

# Capítulo 8

## Análisis Espectral de alta resolución

Además del análisis espectral estándar con transformada de Fourier y de los diversos métodos de compensación por campo magnético no uniforme, se han implementado otros estimadores espectrales de alta resolución para facilitar la identificación e interpretación de señales. Debido a las peculiaridades del sistema comentadas en el capítulo 7, puede resultar útil disponer de diversos métodos alternativos de estimación espectral, especialmente los que consiguen una resolución mayor que la transformada de Fourier.

En este capítulo se desarrollan diversos algoritmos de estimación espectral, partiendo del *periodograma* y llegando hasta los estimadores espectrales de alta resolución basados en análisis de subespacios propios.

### 8.1. Periodograma

El *periodograma* es el estimador espectral más sencillo. La palabra periodograma fue inventada por Arthur Schuster en 1898, en [7], del siguiente modo:

EL PERIODOGRAMA. Es conveniente tener una palabra para alguna representación de la cantidad variable que corresponde al 'espectro' de la radiación luminosa. Propongo la palabra periodograma, y la defino particularmente de la siguiente manera:

Sea

$$\begin{aligned}\frac{T}{2} a &= \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(kt) dt \\ \frac{T}{2} b &= \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(kt) dt\end{aligned}$$

donde  $T$  se puede elegir por conveniencia como un entero múltiplo de

$$\frac{2\pi}{k}$$

y dibujar una curva con  $2\pi/k$  como abscisas y

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

como ordenadas; esta curva, o mejor, el espacio entre esta curva y el eje de abscisas, representa el periodograma de  $f(t)$ .

También se puede representar  $r^2$  en vez de  $r$  para obtener una estimación de la densidad espectral de potencia.

El periodograma de una secuencia consiste simplemente en su transformada discreta de Fourier. No es un buen estimador espectral porque la varianza a una determinada frecuencia no disminuye cuando el tamaño de la muestra aumenta. Para solucionar esto, se suele partir la secuencia en  $L$  secuencias, calcular la transformada de cada una de ellas y promediarlas. Este método disminuye la varianza en un factor  $\sqrt{L}$  a costa de disminuir también la resolución espectral, y se conoce como método de los periodogramas promediados, ver el capítulo 7 de [8].

Es posible mejorar esta disminución de la varianza promediando el cuadrado de la transformada de Fourier de cada una de las  $L$  secuencias. Esta técnica se conoce con el nombre de *método de Bartlett*, y disminuye la varianza del periodograma en un factor  $L$ .

El ruido existente en la estimación del método de Bartlett se puede reducir aplicando el llamado *método de Welch*. Consiste en inventanar cada secuencia con una determinada función ventana. Las funciones más usadas para inventanar suelen dar más importancia a los valores centrales de la secuencia que a los valores de los extremos, lo que supone una pérdida de información. Para compensar este efecto, se introduce un solapamiento entre secuencias. Esto quiere decir que un cierto porcentaje de muestras del extremo final de una secuencia forma parte del principio de la siguiente.

Todos éstos métodos están basados en el periodograma (es decir, en la transformada discreta de Fourier) y son útiles para obtener rápidamente el aspecto del espectro de una señal, que puede ayudar a ajustar los parámetros del resto de estimadores más complejos y precisos.

## 8.2. Estimador de máxima entropía (AR)

El estimador *autorregresivo* (AR) es un estimador relativamente sencillo que proporciona mayor resolución que los basados en el periodograma. Es un estimador paramétrico y, por lo tanto, impone un modelo paramétrico en la señal a estimar. Concretamente considera que la señal ha sido generada por un filtro de orden  $N$  donde la entrada es ruido blanco gaussiano de varianza  $\sigma^2$ .

Si se denomina  $\frac{1}{\tilde{W}(z)}$  a la respuesta del filtro,  $e(n)$  a la entrada y  $y(n)$  a la salida, entonces  $\tilde{W}(z)$  tiene el aspecto de la ecuación 8.1 e  $y(n)$  el de la ecuación 8.2.

$$\tilde{W}(z) = 1 - \sum_{i=1}^N w_i z^{-i} \quad (8.1)$$

$$y(n) = \sum_{i=1}^N w_i y(n-i) + e(n) \quad (8.2)$$

El estimador espectral autorregresivo viene dado por la ecuación 8.3, con las definiciones en 8.4 y 8.5.

$$\begin{aligned} P_{ar}(\omega) &= \frac{\sigma^2}{|\tilde{W}(\omega)|^2} = \frac{\sigma^2}{\left|1 - \sum_{m=1}^N w_m e^{-j\omega m}\right|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{|a^H(\omega) \tilde{w}|^2} \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$a(\omega) = [1, e^{j\omega}, \dots, e^{j\omega N}]^T \quad (8.4)$$

$$\tilde{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -w \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

El problema del estimador AR consiste en estimar el orden  $N$  del modelo, así como la varianza del ruido  $\sigma^2$  y el vector  $w = [w_1, \dots, w_N]^T$ .

El cálculo de la correlación  $r(m)$  en la ecuación 8.6, escrito en forma matricial resulta en las *ecuaciones de Yule-Walker* (8.7 y 8.8).

$$\begin{aligned}
 r(m) &= E[y(n) y^*(n-m)] \\
 &= \sum_{i=1}^N w_i E[y(n-i) y^*(n-m)] + E[e(n) y^*(n-m)] \\
 &= \begin{cases} \sum_{i=1}^N w_i r(m-i), & m > 0 \\ \sum_{i=1}^N w_i r(-i) + \sigma^2, & m = 0 \\ r^*(-m) & m < 0 \end{cases} \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \cdots & r(-N) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(-N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N) & r(N-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -w_1 \\ \vdots \\ -w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

$$R \tilde{w} = \sigma^2 \delta \quad (8.8)$$

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \cdots & r(-N) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(-N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N) & r(N-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}$$

$$\delta = [1, 0, \dots, 0]^T$$

Operando a partir de 8.8 se obtiene 8.9 y de aquí las expresiones 8.10 y 8.11 para  $\sigma^2$  y  $\tilde{w}$ .

$$\frac{1}{\sigma^2} \tilde{w} = R^{-1} \delta \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \delta^H \tilde{w} = \frac{1}{\sigma^2} = \delta^H R^{-1} \delta \quad (8.9)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\delta^H R^{-1} \delta} \quad (8.10)$$

$$\tilde{w} = \sigma^2 R^{-1} \delta = \frac{\delta^H R^{-1} \delta}{|a^H(\omega) R^{-1} \delta|^2} \quad (8.11)$$

La forma final del estimador se puede escribir como en la ecuación 8.12. Hay que tener en cuenta que en función del estimador de correlación usado, y del modo de estimar los parámetros  $w$  y  $\sigma^2$ , el estimador puede dar resultados muy diferentes. Consultar la referencia [4] para más detalles.

$$P_{ar}(\omega) = \frac{\sigma^2}{|a^H(\omega) \tilde{w}|^2} = \frac{\delta^H R^{-1} \delta}{|a^H(\omega) R^{-1} \delta|^2} \quad (8.12)$$

### Perspectiva de máxima entropía

El estimador AR también se denomina estimador de máxima entropía. Para comprender el motivo se debe considerar el siguiente problema. Se dispone de  $2N + 1$  muestras de la función de correlación de un proceso aleatorio. Se desea encontrar el proceso *más aleatorio* cuya función de correlación coincide con los  $2N + 1$  valores dados. Dicho de otro modo, se desea encontrar la densidad espectral de potencia más *plana* (o *blanca*) consistente con los  $2N + 1$  valores de correlación conocidos.

Formalmente, se define la *entropía* como una medida de la aleatoriedad de un proceso como en la ecuación 8.13. Se desea encontrar la densidad espectral de potencia que maximiza  $H$  sujeto a la condición de coincidencia de correlación (ecuación 8.14).

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln [P(\omega)] d\omega \quad (8.13)$$

$$\hat{P}(\omega) = \arg \max_{P(\omega)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln [P(\omega)] d\omega \quad (8.14)$$

Resulta que la densidad espectral de potencia que maximiza la entropía es la que resulta de aplicar el estimador AR de orden  $N$ . Así, el estimador AR extrapola implícitamente la secuencia de correlación. Es por esta razón por la que este estimador proporciona más resolución que los estimadores basados en el periodograma.

## 8.3. Estimador de Capón o de Mínima Varianza

Este estimador se conoce por los nombres de estimador de *mínima varianza*, estimador de *Capón* o estimador de *máxima verosimilitud* (*maximum*

*likelihood*), a pesar de que no es un estimador espectral de máxima verosimilitud.

Para deducir la forma del estimador, se debe partir de una serie de definiciones. Se llamará  $Y$  a un proceso estocástico estacionario, e  $y$  a una realización de dicho proceso. Se considera un filtro de  $M$  muestras al que se denomina  $w$ , que tendrá por entrada una realización  $y$  de  $Y$ . El objetivo es estimar la densidad espectral de potencia,  $P$ .

Si se considera el filtro  $w$  como un vector columna con sus coeficientes  $w$  (ecuación 8.15) y una entrada genérica  $y$  (ecuación 8.16) se puede expresar la salida del filtro,  $z$ , como en 8.17.

$$w = [w_0, w_1, \dots, w_{M-1}]^T \quad (8.15)$$

$$y = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-M+1)]^T \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} z(n) &= \sum_{m=0}^{M-1} w_m y(n-m) \\ &= w^T y \end{aligned} \quad (8.17)$$

Se debe diseñar el filtro  $w$  de modo que su salida dé una estimación de la potencia a la entrada a una determinada frecuencia  $\omega$ . Un criterio que se puede seguir para diseñar  $w$  es que deje pasar la componente espectral a la frecuencia de interés determinada mientras minimiza la influencia de las componentes a otras frecuencias. Se tiene entonces el problema de optimización 8.18 sujeto a 8.19 donde  $a(\omega) = [1, e^{j\omega}, e^{j2\omega}, \dots, e^{j\omega(M-1)}]$

$$\arg \min_w \left\{ E \left[ |w^T y|^2 \right] \right\} \quad (8.18)$$

$$w^H a(\omega) = 1 \quad (8.19)$$

Se desarrolla 8.20, donde  $R$  es la matriz de correlación de  $y$  (ecuación 8.21) y  $r$  cumple 8.22.

$$\begin{aligned} E \left[ |w^T y|^2 \right] &= E \left[ w^H y^* y^T w \right] \\ &= w^H R w \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \dots & r(-M+1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(-M+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(M-1) & r(M-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} r(m) &= E[y(n) y^*(n-m)] \\ &= E[y^*(n) y(n+m)] \\ &= r^*(-m) \end{aligned} \quad (8.22)$$

Se sustituye el resultado de la ecuación 8.20 en la ecuación 8.18 (ecuación 8.23) y se resuelven las ecuaciones 8.23 y 8.19 utilizando el método de los multiplicadores de Langrange (ecuación 8.25). Una vez calculado el valor de  $\lambda$ , se sustituye en la ecuación 8.24, resultando la ecuación 8.26. Finalmente se obtiene la potencia (ecuación 8.27).

$$\arg \min_w \left\{ E \left[ |w^T y|^2 \right] \right\} = \arg \min_w \left\{ w^H R w \right\} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} w_0(\omega) &= \arg \min_w \left\{ w^H R w + \lambda (w^H a(\omega) - 1) \right\} \\ \Rightarrow \nabla_{w^*} \left( w^H R w + \lambda (w^H a(\omega) - 1) \right) &= 0 \\ \Rightarrow R w_0(\omega) + \lambda a(\omega) &= 0 \\ \Rightarrow w_0(\omega) &= -\lambda R^{-1} a(\omega) \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^H(\omega) w_0(\omega) &= 1 = -\lambda a^H(\omega) R^{-1} a(\omega) \\ \Rightarrow \lambda &= -\frac{1}{a^H(\omega) R^{-1} a(\omega)} \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$w_0(\omega) = -\frac{R^{-1} a(\omega)}{a^H(\omega) R^{-1} a(\omega)} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} P_{mv}(\omega) &= E \left[ |w_0(\omega)^T y|^2 \right] \\ &= w_0^H E \left[ y^* y^T \right] w_0 \\ &= \frac{1}{a^H(\omega) R^{-1} a(\omega)} \end{aligned} \quad (8.27)$$

La potencia depende de la matriz de correlación  $R$ , así que se debe usar un estimador de la misma como se ve en 8.28. La Matriz  $\hat{R}$  es *Hermítica* pero no *Toeplitz*<sup>1</sup>.

$$Y^H = \frac{1}{\sqrt{D-M+1}} \begin{bmatrix} y^*(M-1) & y^*(M) & \dots & y^*(D-1) \\ y^*(M-2) & y^*(M-1) & \dots & y^*(D-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^*(0) & y^*(1) & \dots & y^*(D-M) \end{bmatrix}$$

$$\hat{R} = Y^H Y = \sum y[n] y^H[n] \quad (8.28)$$

La forma final del estimador de mínima varianza viene dada por la ecuación 8.29.

$$P_{mv}(\omega) = \frac{1}{a^H(\omega) \hat{R}^{-1} a(\omega)} \quad (8.29)$$

Este estimador es ampliamente conocido y utilizado. Para más información, consultar [4, 5, 6].

## 8.4. Estimadores de alta resolución

Se consideran ahora técnicas más sofisticadas basadas en el análisis de los valores y vectores propios de la matriz de correlación estimada, que permiten obtener mayor resolución en la estimación de la densidad espectral de potencia.

Estos métodos se basan en los subespacios propios de la matriz de correlación para estimar valores de la densidad espectral de potencia. Son muy útiles en la detección de picos espectrales, que corresponden a señales senoidales en tiempo. Las señales FID consisten en senoides con amplitud decreciente exponencialmente, por lo que el uso de estos métodos puede ser muy útil en diversas fases del proyecto.

En la fase de calibración del equipo, por ejemplo, no se conoce exactamente la frecuencia a la que se obtiene la señal FID, ya que la frecuencia dependerá de muchos factores, básicamente de la intensidad del campo magnético uniforme, que puede resultar difícil de medir, y de la proporción giromagnética  $\gamma$ , como se explica en el capítulo 2.

---

<sup>1</sup>Una matriz *Toeplitz* es una matriz en la que todos los elementos de cada diagonal son iguales.



Otro aspecto en el que puede resultar útil el uso de este tipo de estimadores espectrales es a la hora de determinar con precisión la frecuencia a la que aparece un determinado pico espectral en el resultado de un experimento.

Esta clase de estimadores suele requerir como parámetro el número de picos espectrales que hay en la señal que se desea estimar, factor que puede limitar en caso de que este valor sea desconocido. Si se utiliza una estimación incorrecta de este valor, se obtienen picos inexistentes o bien existen errores en las estimaciones, dependiendo de si la estimación es incorrecta por exceso o por defecto, respectivamente.

A pesar de estas limitaciones, estos métodos resultan de gran utilidad en el proceso de calibrado, en el que se conoce que solamente habrá una senoide, o en situaciones de postprocesado en las que se conoce exactamente el número de señales de frecuencia distinta existentes.

### 8.4.1. Método de Pisarenko

El método de Pisarenko estima el contenido frecuencial de una señal a partir de su matriz de correlación. En concreto, supone que todos los vectores propios de la matriz de correlación excepto uno, contribuyen a la señal útil, mientras que el vector propio restante contribuye al ruido. En función de los valores propios se decide qué vector propio es el que contribuye al ruido. Este método asume que la señal a estimar está compuesta por  $p$  exponenciales complejas más ruido blanco, y se toma  $M = p + 1$ .

Dada la señal  $y(t)$ , cuya densidad espectral de potencia se desea estimar, se consideran los vectores  $a(\omega) = [1, e^{j\omega}, \dots, e^{j\omega N}]^T$  y  $w_o = [w_{o1}, \dots, w_{oM}]^T$ , y, para un determinado instante de tiempo  $t$ , se define  $z(t) = w_o^H y(t)$ .

Se considera el siguiente problema de optimización: encontrar el valor de  $w_o$  tal que la potencia de  $z$  es mínima, sujeto a que la norma de  $w_o$  es 1. Se desarrolla la potencia de  $z$  en 8.30.

$$\begin{aligned}
P_z &= \text{E} [z z^H] \\
&= \text{E} [w_o^H y (w_o^H y)^H] \\
&= \text{E} [w_o^H y y^H w_o] \\
&= w_o^H \text{E} [y y^H] w_o \\
&= w_o^H R w_o
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Se escribe el problema de optimización como en 8.31.

$$\begin{aligned}
w_o &= \arg \min_w [w^H R w] \\
\|w\|^2 &= w^H w = 1 \\
R &= \text{E} [y y^H]
\end{aligned} \tag{8.31}$$

Usando el método de Lagrange, se obtiene 8.32, donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange. Derivando e igualando a cero, se obtiene 8.33 que indica que  $w_o$  es un vector propio de  $R$ . Para decidir qué vector propio se usa, se considera el *cociente de Rayleigh* (ecuación 8.34), donde  $E = [e_1, \dots, e_M]$  son los valores propios ortonormales y  $\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_M]$  es la matriz diagonal de valores propios ordenados:  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_M$ .

$$w_o = \arg \min_w [w^H R w + \lambda (w^H w - 1)] \tag{8.32}$$

$$R w_o = -\lambda w_o \tag{8.33}$$

$$\begin{aligned}
R &= \frac{w_o^H R w_o}{w_o^H w_o} \\
&= w_o^H R w_o \\
&= w_o^H E \Lambda E^H w_o \\
&= \sum_{k=1}^N \lambda_k |w_o^H e_k|^2
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Se demuestra que el valor de  $w_o$  que minimiza el cociente de Rayleigh es el vector propio que corresponde al menor valor propio, es decir,  $w_o =$

$e_M$ . Con esto se puede escribir la forma final del estimador de Pisarenko (ecuación 8.35). donde  $\hat{e}_M$  es el vector propio de la matriz estimada de correlación que corresponde al menor valor propio.

$$\hat{P}_{pis}(\omega) = \frac{1}{|a^H(\omega) w_o|^2} = \frac{1}{|a^H(\omega) \hat{e}_M|^2} \quad (8.35)$$

Este método está detallado en las referencias [4, 6].

### 8.4.2. Algoritmo MUSIC

El algoritmo MUSIC<sup>2</sup> es una generalización del método de Pisarenko desarrollada por R. O. Schmidt en 1979. Este método también asume que la señal a estimar está compuesta por  $p$  exponenciales complejas más ruido blanco. Se calcula la matriz de correlación  $R$  de tamaño  $M \times M$  con  $M$  arbitrario, y se consideran los valores propios de esta matriz en orden decreciente. En este orden, se considera que los primeros  $p$  vectores propios corresponden al subespacio de señal. La idea general es usar un promediado para mejorar la estimación de Pisarenko. Nótese que para  $M = p + 1$  MUSIC se reduce al método de Pisarenko.

Teniendo en cuenta la definición de la ecuación 8.36, la forma del estimador MUSIC es la de la ecuación 8.37.

$$\hat{R}_{music}^{-1} = E_n E_n^H = \sum_{i=p+1}^M e_i e_i^H \quad (8.36)$$

$$\hat{P}_{music}(\omega) = \frac{1}{a^H(\omega) \hat{R}_{music}^{-1} a(\omega)} \quad (8.37)$$

En general, MUSIC obtiene resultados de mayor calidad que el método de Pisarenko.

### 8.4.3. Método de Johnson

El método de Johnson es una modificación de MUSIC donde se pondera la contribución de cada vector propio del espacio de ruido según el valor propio asociado. Cuanto menor es el valor propio asociado, mayor se considera la aportación del vector propio asociado. Se redefine la estimación de la matriz

---

<sup>2</sup>*MUltiple SIgnal Classification.*

inversa de correlación como en la ecuación 8.38, y la forma del estimador de Johnson es la de la ecuación 8.39.

$$\hat{R}_{johnson}^{-1} = \sum_{i=p+1}^M \hat{\lambda}_i^{-1} e_i e_i^H \quad (8.38)$$

$$\hat{P}_{johnson}(\omega) = \frac{1}{a^H(\omega) \hat{R}_{johnson}^{-1} a(\omega)} \quad (8.39)$$

## 8.5. Aplicaciones

Como ya se ha comentado en las respectivas secciones, los estimadores basados en el periodograma<sup>3</sup> sirven para obtener una primera idea del aspecto de un espectro. Por ejemplo, se puede hacer una estimación del número de picos espectrales y de su potencia. Son una generalización inmediata de la transformada discreta de Fourier, por lo que se han implementado en el programa *NMR Viewer*.

Para aplicar estimadores basados en subespacios<sup>4</sup> es necesario conocer a priori el número de picos espectrales que componen la señal. A pesar de que es una limitación bastante importante en algunos contextos, estos métodos son muy útiles para calibrar los aparatos de resonancia magnética, ya que se conoce a priori que sólo va a haber un pico espectral, y su alta resolución permite estimar la frecuencia de dicho pico con gran exactitud. Estos métodos también sirven para estimar la frecuencia de los picos espectrales de una señal FID, una vez se ha determinado el número de éstos mediante otro estimador espectral.

El hecho de disponer de un amplio rango de estimadores espectrales permite aplicar varios de los mismos a una señal obtenida, y mediante la comparación de los resultados decidir cuál es el aspecto real del espectro, ya que cada estimador tiene unas ventajas e inconvenientes que se pueden complementar.

La eficacia de estos métodos ha sido ampliamente comprobada en la literatura<sup>5</sup>. A modo de ejemplo, en la figura 8.1 se observa cómo en función de la ventana elegida para un estimador de tipo periodograma influye

---

<sup>3</sup>Sección 8.1.

<sup>4</sup>Sección 8.4.

<sup>5</sup>Ver, por ejemplo, [4, 5, 6, 8]

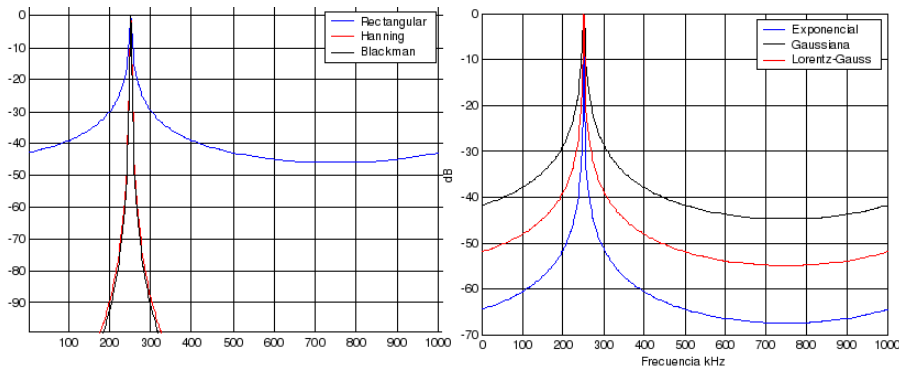


Figura 8.1: Espectro estimado por el método de Welsch (basado en periodograma) para una señal FID prototipo (senoide con amplitud decreciente exponencialmente sin ruido) para diversas formas de enventanado

significativamente en la calidad del resultado. En la figura 8.2 se muestra el comportamiento del estimador de mínima varianza (Capón) para diversos valores del orden del estimador.

## 8.6. Resultados Experimentales

Con el fin de comprobar el funcionamiento de los distintos estimadores considerados en el presente capítulo, se ha desarrollado una aplicación *MATLAB*, similar a *NMR Viewer*, que simula la adquisición de una señal RMN y presenta el espectro estimado por cada uno de los distintos métodos.

En la figura 8.3 se puede ver el espectro de una señal compuesta por tres senoides decrecientes, de frecuencia normalizada 0,1, 0,3 y 0,4. Esta señal ejemplo se puede utilizar para comparar el comportamiento de los distintos estimadores espectrales.

En la figura 8.4 se representa el periodograma, usando una ventana rectangular, de la señal ejemplo. Se observa que aparecen lóbulos secundarios alrededor de cada uno de los tres principales, que aparecen a la frecuencia esperada. Estos lóbulos secundarios podrían enmascarar otros picos de menor potencia, pero el periodograma sirve para concluir que hay tres picos principales y permite estimar su frecuencia.

En la figura 8.5 se ha representado el estimador autorregresivo (AR) aplicado a la señal ejemplo, usando una ventana de Hamming, que es la que da

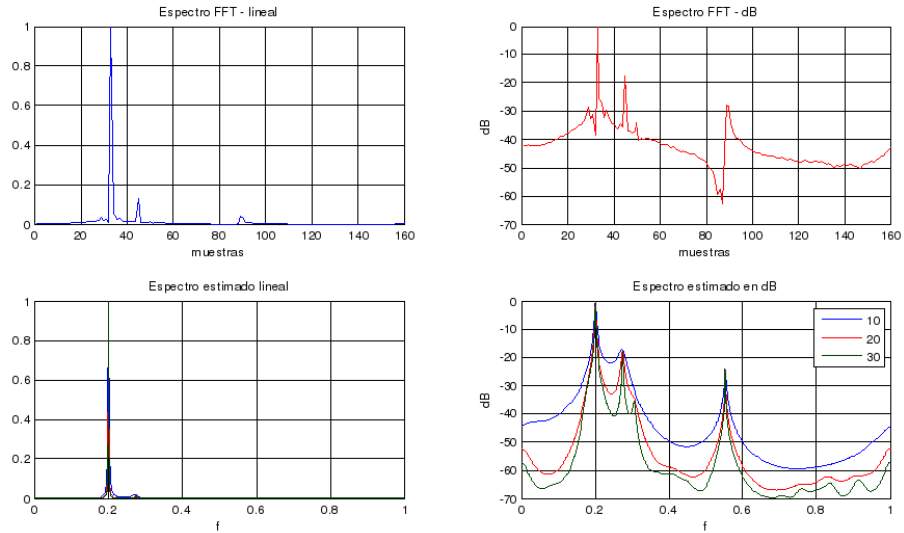


Figura 8.2: Espectro obtenido con el estimador de Capón. En la columna izquierda se observan espectros en escala lineal y en la derecha en dB. En la fila superior se representa el aspecto real de la señal, mientras que en la inferior se muestra la estimación obtenida para tres valores del orden  $M$  del estimador.

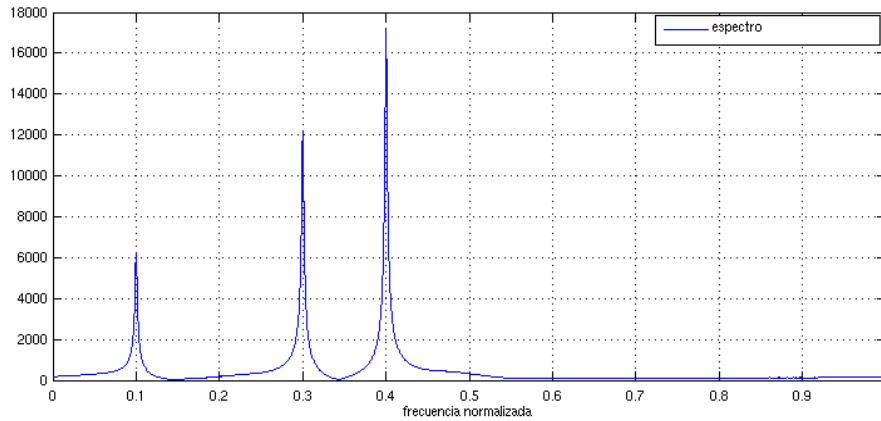


Figura 8.3: Espectro de una señal ejemplo.

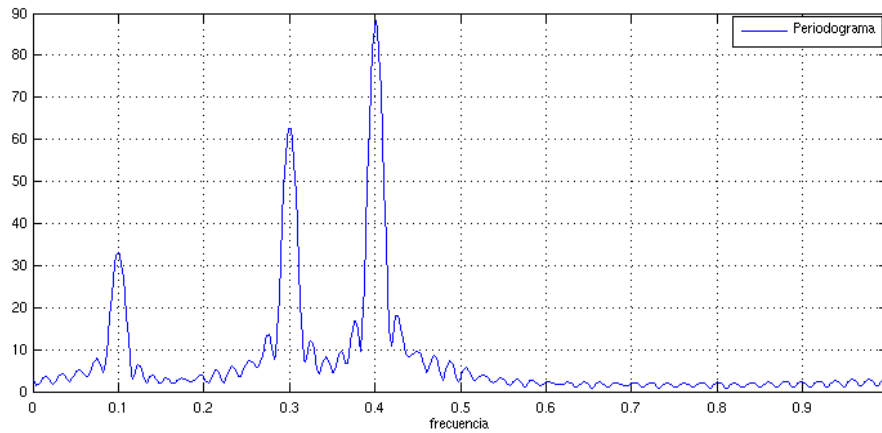


Figura 8.4: Periodograma con ventana rectangular de la señal de la figura 8.3.

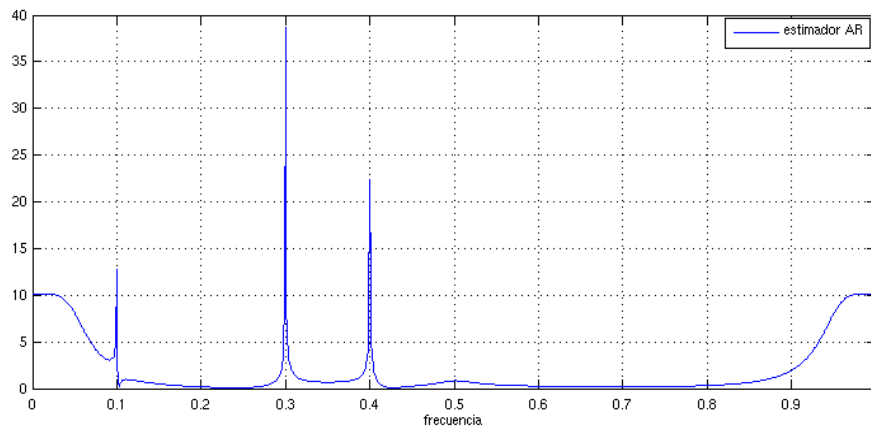


Figura 8.5: Estimador AR con ventana Hamming aplicado a la señal de la figura 8.3.

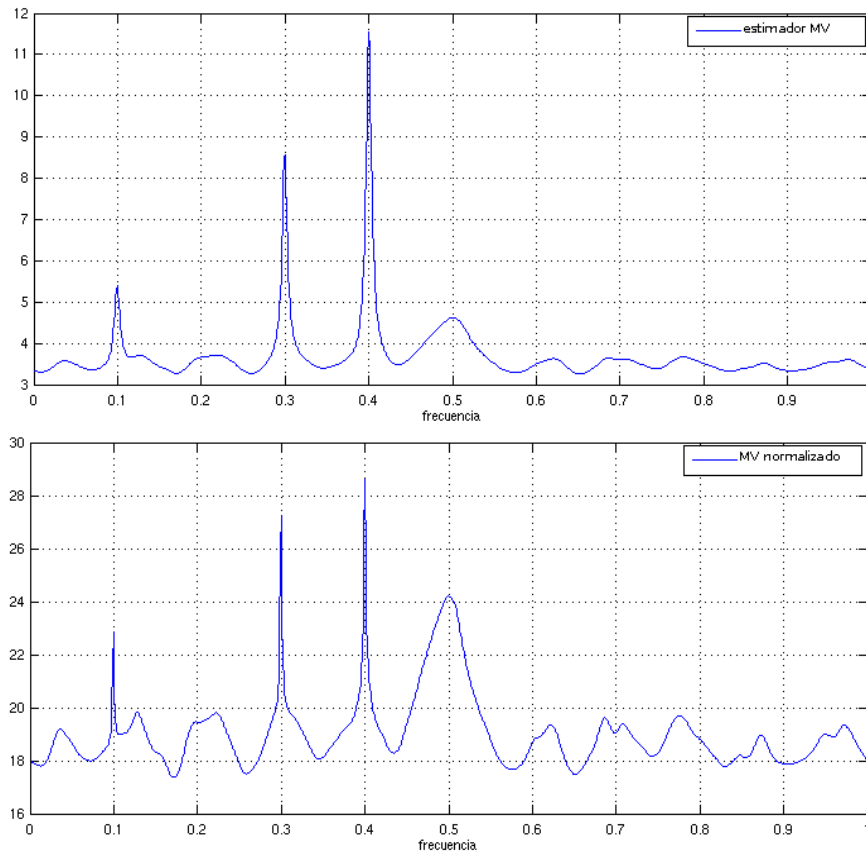


Figura 8.6: Estimadores MV (superior) y MV normalizado (inferior) aplicados a la señal de la figura 8.3.

un mejor resultado con este estimador. En este caso se estima correctamente la existencia de tres picos, pero el resto del espectro no es uniforme, existiendo una elevación alrededor de la frecuencia 0, lo que puede inducir a un error de interpretación. Con presencia de ruido, este estimador deja de proporcionar resultados fiables, ya que la señal FID con ruido no se ajusta al modelo supuesto por este estimador de una señal generada por un filtro alimentado con ruido blanco.

En la figura 8.6 se ha representado el resultado del estimador de mínima varianza. Este estimador también estima correctamente la presencia de los tres picos espectrales principales, pero aparecen otras formas no existentes en la señal original que se pueden confundir con otros picos. El estimador



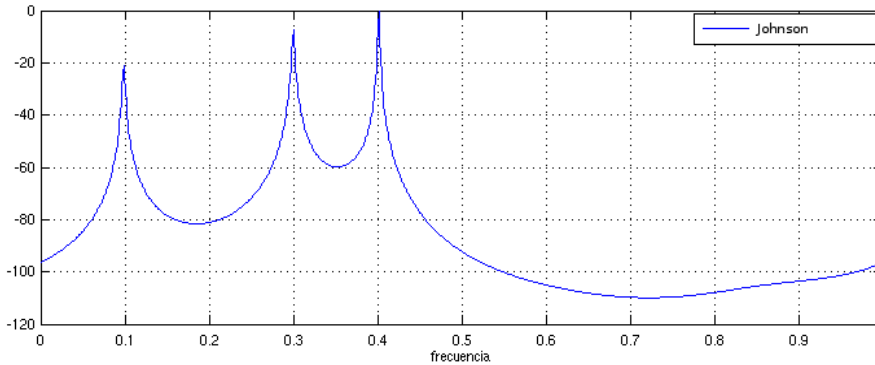


Figura 8.7: Estimador de Johnson de orden 6 aplicado a la señal de la figura 8.3.

de mínima varianza normalizado tiene menor ancho de lóbulo, pero los picos espúreos tienen mayor potencia. El estimador normalizado sirve para estimar la frecuencia de los picos con mayor precisión, pero no debe usarse para estimar la potencia relativa de los picos espectrales, ya que éstas se han visto normalizadas.

Los estimadores basados en los vectores propios de la matriz de correlación<sup>6</sup> son más problemáticos. Si se conoce el número de picos que deben aparecer, los resultados son muy satisfactorios, como se observa en la figura 8.7, donde se representa el espectro estimado por el método de Johnson de orden 6. Pero si existe mucho ruido o se comete un error al predecir el número de senoides, entonces el espectro resultante difiere del original de forma significativa.

Por ejemplo, en la figura 8.8 se representa el resultado del mismo estimador pero en presencia de ruido. El espectro resultante contiene los picos originales de la figura 8.7 además de otros picos inexistentes en la señal original, que han aparecido debido al ruido existente en la señal a estimar.

Si, en cambio, se comete un error a la hora de predecir el número de picos, los resultados también son malos. En la figura 8.9 se representa el resultado del estimador de Johnson de orden 6 prediciendo que la señal original tiene un solo pico (figura superior) y 5 picos (figura inferior). En el primer caso, aparecen 3 picos en el resultado a las frecuencias correctas, pero con un ancho de lóbulo muy grande. En el otro caso, aparecen los 3 picos originales, aunque no a la frecuencia correcta, además de otros picos inexistentes en la

<sup>6</sup>Pisarenko, MUSIC y Johnson.

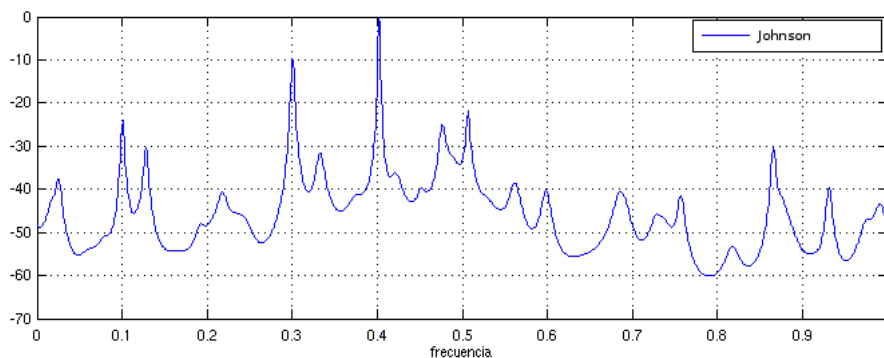


Figura 8.8: Estimador de Johnson de orden 6 aplicado a la señal de la figura 8.3 con ruido añadido.

señal original.

En caso de que haya ruido, la diferencia entre los resultados es todavía mayor. En la figura 8.10 se representa el resultado del estimador de Johnson suponiendo que existe sólo un pico espectral, en presencia de ruido.

## 8.7. Conclusiones

En este capítulo se han presentado numerosos estimadores espectrales de alta resolución y se han implementado en una aplicación *MATLAB*, lo que permite su integración inmediata en el programa *NMR Viewer* en caso necesario.

El uso de estos estimadores es útil en diversas fases del proyecto. Por ejemplo, en la calibración del aparato es necesario estimar la frecuencia de un pico espectral. Tener un estimador espectral de alta resolución es muy útil para estimar la frecuencia de dicho pico, sabiendo que no existe ninguno más. En la sección 8.6 se ha comparado el comportamiento de los distintos estimadores con una señal FID generada con y sin ruido.

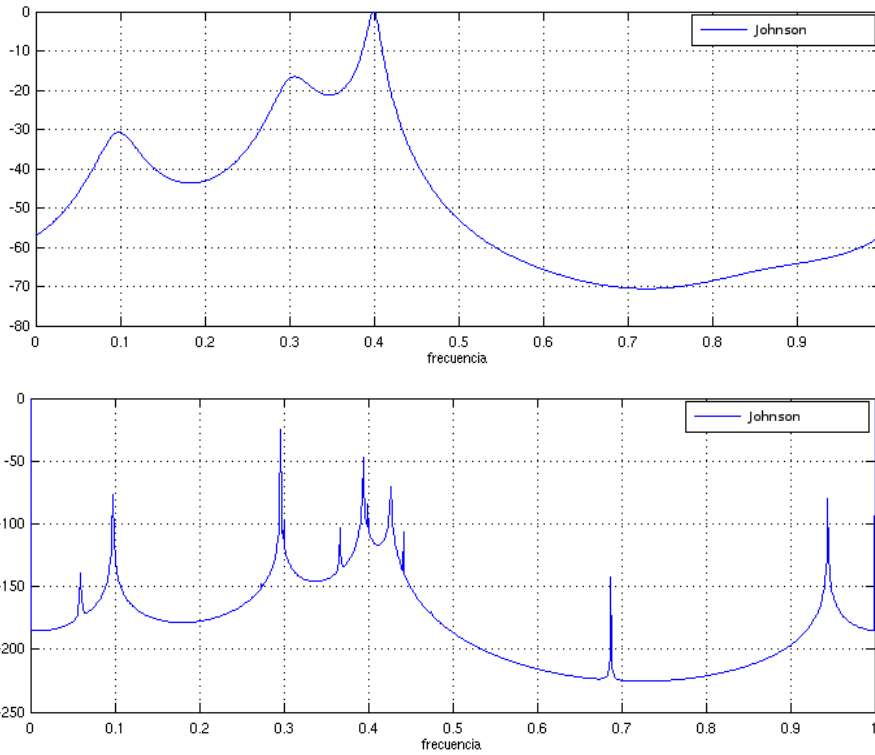


Figura 8.9: Estimador de Johnson de orden 6 aplicado a la señal de la figura 8.3. En la figura superior se ha predicho que el número de picos es 1, mientras que en la inferior este número es 5.

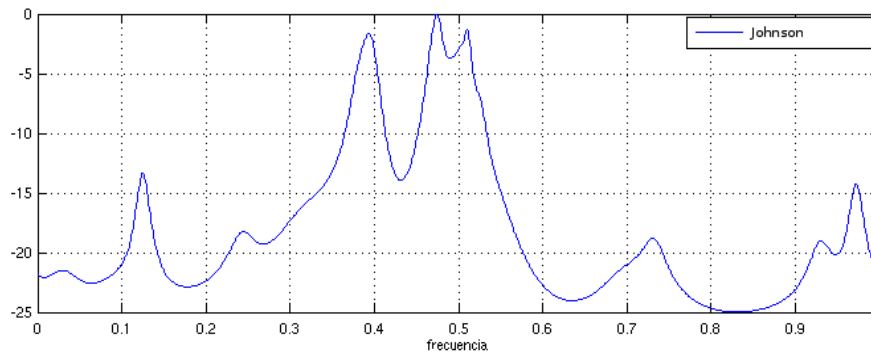


Figura 8.10: Estimador de Johnson de orden 6, suponiendo la existencia de un pico, aplicado a la señal de la figura 8.3 con ruido.

