

**V. I. Gavrish, B. O. Bilinskyi, O. S. Korol, P. P. Shkrab, I. O. Zimoха**

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛООБМІНУ В ЕЛЕМЕНТАХ ТУРБОГЕНЕРАТОРІВ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Удосконалено раніше розроблені [8] та наведено нові математичні моделі аналізу температурних режимів у окремих елементах турбогенераторів, які геометрично описано ізотропними півпростором і простором із внутрішнім джерелом тепла циліндричної форми. Також розглянуто випадки для півпростору, коли тепловиділяючий циліндр є тонким, а для простору, коли він є термочутливим. Для цього з використанням теорії узагальнених функцій у зручній формі записано остаточні диференціальні рівняння теплопровідності з крайовими умовами. Для розв'язування отриманих крайових задач теплопровідності використано інтегральне перетворення Ганкеля, внаслідок чого отримано аналітичні розв'язки в зображеннях. До цих розв'язків застосовано обернене інтегральне перетворення Ганкеля, яке дало змогу отримати завершені аналітичні розв'язки остаточних задач. Отримані аналітичні розв'язки подано у вигляді невластивих збіжних інтегралів. Для визначення числових значень температури в наведених конструкціях, а також аналізу теплообміну в елементах турбогенераторів, зумовленого різними температурними режимами завдяки нагріванню внутрішніми джерелами тепла, зосередженими в об'ємі циліндра, розроблено обчислювальні програми. Із використанням цих програм наведено графіки, які відображають поведінку кривих, побудованих із використанням числових значень розподілу температури залежно від просторових радіальної та аксіальної координат. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність наведених математичних моделей визначення розподілу температури реальному фізичному процесу. Програмні засоби також дають змогу аналізувати середовища із внутрішнім нагріванням, зосередженим у просторових фігурах правильної геометричної форми, щодо їх термостійкості. Як наслідок, стає можливим її підвищити, визначити допустимі температури нормальної роботи турбогенераторів, захистити їх від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

**Ключові слова:** теплопровідність, конвективний теплообмін, температурне поле, термочутливе середовище, тепло-віддача.

### Вступ

У процесі експлуатації теплових електростанцій широко використовують турбогенератори. Це є генератори синхронного типу, які безпосередньо під'єднані до електростанцій. У цих турбогенераторах турбіни працюють на органічному паливі і вони є економічно вигідними. Встановлено [15], що майже 80 % світової економіки забезпечує таке обладнання. Робота турбогенераторів полягає в перетворенні механічної енергії парової турбіни в електричну за рахунок великої швидкості обертання ротора. Конструкційні елементи турбогенераторів у процесі експлуатації перебувають у середовищі з високою температурою, що істотно впливає на їхні фізико-механічні параметри, а в подальшому визначає і якість роботи. Варто також врахувати, що за рахунок впливу високих температур та виникаючих внаслідок температурних напружень у матеріалах турбогенераторів з перебігом часу відбуваються структурні зміни, які погіршують механічні властивості деталей загалом і знижують робочий ресурс турбогенераторів. Тому важливим є визначення допустимих температур, які ще сприяють нормальній роботі турбогенераторів.

Наведені нижче результати є продовженням дослідження [8], в якому було розроблено математичні моделі визначення розподілу температури в елементах турбогенераторів, які геометрично описано ізотропним півпростором і термочутливим простором з локально зосередженими джерелами нагрівання.

*Об'єктом дослідження* – процеси теплообміну в середовищах із внутрішнім нагріванням, зосередженим в об'ємах фігур правильної геометричної форми.

*Предмет дослідження* – засоби побудови лінійних і нелінійних математичних моделей процесу теплообміну та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач математичної фізики.

*Мета роботи* – розроблення математичних моделей для аналізу температурних режимів у окремих елементах турбогенераторів, які дають змогу встановити допустимі температури нормальної роботи.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- здійснити аналіз останніх досліджень та публікацій;
- навести формалізацію об'єкта дослідження та його математичні моделі;
- проаналізувати числові результати дослідження;
- навести висновки та оцінку їх достовірності.

*Наукова новизна отриманих результатів дослідження* полягає в тому, що з використанням теорії узагальнених функцій у наочній формі записано остаточні диференціальні рівняння теплопровідності з крайовими умовами, для розв'язування яких використано інтегральне перетворення Ганкеля, внаслідок чого отримано аналітичні розв'язки в зображеннях. До цих розв'язків застосовано обернене інтегральне перетворення Ганкеля, яке дало змогу отримати завершені аналітичні розв'язки остаточних задач.

Практична значущість результатів дослідження полягає в тому, що розроблено обчислювальні програми, які дають змогу визначити числові значення температури у відповідних конструкціях, а також проаналізувати теплообмін у елементах турбогенераторів, зумовленого різними температурними режимами завдяки нагріванню внутрішніми джерелами тепла, зосередженими в об'ємі циліндра. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність наведених математичних моделей визначення розподілу температури реальному фізичному процесу.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Визначення температурних режимів як в однорідних, так і неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників [1], [2], [4], [11], [15], [17]. У працях [3], [6], [7] удосконалено наявні та розроблено нові підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-однорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-однорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено методи визначення аналітичних і аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності.

Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних і шаруватих конструкціях із чужорідними включеннями канонічної форми. Розроблено математичну модель для дослідження температурного поля, спричиненого ротаційним зварюванням металів за допомогою тертя. З цією метою сформовано осесиметричну нелінійну крайову задачу теплопровідності для двох кругових циліндрів з одночасним урахуванням теплоутворення внаслідок тертя та від пластичного деформування. Прийнято, що коефіцієнт тертя, межа пластичності і теплофізичні властивості матеріалів зразків змінюються з ростом температури. Числовий розв'язок задачі отримано методом скінченних елементів. Обчислення виконано для двох зразків, виготовлених зі сталі AISI 1040. Виявлено, що фрикційне теплоутворення відчутніше, порівняно з нагріванням від пластичного деформування, впливає на максимальну температуру поверхні контакту. Встановлено емпіричні залежності температури від параметра, що характеризує частку кожного із двох вказаних механізмів теплоутворення в загальній кількості генерованого тепла.

Верифіковано розрахункову модель порівнянням обчислених значень температури з відповідними експериментальними [14]. Розроблено математичну модель для визначення нестационарного температурного поля в багатошаровій термочутливій пластині за різних умов нагрівання. Застосовано до сформульованої нелінійної крайової задачі перетворення Гудмена і отримано методом прямих з використанням інтегро-інтерполяційного методу її напівдискретний аналог у вигляді задачі Коші для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Чисельно за допомогою формул диференціювання назад, задавши температурні залежності для теплофізичних параметрів шарів пластини, розв'язано задачу Коші для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у двошаровій пластині. Приріст температури визначено через змінну Гудмена за формулами оберненої інтерполяції [5].

## Результати дослідження та їх обговорення

**Об'єкт дослідження та його математичні моделі.** У роботі [8] розроблено математичні моделі визначення температурних полів та аналізу температурних режимів у окремих елементах турбогенераторів, на які діють внутрішньо зосереджені теплові навантаження. Наведемо ще низку математичних моделей теплообміну, які дають змогу визначити температурні поля в елементах турбогенераторів і встановлювати допустимі значення температури для їх нормальної роботи.

1. Розглянемо ізотропний півпростір, в об'ємі  $2\pi R^2 h$  циліндра якого зосереджені рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0 = const$ , віднесений до циліндричної системи координат  $(Or\varphi z)$  із початком в центрі циліндра. На поверхні  $z = -h-l$  півпростору задано умову конвективного теплообміну із навколишнім середовищем за законом Ньютона, температура якого є такою, що дорівнює  $t_c = const$  (рис. 1).

Для визначення стаціонарного температурного поля  $t(r, z)$  у наведеному середовищі використаємо рівняння теплопровідності [12], [16]

$$\lambda \Delta t = -q_0 S_{\pm}(R-r)N(z) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=-h-l} = \alpha_z (t|_{z=-h-l} - t_c), \quad t|_{r,z \rightarrow \infty} = t_c, \quad (2)$$

де:  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності півпростору;  $\alpha_z$  – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні  $z = -h-l$  півпростору;  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа в циліндричній системі координат;  $N(z) = S_{\pm}(z+h) - S_{\pm}(z-h)$ ;

$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \pm 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0, \end{cases}$  – асиметричні одиничні функції [13].

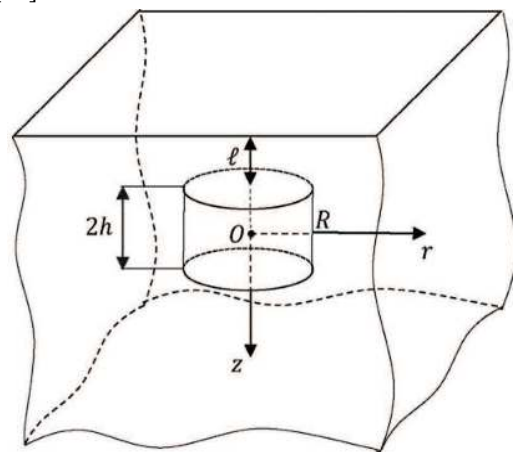


Рис. 1. Ізотропний півпростір із циліндричним джерелом тепла

До співвідношень (1), (2) застосовуємо інтегральне перетворення Ганкеля за просторовою координатою  $r$ . Внаслідок чого отримаємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\theta} = -\frac{q_0 R}{\lambda \xi} I_1(R\xi) N(z) \quad (3)$$

з крайовими умовами

$$\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=-h-l} = \alpha_z \bar{\theta} \Big|_{z=-h-l}, \quad \bar{\theta} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (4)$$

де  $\theta(r, z) = t(r, z) - t_c$ ;  $\bar{\theta}(z) = \int_0^\infty r I_0(r\xi) \theta(r, z) dr$  – трансформанта температури  $\theta(r, z)$ ;  $\xi$  – параметр інтегрального перетворення,  $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!(\nu+n)!}$  – функція Бесселя першого роду  $\nu$ -го порядку.

Загальний розв'язок рівняння (3) знайдемо методом варіації сталих у вигляді

$$\bar{\theta}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} + \frac{q_0 R}{\lambda \xi^3} I_1(R\xi) \cdot [N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h)],$$

де  $c_1, c_2$  – сталі інтегрування, які визначимо із використанням крайових умов (4). Внаслідок чого отримаємо частковий розв'язок задачі (3), (4)

$$\bar{\theta}(z) = \frac{q_0 R}{\lambda \xi^3} I_1(R\xi) \left\{ sh\xi h \left[ e^{\xi z} + \frac{\lambda \xi - \alpha_z}{\lambda \xi + \alpha_z} e^{-\xi(z+h+l)} \right] + N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h) \right\}. \quad (5)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (5), одержимо вираз для шуканої температури  $\theta(r, z)$

$$\theta(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda} \int_0^\infty \frac{I_0(r\xi)}{\xi^2} I_1(R\xi) \left[ sh\xi h \left[ e^{\xi z} + \frac{\lambda \xi - \alpha_z}{\lambda \xi + \alpha_z} e^{-\xi(z+h+l)} \right] + N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h) \right] d\xi, \quad (6)$$

яким повністю виражено температурне поле в ізотропному півпросторі з тепловіддачею, що нагрівається джерелом тепла циліндричної форми.

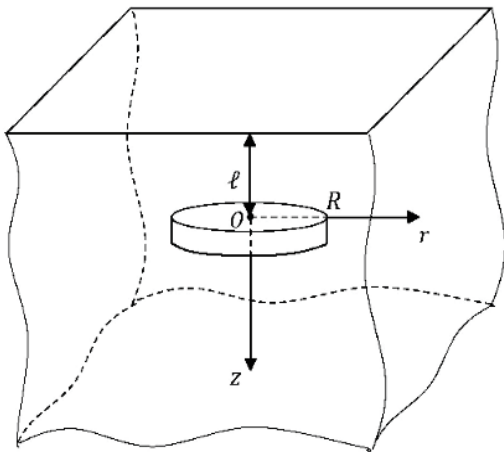


Рис. 2. Ізотропний півпростір із джерелом тепла, зосередженим у тонкому циліндрі

2. Розглянемо випадок, коли відстань  $l$  від поверхні циліндра до поверхні півпростору є набагато більшою за висоту  $h$  та радіус  $R$  ( $l \gg h, l \gg R$ ) тепловідляючого циліндра (рис. 2). Із урахуванням цього рівняння теплопровідності (1) запишемо у вигляді

$$\lambda \Delta t = -q_0 S_-(R-r) \delta(z) \quad (7)$$

з крайовими умовами

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=-l} = \alpha_z (t \Big|_{z=-l} - t_c), \quad t \Big|_{r, z \rightarrow \infty} = t_c, \quad (8)$$

де  $\delta(z) = \frac{dS(z)}{dz}$  – дельта функція Дірака [13];

$$S(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0,5, & z = 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases} \text{ – симетрична одинична функція [13].}$$

До крайової задачі (7), (8) застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля за просторовою координатою  $r$ . Внаслідок чого отримаємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\theta} = -\frac{q_0 R}{\lambda \xi} I_1(R\xi) \delta(z) \quad (9)$$

та крайові умови

$$\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=-l} = \alpha_z \bar{\theta} \Big|_{z=-l}, \quad \bar{\theta} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (10)$$

Загальний розв'язок рівняння (9) знайдемо методом варіації сталих у вигляді

$$\bar{\theta}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} - \frac{q_0 R}{\lambda \xi^2} I_1(R\xi) sh\xi z S(z).$$

Сталі інтегрування  $c_1, c_2$  визначимо, використавши крайові умови (10). Внаслідок чого отримаємо частковий розв'язок задачі (9), (10)

$$\bar{\theta}(z) = \frac{q_0 R}{\lambda \xi^2} I_1(R\xi) \left[ \frac{1}{2} \left( e^{\xi z} + \frac{\lambda \xi - \alpha_z}{\lambda \xi + \alpha_z} e^{-\xi(z+2h)} \right) - sh\xi z S(z) \right]. \quad (11)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (11), отримаємо вираз для шуканої температури  $\theta(r, z)$  у вигляді

$$\theta(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda} \int_0^\infty \frac{I_1(R\xi) I_0(r\xi)}{\xi} \left[ \frac{e^{\xi z}}{2} - sh\xi z S(z) + \frac{\lambda \xi - \alpha_z}{\lambda \xi + \alpha_z} \frac{e^{-\xi(z+2l)}}{2} \right] d\xi, \quad (12)$$

яким описано температурне поле в ізотропному півпросторі, що нагрівається джерелом тепла, зосередженим у тонкому циліндрі.

3. Розглянемо ізотропний простір, в об'ємі  $2\pi R^2 h$  циліндра якого зосереджені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0 = const$ , віднесений до циліндричної системи координат  $(Or\varphi z)$  із початком в центрі циліндра (рис. 3). Для визначення стаціонарного температурного поля  $t(r, z)$  в наведеному середовищі використаємо рівняння теплопровідності (1) з крайовими умовами

$$t \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (13)$$

До даної крайової задачі застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля за просторовою координатою  $r$ . Внаслідок чого отримаємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dz^2} - \xi^2 \bar{t} = -\frac{q_0 R}{\lambda \xi} I_1(R\xi) N(z) \quad (14)$$

та крайову умову

$$\frac{d\bar{t}}{dz} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (15)$$

де  $\bar{t}(z) = \int_0^\infty r I_0(r\xi) t(r, z) dr$  – трансформанта температури стаціонарного температурного поля  $t(r, z)$ .

Загальний розв'язок рівняння (14) знайдемо методом варіації сталих у вигляді, внаслідок чого отримаємо такий результат:

$$\bar{t}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} + \frac{q_0 R}{\lambda \xi^3} I_1(R\xi) [N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h)],$$

де  $c_1, c_2$  – сталі інтегрування, які визначимо із використанням крайової умови (15).

Внаслідок чого отримаємо частковий розв'язок задачі (14), (15) у такому вигляді

$$\bar{t}(z) = \frac{q_0 R}{\lambda \xi^3} I_1(R\xi) \left[ e^{\xi z} sh\xi h + N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h) \right]. \quad (16)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (16), одержимо вираз для шуканої температури  $t(r, z)$

$$t(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda} \int_0^\infty \frac{I_0(r\xi)}{\xi^2} I_1(R\xi) \left\{ sh\xi h \left[ e^{\xi z} + \frac{\lambda \xi - \alpha_z}{\lambda \xi + \alpha_z} e^{-\xi(z+h)} \right] + N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h) \right\}, \quad (17)$$

яким виражено температурне поле  $t(r, z)$  в ізотропному просторі, що нагрівається джерелом тепла циліндричної форми (рис. 3).

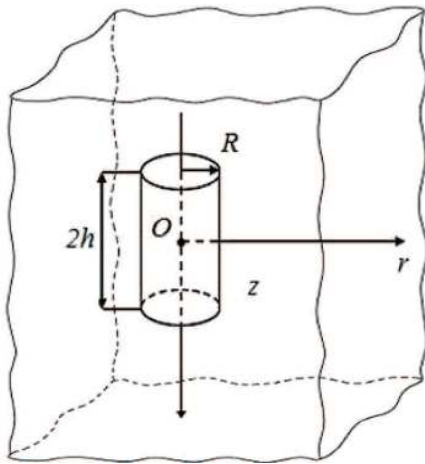


Рис. 3. Ізотропний простір із циліндричним джерелом тепла

4. Розглянемо ізотропний термочутливий (теплофізичні параметри залежать від температури) простір, в об'ємі  $2\pi R^2 h$  циліндра якого зосереджені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0 = const$ , віднесений до циліндричної системи координат  $(Or\varphi z)$  із початком в центрі циліндра (рис. 3). Для визначення стаціонарного температурного поля в наведеному середовищі використаємо нелінійне рівняння теплопровідності [12], [16]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = -q_0 S_-(R-r)N(z) \quad (18)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{|z| \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (19)$$

де  $\lambda(t)$  – коефіцієнт теплопровідності термочутливого простору. Введемо перетворення Кірхгофа [12], [16]

$$\vartheta(r, z) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^t \lambda(\zeta) d\zeta, \quad (20)$$

де  $\lambda^0$  – опорний коефіцієнт теплопровідності простору.

Продиференціюємо вираз (20) за змінними  $r$  та  $z$ . Внаслідок чого отримаємо співвідношення

$$\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} = \lambda^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \quad \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} = \lambda^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (21)$$

після підстановки яких у (18), одержимо лінійне диференціальне рівняння відносно функції  $\vartheta(r, z)$

$$\Delta \vartheta = -\frac{q_0}{\lambda^0} S_-(R-r)N(z). \quad (22)$$

Крайові умови для функції  $\vartheta(r, z)$  із використанням співвідношень (20), (21) запишемо у вигляді

$$\vartheta|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \vartheta|_{|z| \rightarrow \infty} = 0. \quad (23)$$

Отже, із використання перетворення Кірхгофа (20) нелінійну крайову задачу теплопровідності (18), (19) зведено до лінійної задачі (22), (23).

Застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля за координатою  $r$  до задачі (22), (23). Внаслідок чого отримаємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = -\frac{q_0 R}{\lambda \xi} N(z) J_1(R\xi) \quad (24)$$

з крайовою умовою

$$\bar{\vartheta}|_{|z| \rightarrow \infty} = 0, \quad (25)$$

де  $\bar{\vartheta}(z) = \int_0^\infty r J_0(r\xi) \vartheta(r, z) dr$  – трансформанта функції  $\vartheta(r, z)$ .

Загальний розв'язок рівняння (24) знайдемо методом варіації сталих у вигляді

$$\vartheta(r, z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} + \frac{q_0 R}{\lambda^0 \xi^3} J_1(R\xi) \cdot$$

$$\cdot [N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h)] d\xi.$$

Сталі інтегрування  $c_1, c_2$  визначимо, використавши крайову умову (25). Внаслідок чого отримаємо частковий розв'язок задачі (24), (25)

$$\vartheta(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda^0 \xi^3} J_1(R\xi) \left[ e^{\xi z} sh\xi h + N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h) \right] d\xi. \quad (26)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (26), одержимо вираз для функції  $\vartheta(r, z)$

$$\vartheta(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda^0} \int_0^\infty \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2} J_1(R\xi) \left[ e^{\xi z} sh\xi h + N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h) \right] d\xi. \quad (27)$$

У багатьох практичних випадках спостерігають лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури для певних інтервалів температур у вигляді співвідношення

$$\lambda(t) = \lambda^0 (1 - kt), \quad (28)$$

де  $k$  – температурний коефіцієнт теплопровідності. Тоді із використанням виразів (20), (27), (28) отримаємо вираз для визначення температури  $t(r, z)$

$$t(r, z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2k\vartheta(r, z)}}{k}, \quad (29)$$

яким повністю описано розподіл температури в термочутливому просторі з джерелом тепла циліндричної форми.

**Аналіз числових результатів.** За формулами (6), (12), (17), (29) виконано обчислення температури  $t(r, z)$  і побудовано криві, які відображають її поведінку за просторовими радіальною  $r$  (рис. 4, 6) та аксіальною  $z$  (рис. 5, 7) координатами. Вибрано такі матеріали середовища:  $a$  – алюміній;  $b$  – мідь,  $c$  – кремній,  $d$  – германій. Значення потужності внутрішніх джерел тепла  $q_0$  дорівнює  $200W / m^3$ .



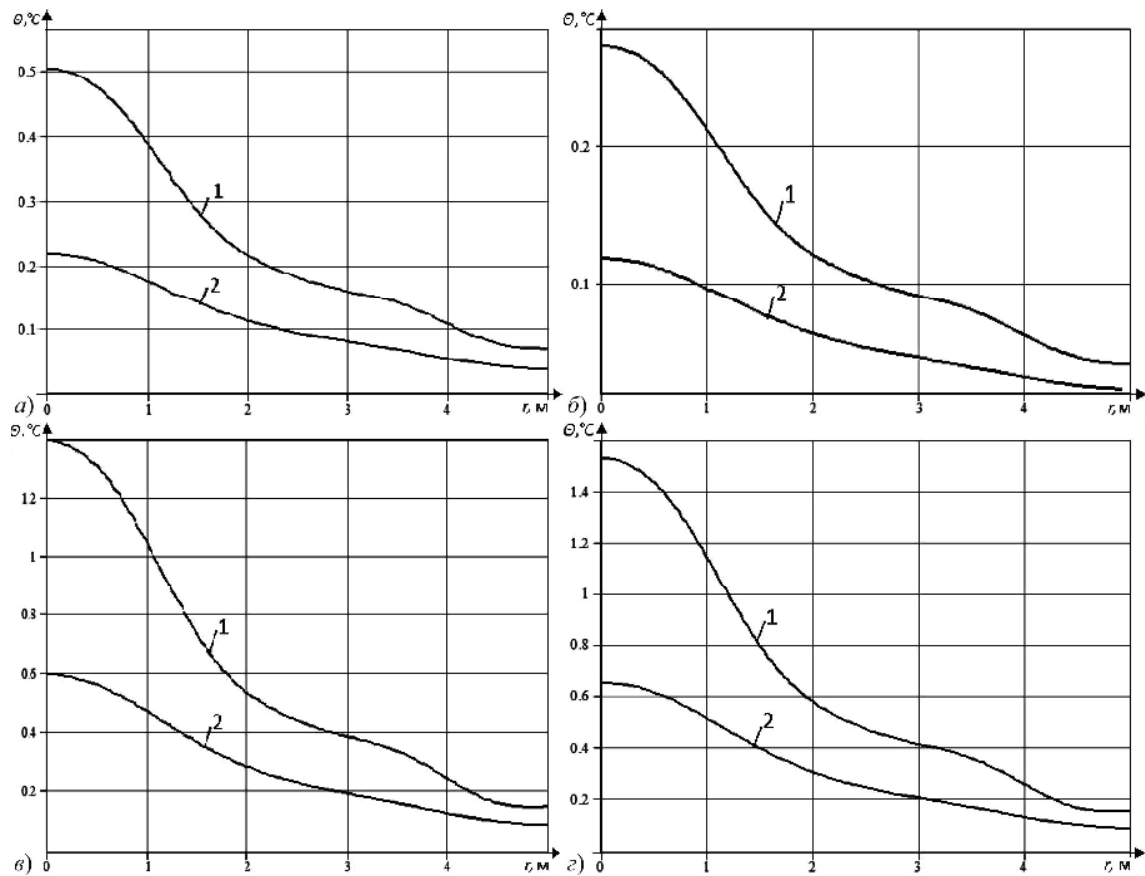


Рис. 4. Зміна температури  $t(r, z)$  за радіальною координатою  $r$  для значення аксіальної координати  $z=1$  м

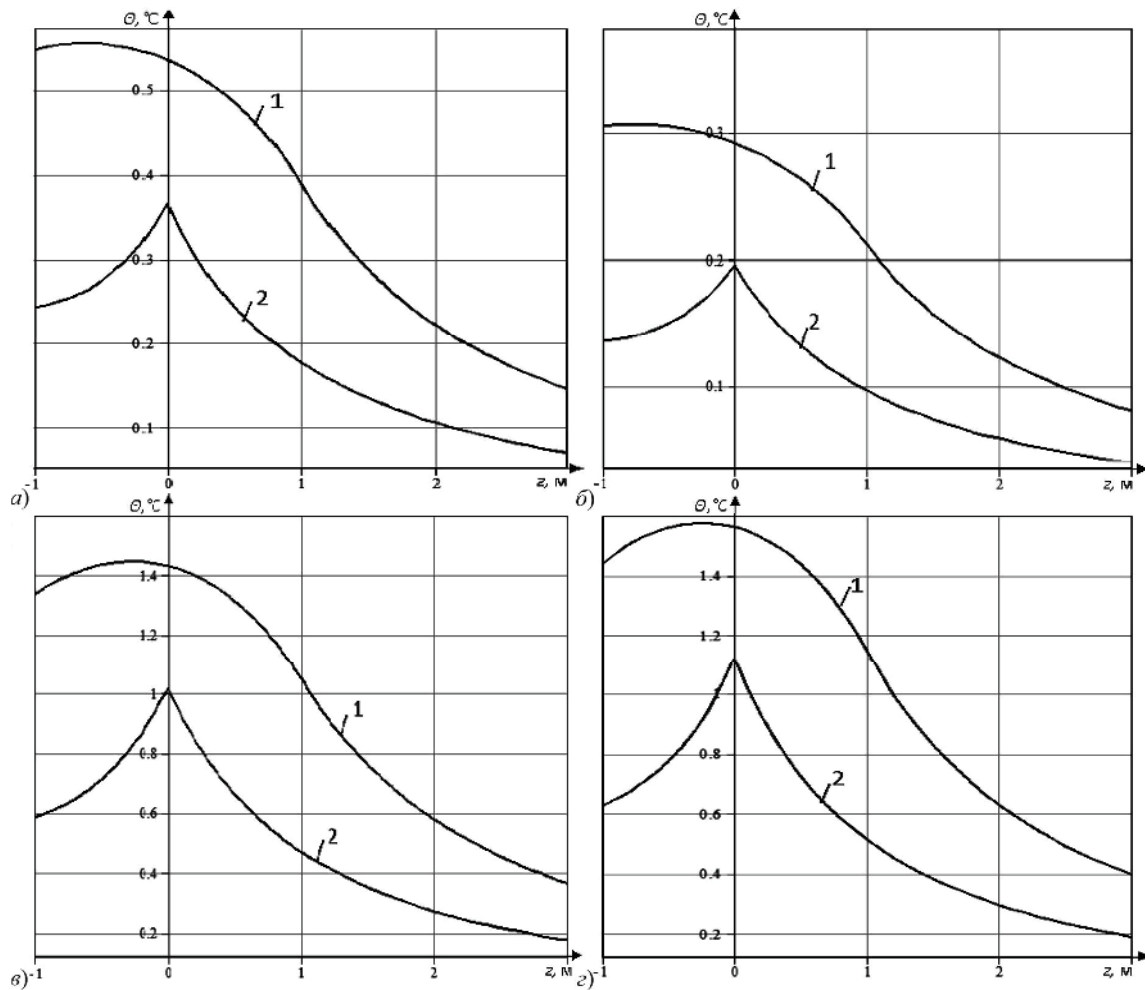


Рис. 5. Зміна температури  $t(r, z)$  за аксіальною координатою  $z$  для значення радіальної координати  $r=1$  м

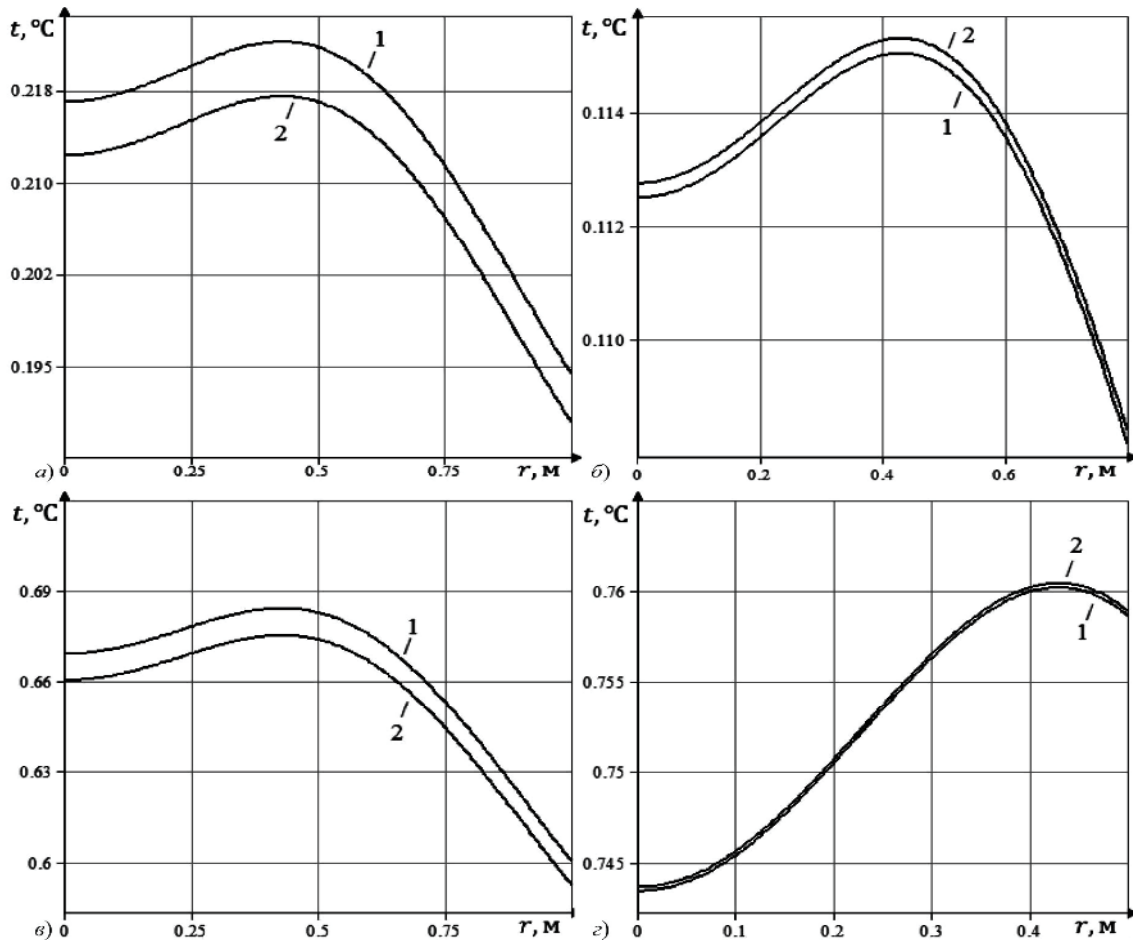


Рис. 6. Зміна температури  $t(r,z)$  за радіальною координатою  $r$  для значення аксіальної координати  $z=1$  м

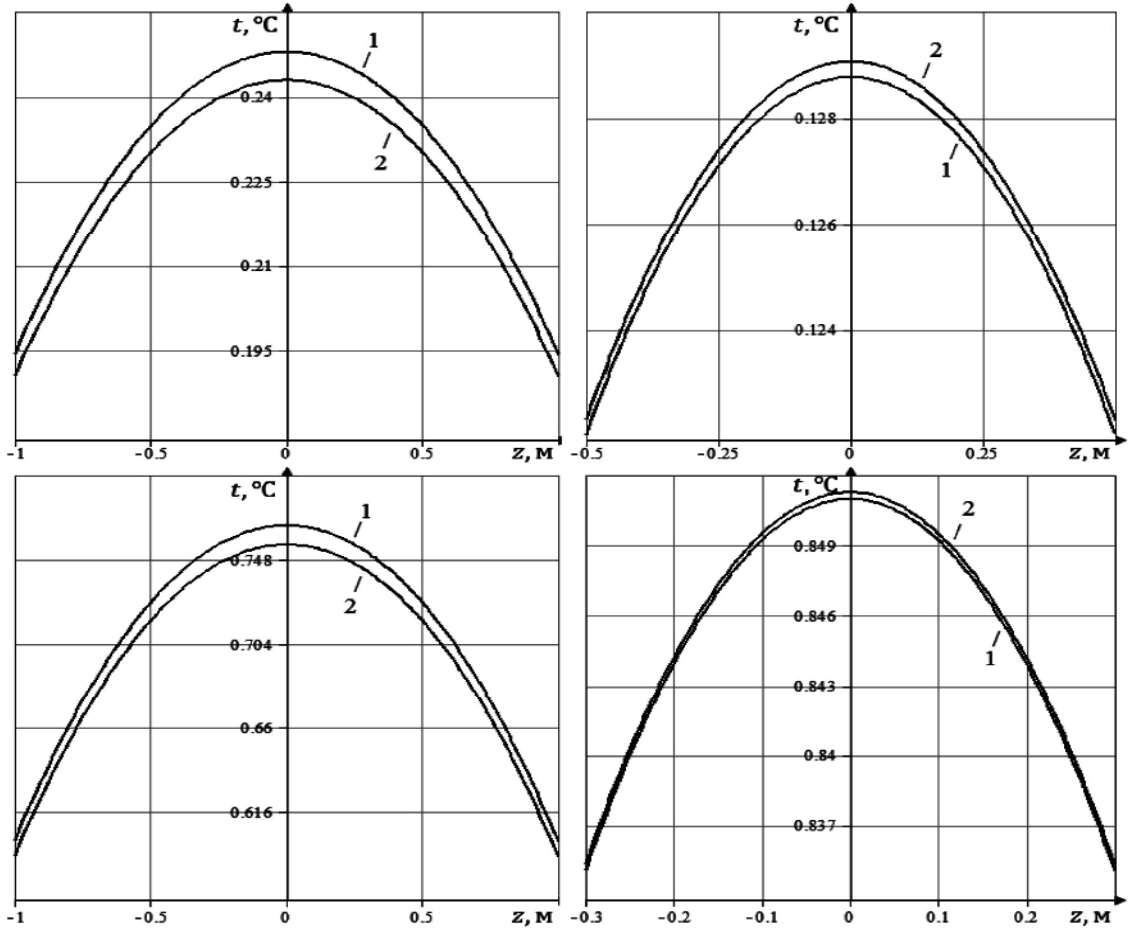


Рис. 7. Зміна температури  $t(r,z)$  за аксіальною координатою  $z$  для значення радіальної координати  $r = 1$  м

Криві 1, 2 (рис. 4, 5) відповідають моделям, геометричне відображення яких зображено рис. 1, 2 відповідно. Рис. 6, 7 відповідають моделі, геометричне відображення якої зображено рис. 3, та ілюструють зміну температури, яку визначено за лінійною моделлю (сталі значення коефіцієнта теплопровідності) (крива 1) та нелінійною (коефіцієнт теплопровідності змінюється лінійно зі зміною температури за формулою (28)) (крива 2). Для вибраних матеріалів сталі значення коефіцієнта теплопровідності та співвідношення, якими виражено залежність коефіцієнта теплопровідності від температури є такими:

- алюміній –  $\lambda = 207W / (Km)$ ,  $\lambda(t) = 211,2(1 - 0,0008t)$  ;
- мідь –  $\lambda = 395W / (Km)$ ,  $\lambda(t) = 397,8(1 - 0,0002t)$  ;
- кремній –  $\lambda = 67W / (Km)$ ,  $\lambda(t) = 67,9(1 - 0,0005t)$  ;
- германій –  $\lambda = 60,3W / (Km)$ ,  $\lambda(t) = 60,3(1 - 0,0008t)$  .

Числовий аналіз свідчить про те, що максимальна різниця значень температури, отриманих за лінійною та нелінійною моделями, становить 3 %.

## Висновки

Розроблено математичні моделі аналізу температурних режимів в окремих елементах турбогенераторів із внутрішніми джерелами нагрівання, зосередженими в об'ємі циліндра. Застосовано теорію узагальнених функцій, яка дала змогу в зручному вигляді описати внутрішні джерела тепла та отримати остаточні диференціальні рівняння теплопровідності з крайовими умовами. Для випадку термочутливого простору остаточну нелінійну математичну модель лінеаризовано за допомогою перетворення Кірхгофа. Внаслідок чого отримано лінійну крайову задачу відносно цього перетворення. За одною з просторових координат застосовано метод інтегрального перетворення Ганкеля і у замкнутому вигляді отримано аналітичні розв'язки крайових задач. Для термочутливого простору нелінійну крайову задачу розв'язано для випадку лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу від температури і внаслідок одержано зручну розрахункову формулу для визначення температури. Із використанням аналітичних розв'язків виконано числові розрахунки температури залежно від просторових координат і наведено їх геометричне відображення. Числовий аналіз свідчить про відповідність наведених математичних моделей реальному фізичному процесу.

## References

- [1] Bayat, A., Moosavi, H., & Bayat, Y. (2015). Thermo-mechanical analysis of functionally graded thick spheres with linearly time-dependent temperature. *Scientia Iranica*, 22(5), 1801–1812.
- [2] Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams. *J. Eng. Math*, 61, 2–4, 371–384.

**V. I. Havrysh, B. O. Bilinskyi, O. S. Korol, R. R. Shkrab, I. O. Zimoha**

*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

## MATHEMATICAL MODELS OF HEAT TRANSFER IN ELEMENTS OF TURBO GENERATORS (CONTINUED)

Previously developed [8] and presented new mathematical models for the analysis of temperature regimes in individual elements of turbo generators, which are geometrically described by isotropic half-space and space with an internal heat source of cylindrical shape. Cases are also considered for half-space, when the fuel-releasing cylinder is thin, and for space, when it is heat-

- [3] Gavrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). *Modeljuvannja temperaturnyh rezhymiv u kuskovo-odnorodnyh strukturah*. Lviv: Publishing NU "Lviv'ska politehnika", pp. 176–178.
- [4] Ghannad, M., & Yaghoobi, M. P. (2015). A thermoelasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Int. Journal of Advanced Design & Manufacturing Technology*, 8(4), 1–12.
- [5] Harmatiy, G. Yu., Popovich, V. S., & Krul, M. (2019). Influence of thermal sensitivity of material on unstable thermal state of multilayer plate. *Physico-chemical mechanics of materials*, 1, 98–104. [In Ukrainian].
- [6] Havrysh, V. I., Baranetskiy, Ya. O., & Kolyasa, L. I. (2018). Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 3(46), 7–15.
- [7] Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., & Ukhanka, O. M. (2019). Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk NHU*, 1, 94–100.
- [8] Havrysh, V. I., Korol, O. S., Shkrab, R. R., & Zimoha, I. O. (2019). Mathematical models of heat transfer in elements of turbogenerators. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 1(1), 22–27. <https://doi.org/10.23939/ujit2019.01.022>
- [9] Hrytsiuk, Yu., & Bilas, O. (2019). Visualization of Software Quality Expert Assessment. *IEEE 2019 14th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT 2019)*, (Vol. 2, pp. 156–160), 17–20 September, 2019. <https://doi.org/10.1109/stc-csit.2019.8929778>
- [10] Hrytsiuk, Yu., & Grytsyuk, P., Dyak, T., & Hrynyk, H. (2019). Software Development Risk Modeling. *IEEE 2019 14th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT 2019)*, (Vol. 2, pp. 134–137), 17–20 September, 2019. <https://doi.org/10.1109/stc-csit.2019.8929778>
- [11] Jabbari, M., Karampour, S., & Eslami, M. R. (2011). Radially symmetric steady state thermal and mechanical stresses of a poro FGM hollow sphere. *International Scholarly Research Network ISRN Mechanical Engineering*, 3, 1–7. <https://doi.org/10.5402/2011/305402>
- [12] Kolyano, Yu. M. (1992). *Methods of thermal conductivity and thermoelasticity of an inhomogeneous body*. Kyiv: Naukova dumka. [In Ukrainian].
- [13] Korn, G., & Korn, T. (1977). *A guide to mathematics for scientists and engineers*. Moscow: Science. [In Russian].
- [14] Lukashevich, A. (2019). Temperature field in the contact zone during rotary friction welding of metals. *Physico-chemical mechanics of materials*, 1, 41–46. [In Ukrainian].
- [15] Mohazzab, A. H., & Jabbari, M. (2011). Two-Dimensional Stresses in a Hollow FG Sphere with Heat Source. *Advanced Materials Research*, 264–265, 700–705. <https://doi.org/10.4028/scientific.net/amr.264-265.700>
- [16] Podstrigach, Ya. S., Lomakin, V. A., & Kolyano, Yu. M. (1984). *Thermoelasticity of bodies of inhomogeneous structure*. Moscow: Science. [In Russian].
- [17] Yangian, Xu., & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM, *WASE. International Conf. on Informa. Eng.*, 2–2, 433–436.

sensitive. For this purpose, using the theory of generalized functions, the initial differential equations of thermal conductivity with boundary conditions are written in a convenient form. To solve the obtained boundary value problems of thermal conductivity, the integral Hankel transformation was used, and as a result, analytical solutions in the images were obtained. The inverse Hankel integral transformation was applied to these solutions, which made it possible to obtain the final analytical solutions of the initial problems. The obtained analytical solutions are presented in the form of improper convergent integrals. Computational programs have been developed to determine the numerical values of temperature in the above structures, as well as to analyze the heat transfer in the elements of turbo generators due to different temperature regimes due to heating by internal heat sources concentrated in the cylinder volume. Using these programs, graphs are presented that show the behavior of curves constructed using numerical values of the temperature distribution depending on the spatial radial and axial coordinates. The obtained numerical values of temperature indicate the correspondence of the given mathematical models for determining the temperature distribution to the real physical process. The software also allows you to analyze media with internal heating, concentrated in the spatial figures of the correct geometric shape, in terms of their heat resistance. As a result, it becomes possible to increase it, to determine the allowable temperatures of normal operation of turbo generators, to protect them from overheating, which can cause the destruction of not only individual elements but also the entire structure.

**Keywords:** thermal conductivity convective heat transfer, temperature field, thermosensitive environment, heat transfer.

---

#### Інформація про авторів:

**Гавриш Василь Іванович**, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.

**Email:** gavryshvasyl@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

**Білінський Богдан Омелянович**, д-р техн. наук, професор, кафедра будівельних конструкцій та мостів.

**Email:** Bihdan.O.Bilinskyi@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0001-5486-0557>

**Король Олександр Сергійович**, ст. викладач, кафедра фізичного виховання. **Email:** korol\_lofkk@i.ua

**Шкраб Роман Романович**, асистент, кафедра програмного забезпечення. **Email:** Roman.R.Shkrab@lpnu.ua;

<https://orcid.org/0000-0001-9813-2877>

**Зімоха Ігор Олегович**, асистент, кафедра програмного забезпечення. **Email:** Zimiol@gmail.com

**Цитування за ДСТУ:** Гавриш В. І., Білінський Б. О., Король О. С., Шкраб Р. Р., Зімоха І. О. Математичні моделі теплообміну в елементах турбогенераторів (продовження). *Український журнал інформаційних технологій*. 2020, т. 2, № 1. С. 21–28.

**Citation APA:** Havrysh, V. I., Bilinskyi, B. O., Korol, O. S., Shkrab, R. R., & Zimoha, I. O. (2020). Mathematical models of heat transfer in elements of turbo generators (continued). *Ukrainian Journal of Information Technology*, 2(1), 21–28.

<https://doi.org/10.23939/ujit2020.02.021>