derivation of the volume work performed by the system.

**Key words:** state changes of gas, animated models, gas work.

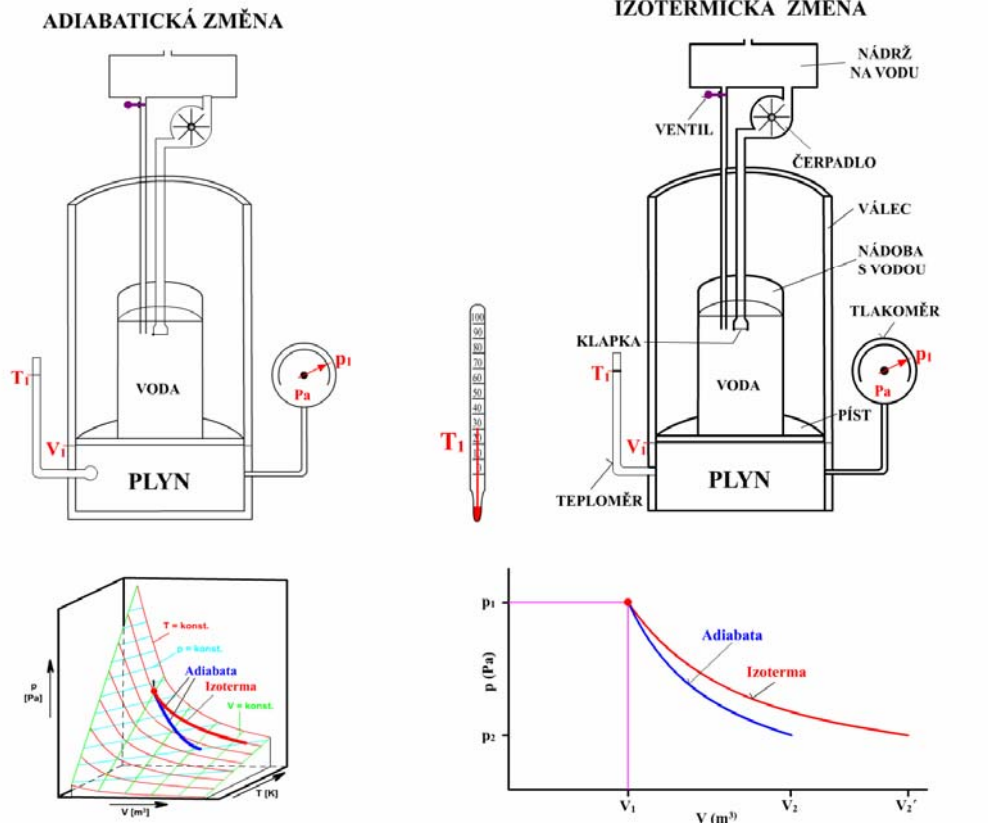
### 1 Úvod

Úloha „Propojení animace a matematiky při stavových změnách ideálního plynu“ je součástí připravovaného výukového programu „Uplatnění vyšší matematiky v technických předmětech“ určeného pro studenty bakalářského oboru Provoz techniky na MZLU v Brně. Posluchači daného oboru už ze střední školy velmi dobře znají činnost pístových spalovacích motorů, a proto je jim termodynamika blízká. Autoři se rozhodli pro adiabatickou a izotermickou kompresi a expanzi ideálního plynu, protože tyto stavové změny mají několik společných znaků a studentům tyto procesy často splývají. Animace byla vytvořena v programu Adobe-Flash CS3.

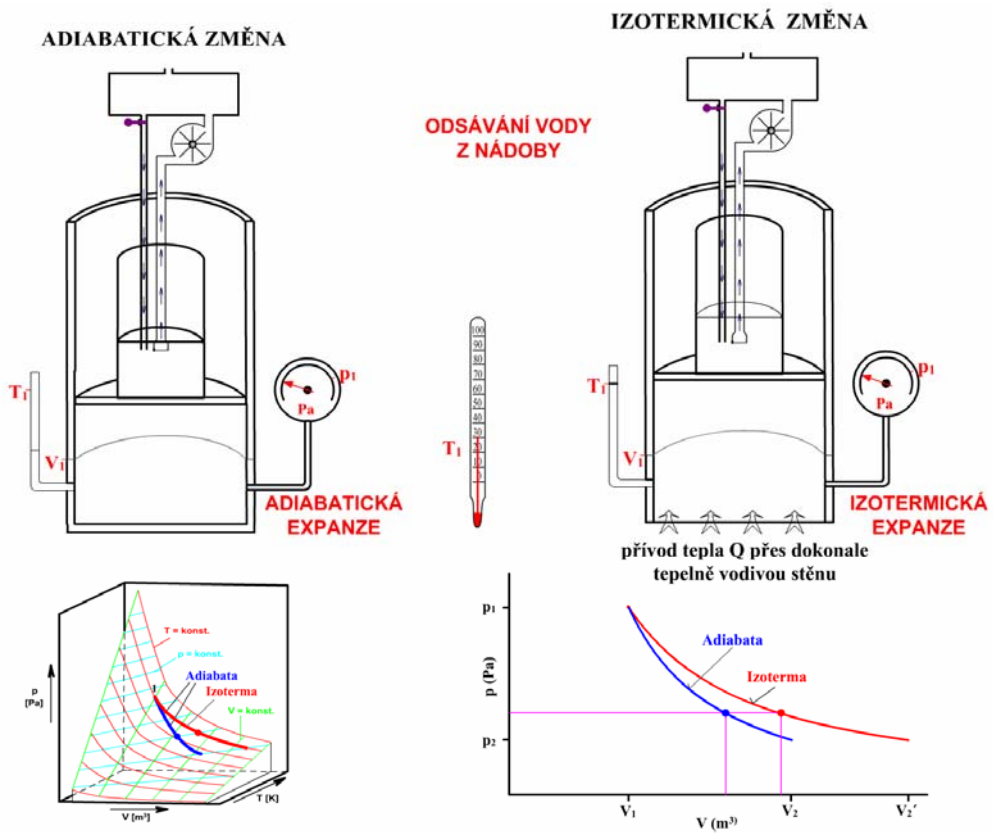
### 2 Adiabatická a izotermická stavová změna

Změny soustavy při adiabatické a izotermické expanzi a kompresi jsou plynule zobrazovány pomocí (Obr. 1):

- animovaného modelu soustavy s adiabatickou stavovou změnou,
- animovaného modelu soustavy s izotermickou stavovou změnou,
- prostorového diagramu  $p - T - V$ ,
- plošného diagramu  $p - V$ .



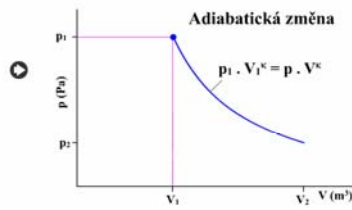
a – počátek stavové změny



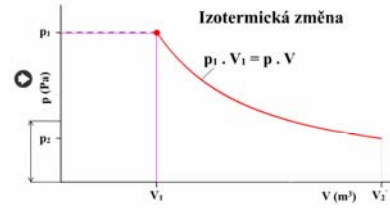
b – průběh expanze

Obr. 1: Animace stavové změny ideálního plynu.

### PRÁCE VYKONANÁ PLYNEM



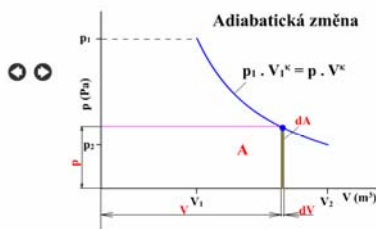
$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p \cdot V^\kappa$$



$$p_1 \cdot V_1 = p \cdot V$$

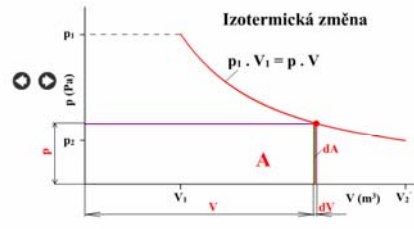
a – počátek expanze

### PRÁCE VYKONANÁ PLYNEM



$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p \cdot V^\kappa \Rightarrow p = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V^\kappa}$$

$$dA = p \cdot dV$$

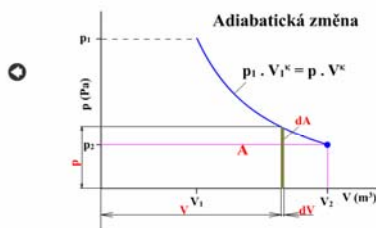


$$p_1 \cdot V_1 = p \cdot V \Rightarrow p = \frac{p_1 \cdot V_1}{V}$$

$$dA = p \cdot dV$$

b – průběh expanze

### PRÁCE VYKONANÁ PLYNEM

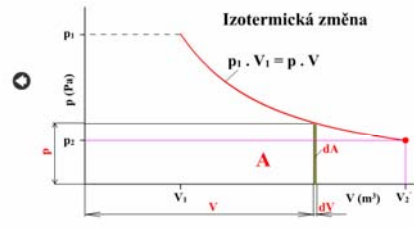


$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p \cdot V^\kappa \Rightarrow p = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V^\kappa}$$

$$dA = p \cdot dV = p_1 \cdot V_1^\kappa \cdot \frac{dV}{V^\kappa}$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} dA = p_1 \cdot V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} V^{-\kappa} \cdot dV = p_1 \cdot V_1^\kappa \cdot \left[ \frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa} \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$A = p_1 \cdot V_1^\kappa \cdot \frac{V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa} = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{1-\kappa} \cdot (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa})$$



$$p_1 \cdot V_1 = p \cdot V \Rightarrow p = \frac{p_1 \cdot V_1}{V}$$

$$dA = p \cdot dV$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot V_1}{V} \cdot dV = p_1 \cdot V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 \cdot V_1 \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2}$$

$$A = p_1 \cdot V_1 \cdot (\ln V_2 - \ln V_1) = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

c – konec expanze

Obr. 2: Postupné stanovení práce vykonané plynem při expanzi.

Na obr. 1 je v obou válcích uzavřeno stejné množství  $m$  (kg) ideálního plynu, počáteční objem  $V_1$ , tlak  $p_1$  a teplota  $T_1$  jsou rovněž stejné. Plyn v levém válci je dokonale tepelně izolován od okolního prostředí, zatímco pravý válec má dno dokonale tepelně vodivé. Oba válce jsou shora uzavřeny pohyblivými písty, na kterých spočívají nádoby s vodou. Čerpadla, která mají stejný výkon, začnou po spuštění současně odsávat vodu z nádob do nádrží nad válci. V animaci lze sledovat plynulé změny tlaku objemu i teploty plynu. Předpokládá se, že se jedná o vratné změny, po vypnutí čerpadla a otevření ventilu u nádrže s vodou, může student sledovat plynulé změny při kompresi.

Předložená animace názorně zobrazuje společné rysy i rozdíly mezi adiabatickou a izotermickou stavovou změnou plynu. Při expanzi plyn zvětšuje objem a zvedá píst i s nádobou vody, koná tedy objemovou práci. Třebaže množství odčerpané vody z nádoby v případě adiabatické a izotermické expanze bude stejné, objemová práce plynu bude rozdílná.

Stavové změny lze plynule sledovat i v prostorovém diagramu  $p - T - V$  a plošném diagramu  $p - V$  (Obr. 1). Objemová práce plynu je dána velikostí plochy pod křivkou v diagramu  $p - V$  (Obr. 2). Funkce  $p = f(V)$  je v obou případech spojitá, klesající, a proto plochu stanovíme pomocí určitého integrálu (Riemannův integrál). Při odvozování je student veden dílčími kroky až k závěrečnému vztahu. Největší problémy činí posluchačům výpočty daného integrálu, protože často neznají příslušné vzorce např.:

$$\int x^{-n} dx = \frac{x^{1-n}}{1-n} + c, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \quad \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

### 3 Závěr

Autoři mají s tvorbou animací technických procesů velmi dobré zkušenosti. Z příspěvku je zřejmé, že animace je vhodné zařadit nejen ve fyzice, ale i v matematice. Zvyšuje se tím názornost výuky a pro studenty se stává tato nezáživná problematika přitažlivější.

### 4 Literatura

1. ROUSEK, M., FILÍPEK, J., KLEPÁRNÍK, J. *Termodynamika a energetické stroje* Brno: Vydavatelství MZLU Brno 2001, s. 59, ISBN 80-7157-500-3.
2. HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. *Fyzika část 2 Mechanika – Termodynamika* Brno: Nakladatelství Vutium, nakladatelství Prometheus, 2006. 330 – 576 s. ISBN 80-214-1868-0, ISBN 81-7196-213-9.
3. RÁDL, P., ČERNÁ, B., STARÁ, L. *Základy vyšší matematiky* Brno: Vydavatelství MZLU v Brně, 2007. 168 s. ISBN 978-80-7375-099-2.

**Lektoroval:** Doc. Ing. Jan Červinka, CSc.

#### Kontaktní adresa:

Josef Filípek, Doc. Ing. CSc.,  
Ústav techniky a automobilové dopravy,  
Agronomická fakulta MZLU, Zemědělská 1,  
613 00 Brno, ČR, tel. +420 545 132 123,  
e-mail filipek@mendelu.cz

Miroslav Navrátil, RNDR. Ph.Dr.,  
Ústav matematiky, Lesnická a dřevařská  
fakulta MZLU, Zemědělská 2, 613 00 Brno,  
ČR, tel +420 545 134 026,  
e-mail navratil@mendelu.cz