

Trabajo de Final de Grado

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Programa para el estudio de resonancias en circuitos eléctricos

MEMORIA

Autor: Anna Isabelle Delgove
Director: Luis Sainz Sopera
Convocatoria: Junio 2019



Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



Resumen

El estudio de las resonancias en circuitos eléctricos es fundamental puesto que este fenómeno puede llevar a valores de voltaje o corriente elevados que podrían llegar a dañar el circuito o la instalación eléctrica. Existen diferentes métodos para analizar dicho fenómeno, pero su aplicación no es sencilla. A la hora de estudiar la resonancia, las respuestas a las siguientes preguntas podrían revelar información importante que sería de gran ayuda: ¿Cuál es la frecuencia a la cual ocurre la resonancia? ¿Cuál es la zona del circuito más sensible a la resonancia? ¿Desde qué punto del circuito se puede observar mejor el fenómeno? ¿Cuál es el elemento del circuito que más influye en la resonancia? Las respuestas a muchas de estas preguntas no se pueden determinar fácilmente con los métodos tradicionales para el estudio de las resonancias. Recientemente, ha aparecido el método modal de análisis que, aplicado junto con del método de los nudos, es capaz de resolver todas las cuestiones anteriores.

Este trabajo estudia el fenómeno de la resonancia a partir del método modal de análisis. En primer lugar, se presenta su deducción desde el método de los nudos y luego se explica cómo localiza y analiza el fenómeno de la resonancia en circuitos eléctricos. Tras el estudio de este método, el trabajo concluye con la creación de un programa en Matlab que aplica el método modal de análisis a cualquier circuito eléctrico y sistemáticamente nos devuelve los parámetros relevantes para el estudio de la resonancia.

ÍNDICE

RESUMEN	3
ÍNDICE.....	4
1. PREFACIO	5
1.1. Origen del proyecto.....	5
1.2. Motivación.....	5
2. INTRODUCCIÓN	6
2.1. Objetivos del proyecto.....	6
2.2. Alcance del proyecto.....	6
3. MÉTODO DE LOS NUDOS	7
3.1. Introducción.....	7
3.2. Desarrollo del método de los nudos.....	7
3.3. Aplicaciones del método de los nudos.....	9
3.3.1. Determinación del circuito Thévenin equivalente	9
3.4. Ejemplo de aplicación del método de los nudos	10
4. RESONANCIAS EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO.....	12
4.1. Introducción.....	12
4.2. Resonancias	12
4.2.1. Resonancia Serie.....	13
4.2.2. Resonancia Paralelo.....	15
4.3. Caracterización de las resonancias con el método de los nudos	15
4.3.1. Procedimiento de cálculo.....	15
4.3.2. Ejemplo de aplicación	16
5. MÉTODO DE ANÁLISIS MODAL DE RESONANCIAS.....	18
5.1. Caracterización de las resonancias por el método modal de análisis.....	18
5.1.1. Modos de resonancia	18
5.1.2. Ejemplo de aplicación	24
6. PROGRAMA	27
6.1. Lectura de datos	27
6.2. Construcción de la matriz de admitancias	28
6.3. Estudio frecuencial.....	30
6.3.1. Cálculo de valores propios y vectores propios.....	30
6.3.2. Determinación de modos y frecuencia críticas	30
6.3.3. Determinación de los factores de participación.....	30
6.3.2. Determinación de sensibilidades.....	31
CONCLUSIONES	32
BIBLIOGRAFÍA.....	35

Prefacio

1.1. Origen del proyecto

La resonancia en circuitos eléctricos es un fenómeno común y que puede llegar a ser muy problemático. Existen distintos métodos para identificar y analizar la resonancia, pero su estudio no es sencillo y los resultados que aportan son limitados. Recientemente ha aparecido el método modal de análisis y se ha considerado interesante en este trabajo realizar un estudio teórico exhaustivo sobre el origen, funcionamiento y aplicación de este método. Recalcando de nuevo la importancia de conocer la ubicación frecuencial y causas de la resonancia en un circuito, se ha considerado que sería de gran utilidad poder automatizar de algún modo el estudio del fenómeno. Es por esta razón que se creyó oportuno dedicar este trabajo a la creación de un programa que nos facilite todos los datos relevantes para poder determinar los factores más relevantes relacionados con las resonancias. Esto podría permitir predecir futuros problemas en el circuito y además proponer métodos de mitigación de las resonancias. Además, el estudio se puede llegar a extender al análisis de la estabilidad en circuitos dada la relación directa entre el fenómeno de las resonancias y los problemas de estabilidad.

1.2. Motivación

Tras haber cursado la asignatura de electrotecnia, he querido dar un paso más allá de la teoría que se da en las clases y ampliar mis conocimientos sobre la asignatura. Mi tutor, Luís Sainz, fue quien me habló por primera vez del método modal de análisis. Este método utiliza muchos de los conceptos estudiados en electrotecnia, con lo cual iba a poder utilizar los conocimientos que adquirí como herramientas para abrirme camino en la investigación y aprendizaje de este nuevo método. Focalizar mi trabajo de final de grado en el método modal de análisis me ha permitido repasar y profundizar lo estudiado en la asignatura, aplicar los conocimientos adquiridos en la misma y ampliar dichos conocimientos a un procedimiento de análisis de circuitos que va un poco más allá de los estudios de grado.

Por otro lado, es evidente la importancia del fenómeno de las resonancias en los circuitos eléctricos y la relación de dicho fenómeno con un posible mal funcionamiento de las instalaciones eléctricas por lo que su estudio suponía un tema interesante, de interés actual y que podría aportar conocimientos para una mejora en las instalaciones eléctricas.

2. Introducción

2.1. Objetivos del proyecto

El primer objetivo de este trabajo ha sido encontrar un método de análisis para las resonancias que sea capaz de caracterizar este fenómeno desvelando al usuario cuándo ocurre, porqué ocurre y qué es lo que lo produce. Se comenzará presentando el método de los nudos estudiado en la asignatura de electrotecnia y el fenómeno de la resonancia en circuitos eléctricos. Posteriormente, se desarrollará el método modal de análisis y se aplicará al método de los nudos para el análisis de las resonancias. Se comprobará que el método escogido como objeto de este trabajo es el que aporta más información a cerca de la resonancia.

Mediante el estudio teórico del método modal de análisis, el segundo objetivo del presente proyecto es la creación de un programa sencillo en Matlab que permita estudiar el fenómeno de la resonancia en cualquier circuito que no disponga de acoplamientos ni fuentes de tensión puras. Dicho programa aplicará este método sobre el circuito. El programa debe permitir el análisis a partir de la lectura de un archivo de datos para luego devolver al usuario toda la información necesaria para caracterizar el fenómeno de la resonancia en un circuito.

2.2. Alcance del proyecto

El alcance de este proyecto es el estudio y comprensión del fenómeno de la resonancia. También se quiere llegar a entender con rigor el método modal de análisis y su modo de aplicación. Puesto que la resonancia está directamente relacionada con la inestabilidad de los circuitos, extendiendo la metodología desarrollada del análisis modal, el trabajo podría ser de utilidad para un futuro análisis de la estabilidad en circuitos.

3. Método de los nudos

En este capítulo se va a presentar el método de los nudos [4], que es el procedimiento en el que se basa el método modal de análisis - objeto de este trabajo - para hacer el estudio de las resonancias en los circuitos eléctricos. Se explicará en qué consiste dicho método, cómo proceder a aplicarlo y por último se mostrará un ejemplo práctico.

3.1. Introducción

En general, la resolución de un circuito eléctrico supone la determinación de las tensiones y corrientes en dicho circuito para posteriormente poder abordar el cálculo de las potencias y otros estudios como la compensación de potencia reactiva, el análisis de resonancias o los estudios de eficiencia energética. Existen diferentes procedimientos para esa resolución entre los que se encuentra el método de los nudos.

El análisis de un circuito eléctrico mediante el método de los nudos [4] se utiliza para determinar la tensión en los nudos del circuito. El método se basa en la primera Ley de Kirchoff (*Kirchoff Currents Law*, KFL) expresada en términos de las tensiones de los nudos, y consigue recopilar toda la información necesaria para la resolución del circuito de manera muy eficiente y fácilmente programable en un sistema matricial.

3.2. Desarrollo del método de los nudos

El método de los nudos se basa en el planteamiento y posterior resolución del siguiente sistema matricial:

$$I_n = Y_n \cdot V_n \quad (3.1)$$

donde,

- I_N es el vector de intensidades de nudo, formado por la suma algebraica de las fuentes de corriente que conectadas a un nudo i según el siguiente convenio: la fuente de corriente es positiva si llega al nudo y negativa si sale de él.
- Y_N es la matriz de admitancias de nudo, cuyo término i -ésimo de la diagonal está formado por la suma de las admitancias que llegan al nudo i , y cuyo término en la posición (i, j) está formado por la suma de admitancias, cambiadas de signo, que hay entre los nudos i y j simultáneamente.

- V_N es el vector de tensiones (o potenciales) de nudo donde cada elemento corresponde a la diferencia de potencial entre cada nudo y el que se haya escogido como referencia.

Este método solo se puede aplicar a sistemas eléctricos sin bobinas acopladas, ni fuentes de tensión ideales, ni fuentes controladas.

El planteamiento del sistema matricial del método de los nudos se realiza a partir del siguiente procedimiento [4]:

1) Todas las fuentes de tensión reales del circuito a estudio se transforman en su circuito Norton equivalente. Dicho circuito se compone de una impedancia Z_N y una fuente de corriente J que cumplen $Z_N \cdot J = E$, donde E es el valor de la fuente de tensión real del circuito original y $Z_N = Z$ es la impedancia de la fuente de tensión real (ver figura 1).

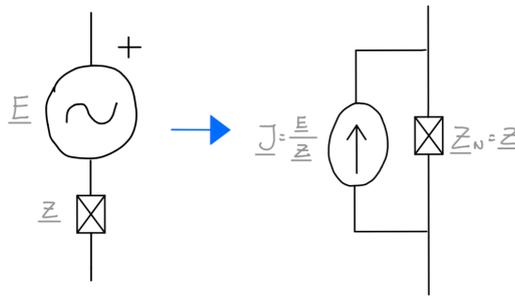


Fig. 1. Transformación de una fuente de tensión real a su circuito de Norton equivalente

2) Se identifican los nudos del circuito entendiendo como nudo aquellos puntos del circuito donde se corten tres o más ramas diferentes. Aunque esta sería la definición estricta de lo que es un nudo, a la hora de aplicar el método, existe la opción de colocar nudos adicionales en puntos donde resulte conveniente. La única norma que se debe respetar es que no se pueden colocar dos nudos en la misma rama. Esto hará aumentar el número de incógnitas y en consecuencia el tamaño de la matriz, con lo que se recomienda que solo se haga si es estrictamente necesario o si facilita los cálculos posteriormente. En la figura 2, se tiene un ejemplo donde se muestra en azul lo que sería un nudo por definición. En la figura 3 se tiene otro ejemplo donde se muestran en verde los nudos adicionales que podrían escogerse, en rojo los nudos seleccionados erróneamente ya que los tres pertenecen a una misma rama y de nuevo en azul los nudos por definición.

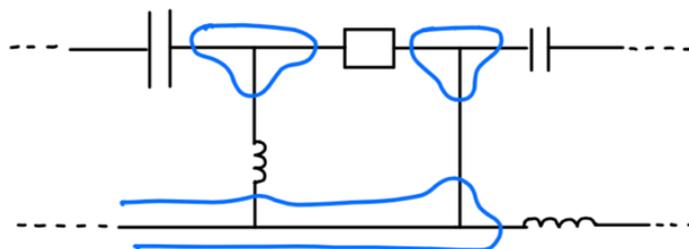


Fig. 2. Ejemplo de identificación de los nudos de un circuito

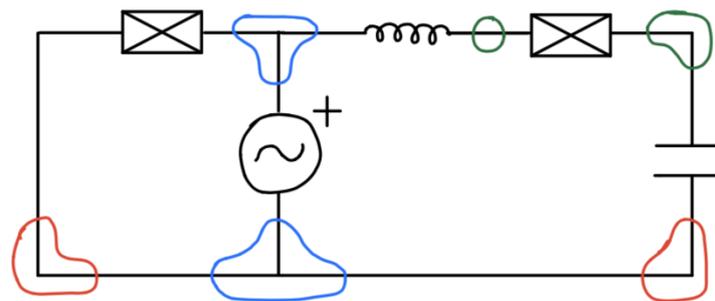


Fig. 3. Ejemplo de nodos excepcionales, erróneos y por definición.

- 3) Se numeran todos los nodos del circuito de forma consecutiva partiendo del nudo 0 que será el nudo de referencia, es decir las tensiones o potenciales de nudo del vector V_N serán las tensiones de los nodos referidas al de referencia (que tendrá tensión nula).
- 4) Se determinan, siguiendo los criterios ya explicados, el vector de intensidades de nudo I_N y la matriz de admitancias de nudo Y_N .
- 5) Se resuelve el sistema calculándose el vector de tensiones de nudo

$$V_n = Y_n^{-1} \cdot I_n \quad (3.2.)$$

En los siguientes apartados se presentan algunas de las posibles aplicaciones del método de los nodos y un ejemplo de dicho método desarrollado con detalle.

3.3. Aplicaciones del método de los nodos

El método de los nodos, además de permitir la determinación de las tensiones en los nodos del circuito, ofrece otras posibilidades de aplicación que se presentan a continuación.

3.3.1. Determinación del circuito Thévenin equivalente

El teorema de Thévenin [3] dice que cualquier circuito comprendido entre dos terminales puede sustituirse, respecto a los terminales, por una fuente de tensión y una impedancia equivalente.

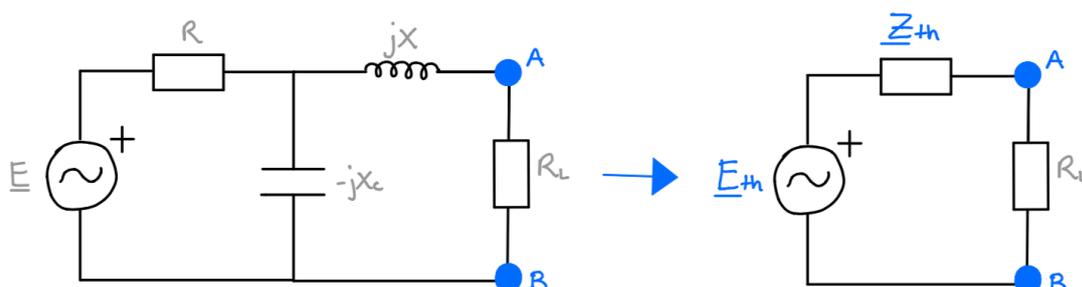


Fig. 4. Equivalente de Thévenin de un dipolo activo

A este conjunto de fuente más impedancia se le llama circuito equivalente de Thévenin. Para determinar el valor de los elementos del circuito equivalente se puede utilizar el método de los nudos.

La tensión de la fuente (E_{th}) será la diferencia de potencial entre los terminales escogidos y se podrá calcular con los valores obtenidos del vector de tensiones del sistema matricial [3].

El valor de la impedancia equivalente se encontrará invirtiendo la matriz de admitancias y llevando a cabo la siguiente operación [3]:

Thevenin entre un nudo i y el de referencia: $Z_{th, i0} = Z_{ii}$

Thevenin entre dos nudos i y j : $Z_{th, ij} = Z_{ii} + Z_{jj} - 2Z_{ij}$

Siendo los elementos Z_{ii} , Z_{ij} y Z_{jj} los elementos de la fila i -ésima y columna j -ésima de la matriz de admitancias invertida.

Aunque no es indispensable, es recomendable tomar como nudos los terminales escogidos para determinar el Thevenin con el objeto de minimizar el número de operaciones.

3.4. Ejemplo de aplicación del método de los nudos

Se mostrará el método de los nudos con un ejemplo práctico. Póngase por caso que se tiene el circuito de la figura 5:

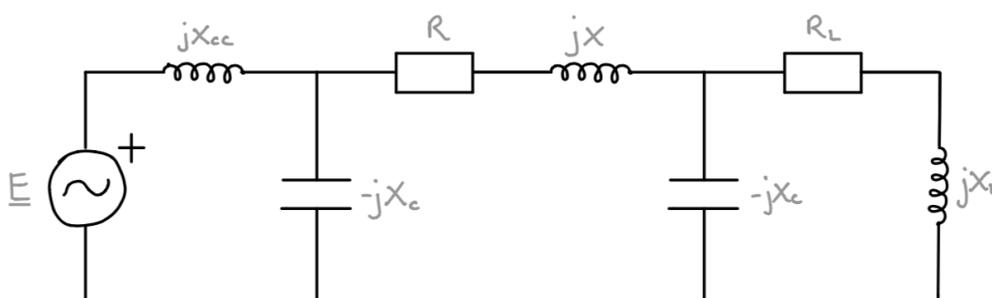


Fig. 5. Ejemplo de aplicación del método de los nudos.

- 1) Se transforman todas las fuentes de tensión reales en su circuito Norton equivalente según figura 6.

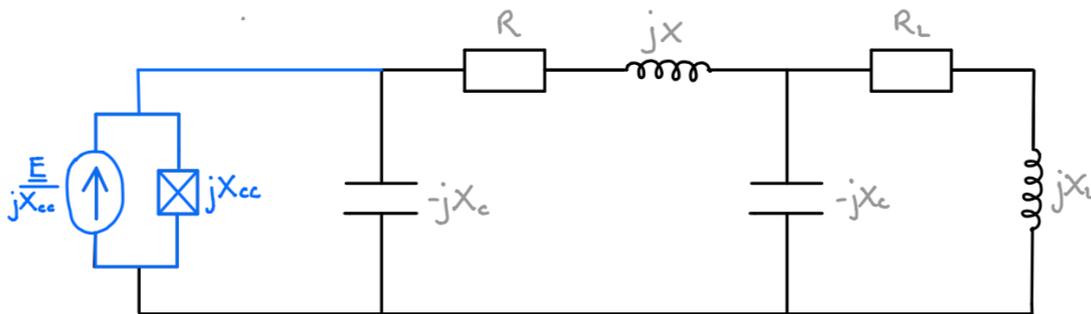


Fig. 6. Transformación de las fuentes de tensión reales del circuito.

- 2) + 3) Se identifican los nudos del circuito según figura 7.

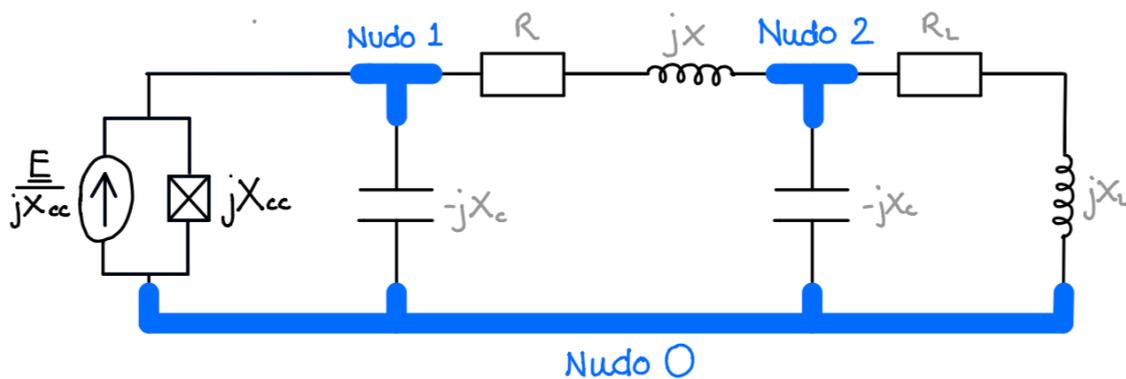


Fig. 7. Identificación de los nudos del circuito.

- 4) Se determina el vector de intensidades de nudo I_n y la matriz de admitancias de nudo Y_n .

$$Y_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{R + jX} - \frac{1}{jX_C} & -\frac{1}{R + jX} \\ -\frac{1}{R + jX} & \frac{1}{R + jX} - \frac{1}{jX_C} + \frac{1}{R_L + jX_L} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$I_n = \begin{bmatrix} \frac{E}{jX_{CC}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

- 5) Se resuelve el sistema matricial según (3.2).

4. Resonancias en un circuito eléctrico

En este capítulo se va a presentar brevemente el concepto de resonancia [3] y cómo se puede caracterizar y determinar la frecuencia a la que ocurre.

4.1. Introducción

El estudio de las resonancias en circuitos eléctricos es fundamental puesto que este fenómeno puede llevar a valores de voltaje o corriente elevados que podrían llegar a dañar el circuito o la instalación eléctrica.

Existen diferentes procedimientos para su estudio, como la determinación de la impedancia equivalente del circuito o la utilización del método de los nudos. Derivado del método de los nudos también existe el método de análisis modal [1] que permite analizar mejor el fenómeno de la resonancia. Ese método se presentará en el siguiente capítulo.

4.2. Resonancias

Un circuito se encuentra en resonancia cuando la parte imaginaria de la impedancia (y de la admitancia) equivalente del circuito se anula [3], o lo que es lo mismo, cuando el comportamiento de dicho circuito es puramente resistivo. Cuando se procede a calcular la impedancia/admitancia de entrada de un circuito, se obtiene una expresión que depende del valor de la frecuencia. Las frecuencias a las que se anule la parte imaginaria de la impedancia/admitancia equivalente son las frecuencias de resonancia. El análisis del fenómeno de la resonancia es importante porque en circuitos con resistencias de valor reducido (situación habitual en redes de alta y media tensión) la frecuencia de resonancia aproximadamente coincide con la frecuencia donde se producen máximos o mínimos de la impedancia equivalente. Dichos valores máximos y mínimos de impedancia pueden derivar en valores elevados de tensión o corriente que acabarían dañando la instalación.

Un valor muy elevado de la impedancia puede llevar a sobretensiones en un circuito alimentado por fuentes de corriente (ver Fig. 8),

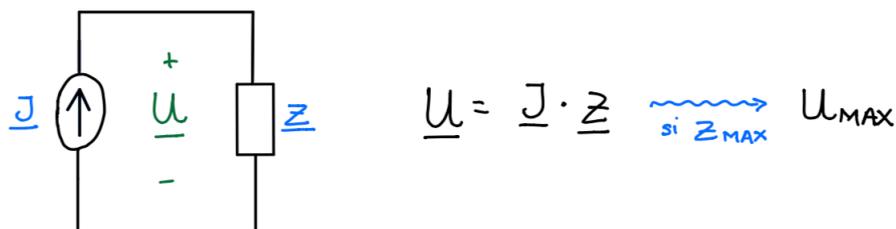


Fig. 8. Circuito alimentado por una fuente de corriente

Un valor muy pequeño de la impedancia puede llevar a valores elevados de la intensidad en circuitos alimentados por fuentes de tensión (ver Fig. 9),

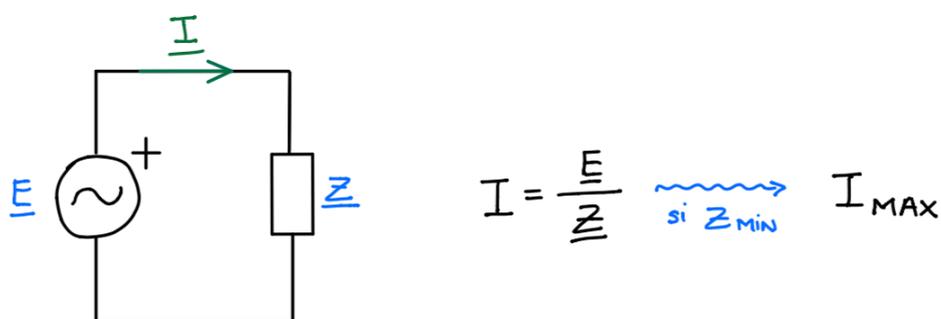


Fig. 9. Circuito alimentado por fuente de tensión

Ambos casos deben estudiarse para valorar si los máximos de tensión e intensidad podrían llegar a dañar el circuito y localizar la frecuencia a la que se presenta el problema con el fin de intentar eliminarlo o, por lo menos, mitigarlo.

A continuación, se describen dos ejemplos típicos [3] que ilustran lo previamente explicado.

4.2.1. Resonancia Serie

En la figura 10 se muestra el ejemplo de un circuito con una inductancia y una capacidad colocadas en serie, en el que existe resonancia serie. Al no tratarse de un circuito cerrado sino de uno comprendido entre dos terminales, a continuación no se hablará de impedancias equivalentes sino de impedancias de entrada. Este concepto se utiliza para definir la impedancia total vista desde los terminales.

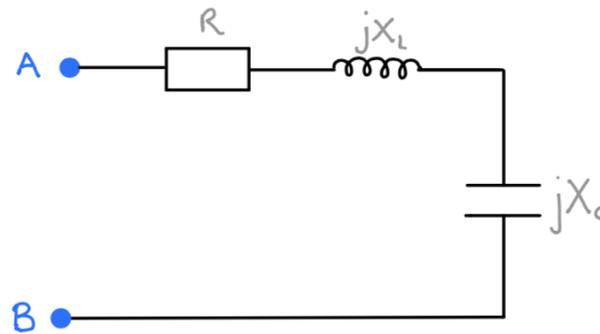


Fig. 10. Circuito con resonancia serie

La resistencia R no es estrictamente necesaria para estudiar el fenómeno de resonancia, pero en un circuito real corresponde, en general, a la resistencia interna de la bobina la cual suele tener un valor reducido asociado a las pérdidas de dicha bobina. Como se verá más adelante, si no estuviera dicha resistencia, a la frecuencia de resonancia la intensidad se haría infinita y destruiría el circuito.

La impedancia de entrada del circuito es:

$$Z_e = R + jX_L - jX_C \quad (4.1)$$

En este caso, a ciertos valores de frecuencia se obtendrá un mínimo valor de Z_e cuando la parte imaginaria de la misma se anule. Dichos valores de frecuencia serán a los que se tendrá resonancia.

$$\text{Im}(Z_e) = 0 \rightarrow j(X_L - X_C) = 0 \rightarrow X_L = X_C \quad (4.2)$$

Partiendo de la última igualdad, se obtiene la pulsación de resonancia:

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (4.3)$$

Expresándolo en función de la frecuencia de resonancia queda:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (4.4)$$

A dicho valor de frecuencia, la impedancia de entrada alcanzaría el valor de la resistencia ($Z = R$). Nos encontraríamos en el caso de la figura 9, cuando se obtiene de Z_{\min} y I_{\max} .

4.2.2. Resonancia Paralelo

En la figura 11 se muestra una inductancia y una capacidad en paralelo. En este ejemplo existe resonancia paralelo.

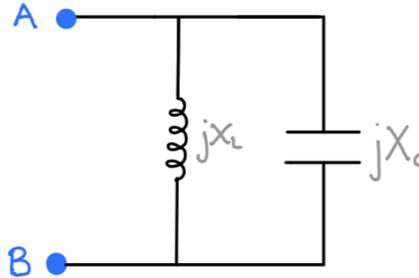


Fig. 10. Circuito con resonancia serie

Para encontrar la frecuencia de resonancia se procederá a buscar aquella que anule la parte imaginaria de la impedancia de entrada. En este caso, como los elementos están en paralelo, será más sencillo anular la parte imaginaria de la admitancia del circuito:

$$\text{Im}(Y_e) = 0 = X_L - X_C \quad \rightarrow \quad X_C = X_L \quad (4.5)$$

A pesar de que la conclusión es la misma, el comportamiento del circuito es muy distinto puesto que, en lugar de alcanzar un valor mínimo de impedancia, se tiene un valor máximo. En este caso Z_e es igual a infinito y entonces el sistema se comportará como un circuito abierto. Ahora nos encontraríamos en el caso de la figura 9, cuando se obtiene de Z_{\max} y U_{\max} .

4.3. Caracterización de las resonancias con el método de los nudos

4.3.1. Procedimiento de cálculo

Tal como ya se ha visto, el método de los nudos plantea el sistema matricial:

$$I_n = Y_n \cdot V_n \quad \rightarrow \quad V_n = Y_n^{-1} \cdot I_n \quad (3.1), (3.2)$$

Donde Y_n^{-1} es la matriz de impedancias:

$$Y_n^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Utilizando el sistema matricial se puede llegar a observar el comportamiento frecuencial de las impedancias visto desde los distintos nudos que se tengan. Esto se haría suponiendo una única inyección de corriente de valor unitario para las distintas frecuencias que se desean estudiar en el nudo que se quiera observar, de modo que al desarrollar el sistema quedarían igualados los distintos valores de tensión a las impedancias vistas desde el nudo escogido. Si quisiera obtener los valores de las impedancias visto desde un nudo i , obtendría la siguiente expresión matricial:

$$V_n = Y_n^{-1} \cdot I_n \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1n} \\ \dots & Z_{ii} & \dots \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1i} \\ \dots \\ Z_{ii} \\ \dots \\ Z_{ni} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Según (4.7) se observa que las tensiones obtenidas son justamente las impedancias que se estaban buscando. Con ello se determinaría el valor de las impedancias para cada frecuencia y posteriormente se podrían representar gráficamente dichos valores en función de la frecuencia. La observación directa de los máximos y mínimos de las impedancias permitiría determinar los valores de las frecuencias de resonancia.

5.3.2. Ejemplo de aplicación

Póngase por caso que se tiene el circuito de la figura 10 y que se quiere observar el comportamiento de las impedancias vistas desde el nudo 2:

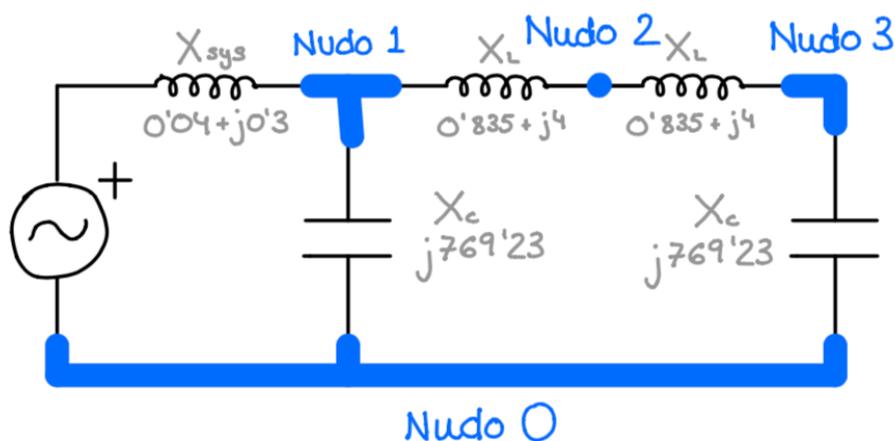


Fig. 10. Ejemplo de caracterización de respuesta frecuencial

El sistema matricial del método de los nudos quedaría planteado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{jX_{sys}} + \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_c} & -\frac{1}{jX_L} & 0 \\ -\frac{1}{jX_L} & \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{jX_L} & -\frac{1}{jX_L} \\ 0 & -\frac{1}{jX_L} & \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

A partir del sistema matricial y sabiendo que los valores de Y_N son función de la frecuencia, se podría obtener la respuesta frecuencial del circuito desde cualquier nudo. Tal como ya se ha explicado, una de las formas para obtenerla sería introducir una única inyección de corriente de valor unitario en el nudo desde el cual se quiere observar el valor de las impedancias.

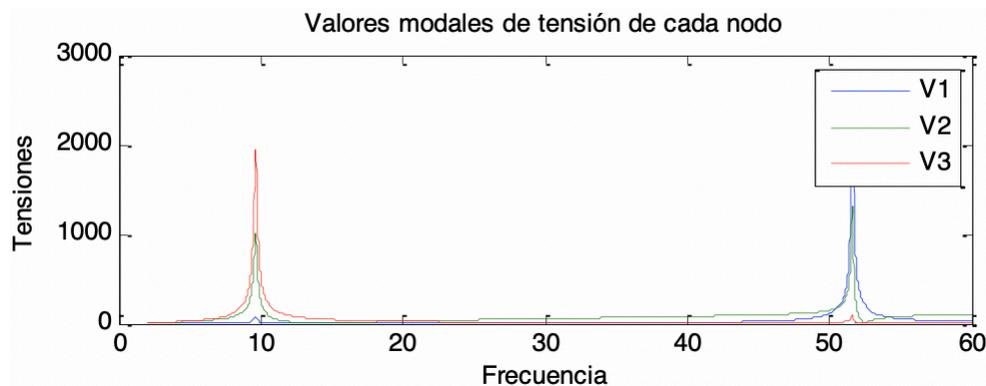


Fig. 11. Barrido frecuencial para la obtención de los valores modales de tensión de cada nudo

La figura 11 revela que, cuando se inyecta en el nudo 2 una corriente de valor unitario, el fenómeno de resonancia puede observarse en todos los nudos. Así pues, es difícil identificar el efecto que el fenómeno de la resonancia en cada bus, así como la influencia que existe entre la posible inyección de corriente en cada uno de los buses y las sobretensiones que podrían aparecer a determinadas frecuencias. Además, utilizando este método, se debería hacer un gráfico por cada nudo que se tenga con lo que el método no es solo confuso sino lento y laborioso presentando serios inconvenientes a la hora de mostrar e interpretar los resultados. Por el contrario, el método de análisis modal, tal como se presentará a continuación, permite una interpretación del fenómeno mucho más sencilla y clara proporcionando además información adicional sobre cuáles son los nudos más sensibles a las resonancias existentes y cuál es la sensibilidad de dichas resonancias a la variación de los valores de los componentes del circuito, es decir, como influyen los distintos elementos que configuran el circuito en el valor máximo de las resonancias.

5. Método de análisis modal de resonancias

En este capítulo se va a desarrollar el objetivo específico del trabajo. Es decir, la búsqueda y análisis de las resonancias según el método de análisis modal. Se procederá a explicar qué es un modo y en qué consiste el método.

5.1. Caracterización de las resonancias por el método modal de análisis

5.1.1. Modos de resonancia

A partir del sistema matricial del método de los nudos:

$$V_f = Y_f^{-1} \cdot I_f \quad (3.2)$$

Donde f representa el valor de frecuencia al cual se ha calculado el sistema.

El fenómeno de la resonancia coincide habitualmente con máximos de impedancia, en cuyo caso se puede estudiar la resonancia buscando los máximos de la matriz inversa de admitancias. Según el método de los nudos, dichos máximos coincidirán con máximos de tensión cuando se inyecte corriente en los nudos del sistema.

Así pues, para poder estudiar el problema de la resonancia se puede optar por buscar la matriz de admitancias del sistema, calcular su inversa y estudiar la respuesta frecuencial de sus términos para localizar dónde están los valores máximos que aproximadamente caracterizarán las frecuencias de resonancia. Para una mayor facilidad de estudio, el método de análisis modal propone trabajar con los valores propios de la matriz. Los valores propios más pequeños serán los que al invertir la matriz, se convertirán en máximos de la impedancia modal y permitirán identificar las resonancias. A continuación, se muestra el desarrollo matemático de lo previamente explicado.

El primer paso es descomponer la matriz de admitancias en valores y vectores propios:

$$Y = L \cdot \alpha \cdot T \quad (5.1)$$

Donde:

α : es la matriz diagonal que contiene los valores propios de Y .

L y T : son, respectivamente, los vectores propios izquierdo y derecho asociados a los valores propios y que verifican $T = L^{-1}$ y también $T = L^T$.

Sustituyendo (5.1) en (3.2) y desarrollando:

$$V = L \cdot \alpha^{-1} \cdot T \cdot I \quad \rightarrow \quad T \cdot V = \alpha^{-1} \cdot T \cdot I \quad (5.2)$$

Se llamarán:

$$T \cdot V = U \quad (5.3)$$

$$T \cdot I = J \quad (5.4)$$

Donde:

U : es el vector de voltajes modales

J : es el vector de intensidades modales

De modo que queda la siguiente expresión:

$$U = \alpha^{-1} \cdot J \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ \dots \\ J_n \end{bmatrix}$$

Donde J y U son los valores de intensidad y tensión asociados a los modos y α^{-1} son la inversa de los valores propios y se llamarán impedancias modales.

Los valores de alfa dependen de la frecuencia y lo que se busca es a qué frecuencia el inverso de los modos tomará valores grandes ya que esos modos serán los denominados modos críticos del sistema. Si un modo no tiene valores máximos no será crítico. La expresión matricial (5.5) permite ver que un valor de impedancia modal muy grande hará que la tensión de su modo sea también muy grande. Por ejemplo, si α_1 es cercana a 0, su inversa será muy grande y hará que el valor de U_1 sea también grande. Esta forma de presentar la información del circuito hace que se pueda identificar de forma sencilla la ubicación de la resonancia armónica en el dominio modal y con ello localizar las frecuencias de resonancia. Los valores propios más pequeños (las α_n más pequeñas) señalarán cuáles son los modos críticos a la

frecuencia crítica o frecuencia de la resonancia y sus vectores propios asociados serán los vectores propios críticos a esa frecuencia de resonancia.

La corriente modal J es una proyección lineal de las corrientes físicas en la dirección de su vector propio y se expresa de la siguiente manera:

$$J_1 = T_{11}I_1 + T_{12}I_2 + T_{13}I_3 + \dots \quad (5.6)$$

El mayor valor de T indicará qué corriente contribuirá más al valor de la corriente modal. Por ejemplo, si T_{13} fuese el más alto, la corriente nodal I_3 sería la más influyente en el valor de J_1 y se concluiría que el bus 3 es donde el modo 1 se puede excitar más fácilmente.

Los voltajes modales se relacionan con el valor físico de la tensión de los nodos según:

$$V = L \cdot U \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ \dots \\ L_{n1} \end{bmatrix} \cdot U_1 + \begin{bmatrix} L_{12} \\ \dots \\ L_{n2} \end{bmatrix} \cdot U_2 + \dots + \begin{bmatrix} L_{1n} \\ \dots \\ L_{nn} \end{bmatrix} \cdot U_n$$

Póngase por caso que existiera resonancia en el modo 1 y el valor de U_1 fuese mucho mayor que todos los demás voltajes modales. Entonces, la expresión anterior se podría simplificar del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ \dots \\ L_{n1} \end{bmatrix} \cdot U_1 \quad (5.8)$$

Esta simplificación nos indica que la contribución de U_1 al valor físico del voltaje de los nodos se puede caracterizar con los valores de L . Si L_{12} tuviese el mayor valor, el bus 2 también tendría el mayor valor y por tanto se podría definir como la ubicación donde mejor se podrá observar la resonancia del modo 1.

En conclusión, el vector propio derecho ubica la excitabilidad del modo crítico y el vector propio izquierdo indica dónde se puede observar mejor el modo crítico. El bus con el mayor elemento en el vector propio derecho es el más excitable para su modo y el bus con el mayor elemento en el vector propio izquierdo será el más sensible.

Recordando que $T = L^T$ se deduce que el bus desde donde se observe mejor la resonancia modal será el mismo que el que presente mayor excitabilidad y viceversa.

Es posible combinar la excitabilidad y observabilidad para representarlas en un mismo índice. Este índice se llama factor de participación y se calcula como:

$$PF_{bm} = L_{bm} T_{mb} \quad (5.9)$$

Donde b y m son el número del bus y modo, respectivamente, al que nos referimos. Para una mejor comprensión del valor de PF_{bm} y para poder compararlo con los factores de otros modos, se introduce el concepto de factor de participación ponderado que se calcula de la siguiente manera:

$$WPF_{bm} = \alpha_m^{-1} PF_{bm} = Z_m PF_{bm} \quad (5.10)$$

Estos factores de participación, al incluir en ellos el efecto de la impedancia modal, muestran la aportación de cada modo a la impedancia vista desde un nudo:

$$Z_{bb} = WPF_{b1} + WPF_{b2} + \dots + WPF_{bn} \quad (5.11)$$

Del mismo modo que el factor de participación nos dice cuál es el nudo más influyente y más afectado por el fenómeno de la resonancia, se pueden determinar otros indicadores, denominados sensibilidades del circuito [2], que permiten identificar cuáles son los elementos del circuito que más influyen en los valores de la impedancia a la frecuencia de resonancia. Una vez se tienen los modos críticos de resonancia, se puede calcular la sensibilidad de dichos modos respecto componentes específicos del sistema.

Antes se han averiguado los nudos más influyentes y ahora se quiere ver qué componentes del circuito afectan más a las distintas resonancias y para ello se va a determinar la sensibilidad de las resonancias a los elementos del circuito. Para ello se procede al cálculo de la sensibilidad de cada elemento para el modo crítico, de la manera que se explica a continuación.

Las impedancias de las ramas conectadas a un nudo concreto se modelan a través de su admitancia equivalente como una conductancia G en paralelo con una susceptancia B . Según esta suposición, se puede averiguar cuán sensible es el modo crítico a G y a B derivándolo respecto de estas mismas variables. Dicha derivada equivale a calcular la variación del modo respecto la variación de G y B .

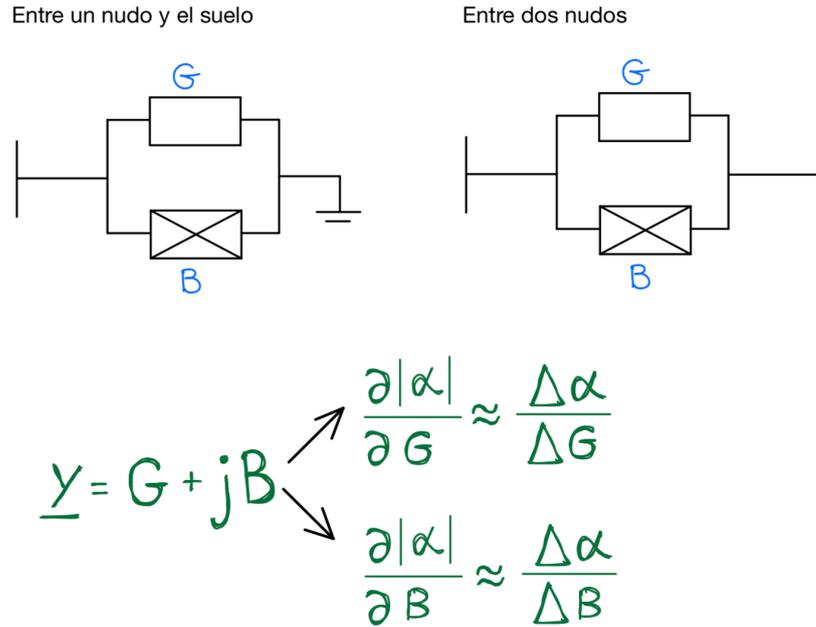


Fig. 12. Caracterización de las ramas, valor de su admittancia y la sensibilidad del modo

Para conocer los valores de estas derivadas, se procede al cálculo de la matriz de sensibilidades S_k para el modo crítico α_k a partir de los vectores propios de dicho modo:

$$S_m = L_m T_m = \begin{bmatrix} L_{1m} \\ \dots \\ L_{nm} \end{bmatrix} \cdot [T_{m1} \dots T_{mn}] = \begin{bmatrix} L_{1m} T_{m1} & \dots & L_{1m} T_{mn} \\ \dots & L_{jm} T_{mi} & \dots \\ L_{nm} T_{m1} & \dots & L_{nm} T_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11,m} & \dots & S_{1n,m} \\ \dots & S_{ji,m} & \dots \\ S_{n1,m} & \dots & S_{nn,m} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Conocida la matriz de sensibilidades, se procede al cálculo:

- Si la rama se encuentra entre un nudo j y tierra, se opera según:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial G} = \frac{S_r \alpha_r + S_i \alpha_i}{\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha_i^2}} \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial B} = \frac{S_r \alpha_i - S_i \alpha_r}{\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha_i^2}} \tag{5.14}$$

Donde los subíndices r e i indican parte real e imaginaria, respectivamente para el valor propio α_k del modo k y la $S_{j,k}$ de la matriz de sensibilidades.

$$\alpha_k = \alpha_{kr} + j\alpha_{ki} \quad (5.15)$$

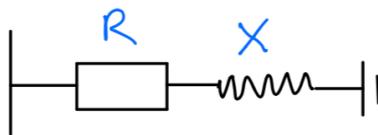
$$S = S_r + jS_i \quad (5.16)$$

- Si la rama se encuentra entre dos nudos i y j , se opera de nuevo según (5.12) y (5.13) pero esta vez, la obtención de S se realizará de la siguiente forma:

$$S = S_{ii,k} + S_{jj,k} - S_{ij,k} - S_{ji,k} \quad (5.17)$$

En general, los datos del circuito suelen venir en términos de impedancia y no de admitancia (ver fig. 13):

Entre un nudo y el suelo



Entre dos nudos

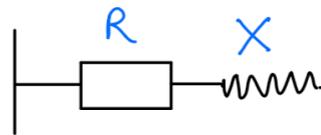


Fig. 13. Caracterización de las ramas, valor de su admitancia y la sensibilidad del modo

Por ello, se debe relacionar la variación de G y B con la posible variación de X y R para poder determinar la sensibilidad del modo crítico respecto a sus verdaderos elementos.

$$\frac{\partial G}{\partial R} = \frac{X^2 - R^2}{(X^2 + R^2)^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial X} = \frac{-2RX}{(X^2 + R^2)^2} \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial B}{\partial R} = \frac{2RX}{(X^2 + R^2)^2}, \quad \frac{\partial B}{\partial X} = \frac{X^2 - R^2}{(X^2 + R^2)^2} \quad (5.19)$$

Finalmente se procede al cálculo de las sensibilidades según los verdaderos elementos de las ramas:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial R} = \frac{\mu(X^2 - R^2) + 2\nu RX}{(R^2 + X^2)^2} \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial X} = \frac{-2\mu RX + \nu(X^2 - R^2)}{(R^2 + X^2)^2} \tag{5.21}$$

Donde:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial G} = \mu, \quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial B} = \nu \tag{5.22}$$

Como (5.17) y (5.18) relacionan los incrementos de los valores reales del modo y de los elementos del circuito, es más apropiado determinar la relación entre los porcentajes de incremento para que sea más genérico y más sencillo de entender. A este nuevo cálculo se le llama sensibilidad normalizada.

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \phi} \Big|_{norm} = \frac{\frac{\partial |\alpha_k|}{|\alpha|}}{\frac{\partial \phi}{\phi}} = \frac{\partial |\alpha_k|}{\partial \phi} \cdot \frac{\phi}{|\alpha|} \tag{5.23}$$

Donde ϕ representa un componente del circuito.

5.4.2. Ejemplo de aplicación

Se mostrará el método de análisis modal con el ejemplo práctico de la figura 12. Póngase por caso que se tiene el circuito de la figura 12:

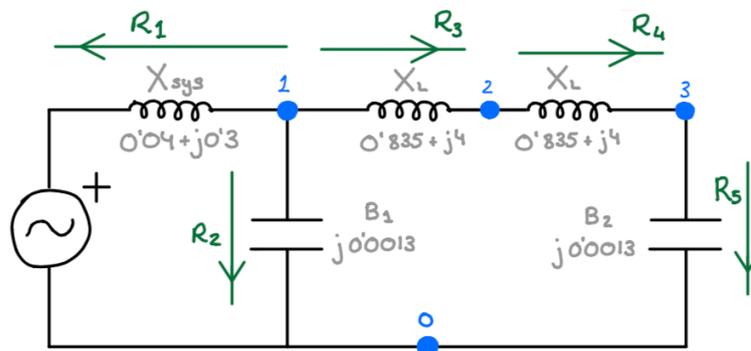


Fig. 12. Circuito de ejemplo

Recordamos que para poder analizar el fenómeno de resonancia según el método de los nudos se tendría que haber hecho tres gráficos diferentes, uno por cada nudo del circuito, para poder observar el comportamiento frecuencial de las impedancias visto desde cada nudo (ver figura 11).

En cambio, si se aplica directamente el método de análisis modal, únicamente se necesita un gráfico y esto es lo que nos muestra:

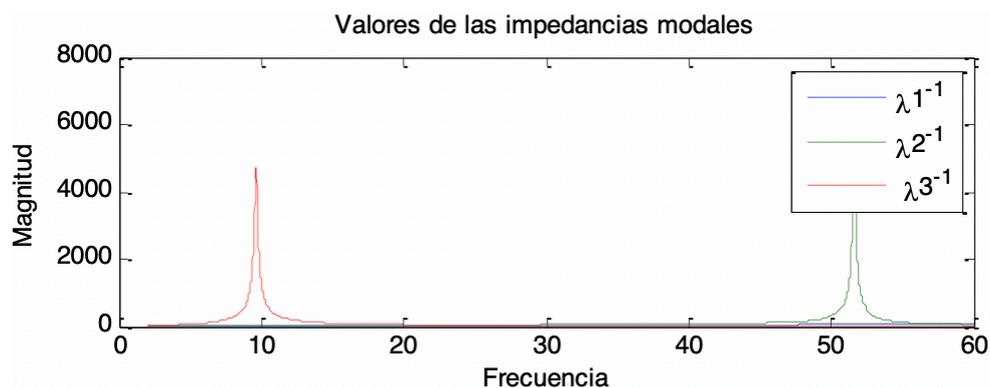


Fig. 13. Barrido frecuencial para la obtención de los valores de las impedancias modales

Ahora se observa que hay dos modos que experimentan resonancia a determinados valores de frecuencia. En este ejemplo concreto, el modo 1 experimenta resonancia a 2580Hz, el modo 3 a 480Hz y el modo 2 no experimenta resonancia.

Tras la obtención del gráfico y con el ejemplo, se puede resumir toda la información necesaria para analizar el fenómeno de resonancia del circuito en una tabla como la que se muestra a continuación:

Frecuencia de Resonancia		480 Hz (<i>Modo 3</i>)	2580 Hz (<i>Modo 1</i>)
Valores Propios Críticos		0,00021-j0,00004	0,00015-j0,00003
Vectores Propios Críticos	T	Bus 1	$\underline{I}_{31}=0,0332+j0,00035$ $\underline{I}_{11}=0,90019-j0,00487$
		Bus 2	$\underline{I}_{32}=0,4605+j0,00121$ $\underline{I}_{12}=0,43438+j0,00387$
		Bus 3	$\underline{I}_{33}=0,887-j0,0017$ $\underline{I}_{13}=-0,0338-0,00037$
	L	Bus 1	$\underline{L}_{13}=0,0332+j0,00039$ $\underline{L}_{11}=0,9001$
		Bus 2	$\underline{L}_{23}=0,4605+j0,00209$ $\underline{L}_{21}=0,43426+j0,00622$
		Bus 3	$\underline{L}_{33}=0,887$ $\underline{L}_{31}=-0,0338-j0,00055$
Factores de Participación	Bus 1	$\underline{PF}_{13}=0.0011$	$\underline{PF}_{11}=0.8103$
	Bus 2	$\underline{PF}_{23}=0.2121$	$\underline{PF}_{21}=0.1887$
	Bus 3	$\underline{PF}_{33}=0.7868$	$\underline{PF}_{31}=0.0011$

Tabla 1. Resultados tras aplicar el método de análisis modal

Se observa que el bus 1 tiene el mayor factor de participación para el modo 1 y el bus 3 es el que tiene mayor factor de participación para el modo 3. Esto nos indica, por un lado, que el bus 1 será donde se observe mejor y donde se excitará más fácilmente la resonancia del modo 1. Por otro lado, también nos dice que el bus 3 será donde se observe mejor y donde se excitará más fácilmente la resonancia del modo 3. En resumidas cuentas, queda demostrado que el método modal de análisis es capaz de indicarnos desde qué bus se excita más fácilmente y se observa mejor la resonancia.

Por último, quedaría obtener las sensibilidades del circuito respecto al modo crítico. En la siguiente tabla, se muestran los valores obtenidos para el modo 3 crítico y las tres primeras ramas (R_1 , R_2 y R_3):

		$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \phi}$	$\frac{\partial \alpha_k }{\partial \phi} \cdot \frac{\phi}{ \alpha }$
R₁	R_{sys}	0,0034	0,9406
	X_{sys}	$-8,3518 \cdot 10^{-6}$	-0,8989
R₂	X_c	$-9,851 \cdot 10^{-6}$	-1,0205
R₃	R_L	$5,121 \cdot 10^{-6}$	0,0297
	X_L	$1,0745 \cdot 10^{-7}$	0,1542

Tabla 2. Resultados de las sensibilidades del modo crítico 3 respecto distintos elementos del circuito

La tabla 2 muestra la influencia que tiene cada componente perteneciente a las tres primeras ramas del circuito en la condición de resonancia del modo 3. La primera columna muestra la sensibilidad del modo 3 respecto los distintos elementos y la segunda columna muestra los valores de las sensibilidades normalizadas para poder comparar todos los elementos entre ellos.

6. Programa

Para poner en práctica el método de análisis modal explicado anteriormente se ha creado un programa en Matlab que realiza el análisis del fenómeno de la resonancia en un circuito aplicando ese procedimiento. A continuación, se dividirá este séptimo apartado del trabajo en subapartados que corresponden a las distintas tareas que desempeña el programa.

6.1. Lectura de datos

El primer paso es identificar en el circuito que se tiene el número de nudos que se tiene y el número de ramas, que corresponderá al número de caminos que unen un nudo y otro. Dichas ramas están orientadas, con lo que se deberá tener claro cuál es el nudo de origen y cuál es el de destino. En la figura 14 se muestra un circuito de ejemplo y se señalan sus nudos y ramas.

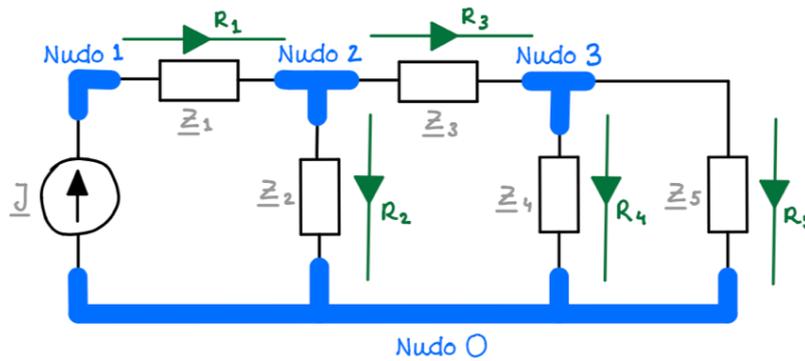


Fig. 14. Identificación de los nudos y ramas del circuito

El programa comienza leyendo un fichero de tipo .txt que almacena la información necesaria del circuito en cuestión de una manera muy concreta. Dicho archivo tendrá una fila por cada rama y cada fila almacenará toda la información necesaria de dicha rama en cinco columnas. Las dos primeras columnas señalan cuáles son los nudos de origen. Las tres últimas columnas almacenan información sobre la impedancia de la rama: se tiene una columna para resistencia, otra para inductancia y otra para capacidad. En la tabla 3 se muestra cómo quedaría el archivo correspondiente al circuito de la figura 14.

	N ⁺	N ⁻	X _L	X _C	R
Rama 1	1	2	X _{L1}	X _{C1}	R ₁
Rama 2	2	0	X _{L2}	X _{C2}	R ₂
Rama 3	2	3	X _{L3}	X _{C3}	R ₃
Rama 4	3	0	X _{L4}	X _{C4}	R ₄
Rama 5	3	0	X _{L5}	X _{C5}	R ₅

Tabla 3. Construcción del documento de tipo txt

6.2. Construcción de la matriz de admitancias

Para construir la matriz de admitancias, lo primero es crear los vectores de incidencia de cada rama en el que cada fila corresponde a un nudo del sistema. Todos los elementos serán nulos

a excepción de los correspondientes al nudo de origen y destino de la rama, que valdrán +1 y -1, respectivamente. Los vectores de incidencia de las ramas del circuito de ejemplo quedarían de la siguiente manera:

$$A_{R1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_{R2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_{R3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, A_{R4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{R5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde $A_{r,n}$ corresponde al vector de incidencia de la rama n .

La construcción de la matriz de admitancias para una frecuencia f se hace de la siguiente manera:

$$Y_N = \sum_{k=1}^5 Y_k \cdot (A_k \cdot A_k^T) \quad (6.1)$$

Donde Y_k corresponde a la inversa de la suma de impedancias contenidas en la rama y A_k corresponde al vector de la rama k .

Siguiendo con el ejemplo anterior, el desarrollo de la matriz de admitancias quedaría del siguiente modo:

$$\begin{aligned} &= Y_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1 \ -1 \ 0] + Y_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [0 \ 1 \ 0] + Y_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [0 \ 1 \ -1] + Y_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [0 \ 0 \ 1] + Y_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [0 \ 0 \ 1] \\ &= Y_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + Y_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + Y_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + Y_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.2) \\ &= \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde Y_n corresponde a la inversa de la suma de impedancias contenidas en la rama n .

Este cálculo se repetirá para todas las frecuencias que se quieran estudiar, por lo que se tendrán tantas matrices de admitancias como frecuencias estudiadas. Todas estas matrices se almacenan en una misma matriz tridimensional donde la tercera dimensión de la matriz se utiliza para guardar los resultados obtenidos para cada frecuencia.

6.3. Estudio frecuencial

El programa realiza un barrido de frecuencias y para cada una de ellas determina, además de la matriz de admitancias comentada en el punto anterior, diferentes parámetros necesarios para el estudio. A continuación, se explica cuáles son esos parámetros y cómo trabaja el programa para encontrarlos.

6.3.1. Cálculo de valores propios y vectores propios

Mientras se calcula cada matriz de admitancia para cada frecuencia, el programa encuentra la matriz diagonal de valores propios y la matriz de vectores propios a partir de la función *eig()* de MATLAB. Los valores propios se almacenan en una matriz de dos dimensiones donde las filas almacenan cada uno de los valores propios obtenidos y en las columnas se guardan los resultados obtenidos para cada frecuencia. Los vectores propios se almacenan en una matriz tridimensional donde filas y columnas almacenan los vectores propios correspondientes a cada uno de los valores propios obtenidos y la tercera dimensión de la matriz se utiliza para guardar los resultados obtenidos para cada frecuencia.

6.3.2. Determinación de modos y frecuencias críticas

Anteriormente se ha explicado que los modos del circuito vendrán dados por los valores propios de la matriz de admitancia, que a su vez son función de la frecuencia. El programa realiza una representación frecuencial de las impedancias modales (la inversa de los valores propios) para así facilitar la interpretación de los resultados que se obtienen e identificar visualmente los modos y las frecuencias críticas. El usuario ya podría ubicar los modos y frecuencias críticas identificando los picos que puedan mostrar las impedancias modales pero el propio programa también sabe localizar de forma automática dichos picos y devolvernos los valores exactos de su correspondiente frecuencia. Utilizando la función *findpeaks()* de MATLAB se obtienen tanto los valores máximos de las impedancias y el índice en el cual ocurren. Este índice permite averiguar la frecuencia y ubicarse en la dimensión de la profundidad de la matriz tridimensional de vectores propios.

6.3.3. Determinación de los factores de participación

Tal y como se ha explicado anteriormente, existe una manera de combinar excitabilidad y observabilidad en un mismo índice. Esto se hace a través de los factores de participación, que se calculan de la siguiente forma:

$$PF_{bm} = L_{bm} T_{mb}$$

Donde b y m son el número del bus y modo, respectivamente, al que nos referimos.

Una vez determinados los modos críticos, también se guardan sus correspondientes índices. Estos índices indican la frecuencia a la cual el modo es crítico. El programa utiliza el modo e índice para poder situarse en la matriz tridimensional donde se han almacenado todos los vectores propios. El modo señala la fila/columna que se debe coger y el índice ubica la profundidad de la matriz a la que nos encontramos. Una vez se tienen los vectores críticos correspondientes al modo crítico, se multiplican (tal y como se muestra en la ecuación ...) y se obtienen los factores de participación.

6.3.4. Determinación de sensibilidades

Para proceder al cálculo de las sensibilidades de los modos críticos, el programa primero pide al usuario que determine el modo y la rama de estudio. Una vez escogidos, el programa calcula la matriz de sensibilidades correspondiente y luego identifica, leyendo el fichero de datos introducido, si la rama que se quiere estudiar se encuentra entre dos nudos o entre un nudo y tierra. Por último, procede a aplicar los cálculos ya mencionados al final del apartado 4.2.

Conclusions

Frente al recurrente problema de la aparición de resonancias en circuitos eléctricos y la necesidad de mantener esta condición bajo control debido a los problemas que puede ocasionar en las instalaciones eléctricas, el presente trabajo se ha dedicado al estudio de las resonancias. Se ha podido observar que este fenómeno lleva a tener valores mínimos y máximos de las impedancias equivalente del circuito lo que puede provocar valores máximos de tensión o intensidad. Frente a esta situación, la instalación puede llegar a dañarse o a provocarse un problema de inestabilidades que derivan en oscilaciones no controladas de las tensiones del circuito.

Uno de los objetivos iniciales del trabajo era escoger y estudiar el método de análisis que mejor caracterizase la resonancia en los circuitos eléctricos. Se ha estudiado, en primer lugar, el método de los nudos, pero se ha visto como dicho método es laborioso y los resultados que se obtienen muchas veces serán confusos y difíciles de interpretar. Sin embargo, a raíz de este método se ha estudiado otro, el método modal de análisis. Aplicándole un cambio de base a la matriz de admitancias del circuito, con este método se pasa a trabajar con los valores propios (los modos) de dicha matriz. De esta manera, los resultados que se obtienen son más claros y llegamos a obtener numerosas conclusiones. Este método permite encontrar las frecuencias de resonancia, los modos que sufren resonancia, los nudos más fácilmente excitables, el nivel de participación de cada nudo y la sensibilidad de cada elemento del circuito.

El segundo objetivo del trabajo proponía la creación de un programa que simulase el método modal de análisis y facilitase la obtención de toda la información que da este método. Utilizando Matlab, se ha creado un programa sencillo donde se ha programado el método que puede ser aplicado a cualquier circuito eléctrico sin acoplamientos ni fuentes de tensión puras. Partiendo de la lectura de un fichero de datos con la información característica del circuito, el programa permite determinar su matriz de admitancias, presentar representaciones frecuenciales de los términos de la matriz de admitancias inversa, realizar estudios con el método de análisis modal presentado, sacar resultados por pantalla. Puede ser una herramienta útil para el estudio de resonancias en circuitos eléctrico.

A nivel personal, he podido dar un paso más a nivel teórico en la electrotecnia. He podido profundizar mis conocimientos trabajando sobre una problemática real, como son las resonancias, estudiando un método de análisis que se aplica a otro que ya había estudiado en la asignatura. Opino que se ha conseguido un método muy completo para estudiar las resonancias y se ha conseguido, con éxito, integrarlo en un programa de Matlab que funciona

para cualquier circuito que no tenga acoplamientos ni fuentes de tensión pura.

La resonancia eléctrica va ligada a la estabilidad de los circuitos, puesto que en presencia de resonancias y bajo condiciones de amortiguamientos reducidos se pueden presentar oscilaciones en las tensiones del circuito a la frecuencia de dicha resonancia. El programa podría llegar a ampliarse en un futuro para el estudio de estas situaciones.

Bibliografía

Referencias bibliográficas

- [1] XU, Wilsun; HUANG, Zhenyu; CUI, Yu; WANG, Haizhen (2005): “*Harmonic Resonance Mode Analysis*” en *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 20, Nº2. Pp. 1182-1190
- [2] XU, Wilsun; HUANG, Zhenyu; CUI, Yu (2007): “*Application of Modal Sensitivity for Power System Harmonic Resonance Analysis*” en *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 22, Nº1. Pp. 222-231
- [3] PEDRA, J. (1993): *Circuitos Monofásicos y Trifásicos*, Edicions UPC, Colección Aula ETSEIB: Barcelona
- [4] MOLINA MARTÍNEZ, J. M. (2011): *Principios Básicos de Electrotecnia*. Marcombo: Barcelona