中学新代数 一

連江陳　文著

初級中學第二學年用

實用主義

中學新代數　一

科學會編譯部出版

商務印書館發行

中華民國十二年四月初版

實用主義
中學新代數
第一册

每册定價大洋
伍角
外埠酌加運費匯費

另附答案(非賣品)

著者　連江陳文
發行者　科學會編譯部
印刷所　上海北河南路北首寶山路
商務印書館
總發行所　上海棋盤街中市
商務印書館
分售處　北京天津保定奉天吉林龍江濟南太原開封鄭州西安南京杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口長沙常德衡州成都重慶瀘縣福州廣州潮州香港梧州雲南貴陽張家口新嘉坡
商務印書分館

六四一臨

初級中學數學課程表

第一學年

(全年約40週,每週6時,共240時。)

(用書) 實用主義中學新算術 計314頁,每週5時,每時約授2頁,(例題不在此限)餘時復習。

(用書) 實用主義中學新幾何——第一册——幾何初步 計50頁,每週1時,每時約授2頁,(例題及練習不在此限)餘時復習。

第二學年

(全年約40週,每週5時,共200時。)

(用書) 實用主義中學新代數——第一册計124頁,每週2時,每時約授2頁,(例題及製圖表不在此限)餘時復習。

(用書) 實用主義中學新幾何——第二册——平面上 計95頁,每週3時,每時約授1頁,(例題及練習不在此限)餘時復習。

第三學年

(全年約40週,每週6時,共240時。)

(用書) 實用主義中學新代數——第二册計 172 頁，每週 3 時，每時約授 2 頁，(例題及製圖表不在此限)餘時復習。

(用書) 實用主義中學新幾何——第三册——平面下計 94 頁，每週 3 時，每時約授 1 頁，(例題及練習不在此限)餘時復習。

連江陳文擬

〔注意〕是書原合訂一册，名爲實用主義代數學教科書；茲稍加刪改，(如第二册刪去複素數之算法等)分訂二册，務期適合於初級中學二三年教科之用，并更用今名，以避混淆，識者諒之。

實用主義

中學新代數

第一冊目次

緒論

第一編　四則

是書附有另編答案一册(非賣品)

實用主義

新代數第一冊

緒論

1. 代數學

算術之計算方法,僅能應用於尋常日用之數量。學術上所用之數量,較尋常日用之數量為繁,若一一計算,殊覺不便,於是更進一步。

設法避去計算之繁,以公式或圖表,顯明任何數量之關係,是為代數學。

代數學為算術之進步,其所用之符號與算術同。

2. 代數之字

代數學因欲避去計算之繁,故以文字代數字,即以 $a, b, c, \cdots\cdots$ 代**已知數**。以 x, y, z, 或 u, v, w, **代未知數**。(即所求之數)

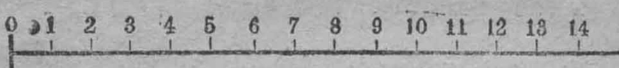
又以 m, n, 等代任意之整數。其餘用以代各數之文字甚多,當隨時說明,茲不先及。

3. 數列

凡自然之數,由 1 起依次爲 2, 3, 4, 等。得至任何大之數。

代數學於此等數之連續,(卽 1, 2, 3, 4, 5, 6,……)統稱爲數列。

數列以用直線表之爲便,如第 1 圖,在直線上定一原點。(卽零點)由原點起,於其一方取任意長之線份。(卽單位)依次遞劃其直線,卽成數列之表象。



第 1 圖

如道路以一里(或公里, km)爲單位,置里石。(或 km 石)又如尺度以一分爲單位,(m 尺以 cm 爲單位)寒暖表以一度爲單位,各刻度目。其他晴雨表,水深標,等。亦有同樣之度目。由是知

各數得用離零點若干單位之相當點示之。

第　一　編

四　則

第一章　總論

4. 四則中諸數之名稱, 與算術同。(參看實用主義中學新算術第二編第一章。) 卽

I. **加法**　被加數＋加數＝和＝總計

II. **減法**　被減數－減數＝餘數＝差

III. **乘法**　被乘數×乘數＝積

IV. **除法**　被除數÷除數＝商

然加數及被加數本可任意交換。故加數亦得稱爲被加數。(參看算術第二編第二章)

又乘數及被乘數亦得交換,故乘數及被乘數各稱爲因數。(參看算術第二編第五章)

第二章　加法及減法

5. 加法

某人於空虛之儲蓄匣,投入一角之銀幣一個,同時又投入一個,一個,一個,又一個,總計得5個,經若干日之後。又以一角之銀幣7個,同樣投入,由是儲蓄匣內當有一

角之銀幣12個,此數12,卽兩回投入銀幣之總計(卽和)

其算式爲　　$5+7=12.$

以圖表顯之,如次。

第 2 圖

卽以數列相加,則由零點起,先計被加數 5 之單位。由是進計第二被加數之單位(卽7).如是卽得其和12.

此計算得用次式表之(加法之界說,參看實用主義算術第二編第一章)

$$\underbrace{1+1+1+1+1}_{5\text{回}} + \underbrace{1+1+1+1+1+1+1}_{7\text{回}} = x$$

故所求之數 x,(卽和)其值不得不爲12.

6. 文字計算

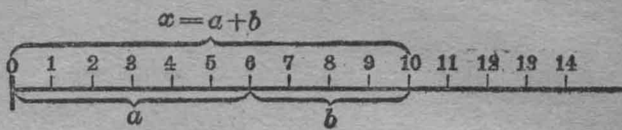
上述之計算法,爲加法之特例,惟對於被加數5及7行之。今以 a 及 b 爲一般被加數之代表,其加法與前同。

在幾何學內,曾用此等小文字表 $2cm$, $5cm$, $8cm$, 等之線份,行種種之計算。(參看實用主義幾何學§23.)

如是 a 與 b 相加,可在數列上(第3圖)由零點起,先計 a 單位,由是進計 b 單位。

於是所得之數(x),卽和,

當為　$x=a+b$ 之值。

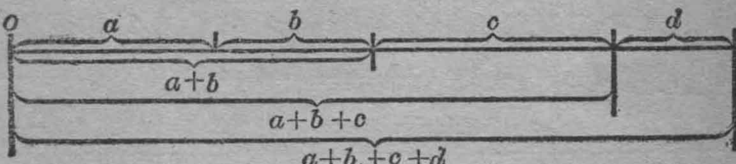


第 3 圖

由是,知被加數在數列上常相並,且加法之結果,當離零點益遠。

今有多於二個之被加數,例如四個被加數,a, b, c, d,欲求其和,則先作最初之二數之和 $a+b$,(第 4 圖) 由是進計 c 單位,最後更進計 d 單位,如是,其和為

$$s=a+b+c+d$$



第 4 圖

今有銀 11 圓,又加 9 圓,則成 20 圓。又兵 18 名,又加 12 名,則得 30 名。

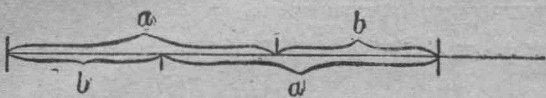
依同理,當知　$7a+15a=22a.$

$$16p+7p=23p.$$

7. 交換定則

於前舉之儲蓄匣之例,若先投入一角之銀幣 7 個,次又投入 5 個,其最後之總數12,當無變更。

又甲學生於其儲蓄匣初投入銀 5 角,次投入 2 角,乙學生於其儲蓄匣初投入 2 角,次投入 5 角,如是,兩人之儲蓄俱爲 7 角,卽其總額相等。今取任意之二被加數 a 及 b,以任一數爲首加之,其和同否,試依數列驗其和。(第 5 圖)



第 5 圖

依驗得之結果,可知於任何例,俱得相同之和,卽

$$a+b=b+a.$$

同樣,以三個以上之被加數試之,其和亦常相同,卽

$$a+b+c+d=a+b+d+c=a+d+b+c \text{ 等等。}$$

故於加法,諸被加數,得用無論如何之次序。

8. 和因被加數變

如有同胞四人,各有一儲蓄匣,其各儲蓄匣原有銀 5 圓,今其父更與妹 1 圓,姊 2 圓,弟 3 圓,兄 4 圓,然則各儲蓄匣應有銀幾何。

(1)　　$s=5+1=6$

(2)　　$s=5+2=7$

(3)　　$s=5+3=8$

(4)　　$s=5+4=9$

卽將各儲蓄匣內之銀數,以 s 表之,則 s 依被加數 5, 與因人而變之被加數 1, 2, 3, 或 4 而成。故 s 因第二被加數而變,其數因此被加數增加而增加。今將第二被加數,通以 x 表之。則各匣內之銀數,得用 $s=5+x$ 表之。

若於此式,依次以 0, 1, 2, 3, 4, 等之數代 x, 則其和依次取如何之值。又別依和 $s=11+x$ 考之,以如上之自然數代 x, 則其和 s 取如何之值,且如何變更。

今有一寒暖表,在午前六時指 8°, 若每一時間水銀柱昇 1°, 則午前十時及午後一時當指何度。將此關係,以如上記之方程式表之,並以 0, 1, 2, 3, 4, 等之數代入,試示在六時以後之寒暖表之度數。

9. 減法

某人有銀30圓,用去12圓,求現存之圓數,或現存 12 圓,求用去之圓數。

其算式爲

$$30-12=\text{所求之數}$$

以 x 代所求之數,其式爲

$$30-12=x$$

或
$$\underset{差}{x}+\underset{減數}{12}=\underset{被減數}{30}$$

若由 a 減 b, 則其式爲

$$a-b=x$$

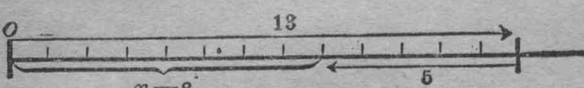
或
$$x+b=a \tag{1}$$

試於此二式,指明被減數,減數,及差。

故減法爲加法之逆。蓋加法中所求之數,(和),卽減法中所與之數,(被減數)減法中所求之數,(差)卽加法中所與之數。(被加數)

10. 減法之演算

減法之算式,爲 $x+12=30$ 之形,(以文字表之則爲 $x+b=a$) 則適合於此式之 x,(卽所求之被加數)在數列上,由零點向前數之。固不能徑然求得。然 x 距(和) a 有 b 單位。故由和 a 向後數 b 單位,卽達 x.

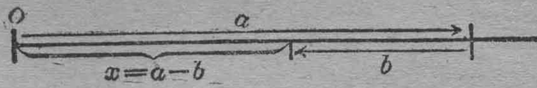


第　6　圖

第 6 圖,乃示由 13 減 5 之減法,(算式 $x+5=13$) 其差 $x=8$, 可由 13 向後數 5 得之。

揭於 §9. 之算式 $x+b=a$, 其 x 之値,(卽差)如第 7 圖,可由 a 向後數 b 單位求得。 今於此例,其差不能如前例之差 8 以一單簡之數字表之。故用一新符號如次

(2)　　　$xa=-b$　(差之文字值)



第　7　圖

逆　例如有 $y=41-27$ 值之式,則對於此值之算式,不得不爲

$$y+27=41.$$

故欲求差,則由零點起,先向前數被減數之單位之數。次由是向後數減數之單位之數。如是,自當再接近於零點。

+ 向前 …………………	向前 +	得和
+ 向前 …………………	向後 −	得差

〔註〕由 a 減 b 之減法及由 13 減 5 之減法,亦可以 $b+x=a$ 及 $5+x=13$ 之方程式表之。於此例,由零點起,先向前數 b (或 5)單位。然後求由是達和 a (或 13)須向前更進何度。普通商店均依此法求差,又心算以用此法爲便。

今以 (2) 式之 x 之值,代入 (1) 式,則得

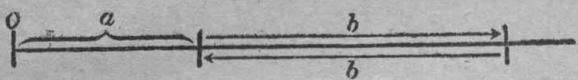
(3)　　　$a-b+b=a$

易以言辭,爲

1.　差加減數則成被減數,

2.　相等之減數與加數 $(-b$ 及 $+b)$ 相消。

此事可依第8圖,由 a 向前數 b 單位,又向後數 b 單位,明之。



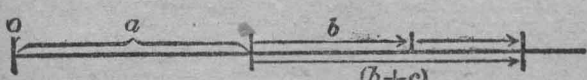
第 8 圖

11. 組合量之加法及減法

今視組合量為若干個被加數(或減數)相合,並指其全體,(卽和或差)故以此等之量演算,當置之於括弧內,而括其數為一數。如 $m+(a-b)$,示加差 $(a-b)$ 於 m. 而 $m+a-b$, 則示先加 a 於 m, 然後由其結果減 b,

I.　今加27於54, 可先加20, 更加7, 卽 $54+27=54+(20+7)$, 得依 $54+20+7$ 之形式計算, 同樣, 加和 $(b+c)$ 於 a, 可先加 b 於 a, 然後加 c,

以圖表之。如第 9 圖。由 a 先向前數 b, 然後依同方向進數 c. 或由 a 向前數其和 $(b+c)$. 其結果相同。(此法則亦稱為加法之組合定則)



第 9 圖

此事實以等式表之,如次

$$a+b+c=a+(b+c)$$

逆　加和於某數,與以被加數各別加之,其結果相同。

〔例〕加和 (327+481) 於 673, 可代以先加 327 於此數, 得 1000, 然後以 481 加之。

即
$$673+\underbrace{(327+481)}_{808}=1481$$

或
$$673+327+481=1000+481=1481$$

II. 加 27 於 54, 其 27 可代以 30−3, 故可先加 30, 次由是減 3, 即

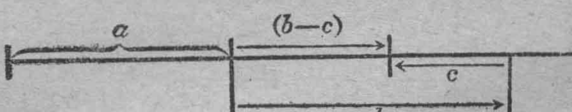
$$54+27=54+(30-3)=54+30-3=81$$

今加差 $(b-c)$ 於 a, 可如第 10 圖, 先由 a 向前數 b, 次由是向後數 c, 其結果相同。

此事實以等式表之,如次

$$a+(b-c)=a+b-c$$

加差於某數,可先以其被減數加之,然後由是減其減數。



第 10 圖

〔例〕
$$825+\underbrace{(175-96)}_{79}=904$$

或 $825+175-96=1000-96=904$

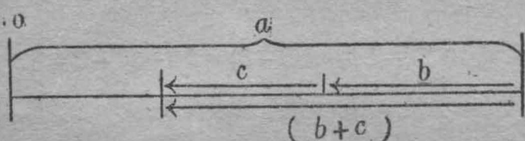
〔逆〕 $382+914-414=382+(914-414)$

$$=382+500=882$$

III. 由 81 減 27, 卽於數列上向後數 27, 此宜先減去 20, 次減去 7. 卽

$$81-27=81-(20+7)=81-20-7=61-7=54.$$

一般之例, 如第 11 圖, 由 a 減和 $b+c$, 卽由 a 向後數 $b+c$, 與由 a 先向後數 b 次復數 c, 其結果相同。



第 11 圖

由某數 a 先向後數 b 次復數 c, 與由 a 向後數 $b+c$, 其得數相同。(亦依第 11 圖顯明)

故以和減時, 得依被加數各別減之。

此法則以等式表之, 如次

$$a-(b+c)=a-b-c$$

〔例〕 $1041-\underbrace{(641+317)}_{958}=83$

或 $1041-641-317=400-317=83$

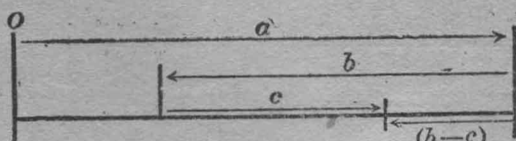
〔逆〕　$736-428-172=736-(428+172)$

$$=736-600=136.$$

IV. 由 81 減 27, 其 27 可視爲差 $(30-3)$, 如是先由 81 減 30, 次更加 3, 即得所求之結果, 卽

$$81-27=81-(30-3)=81-30+3=51+3=54$$

在數列 (第 12 圖) 上, 向前進某數 a, 由是向後數 b, 更向前進 c, 與由 a 向後數 $(b-c)$, 其結果相同。



第 12 圖

故欲由所與之數減差 $(b-c)$, 可先減其被減數 b 次加其減數 c,

以等式表此法則, 卽

$$a-(b-c)=a-b+c$$

〔例〕　$779-\underbrace{(479-255)}_{224}=555$

或　$779-479+255=300+255=555$

〔逆〕　$677-139+89=677-(139-89)$

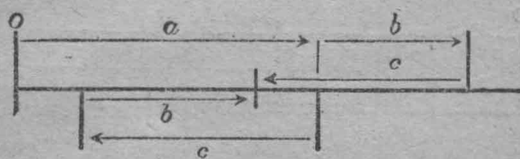
$$=677-50=627$$

上記之四法則,爲日常生活上所常用,例如某寒暖表初昇3°,次昇5°,或一回昇$3^\circ+5^\circ=8^\circ$,其最後之溫度相同。

又某人在甲商店用銀3圓,在乙商店用銀2圓,與一回用銀5圓,其所餘之銀數相同。

更依直觀,得以次之法則,附加於以上各法則。

V. 由a先向前數b,次向後數c,與由a先向後數c,次向前數b,當同得一數點,(第13圖)



第 13 圖

故加項與減項,得用任意之次序,

即 $$a+b-c=a-c+b$$

上記之$a+b-c$式,稱爲多項式。

多項式依數個項而成。

項者立於二演算符號間,(即+或−,間)或立於式之首與末,之量也。

例如多項式 $13p-105q+m$ 含有$13p$, $105q$及m,三項。

同樣,多項式 $a-95b-11c+118$ 含有a, $95b$, $11c$及118,四項。

12. 解括弧

以前所記之四法則，卽

I. $$a+(b+c)=a+b+c$$

II. $$a+(b-c)=a+b-c$$

III. $$a-(b+c)=a-b-c$$

IV. $$a-(b-c)=a-b+c$$

比較考察，可得解括弧之規則，卽 I 及 II 括弧前有加號，解去括弧，其符號不變，然 III 及 IV 括弧前有減號，解去括弧，其括弧內諸項之符號悉變。

卽　括弧前有加號，其括弧可隨時解去。括弧前有減號，必悉變括弧內諸項之符號，其括弧始可解去。

又　欲括諸項爲一數，且於此數前置減號，則先書減號，次變諸項之符號，以括弧括之。

若大括弧內，復有括若干項之小括弧，則解外部之括弧時，當視內部之括弧如一項。如

$$2p+\{3q-(r-5s)\}=2p+3q-(r-5s)$$

又 $$m-\{6n-(a+b)\}=m-6n+(a+b)$$

次之關係，可直依括弧之法導出

$$(a-b)=-(b-a)$$

$$(q-p)=-(p-q)$$

$$(a-b-c)=-(b+c-a)$$

欲換某差,則附減號於其反對差之前(卽其括弧之前)卽得。

13. 差附屬於減數

如同胞三人,各有銀1圓,今同至某商店,弟用去銀2角,兄用去銀5角,妹用去銀6角,問各餘銀幾何。

所求之餘數爲8, 5, 4, 角卽依次爲同被減數與異減數之差。

今將此等餘數,依次以 D_1, D_2, D_3, 表之,則

$$D_1=10-2=8$$

$$D_2=10-5=5$$

$$D_3=10-6=4$$

由是可知差因減數之增加而減少。

若有 $d=100-x$ 以 $x=0, 10, 20, 30, 40,$ 等代入,其差之值如何變更。

又,直角三角形之兩銳角之和爲90°,已述於幾何學。若其一銳角α,由0°遞增至90°則他一銳角β當爲何值。

由是知

$$\alpha=0^\circ \qquad \beta=90^\circ$$

$$\alpha=1^\circ \qquad \beta=89^\circ$$

$$\alpha=2^\circ \qquad \beta=88^\circ$$

$$\alpha=3^\circ \qquad \beta=87^\circ$$

$\alpha=4^\circ$　　$\beta=86^\circ$

……　　……

……　　……

$\alpha=88^\circ$　　$\beta=2^\circ$

$\alpha=89^\circ$　　$\beta=1^\circ$

$\alpha=90^\circ$　　$\beta=0^\circ$

今以 x 表 β 之變值,以差形 $90^\circ-x$ 表 α,則 α 附屬於 x,其值常因 x 而變,

此等變值之量,通稱爲變數,其第一之變數 α,附屬於第二之變數 x,是謂 α 爲 x 之函數。

試就上記之例,指明何者爲何者之函數,並附屬於如何之變數。

依幾何學,二等邊三角形之底角變,則其頂角恆因之而變,試以式顯明後者附屬於前者,即後者爲前者之函數。

再就§8之例考察,試指明何者爲何者之函數,並附屬於如何之變數,又與本款所論之函數,有何相異之點。

14. 相對數

今在數列上前進至數點20,由是退後15單位,或前進至數點11,由是退後10單位,於此二例,雖未復至零點,然復近於零點。

如是，被減數較減數大，則向後數之結果，恆依減數所示之單位，復近於零點，且止於其前方，故差(所求之被加數)仍在原來之數列上。

然前進20單位，復退後20單位，則直達零點，故被減數與減數相等則減法之算式爲

$$x+a=a$$

卽由a退後a單位，則達零點，

此結果名爲零，其書法如次。

$$o+a=a$$

故零者，相等二數之差也。卽

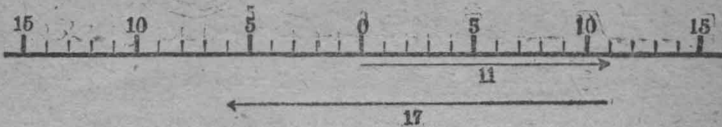
$$o=a-a$$

復次被減數較減數小，則在算術上不能計算，然在代數學，亦得示其結果。例如某人在距某地點800m之地，以每分80m之速度進行，5分後至距某地點$800-400=400\,m$之地，10分後至$800-800=0\,m$之地，卽至某地點，若繼續進行，則復離某地點向與前反對之方向進，如自當初行15分後，應至$(800-1200)\,m$之地，卽離某地點在與前反對之方向距400m之地。

故於此例，過零點更向後數，卽能看出所求之差。

同樣，欲由11減17，則先將原來之數列，由零點之左

方延長,(第14圖)於其數列上,由11向後數17單位,如是過零點至向左在6單位之點。



第 14 圖

此在零點左方之點,與一種數對應,此數名爲**負數**。負數與**正數**(原來之數)唯依零點異其位置,卽數負數之方向,恰與正數反對。

有二種方向之數列,已爲實際上所常用,例如寒暖表,水深標,及其他種種器械之度目。又,以赤道爲起點,計地球之子午線上之度數,亦常以有正數及負數之列爲應用。

〔問〕以由某市,沿國道,向東方之路程爲正數,則由此市向西方之路程如何計算。

今諸數在數列上各現二回,卽 1, 2, 3, 4, 等之數,在零點之左右各有一個,故此後於其値相等,唯位置相異之二數,不可不加以區別。

數之大,(卽離零點之距離)稱爲**絶對値**。以數字或文字表之。其對於零之位置,以前置符號示之。

卽對於在正數列上之數之位置，以正號(+)置於其絕對值之前示之，對於在負數列上之數之位置，以負號(−)置於其絕對值之前示之。故 +13 與 −13，雖同具絕對值 13，然為異種之數。反之，如 +15 與 +5，或 −15 與 −7，其絕對值雖不相等，而依對於零之位置，仍為同種之數。

前置符號 + 及 −，原用為對於加法及減法之符號，(卽演算符號)今復用為方向之符號。故某符號當為演算之符號，或當為方向之符號，此後大須注意。

今於示方向之符號，特將其數與前置符號用括弧括之，如

$$(+17)\ -\ (+6)$$

前置符號　演算符號　前置符號

示由正 17 減正 6，又

$$(-15)\ +\ (-7)$$

前置符號　演算符號　前置符號

示以負 15 與負 7 相加。

如是，正數不以用加為限，負數亦不以用減為限，卽正數得用減，負數亦得用加。

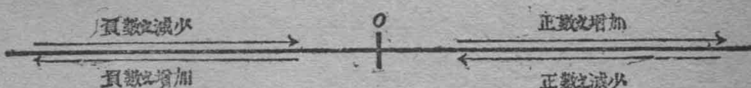
凡數之示有關於零之位置者(卽有前置符號者)稱為相對數。

由相對數取去前置符號,則得其絕對值。

如 17 爲相對數 +17 及 −17 之絕對值。

如前所述,以被減數爲原方向,由被減數 (11, 如第 14 圖) 向後數,則被減數之單位數,當次第減少。(如 11, 10, 9,…) 或過零點向負數列上之前方進行。

同樣,由一負數向正數列之方向進行,則其負數所含之單位數次第減少,或過零點入正數之範圍。



第　15　圖

第 15 圖 卽證明此理。

今以寒暖表證之,於水銀柱漸次降下之例,若水銀柱原在暖界內,(卽冰點以上) 當先見暖之度數減少,次遂降入寒界內,(卽冰點以下) 由是寒之度數增加,又,於水銀柱漸次昇上之例,當先見寒之度數漸次減少,次遂入暖界,由是暖之度數增加。

又取地球之緯度證之,如由北向南過赤道旅行,在北半球其正度數減少,在南半球其負度數增加,又 (逆) 由南向北,在南半球其負度數減少,在北半球其正度數增加。

學者試取他例證之,如就地下室及地上室所置之二梯,亦得證明此例。

凡此諸例,在證明次之二理。

I. 正之後退計算,與負之前進計算同。

II. (I之逆) 負之後退計算,與正之前進計算同。

茲以式表之,如次

I. $$-(+a)=+(-a)$$

II. $$-(-a)=+(+a)$$

相對數之演算,卽本此結果,詳在下節。

15. 相對數之加法

(1) 問 $(+a)+(+b)$ 具何義意。

答 此在正數列上,先由零數 a 單位,由是依正方向更數 b 單位。

今考察最後所達之點,知爲二回遠其零點之數點,故由零點至此點之距離,爲絕對値之和,卽 $(a+b)$. 且其數唯在正數列上,故前置符號爲正。(第16圖)

$$(+a)+(+b)=+(a+b)$$

例 $$(+4)+(+8)=+12$$

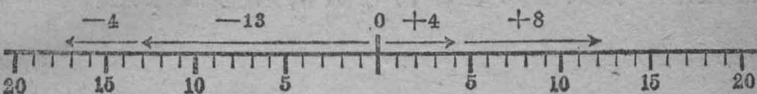
(2) 問 $(-a)+(-b)$ 具何義意。

答　此由零先向負方向進 a 單位,由是向同方向更進 b 單位。

今於此例,兩回俱向同方向進,從而遠其零點,故由零點至最後所達點之距離,爲絕對值之和 $(a+b)$,又唯在負數列上進行,故前置符號爲負。(第16圖)

$$(-a)+(-b)=-(a+b)$$

例　$(-13)+(-4)=-17$



第 16 圖

今以(1)與(2)比較,兩者俱得絕對值 $(a+b)$,又其符號俱與被加數之符號同。由是得次之規則。

I. <u>以同種之相對數相加,則附公用之符號於其絕對值之和,卽得。</u>

(3)　問　$(+a)+(-b)$ 具何義意。(先設 $a>b$)

答　此由零先向正方向數 a 單位,由是向負方向(與原方向反對)數 b 單位。

卽第二回之數點,較第一回之數點近於零,故欲求最後所達點至零點之距離,不得不作其絕對值之差 $(a-b)$。然 $a>b$,是最後所達點仍在正數列上,故此差具<u>正號</u>。(第17圖)卽

$$(+a)+(-b)=+(a-b) \qquad (\text{但 } a>b)$$

例 $$(+19)+(-11)=+8$$

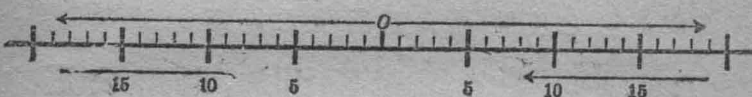
(4) 問 $(-a)+(+b)$ 具何義意,(但 $a>b$)

答 此由零先向負方向數 a 單位,由是向正方向(逆原方向)數 b 單位。

此例最後所達點亦近於零,故當如前例作其絕對值之差 $(a-b)$,又其所達點仍在負數列上,故此差具負號。(第17圖)即

$$(-a)+(+b)=-(a-b) \qquad (\text{但 } a>b)$$

例 $$(-19)+(+11)=-8$$



第 17 圖

如是,被加數具相異之符號,則其絕對值等於 $(a-b)$,其符號與(被加數中)絕對值之大者同。

由(3)及(4),得次之規則。

II. 以異種(即具相異之符號者)之相對數相加。則附大被加數之符號於其絕對值之差,即得。

16. 相對數之減法

相對數之減法,在作次之差

(1) $$x=m-(+a)$$

(2) $$x=m-(-a)$$

先就(1)式考之。

減法在求未知之被加數,(卽差)故次式不得不與第9款方程式(1)對應。

(3) $$x+(+a)=m$$

然依第15款

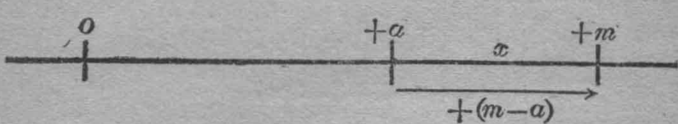
(4) $$m+(+a)+(-a)=m$$

以(3)與(4)比較,知x之值爲$m+(-a)$,故

(5) $$m-(+a)=m+(-a)$$

依第15款 $$=m-a$$

以圖表顯之,(第18圖)如次



第 18 圖

又就(2)式考之,須適合於方程式。

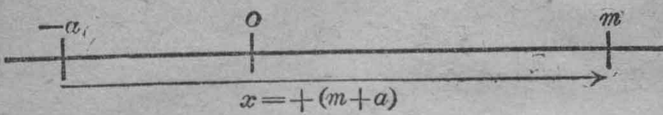
(6) $$x+(-a)=m$$

然以(6)與(4)比較,知x之值爲$m+(+a)$,故

(7) $m-(-a)=m+(+a)$

依第15款 $=m+a$

以圖表此計算,(第19圖)如次



第 19 圖

以言辭顯(5)及(7),則爲

欲減相對數,則變其符號而加之。

此規則之便利,在將前款所揭之(相對數之)加法規則,復應用於減法。

第三章 乘法

17. 乘法 (參看實用主義算術第二編第五章)

在算術內,已知

$$10+10+10+10+10+10+10=10\times 7$$

又 $3+3+3+3+3+3+3=3\times 7$

由是知**乘法以一羣之數值(被乘數)爲一因數。而以羣之個數(乘數)爲他一因數。**

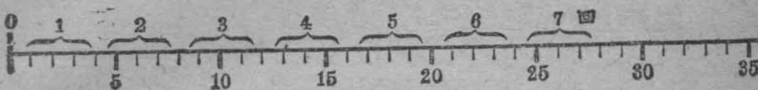
故以 b 乘 a,則在數列上,將由 a 個組成之羣,疊數 b 回,即

$$\underset{b\text{回}}{a+a+a+a+\cdots\cdots+a}=x$$

此所得之數x,謂之**積**。

例　　$$\underset{7\text{回}}{4+4+4+4+4+4+4}=x$$

其在數列上之演算,得依第20圖行之。



第 20 圖

又因數爲文字,其積之値,不得不以適當之記號表之,卽

由　　$$\underset{b\text{回}}{a+a+a+\cdots\cdots+a}=x$$

得　　$$x=ab$$

以界說易其公式,卽

乘法者,以一因數爲他因數所含單位之數也。

如　4 爲　　$1+1+1+1$

故　5×4 爲　　$5+5+5+5$

積之兩因數,依界說其義全同,故得交換之。

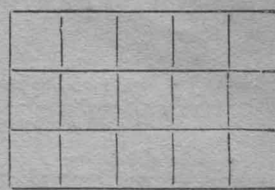
如是下記之等式,自得成立。

$$\underbrace{3+3+3+3+3+3+3}_{7\text{回}}=\underbrace{7+7+7}_{3\text{回}}$$

或

$$\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{b\text{回}}=\underbrace{b+b+b+\cdots\cdots+b}_{a\text{回}}$$

即兩積相等。若因數不甚大,此等之積可用實例證之,如第21圖之矩形,將由三個小方形組成之羣縱列五回,與由五個小方形組成之羣橫列三回,其面積相同。



第 21 圖

由是知<u>因數均可交換</u>。即

$$a\cdot b=b\cdot a$$

式之成立,可依下式證明

$$a\cdot b=\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{b\text{回}}$$

$$\left.\begin{aligned}
&=1+1+1+\cdots\cdots+1\\
&\;+1+1+1+\cdots\cdots+1\\
&\;+1+1+1+\cdots\cdots+1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\;+\underset{a\text{回}}{1}+\underset{a\text{回}}{1}+\underset{a\text{回}}{1}+\cdots\cdots+\underset{a\text{回}}{1}
\end{aligned}\right\} b\text{回}$$

其所列1之總數,依縱行計之,則得積 $a\cdot b$, 依橫行計之,則得

$$\underbrace{b+b+b+\cdots\cdots+b}_{a\text{回}}=b\cdot a$$

故得　$a\cdot b=b\cdot a$

二以上之因數相乘,例如 $p\cdot q\cdot r$, 可先作二因數之積 $p\cdot q$, 次以第三之因數乘之。卽

$$\begin{aligned} pq\cdot r=(p\cdot q)\cdot r=&p+p+p+\cdots\cdots+p\\ &+p+p+p+\cdots\cdots+p\\ &+p+p+p+\cdots\cdots+p\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\underbrace{+p+p+p+\cdots\cdots+p}_{q\text{回}} \qquad r\text{回} \end{aligned}$$

此總和依縱行計之爲 $(pq)r$, 依橫行計之則爲 $(pr)q$. 故因數有二個以上。其次序亦得変換。

依此事實,得次之法則。

以積 (ab) 乘某數,可(將 a,b)各爲一因數乘之。

積之諸因數相同,謂之該因數之乘方。

如 3×3 爲 3 之二乘方, $7\times7\times7$, 爲 7 之三乘方, 以指數表之, 爲 3^2 (卽 3 之二乘方), 7^3 (卽 7 之三乘方)

(參看實用主義算術第二編第五章)

由是 $a.a.a.a.a.=a^5$, (爲 a 之五乘方,) 餘仿此。

18. 組合量之乘法

在算術內,以一位數 2 乘多位數 314, 當先以 2 (卽乘數)乘被乘數之單位之數 4, 次乘十位之數 1, 又次乘百位之數 3, 由是以所得個個之積爲多項式之項, 依記數法並記之。卽

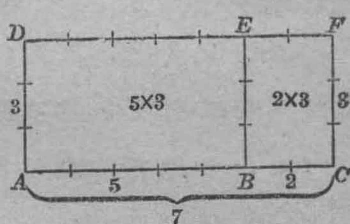
$$314\times2=628$$

然以 314 爲多項式, 依正格書之, 如次

$$(300+10+4)\times2=600+20+8$$

由是知其右邊之數爲以 2 乘各項(卽初乘 4, 次乘 10, 又次乘 300.) 所得諸積之和.

又於幾何學, 已知矩形之面積爲其相隣二邊之長相乘之積。(參看實用主義幾何學編首第八章)



第 22 圖

於第 22 圖, 矩形 $ABED=5\times3$. 且矩形 $BCFE=2\times3$, 以此兩矩形相合所得之矩形 $ACFD$ 之面積, 等於 7×3, 卽等於 $(5+2)\times3$, 故

$$(5+2)\times3=5\times3+2\times3$$

次以文字代數字，可得普通之證法如次

1. $$(a+b)\cdot c=\underbrace{(a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots\cdots+(a+b)}_{c\text{回}}$$

$$=\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{c\text{回}}+\underbrace{b+b+b+\cdots\cdots+b}_{c\text{回}}$$

$$=ac+bc$$

〔法則〕以某數乘他二數之和，爲以某數分乘其和之各項所得二積之和。

2. $$(a-b)\cdot c=\underbrace{(a-b)+(a-b)+(a-b)+\cdots\cdots+(a-b)}_{c\text{回}}$$

$$=\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{c\text{回}}\underbrace{-b-b-b\cdots\cdots-b}_{c\text{回}}$$

$$=ac-bc$$

〔法則〕以某數乘他二數之差，爲以某數分乘被減數與減數所得二積之差。

3. $$(a+b+c+d)n=\Big\{(a+b)+(c+d)\Big\}n$$

$$=(a+b)n+(c+d)n=an+bn+cn+dn$$

4. $$(a-b-c+d)n=\Big\{(a-b)-(c-d)\Big\}n$$

$$=(a-b)n-(c-d)n=an-bn-cn+dn$$

〔法則〕以某數乘多項式，可用某數分乘其各項。

逆行 1 至 4 諸法則，卽得次之結果。

5.
$$ac+bc=(a+b)c$$

$$ac-bc=(a-b)c$$

$$an+bn+cn+dn=(a+b+c+d)n$$

$$an-bn-cn+dn=(a-b-c+d)n$$

若多項式之諸項，含有相同之因數。則以此因數除其各項，可變其式爲新多項式(卽以此因數除得者)與此因數之積，　此手續稱爲因數分解。

19. 二個多項式之乘法

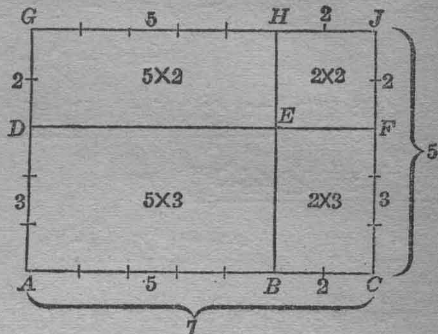
在算術內，已知

$$\begin{array}{r} 412\times 221=412 \\ 824 \\ 824 \\ \hline 91052 \end{array}$$

今書爲詳細之式，當成

$$\begin{array}{r} (400+10+2)\times(200+20+1)=400+10+2 \\ 8000+200+40 \\ 80000+2000+400 \\ \hline 90000+1000+000+50+2 \end{array}$$

於第23圖,矩形$ABED$之面積爲5×3, $BCFE$之面積爲2×3, $DEHG$之面積爲5×2, $EFJH$之面積爲2×2, 而此四個矩形相合,成矩形$ACJG$, 此矩形之面積等於7×5, 卽等於$(5+2)\times(3+2)$. 故得次之等式。



第 23 圖

$$(5+2)\times(3+2)=5\times3+2\times3+5\times2+2\times2$$

故以二和相乘,可代以一和之各項乘他和之各項。

次以文字說明上之算法。

今先論二和之積$(a+b)\cdot(c+d)$, 和與差之積$(a+b)\cdot(c-d)$, 及二差之積$(a-b)\cdot(c-d)$.

依前節多項式與單項之乘法,先以單一之文字f, 換式中之$c+d$或$c-d$, (如此更換其理由若何。) 由是,用§18之法則

I　$$(a+b)(c+d)=(a+b)f=af+bf$$
$$=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

II　$$(a+b)(c-d)=(a+b)f=af+bf$$
$$=a(c-d)+b(c-d)=ac-ad+bc-bd$$

III $(a-b)(c-d)=(a-b)f=af-bf$

$$=a(c-d)-b(c-d)=ac-ad-bc+bd$$

〔法則〕二多項式相乘，爲以一式之各項乘他式之各項。

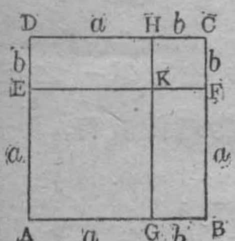
20. 乘法之公式

在算術內，乘法之計算，通用九九表，此九九表，原爲重要諸數相乘之結果，其意在使讀此表者演算時較爲敏捷。

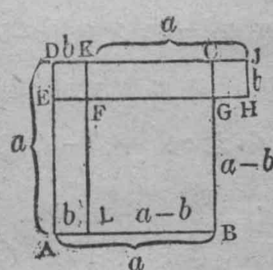
今本此理，於多項式之乘法內，揭載諸重要多項式(和，差)相乘之結果，使讀者便於演算。

此等結果，以等式表之，是謂乘法之公式。

玆揭其重要之公式如次。



第 24 圖



第 25 圖

1. $(a+b)\cdot(a+b)$ 卽 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

用第24圖，可證明此公式。卽

$$ABCD=AGKE+BFKG+EKHD+KFCH.$$

或
$$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

2. $(a-b)\cdot(a-b)$ 即 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

用第25圖,可證明此公式,即

$$BGFL=ABCD-ALKD-FHJK+CGHJ.$$

或
$$(a-b)^2=a^2-ab-ab+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

〔問〕公式1及2,有何相異之點。

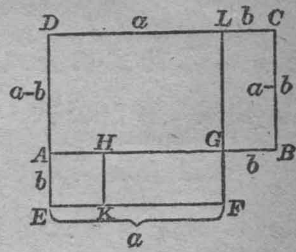
試以言辭說明此等公式。

3. $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

用第26圖,可與此公式以幾何學的證明。即

$$EFLD-AEKH=AHKFLD$$
$$=AGLD+FGHK$$
$$=AGLD+BCLG$$
$$=ABCD$$

或 $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$



第 26 圖

公式3,與1及2有何相異之點。

4. $(a+b)(a+b)(a+b)$ 即

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

欲與公式4以幾何學的證明,則取以 a 及 b 爲稜之二個立方,以 a, a, b 爲稜之三個方柱,及以 a, b, b 爲稜之

三個方柱,以此八個立體組合,則得以 $(a+b)$ 爲稜之立方,卽 $(a+b)^3$.

5. $$(a-b)(a-b)(a-b) \text{ 卽}$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

欲與公式5以幾何學的證明,則作一立方 a^3, (卽由 $(a-b)^3$, a^2b, $(a-b)^2 \cdot b$, $(a-b)\cdot ab$, 四部分組成者) 再加以 a, b, b 爲稜之方柱三個,由是取去以 b 爲稜之立方及以 a, a, b 爲稜之方柱三個。如是,卽得以 $(a-b)$ 爲稜之立方。

試就公式4與5,舉其異同之點。

6. $$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

7. $$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

試舉此兩公式相異之點,更以之與公式4及5比較。

8. $$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

試舉此式與公式1相異之點,且示若何變更則可由公式8導出公式1.

欲以上所列舉之諸公式,應用於實用上多項式之計算,則先察其式之構造,以採用何公式爲宜,次考其何值,與公式之文字對應。終乃以此等之值代入公式中已計算之部分,卽得。

21. 積附屬於因數

如本金400圓,年息5分,卽1年得利息20圓,如是2

年得40圓，3年得60圓，4年得80圓，故 t 年得 p 圓，則

$$p=20t$$

今於此式之 t，以1，2，3，4，等代入，可依次得上記之積。茲於此例，設變因數 t（卽年限）依次變爲倍大，（卽1變爲2，2變爲4，等）則與之對應之積亦變爲倍大，（卽20變爲40，40變爲80，等）卽積與因數共增，

此關係稱爲積與變因數成比例。

茲有書12册，若每册之價爲1角，2角，3角，4角，等。則全體之價各幾何。

又設一册之價爲 x，則總額 P 當以積之形 (ax) 表之，卽此總額爲一册之價之函數。

又 $y=a-x$（差）爲 x 之一函數。於此函數，其 x 之值增加，則 y 之值減少，然於 $y=a+x$（和）及 $y=ax$，（積）則 x 之值增加，其函數之值亦增加。

設 x 之值連續不絕增1，試討論以自然數代 x，則其和及差當若何增加。

考察揭於次之諸例

$y=5+x$,　　$y=13+x$,　　$y=x-5$

$y=5x$,　　$y=9x$,

$y=5-x$,　　$y=11-2x$,　　$y=3x-11$.

此等函數中，何者爲遞昇的，何者爲遞降的。

22. 相對數之乘法

同一相對數得累次加之,故亦得用乘法。例如

$$(+3)+(+3)+(+3)+(+3)=(+3)\times 4=+12$$

$$(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=(-3)\times 4=-12$$

若欲將此事實,於數列上行之,則以相對因數依其符號所示之方向,並依他之(絕對)因數所含單位之數累置之。如是得次之結果。

$$(+a)\cdot b=+ab$$

$$(-a)\cdot b=-ab$$

若第二之因數爲負數,則乘法之界說,須加以修改,蓋以所與之因數同爲被加數,雖可云加 b 回,然決不得云加 $(-b)$ 回也。

〔註〕 嚴而言之,以因數 m 在數列上置 $(+b)$ 回,雖非必爲正數,然視正數爲對於新發見之負數列爲由原絕對數列起者,亦無不可,卽正數 $+b$ 可視爲絕對數 b,而 $m\cdot(+b)$ 可視爲 $m\cdot b$.

然爲計算之便利起見,則相對數得互相乘,實爲必要。例如 §18 及 §20 所揭之諸公式,其成立之條件,雖以其符號爲演算符號,其諸數 a, b, c, d 爲絕對數者爲限。然視之爲得適用於任意諸數之法,卽得導出相對數之積。今試於

$(a-b)\cdot(c-d)=ac-ad-bc+bd$ 式，以 $a=1$, $b=3$, $c=1$, $d=4$，代入，則得次之結果。

$$(1-3)(1-4)=1-4-3+12$$

即
$$(-2)(-3)=+6$$

此之計算，可視爲其結果之證明。又在次一假定之下，亦可證得相對數之乘法，今取算式

$$u(a+b)=ua+ub,$$

設 u, a 及 b 爲具有方向符號之量，亦得適用於此式，則依關係，得知 $(+a)\cdot(+b)$ 及 $(-a)\cdot(-b)$ 當具某值。

先就 $(-a)\cdot(-b)$ 考之。

吾等已知 $(-b)+b=0$，又知無論何數，以零乘之，其積亦必爲零。卽 $(-a)0=0$,

故
$$(-a)[(-b)+b]=0.$$

今就算式解之，得

$$(-a)(-b)+(-a)b=0,$$

然 $(-a)b=-ab$，(依本款)則上式當爲 $(-a)(-b)-ab=0$.

故欲知 $(-a)(-b)$ 具何值，則因上之差等於零。故其積 $(-a)(-b)$ 不得不具 $\underline{+ab}$ 之値。

同樣，$(+a)(-b)$ 式，其結果必爲 $\underline{-ab}$.

如是，相對數之乘法，當與以次之法則。

$$(+p)\cdot(+q)=+pq$$

$$(-p)\cdot(-q)=+pq$$

$$(+p)\cdot(-q)=-pq$$

$$(-p)\cdot(+q)=-pq$$

以言辭述之,如次

〔法則〕同名之相對數相乘,當附正號於其絕對值之積。

異名之相對數相乘,當附負號於其絕對值之積。

略言之,卽同號得正,異號得負。

此法則之合理,可就§18及§19所揭乘法之規則,無論文字之值爲何。皆得適用,便足證明。又§16之規則II及III,可視爲I之特例,何則。設差爲相對數之和,卽

$$(a-b)=(+a)+(-b) \text{ 及 } (c-d)=(+c)+(-d)$$

依I式相乘,則得

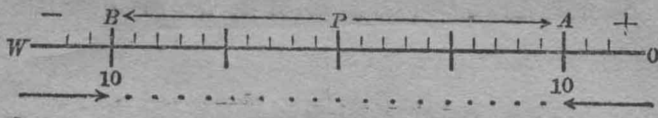
$$(+a)(+c)=+ac$$

$$(-b)(+c)=-bc$$

$$(+a)(-d)=-ad$$

$$(-b)(-d)=+bd$$

卽得規則III,故也。



第 27 圖

欲說明乘法之規則，可取鐵路線道爲例，於第27圖，設 P 爲位於中點之車站。並設由是向東之速度爲正，向西之速度爲負。然距離等於時間乘速度，故設已經過之時間爲正，未經過之時間爲負，則各車離 P 之距離，可用相對數之積表之。

由是，正午由 P 向東開行，每分以 $1\,km$ 之速度（正）進行之列車。十分後到 A，當成正距離 $(+10)(+1)=PA$。

正午由 P 向西開行，每分以 $1\,km$ 之速度（負）進行之列車，十分後到 B，當成負距離 $PB=(+10)(-1)$

又由東以 $1\,km$ 之速度來，正午到 P 之列車，在十分前具正距離 $PA=(-10)(-1)$

由西以 $1\,km$ 之速度來，正午到 P 之列車，在十分前具負距離 $PB=(-10)(+1)$.

第四章　除法

23. 除法

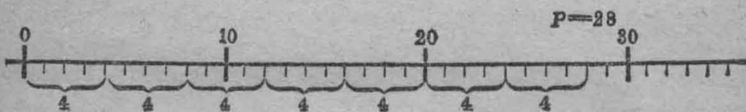
某人以銀幣 4800 圓存入銀行，若包爲50圓一包，應作若是之羣若干回。

有42平方公尺(m)之矩形,分爲各3平方公尺之小矩形,可得小矩形若干個。

於上記之例,(或與之相類之問題)。須由已知之積,(如4800圓)及一所與之因數,(如50圓)求其第二之未知因數,此等計算屬於除法。

在除法內,乃求所與之因數,在數列(第28圖)上疊取若干回,始達所與之積。

第28圖,乃示欲達積$P=28$,當以數羣4,在數列上取若干回之理。在此例內,爲以何數除何數。其結果若何,試以數表之。



第 28 圖

故此所謂除,不過求其積之因數。茲將除法所求之數,說明於次。

以4除28,乃求共加4回得積28之被加數,即求與4相乘得積28之他一因數。

所與之積,謂之被除數。所與之因數,謂之除數。所求之因數,謂之商。

以4除28,即求以4乘之適得積28之因數x,故依

界說，$x\times4=28$，由是 $x=7$，何則，以 $4\times7=28$，故也。

同樣，以 b 除 a，在求以 b 乘之得積 a 之因數 x，即

$$x\cdot b=a$$

此因數 x，可在數列上，由原點至 a，求其得取幾個 b，此所求之幾個即 x，

表所求之 x（即商），通用記號 $\frac{a}{b}$（或 $a:b$）

(1) 界說

$$\underbrace{x}_{\text{商}}\cdot\underbrace{b}_{\text{除數}}=\underbrace{a}_{\text{被除數}}$$

(2) 值

$$\underbrace{x}_{\text{所求之因數}}=\frac{\overbrace{a}^{\text{所與之積}}}{\underbrace{b}_{\text{所與之因數}}}$$

以由2所得之值代入(1)，則得

(3) $$\frac{a}{b}\cdot b=a$$

故以除數乘商，其所得之積等於被除數。

〔例〕 $\frac{14}{7}\times7=14$，（何則，以 $\frac{14}{7}=2$，而 $2\times7=14$ 也。）

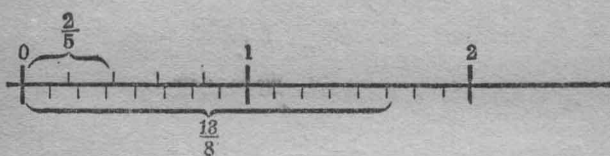
---

24. 商之本性

二整數之商亦爲整數，謂之除數得整除被除數，或謂之得除盡被除數。

然有時所得之商非整數。此例謂之**分數**。例如以5除17，須求 $x\times5=17$ 之 x，然設 x 為任何整數，俱不能適合於此式。何則，3×5 等於15而 4×5 已等於20，故 x 當在3與4之間，於此例，可言 x 具 $\frac{17}{5}$ 或 $3\frac{2}{5}$ 之值。

分數 $\frac{2}{5}$，表部分單位[五分之一]（卽其五倍始等於在數列上之原單位）之二倍。（第29圖）



第　29　圖

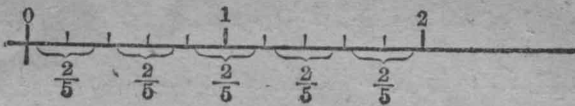
同樣 $\frac{13}{8}$ 表部分單位[八分之一]之13倍。

其分母（除數）示分單位為幾部分，分子（被除數）示取其部分幾個。（參看實用主義中學新算術第五編，分數）（或中學適用算術·第四編·分數.）

分數 $\frac{11}{12}$，$\frac{25}{9}$，$\frac{13}{4}$，在數列上之何點，試作圖明之。

分數可視為於數列上介在整數間之點。

與整數之商同理分數亦為一商，（卽因數）而以之為被加數。其加至除數（分母）所表之回數，則得（積）被除數（分子）。



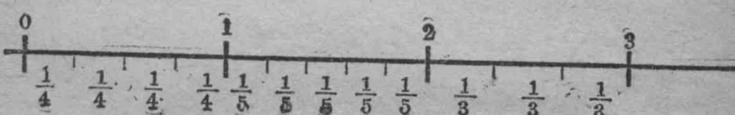
第 30 圖

於第30圖，以分數 $\frac{2}{5}$ 爲被加數，置 5 回，則得積 2，

即 $$\frac{2}{5}\times 5=2.$$

於第31圖，分最初之單位爲 4 個四分之一，分第二單位爲 5 個五分之一，分第三單位爲 3 個三分之一。

由是，$\frac{4}{4}=1,\quad \frac{5}{5}=1,\quad \frac{3}{3}=1,$



第 31 圖

〔通例〕分母分子相同之分數，其值爲 1.

即 $\frac{a}{a}=1$，蓋 $1\times a=a$，故也。

分子較分母大之分數，例如 $\frac{5}{3}$，在數列上分各單位爲三等分。數此部分單位5個即達其點。

故所求之點不得不越過單位，

由是，$\frac{5}{3}$ 不得不大於 1，

〔通例〕$a>b$, 則 $\frac{a}{b}>1$. 何則, 以 $\frac{a}{b}\times b$ 可得大於 b 之數 a, 且 $1\times b$ 等於 b. 故也。如此之分數, 稱爲**假分數**。

反之, 分子較分母小之分數, 例如 $\frac{3}{5}$, 爲分各單位爲 5 等分, 取其 3 個, 故不能達 1.

〔通例〕$a<b$, 則 $\frac{a}{b}<1$, 何則, 以 $\frac{a}{b}\times b$ 可得小於 b 之數 a, 且 $1\times b$ 等於 b, 由是 b 大於 a, 故也。如此之分數, 稱爲**眞分數**。

25. 商附屬於分母及分子

分母不變, 則因分子增而分數之值亦增。

設 $y=\frac{x}{3}$, 對於 $x=1$ 得 $y=\frac{1}{3}$

,, ,, $x=2$,, $y=\frac{2}{3}$

,, ,, $x=3$,, $y=1$

,, ,, $x=4$,, $y=\frac{4}{3}$

,, ,, $x=5$,, $y=\frac{5}{3}$

以下準此。

故分數 $\frac{x}{3}$ 之值, 因分子增加而均等增加。

反之, 分子不變, 則分母增加, 其分數之值却益減少。

何則, 以部分單位因分母變大而益小, 故也。

〔例〕於 $\frac{5}{x}$ 之商,遞次以自然數代 x. 則

$$\frac{5}{1}>\frac{5}{2}>\frac{5}{3}>\frac{5}{4}>\frac{5}{5}>\frac{5}{6}>\frac{5}{7} \text{ 等等}$$

即分子不變而分母繼續增加相同之數。其分數值減少之形式,皆始急速而漸次緩徐。

於上記之例,可用線份示各分數之值。(參看實用主義幾何學第二編 §162.)

於第一例,爲商附屬於變分子。於第二例,爲商附屬於變分母。

於次之函數,以自然數 0, 1, 2, 3, 4, 等代 x, 試討論其變化。

$$y=\frac{x}{4},\ y=\frac{x+1}{4},\ y=\frac{x-3}{3},\ \text{並}\ y=\frac{4}{x},\ y=\frac{5}{x+5},$$
$$y=\frac{3}{x-5},\ y=\frac{1}{10-x}.$$

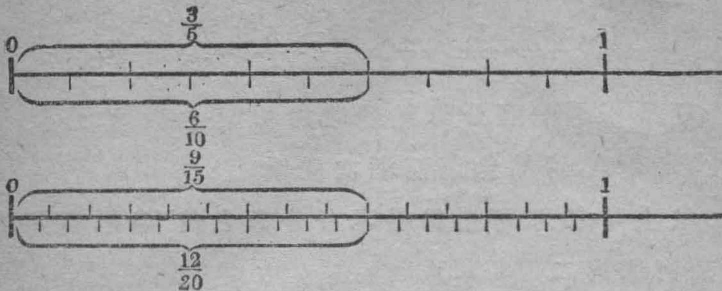
26. 倍分及約分

分數之分母分子,同時增爲 2 倍, 3 倍, 4 倍, 等。其分數當保有原値。

例如唯分子增爲 3 倍,則其商亦增爲 3 倍。然同時分母亦增爲 3 倍,則其商減爲三分之一。故結局其分數之値爲原値。即

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}=\frac{15}{25} \text{ 等等}$$

在數列上作其分數之圖，尤覺明瞭。(第32圖)



第 32 圖

以同數乘分數之分母分子，稱爲倍分。

以同數除分數之分母分子，稱爲約分。

分數被倍分，其值不變。

〔證〕今以 n 倍分 $\frac{a}{b}$，以 x 表商之值。

(1) $$\frac{a}{b}=x,$$

即 $$x\cdot b=a.$$

又 $$n=n.$$

故 $$x\cdot bn=an.$$

即 x 表以 bn 乘之得積 an 之數。故

(2) $$x=\frac{an}{bn}$$

依 (1) 與 (2) 得

$$\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}$$ 〔證訖〕

今逆書此式爲 $\frac{an}{bn}=\frac{a}{b}$, 以 n 除 an 則得 a, 以 n 除 bn 則得 b, 由是, 以同數 n 除在左邊之分數之分母分子, 易知右邊之分數可由左邊之分數求得。即

分數被約分, 其值不變。

1 及本數以外之數不能整除之整數, 稱爲質數。如 1, 2, 3, 5, 7, 11 等, 是也。(參看實用主義算術第四編第二章.質數)

由質數依乘法合成之數稱爲複數。

如 16 由質因數之積 $2\times2\times2\times2$ 而成, 又 30 由 $2\times3\times5$ 而成。

分解複數爲因數云者, 謂求其合成之諸質因數也。

二數全無公共之質因數, 則二數爲對質數。

如 21 與 26 爲對質數。

凡分數不能約分者, 其分母分子當爲質數或對質數。

27. 相對數之除法

分子及分母(被除數及除數)俱爲相對數, 則商亦爲相對數。而商之絕對值, 不得不爲分母分子之絕對值之商, 如是, 商之符號, 可依次之考察定之。

先設 $\frac{+a}{+b}=x$ 卽 $x\cdot(+b)=+a$. 然積 $+a$ 爲正,故二因數 x 與 $(+b)$ 當具相同之符號。由是 x 不得不具 b 之符號,(卽 $+$) 故

$$\frac{+a}{+b}=+\left(\frac{a}{b}\right)$$

同樣, $\frac{-a}{-b}=+\left(\frac{a}{b}\right)$, 何則, 設 $\frac{-a}{-b}=x$, 則 $x\cdot(-b)=-a$, 然積 $-a$ 爲負。則二因數 x 與 $(-b)$ 當具相異之符號, 由是, x 不得不爲正, 故也。

如是,得次之法則。

〔法則〕求同符號之二數之商,當附正號於其絕對值之商。(卽同號得正)

次爲 $\frac{+a}{-b}=-\left(\frac{a}{b}\right)$, 何則, 今設 $\frac{+a}{-b}=x$, 則 $x\cdot(-b)=+a$, 然積 $+a$ 爲正, 故二因數 x 與 $(-b)$ 當具相同之符號, 由是 x 不得不爲負, 故也。

終爲 $\frac{-a}{+b}=-\left(\frac{a}{b}\right)$ 其理由如次, 設 $\frac{-a}{+b}=x$, 則 $x\cdot(+b)=-a$, 因此積 $-a$ 爲負, 故 x 與 $(+b)$ 當具相異之符號故 x 不得不爲負。

由是, 得次之法則。

〔法則〕求異符號之二數之商,當附負號於其絕對值之商。(卽異號得負)

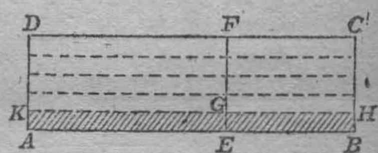
〔例〕 $\frac{+9}{+3}=+3,\quad \frac{-6}{-2}=+3,\quad \frac{+12}{-4}=-3,$

$$\frac{-21}{+7}=-3$$

28. 和及差之除法

如有兄弟三人,均分銀240圓,米36石,麥42石。卽總計銀240圓＋米36石＋麥42石。若各得銀80圓,米12石,麥14石,卽總計銀80圓＋米12石＋麥14石。後之總計由前之總計如何求出。

又.矩形 $ABCD$ (第33圖) 等於 $AEFD+EBCF$. 今分 AD 爲5等分。得 $AK=\frac{AD}{5}$. 過各分點引 AB 之平行線。則三個矩形俱被分爲5等分。故



第 33 圖

$$ABHK=AEGK+EBHG$$

卽 $$\frac{ABCD}{5}=\frac{AEFD}{5}+\frac{EBCF}{5}$$

然 $$ABCD=AEFD+EBCF$$

故得 $$\frac{AEFD+EBCF}{5}=\frac{AEFD}{5}+\frac{EBCF}{5}$$

故欲除其和,則除其各項,可也。卽

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

欲證明此結果,則以乘數 c 乘上式之兩邊。如是,其左邊爲

(1) $$\frac{a+b}{c}\cdot c=a+b$$

又右邊爲

(2) $$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\cdot c=\frac{a}{c}\cdot c+\frac{b}{c}\cdot c=a+b$$

由(1)及(2)知兩邊得相同之結果,故前記之法則合理。

同樣,可證得以某數除差數之法則。

$$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$$

卽欲以某數除差,則以某數各別除其除數與被除數,可也。

〔逆〕 $$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

且 $$\frac{p}{s}-\frac{q}{s}=\frac{p-q}{s}$$

卽欲以具有同分母之分數相加(或減,)則以公共之分母除其分子之和(或差),可也。

欲以具有異分母之分數相加,必先化爲相同之分母,(卽公分母),因之須以適當之因數,(卽乘其分母可得公分母之因數)倍分其各分數。

公分母云者,謂諸分母之最小公倍數也。

欲求公分母,須先分解各分母爲質因數。次求諸分母所含諸相異之質因數。而最後於各分母,集其諸相異質因數之最高方乘。

如是,所得諸質因數之最高方乘之連乘積,卽爲所求之公分母。

〔例〕計算 $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}-\frac{7}{20}$

$$8=2\times2\times2$$

$$12=2\times2\times3$$

$$20=2\times2\times5$$

相異之質因數爲 2, 3, 5, 而其最高方乘爲 2^3, 3, 5,

故　　　公分母 $=2^3\times3\times5=120$

故以 15 倍分其第一之分數, 以 10 倍分其第二之分數, 以 6 倍分其第三之分數, 則得次之結果。

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}-\frac{7}{20}=\frac{45}{120}+\frac{50}{120}-\frac{42}{120}=\frac{45+50-42}{120}=\frac{53}{120}$$

以文字代之如次

解　　$\frac{b}{a^3}+\frac{c}{a^2b}-\frac{d}{a^2c}$

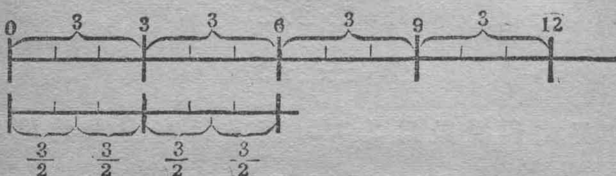
其公分母爲 a^3bc,

故原式 $=\dfrac{b^2c+ac^2-abd}{a^3bc}$

29. 積及商之除法,分數之乘法及除法。

I. 父有子4人,各與以銅幣20枚,即得總計 $20+20+20+20\,(=20\times4)$,若各與以5枚,即 $5+5+5+5\,(=5\times4)$,則後積 (5×4) 爲前積之四分之一。故於積 20×4,以4除其因數20,則其積之值<u>小4倍</u>。

今以被加數3,連置四回,(第34圖)則得積12,次以3之半,(即 $\frac{3}{2}$)連置四回,則得6,而後積等於前積之半。



第 34 圖

用文字導出此結果,如次

$$\frac{a.b}{c}=\frac{\overbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}^{b\text{回}}}{c}=\underbrace{\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\cdots\cdots+\frac{a}{c}}_{b\text{回}}=\frac{a}{c}\cdot b$$

〔法則〕<u>欲以某數除諸因數之積,則以某數除其因數之一,而以他因數乘其商,即得。</u>

II. 〔逆〕 $\frac{a}{c}\cdot b=\frac{ab}{c}$

〔法則〕欲以某數乘商(分數)則以之乘其分子,卽得。

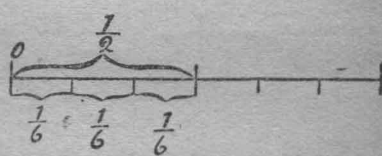
一分數,例如$\frac{3}{5}$,爲分單位爲五等分而取其三個。欲以7乘$\frac{3}{5}$,則取三個部分單位[五分之一],連加7回,卽得。然$3\times7=21$,則得結局爲21個[五分之一]

卽
$$\frac{3}{5}\times7=\frac{21}{5}$$

III. 以某數除商之法

〔例〕以3除$\frac{1}{2}$,卽求3回加合成$\frac{1}{2}$之一因數,(第35圖)由是,所求之因數6回加合則成1.故此數唯爲$\frac{1}{6}$卽$\frac{1}{2\times3}$.

同樣以5除$\frac{1}{7}$,乃求以5乘之得積$\frac{1}{7}$之因數,如是,唯得$\frac{1}{35}$,何則,以$\frac{1}{35}$爲$\frac{1}{7}$之五分之一,故也。(參看§25.)



第　35　圖

〔法則〕欲以某數除分數,則以某數乘其分母,卽得。

$$\frac{2}{7}:5=\frac{2}{35},\qquad\frac{3}{7}:5=\frac{3}{35}$$

次用文字導出此法則。

今以$\frac{a}{b}:c$爲一商考之。可視c爲分母,$\frac{a}{b}$爲分子,

即 $$\frac{a}{b}:c=\frac{\frac{a}{b}}{c},$$

以 b 倍分此商,得次之結果。

$$\frac{\frac{a}{b}\cdot b}{c\cdot b}=\frac{a}{cb}$$

有時於行分母之乘法前,得用約分。

〔例〕 $$\frac{12}{13}:8=\frac{12}{13\times 8}=\frac{3}{13\times 2}=\frac{3}{26}$$

以文字表之如次

$$\frac{ab}{c}:bd=\frac{ab}{cbd}=\frac{a}{cd}$$

IV. 二分數相乘之法

欲以 $\frac{c}{d}$ 乘 $\frac{a}{b}$,則先設 $\frac{c}{d}$ 之值爲 n,如是

$$\frac{a}{b}\cdot n=\frac{an}{b}$$

即單以 n 乘 a,令 n 回復原值。得次之結果。

$$\frac{a\cdot\frac{c}{d}}{b}=\frac{\frac{ac}{d}}{b} \qquad (\text{依 III.})=\frac{ac}{bd}$$

故 $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

〔法則〕 欲以二商(分數)互乘,則作以分子之積爲分子,以分母之積爲分母之分數,即得。

於此例,在行分母分子之乘法前有約數,則當先用約分。

〔例〕 $$\frac{3}{10}\times\frac{25}{18}=\frac{3\times25}{10\times18}=\frac{1\times5}{2\times6}=\frac{5}{12}$$

以文字表之,即

$$\frac{a}{bc}\cdot\frac{c^2}{a^2b}=\frac{ac^2}{bc\cdot a^2b}=\frac{c}{ab^2}$$

V. 以分數除整數之法

如求 $3:\frac{4}{7}$,在求出以 $\frac{4}{7}$(除數)乘之得被除數 3 之 x,即

$$x\times\frac{4}{7}=3$$

或 $$\frac{4x}{7}=3$$

故 $4x$ 爲 3 之 7 倍,即

$$4x=21.$$

由是 $$x=\frac{21}{4}=\frac{3\times7}{4}$$

用文字表之,則 $a:\frac{c}{d}$,在求以 $\frac{c}{d}$ 乘之得積 a 之 x,即

$$x\cdot\frac{c}{d}=a$$

或 $$\frac{cx}{d}=a$$

故 $$cx=ab$$

$$x=\frac{ad}{c}=a\cdot\frac{d}{c}$$

〔法則〕欲以分數除某數,則以分數之反分數(卽反 $\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{d}{c}$)乘某數,卽得。

若 a 爲分數,亦可用同樣之法計算,但後當用IV之法處理。

設 $$a=\frac{e}{f}$$

則 $$\frac{e}{f}:\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ed}{fc}$$

30. 多項式間之除法

以多項式 $(p+q)$ 除他多項式 $(pr+qr+ps+qs-pu-qu)$,其演算本於次之定式

$$\underset{\text{除數}}{(p+q)}\underset{\text{商}}{(r+s-u)}=\underbrace{(p+q)r+(p+q)s+(p+q)u}_{\text{被除數}}$$

先以 $(p+q)$ 除被除數最初之部分 $pr+qr$ 卽 $(p+q)r$,得商 r,而由原式減之。餘 $(p+q)s-(p+q)u$,次以同除數 $(p+q)$ 除此餘式最初之項,得第二之商 s,而最後之餘數 $-pu-qu=-(p+q)u$,得第三之商 $-u$,由是,所求之全商爲 $r+s-u$,然此商之諸項 r, s, u,乃於演算之各階段,以 p 除已整列之被除數(或餘數)之初項 pr, ps, pu,而得。

由是得次之規則。

〔規則〕欲以多項式除他多項式,則以除數之初項除已整列之被除數之初項而以所得之商乘除數全體。

並由被除數減其積。次再以除數之初項除其餘數之初項,而以其商乘除數。並由餘數減其積。以下準此。

〔例〕 $(15a^3-26a^2b-15ab^2-14b^3):(3a-7b)=5a^2+3ab+2b^2$

$$\begin{array}{l} 15a^3-35a^2b \\ \hline \qquad +9a^2b-15ab^2 \\ \qquad +9a^2b-21ab^2 \\ \hline \qquad\qquad +6ab^2-14b^3 \\ \qquad\qquad +6ab^2-14b^3 \\ \hline \end{array}$$

於上例,其餘數為零,是謂除盡。其不能除盡者,得繼續除之而常有餘數。例如實行 $\frac{1}{1-x}$ 之除法,得商 $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$ 今演算至 x^{10} 項中止,則得餘數 x^{11}, 卽

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{10}+\frac{x^{11}}{1-x}$$

設 $x=\frac{1}{2}$ 及 $x=0.1$ 計算之。

〔通例〕於 $x<1$ 之例,其餘數恆將最後之分數捨去,視之為無限小。

兩個多項式間之除法。卽算術中以多位數除多位數之法。

例如以57除53637,視各數為多項式,可書為

$$(53600+30+7):(50+7)$$

先以50除53600,以其商乘全除數,而以其所得之積

由被除數減之。次對於其餘數,以同法反復行之,卽得其商。故與以文字演算所述之法全同。

31. 多項式之因數分解

將一多項式分解其因數云者,謂求出互相乘再得原多項式之因數也。

其法如次

I. 括出公因數之法(參看§18. 法則5)

(i) 由全多項式直括出之例,如

$$am+bm-cm=(a+b-c)m$$

(ii) 由多項式之各部分括出之例,如

$$am+bm-an-bn=m(a+b)-n(a+b)$$

此式分解尙未完全。須更由全多項式括出其公因數,卽

$$m(a+b)-n(a+b)=(a+b)(m-n)$$

II. 應用公式之法

在此例,乃用前導出之公式(§20)逆施之。如應用

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

或 $$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

卽由積求其因數,茲舉其一例。

如用第二之公式,分解多項式 $9u^2+6uv-35v^2$ 之因數,如

初項 $9u^2$ 等於 $(3u)^2$，則 $3u$ 可當公式中之 x，又第三項 $-35v^2=(7v)(-5v)$ 則 $7v$ 可當公式中之 a，$-5v$ 可當公式中之 b，由是自得 $(a+b)x=(7v-5v)3u=6uv$. 故

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$(3u)^2+2v.3u+(7v)(-5v)=(3u+7v)(3u-5v)$$

又有以所與多項式之一部分應用於公式，然後以所括出之式更應用於公式者。如

$$\begin{aligned}&a^3-8b^3-15a^2+30ab\\&=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)-15a(a-2b)\\&=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2-15a)\end{aligned}$$

例題　求以下各式之因數

1. x^2+x.　2. $2ax+\frac{1}{2}x^2$.　3. $4x^2+4x+1$.

4. $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$.　5. $25a^2-b^2$.

6. $16x^2-9y^2$.　7. $8a^3+b^3$.　8. $27x^3-\frac{1}{8}y$.

9. x^2+4x+3.　10. x^2-6x+8.

11. $3x^2-10x+3$.　12. $2x^2+11x+12$.

13. x^2+6x+8.　14. $x^2-3x-28$.

15. $x^2+7x+12$.　16. x^3-3x^2+x-3.

17. $ax^3-x+a-1$.　18. $a^2-3b^2-c^2-2ab+4bc$.

第二編

坐標

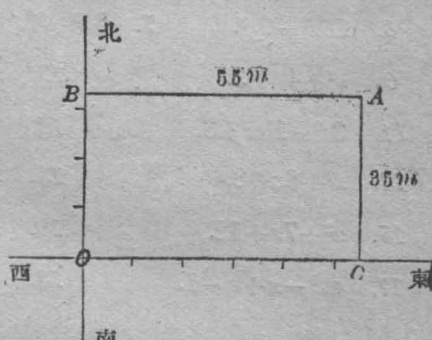
第一章 坐標之概念

32. 坐標

在森林或田野間指定一地點,欲其日後仍能尋出,其法若何。此宜以步數(或 m, 卽公尺或米突)測定由相交之二道路至其地點之距離。

如第36圖,OB, OC, 爲互相直交之二道路。今指定一地點 A, 其距 OB 之距離爲 $55m$ 距 OC 之距離爲 $35m$, 則此點 A, 無論經幾何時日,仍能尋出。

然欲以其距離告諸他人,則須說明距 OB 東(或西) $55m$, 又距 OC 南(或北) $35m$, 始爲完全。

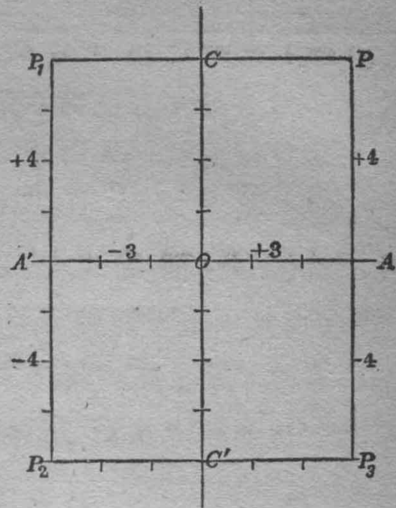


第 36 圖

欲決定在地球表面上之點之位置。亦用此法。卽通常定某

地點之位置,用距零子午線(或本初子午線)之距離,(卽長)及距赤道之距離。(卽幅)

此等之距離,(卽長及幅)各以所測得在平行圈上之弧度(卽經度)數,及在子午線上之弧度(卽緯度)數,示之。且對於長區別爲東或西,對於幅區別爲南或北。



第 37 圖

諸生各自之住所,均有此等距離,試以圖明之。

又已知之場所,可如何記入於方格紙上。

〔問〕欲決定任一點之位置,當以何者爲基本,又必須測定(或預知)之事爲何。

基本以用互相直交之二軸爲最便,卽置一軸成水平,則他軸成鉛直,是也。

由鉛直軸至所與點之距離,名爲橫線,由水平軸至所與點之距離,名爲縱線。

引二軸,且以任意之長爲單位,(第37圖以 1cm 爲單位)試指出具距離(+3)及(+4)之點。又,定具距離(−3)及(+4),(−3)及(−4),(+3)及(−4)之諸點。

欲尋出 P, 則取在距 O 之距離 3 之點 A, 及在距 O 之距離 4 之點 C, 過 A 及 C, 引兩軸之平行線, 則其交點卽 P. 或在水平軸上向右進 3 單位, 達 A. 由 A 作垂線, 在此垂線上數 4 單位, 卽達 P. 如是

決定點 P 之位置, 其所用之距離 $PC(AO)$ 及 $PA(OC)$, 稱爲此點之坐標。

第二章　坐標之應用, 圖表之描寫

33. 應用

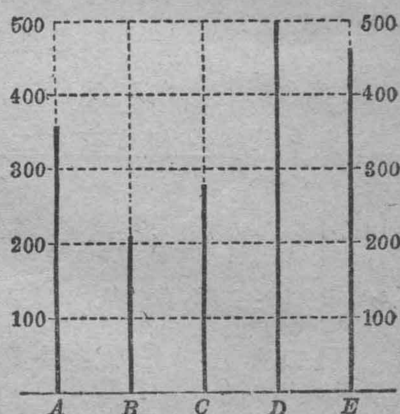
欲以各國之軍艦噸數, 煤之消費額, 國債, 等。各相比較。並欲簡易明瞭, 使人一望便知其大小優劣, 其法若何。

凡相比較之數, 以用直線並列表出爲最便。

〔例〕如調查某縣之學校, 知各學校之學生數, 如次

商業學校	350	(A)
實業學校	210	(B)
工業學校	275	(C)
中學校	500	(D)
高等女學校	462	(E)

今用並列之直線之長表其人數。一望便可比較其多少。



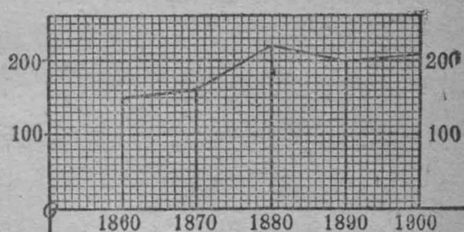
第 38 圖

表某數變化之形式,欲其一目了然,則以應用坐標爲最便。

〔例〕如欲表某學校學生之數,年年有如何之變動,則在橫軸上取其年數,在與縱軸並列之線上取其學生數,並聯結其線之端。

如第39圖,示某學校學生數之增減。卽將

1860年學生150人
1870年 ,, ,, 160人
1880年 ,, ,, 220人
1890年 ,, ,, 200人
1900年 ,, ,, 210人

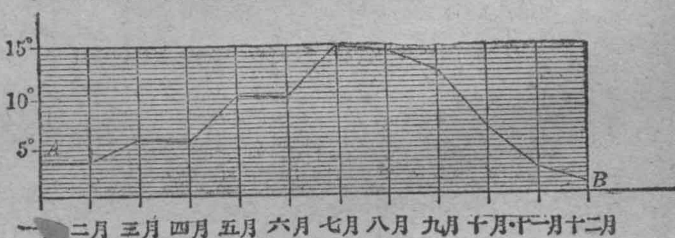


顯之於圖者,(卽圖表之描寫)由是,其各年間學生數之增減,可一目了然。

第 39 圖

又舉其一例,如某年某地每月之平均溫度(由1月至12月)爲攝氏 3.4°, 3.5°, 6°, 5.7°, 10.4°, 10°, 15°, 14.5°, 12.7°, 6.7°, 2.7°, 2°

今造爲圖表如次。



第 40 圖

卽以温度之數爲縱線，以月爲橫線，(第 40 圖) 卽生折線 A—B，由是可知某地某年平均温度昇降之形式，

又驗病人某之體温，共四日間，每日三回，(卽朝，午，夕) 其所驗得之温度，如次

37.8°，　37.6°，　38.5°，　38.1°，　38.5°，　39.4°，

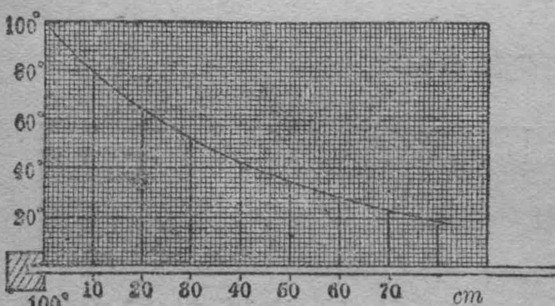
38.5°，　39.1°，　40.1°，　38.2°，　38.8°，　39.5°

試倣前例，作圖表示之，(熱病線)

又由 1840 年至 1905 年，德國鐵道增加之 km (公里，或啓羅米突) 數，如次。

試依此諸數，顯之於圖表，(描寫)

1840 年	550 km，	1845 年	2300 km，
1850 年	6050 km，	1855 年	8300 km，
1860 年	11650 km，	1865 年	14800 km，
1870 年	20000 km，	1880 年	33800 km，
1885 年	39150 km，	1890 年	41800 km，
1900 年	46200 km，	1905 年	52700 km.



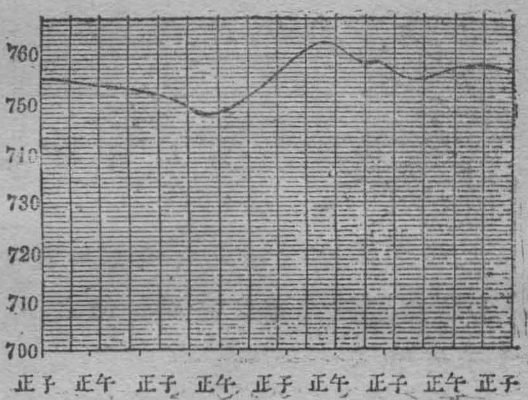
第 41 圖

以長鐵棒之一端,浸入熱湯中,使之常保100°,則其鐵棒之溫度,向他端之方進而漸次低降,如

第41圖之曲線,卽表此漸次低降之溫度者。

試依圖看出其棒之任意點之溫度。

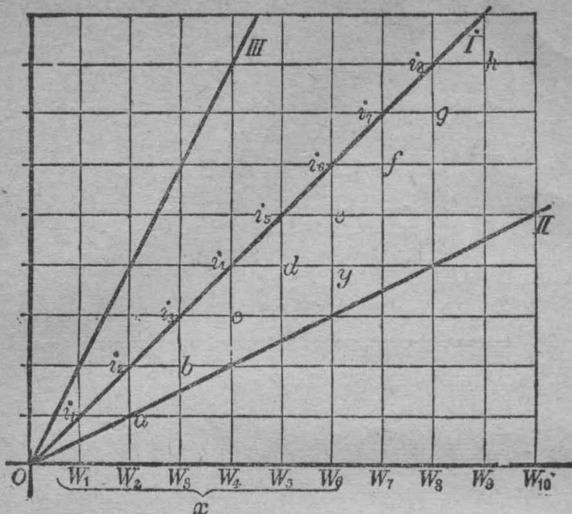
又,第42圖,爲自記晴雨表四日間所畫之曲線,試就圖求其任意時刻之氣壓。



第 42 圖

34. 直線

有某兒童,於某年之一月一日,新設一儲蓄匣,由是每週投入銀1角,今於橫線上取其時日W,(週數)而於與是對應之縱線上,取其各時日間匣內所容之1角,2角,3角,4角,等。並聯結其縱線之端,(第43圖)但於此圖,橫線以1週日爲單位,縱線以1角爲單位。



第 43 圖

〔問〕示銀數之縱線，其端 i_1, i_2, i_3 等均在一直線上，何故。試依其所生之三角形之全同證明之。

直線 I 示何事，

橫線每增加一單位，直線 I 向上幾何。

此直線與橫軸所成之角若何。

與橫軸成 45° 之角之直線，恆具<u>向上率</u> 1∶1，

在此例內，儲蓄匣各時所容之銀數 (y) 常等於與之對應之週數 (x)，故成單簡之方程式

$$y=+x$$

今以 1, 2, 3, 4, 等代 x，依次得 $y=1$, $y=2$, $y=3$, $y=4$, 等．即 y 爲匣內之對應銀數，試就圖驗之。

今若每週投入之銀數爲前數之 $\frac{1}{2}$,(即 5 分,)則儲蓄額之增加,當依直線 II 求之. 試依圖求其第 7 週及第 10 週終之儲蓄額。於此例,所得儲蓄匣各時所容銀數之方程式爲 $y=\frac{1}{2}x$, 今於此式設 $x=7$ 及 $x=10$, 則依圖可得其所求之銀數(y),直線 II 之向上率幾何。

本圖之直線 III, 具如何之向上率,又示每週儲蓄之銀數幾何。於此例,其由週數 x 求銀數 y 之方程式爲 $y=2x$, 然則依此方程式,其對於 2 週 3 週, 4 週等之值,與由圖看出之值同否。直線 III 之向上率如何。

考察屬於方程式 $y=3x$, $y=\frac{3}{4}x$, $y=ax$ 之直線。其各向上率若何。求其對於 $x=0$, $x=7$, $x=10$, $x=20$, 之 y 之值。試作圖顯此等直線。欲引直線 $y=3x$ 及 $y=\frac{3}{4}x$, 必須預知 x 及 y 之值幾組。

以對於 $x=7$, $x=10$, 所算得之 y 值,驗與讀者自作之圖之縱線相合與否。於已有銀 3 角在內之儲蓄匣,每週更投入銀 1 角。如是,第 44 圖之直線 I, 可表其儲蓄額增加之形式.何以故,以對於時 $x=0$ 得 $y=3$, 又第一週之終得 $3+1=4$, 第二週之終得 $3+2=5$, 第三週之終得 $3+3=6$, 等。故也。

〔問〕x 週之終其儲蓄額若何。

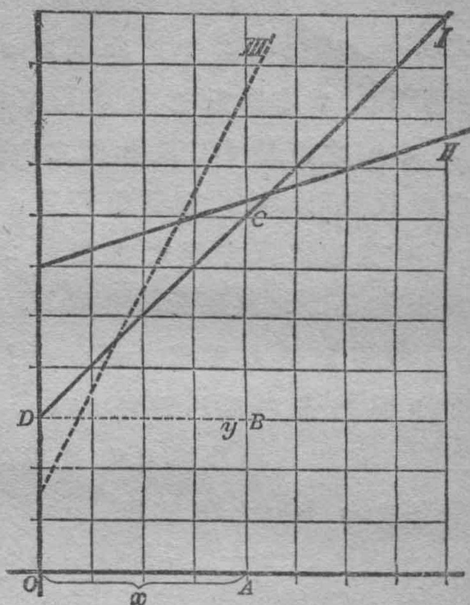
〔解〕設 CA 爲其儲蓄額。

然　$CA=AB+BC=OD+BD=3+x$

故　$y=3+x$

此示匣內之儲蓄額,即爲屬於直線I之方程式。試看出此直線之向上率,以此直線與前圖之直線I比較,並舉兩者公共之點及相異之點,

有屬於二直線之方程式 $x=y$, 及 $y=3+x$, 在此式上之同點及異點,可如何表之。



第 44 圖

本圖之直線II及III,依儲蓄之方法原表何事。試依圖看出各線之向上率。試作決定屬於此兩直線之方程式。以對於 $x=2$, $x=3$, $x=4$, 所算出之數,驗與實際顯於圖之縱線相合與否。

於前記諸例,其變縱線 y 爲橫線 x 之函數。何則,以對任意所選 x 之值,可由方程式 $y=3+x$ (或 $y=\frac{1}{2}x$ 等)算

出 y 之值，故也。且此 y 對於其 x，與由直線 I 所得之縱線相合。故直線 I 原示函數 $3+x$ 之漸次增大之趨勢。

畫屬於方程式 $y=ax+b$ 之直線。設此直線爲如前例示儲蓄額之增加者，則 a 及 b 具何意義。又純依幾何學的方法，考此直線，則 a 及 b 具何意義。

若對於橫線 $=o$ (卽原點) 得 $y=a.o+b=+b$，則屬於此式之縱線，必在縱軸上且其值爲 b.

故常項 b，示屬於所與方程式之直線在縱軸上所截取線份之長。

對於 $x=1$，得 $y=a+b$

" " $x=2$，" $y=2a+b$

" " $x=3$，" $y=3a+b$，等等。

故橫線每增 1 單位，則縱線增 a 單位。卽 x 之因數 a 爲直線之向上率。若 b 爲正，則由縱軸截取正線份，(在零點之上方) 若 b 爲負，則由縱軸截取負線份。(在零點之下方)

某直線之向上率 $\frac{3}{4}$，若由橫軸截取線份 7. 則其直線之方程式當爲 $y=\frac{3}{4}x+7$.

試作圖表之。又算對於 $x=1$，$x=2$，$x=3$，等之 y 之值，以之驗與由作圖所得之縱線相合與否。

35. 向下直線

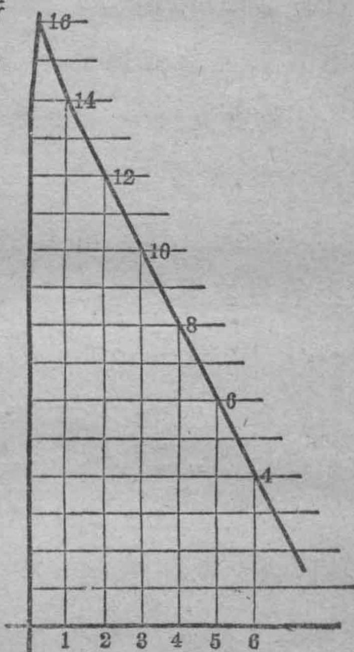
今設儲蓄匣內初有10圓,由是每週消費1圓,當以何法表之。

再,以週數為橫線,以所有額為縱線,則縱線之端均在一直線上,其理由若何。

此直線表何事,又與前圖之直線I及II,有何相異之點,試將此等事實用方程式表之。

以方程式 $y=10-x$, 與前款之直線之方程式比較,並舉其重要之異點。

如原有銀16圓,每週消費2圓,則各週之所有額16,14,12,10,8,等。當若何表之於圖。(第45圖.)



第 45 圖

今於此例,其各縱線之端,亦均在一直線上。而橫線每增1單位,縱線却減少2單位。故直線之向下率為2,(即向上率 -2.)

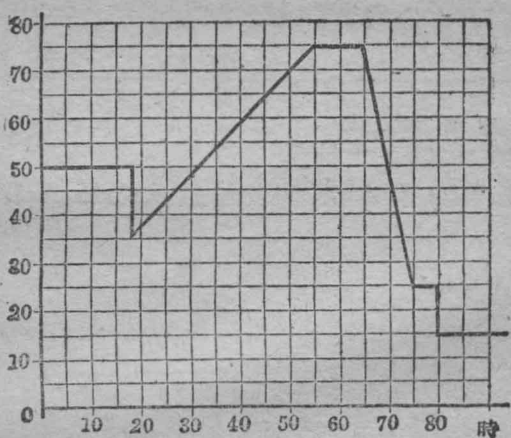
方程式 $y=-2x+16$, 對於 x 之各值,(即週數)可得與

之對應之 y 值,(卽上所計之各所有額.)故易知此直線原表所有額減少之趨勢。

又在此等方程式內之 x 之係數,(卽在 $y=-x+10$ 內爲 -1, 在 $y=-2x+16$ 內爲 -2,)示所有額減少之定率。而常數項 $+10$ 及 $+16$, 示最初之所有額,(卽縱線被其直線截取之線份。)

是於此例,亦縱線爲橫線之函數。何則,對於 x 之各值,得由函數方程式 $y=-2x+16$, 算出 y 之定值,故也。而此 y 值,與作圖之縱線相合,故第45圖之直線,爲對於 x 之諸值,示其漸次減少之函數 $-2x+16$ 之變化之形式。

同樣,注水於桶或由桶中排出水,其在桶中之水量之變化,得表之於圖。



第　46　圖

以第46圖所示之折線,表水桶中水量之變化,由是可察得何事。

在一定之時間,其水量增幾何或減幾何。並求其每一時間進水幾何,或排出水幾何。

在此折線之各部之向上率爲何。

於此例及其相類之例,對於橫線 x. 不得獨選整數,卽橫線得通過含整數及分數之全數列,又任何分數得表其橫線,由是與之對應之縱線,亦具相同之意義。

〔例〕某列車以速度 c 運動,若以 x 表其經過之時間,以 y 表其距離,則得其運動之函數 $y=cx$.

今設時間及其經過之距離,俱連續變化,則 x 當通過橫軸上之諸點。(於前之諸例,其變化非連續的)

已知其向上率,與其縱軸上之截線份,則得作圖表其直線。

以此觀察爲基本。作圖表屬於次之諸方程式之直線。

(1) $y=3x+7$

(2) $y=-3x+7$

(3) $y=+3x-7$

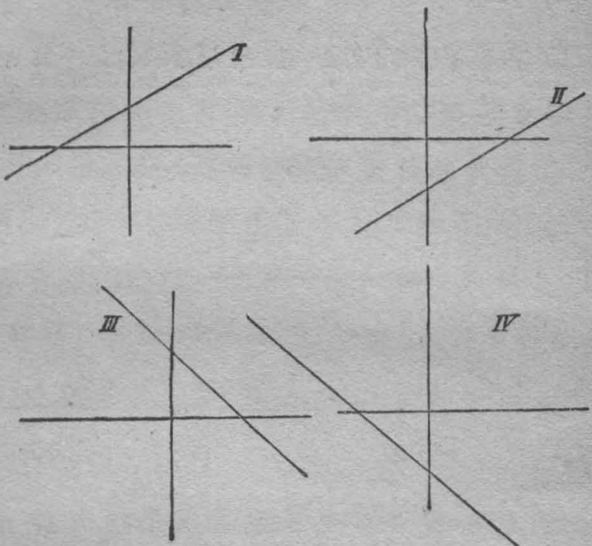
(4) $y=-3x-7$

試討論對於任意橫線所算得之縱線,與由作圖所得之縱線相合與否。

引屬於方程式 $y=\frac{5}{4}x-\frac{11}{4}$ 之直線。

易知此方程式與 $4y=5x-11$ 及 $5x-4y=11$, 同義。

於此三個方程式,俱向上率爲 $5:4$, 截線份爲 2.75



第 47 圖

就次之諸方程式,看出其向上率及縱橫線上之截線份。

$$5x-3y+18=0, \qquad 5x+3y-18=0,$$

$$7x-11y-14=0, \qquad 9x+13y+65=0$$

設向上率爲 a,(絕對值)截線份爲 b,(絕對值)求作方程式表第47圖所示之四個直線。

於直線 I, 其向上率爲正,得 $+a$, 截線份亦爲正,得 $+b$, 故其方程式爲 $y=+ax+b$.

於直線 II, 其向上率爲正,截線份爲負,故其方程式爲 $y=+ax-b$.

於 III, 其直線向下,故 a 當附以負號,又 b 當附以正號,由是得 $y=-ax+b$,

於 IV, 雙方俱爲負,故得 $y=-ax-b$.

第三編

比，比例

第一章　比

36. 二量之比

二同種量大小之關係,以一量所含他量之倍數示之。名爲二量之比。

欲求二量之比,須雙方以相同之單位測之,故不得不以其名數 a 及 b 行除法。由是,其商 $\frac{a}{b}=q$, 必示第一量當第二量之何倍。

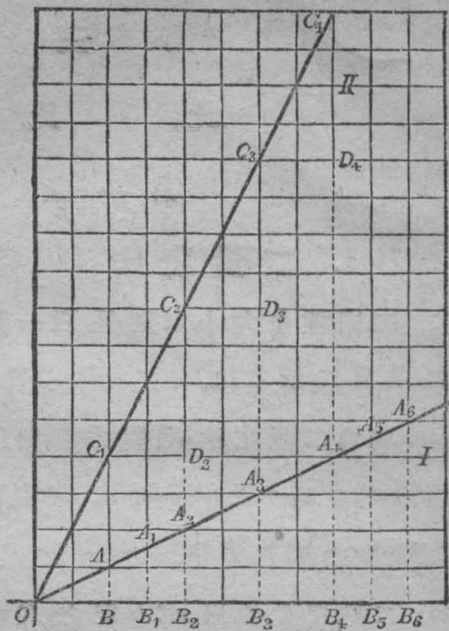
二數之比恆以 $a:b$ 記之,名爲 a 與 b 之比。此比之值,可由前記之商 $\frac{a}{b}$ 求得。而 a 稱爲**比之前項**, b 稱爲**比之後項**。

〔例〕中國崑崙山之高 ($h_1=22350$ 尺) 與日本富士山之高 ($h_2=12370$ 尺) 之比,爲 $h_1:h_2=\frac{22350}{12370}$,

(1) 若 $a:b=q$, 則 $a=bq$, 又 $b=\frac{a}{q}$, 若數個比,其對應項互異而其商相等,則其比各相等。如 12 : 4, 21 : 7, 45 : 15, 俱得商 3, 故

$$12:4=21:7=45:15$$

前於§34所述儲蓄額之增加之描寫,以一直線表之,是卽具同商之等比之例也。



第 48 圖

於第48圖,就過零點之二直線I及II上之任意點,以其横線與縱線比較,且作其比,卽,$C_1B : OB$,或 $AB : OB$,

設此等坐標之比之商爲q,則能看出

$$AB : OB = A_1B_1 : OB_1 = A_2B_2 : OB_2$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots$$

同樣, $$C_1B : OB = C_2B_2 : OB_2 = C_3B_3 : OB_3$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots$$

故一直線過零點,則此直線上各點之縱横線之比恆相等。

使直線OC_1及OA超過點O向背後延長,且由其延長線上之任意點,下縱線於横軸之延長線上,試驗此縱

線與其對應橫線之比。與在正界內之比相等，否。

此等縱橫線之比，旣與直線之趨勢相關，而依所述各種之考察，可知其表如何之直線。今以坐標之比之商(値)與向上率(卽 $C_2D_2 : C_1D_2 = C_3D_3 : C_2D_3 = \cdots\cdots$) 比較，則知直線之向上率之値，恆與兩坐標之比之値相等。

今設 $OB=1$，且以 $OB=C_1D_2=C_2D_3=\cdots\cdots$ 爲時間之單位(秒)，以 $C_1B=C_2D_2=C_3D_3=\cdots\cdots$ 爲在此單位時間通過之行程，(卽速度)則 2 秒間 (OB_2) 之行程可用縱線 C_2B_2 示之，3 秒間 (OB_3) 之行程可用 C_3D_3 示之，

同樣，設時間之單位爲一日，由是 OB_2, OB_3 等爲 2 日，3 日，等。且假定其向上率 $BC_1=D_2C_2=\cdots\cdots$ 爲作某工程每日之工銀，則 B_2C_2, B_3C_3, $B_4C_4,\cdots\cdots$ 依次爲 2, 3, 4,……日間之工銀。

37. 特例

若問題之直線不過原點，則上述之觀察當如何更改。(第 49 圖)

今於此例，其兩坐標之比雖非不變，然由縱線減 CQ (b) 所得之餘數與橫線之比仍不變。卽

$$A_1C_1 : QC_1 = A_2C_2 : QC_2 = A_3C_3 : QC_3$$

易而言之，卽 $\dfrac{y-b}{a}$ 恆一定不變。

於圖,設此比之值爲$\frac{1}{2}$,又$OQ(=b)$爲3,故

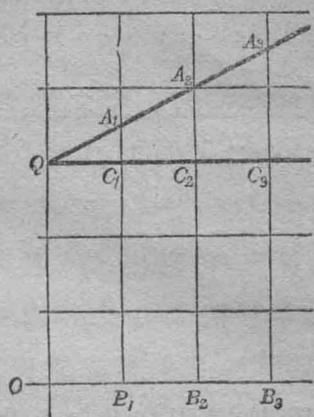
$$A_1C_1 : QC_1 = \frac{y-3}{x} = \frac{1}{2}$$

今依前述之規則,作具截線份$OQ=b=3$且具向上率$=\frac{1}{2}$之方程式。則爲

$$y=\frac{1}{2}x+3,$$

與上記之商方程式

$\frac{y-3}{x}=\frac{1}{2}$ 相合。



第 49 圖

故知由直線之方程式,若由其各點之縱線減截線份所得之差,與橫線之比爲常數。則僅有一直線。

有過原點之直線,與橫軸成45°之角,則兩坐標之比若何。

依向上角大於45°,或小於45°,其與之相關之兩坐標之比之值,有何異點。

比之值大於1,其比稱爲**高比**,比之值小於1,其比稱爲**低比**。

依§36公式(1)前項爲$a=b\cdot q$,以之代入第48圖之縱

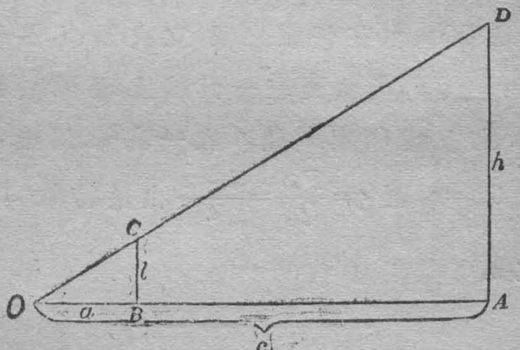
線之式,則知由各點之橫線與其不變之比,可尋得對應之縱線。

〔例〕於直線 I,

$$A_6B_6=OB_6\cdot q=OB_6\cdot\frac{AB}{OB}$$

此單簡之事實,可應用於高之測定。

〔例〕於第50圖,欲決定其高 $h=AD$,(樹或牆之高)則先立已知其長 l 之棒 CB,以之移動於種種之位置,使由地上之定點 O 視棒之上端 C 與 D 成一直線。然後實測其距離 $OB=a$, $OA=c$, 則 $q=\frac{l}{a}$, 由是 $h=c\cdot q=c\cdot\frac{l}{a}$

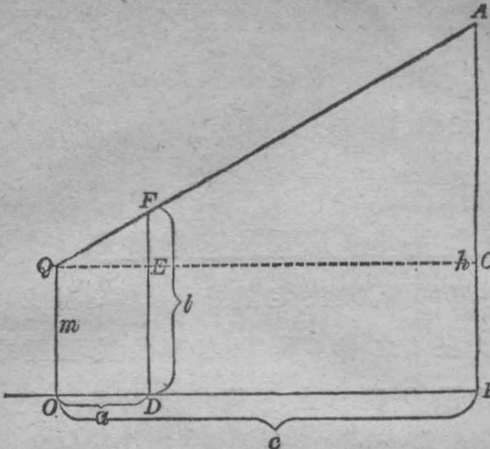


第 50 圖

此測定本第51圖行之,尤爲便利。例如依實測已知 OB 與比 $\frac{AC}{QC}=q$ 及其截線份 CQ, 求 AB.

就圖觀察,易知

$$AB(h)=AC+BC=QC\cdot q+m$$



第 51 圖

先以棒 $OQ=m$, 在任意之點,立成鉛直。然後以第二之棒 $DF=l$, (O, D, B, 須同在一直線上)移動於種種之位置,使棒 m 之上端 Q, 與 F 及 A 成一直線,最後測其距離 $OD=a$ 及 $OB=c$, 則 $q=\frac{FE}{QE}=\frac{l-m}{a}$ 由是得 $h=AB=c\cdot q+m$ $=c\frac{l-m}{a}+m$

第二章 比例

38. 比例之定理

於直線過原點之例,(第48圖)其橫線與其縱線之比常相等,(§36)例如

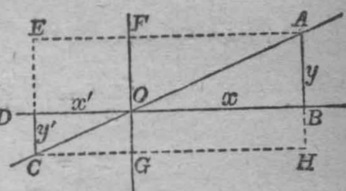
$$C_1B:OB=C_2B_2:OB_2$$

二比之值相等，用等號(或**等比號** ∷) 聯之。謂之**比例**。

故 $9:5=27:15$ 為一比例，以兩比具相同之商 $\frac{9}{5}$，故也。

然 $7:x=2:4$，須 x 為某值，(何數)始成比例。

若 $\dfrac{a}{b}=q$ 又 $\dfrac{c}{d}=q$，由是 $a:b=c:d$，則



第 52 圖

a 及 d 名為外項，

b 及 c 名為內項，

$\left.\begin{array}{l} a \text{ 與 } c \text{ 名為前項} \\ b \text{ 與 } d \text{ 名為後項} \end{array}\right\}$ 對應項。

已知在直線 AC (第 52 圖) 上之二點 A 及 C 之兩坐標之比 $AB:OB$ 及 $CD:OD$ 互相等，故得比例

$$AB:OB=CD:OD, \text{ 或}$$

(1) $$y:x=y':x'$$

依平行四邊形之定理，(實用主義幾何學 §246. 定理 3) 知 $DEFO=OBHG$

然設 $DEFO=x'\cdot y$ 又 $OBHG=x\cdot y'$ 則得次之方程式。

(2) $$xy'=x'y$$

由方程式(1)與(2)，得次之定理。

定理 I. 凡一比例,其內項之積恆等於外項之積。

此積方程式之定理,可用代數式證明。

今設 $y:x=y':x'$, 則

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}$$

兩邊以 xx' 乘之。得

$$\frac{xx'y}{x}=\frac{xx'y'}{x'}.$$

或 $x'y=xy'$

〔逆〕由一積方程式得導出常比例。卽以一積之兩因數爲外項,以他積之兩因數爲內項。

〔例〕$3\times4=2\times6$ 爲一積方程式。

故 $3:2=6:4$, 或 $3:6=2:4$

以文字表之,卽若 $ad=bc$ 爲一積方程式,則 $a:b=c:d$ 或 $a:c=b:d$

由是,得次之定理。

定理 II. 比例之內項得互換。

由前記之積方程式,得作次之比例

$4:2=6:3$, 或 $4:6=2:3$

以文字表之，卽

$$d:b=c:a \text{ 或 } d:c=b:a$$

以此比例與前出之比例比較，可導出次之定理。

定理 III.　比例之外項得互換。

又比 3:2 與 6:4，得任意以何者置於前，如是，無論以 3 及 4，或 2 及 6 爲外項，俱得成比例，

卽　$3:2=6:4$

或　$2:3=4:6$

以文字表之，卽

$$a:b=c:d$$

或　$b:a=d:c$

故由一積方程式，得導出幾個比例。

定理 IV.　若 $a:b=x:c$ 成正比例，則 $bx=ac$，由是 $x=\dfrac{ac}{b}$.

同樣，由 $p:q=r:x$ 得 $x=\dfrac{qr}{p}$，

試將此結果，用比例之內項，外項，等語易之。

比例之任一項，(所求之項) 對於其他三項，稱爲**第四比例項**。

今若　$a:b=c:d$

及　$a:f=c:d$

爲正當之二比例,則 $b=\frac{ad}{c}$ 及 $f=\frac{ad}{c}$, 由是 $b=f$.

定理 V. 若兩比例式,其三個對應項相同,則第四項恆相等。

此定理爲證明二量相等之一捷法。

比例之內項相等,(如 $4:6=6:9$) 此相等之內項,稱爲二外項之**比例中項**。此比例稱爲**連比例**。

於次之比例,求其比例中項。

$$16:x=x:4 \text{ 即 } x=\sqrt{16\times4}$$

此例易求出 x 之值。(x 之值於各例均易求出乎,抑否乎,) 於次之比例式如何。

$$1:y=y:3 \text{ 即 } y=\sqrt{3}.$$

於此例何故不得求其精確之值。

示 y 在何兩整數之間,且對於 y 之值,計算至小數第一位或小數第二位止。

比例中項得用整數或分數表者,以如何之例爲限。

若於已知數亦用文字表之,即

若 $a:x=x:b$, 則 $x^2=ab$

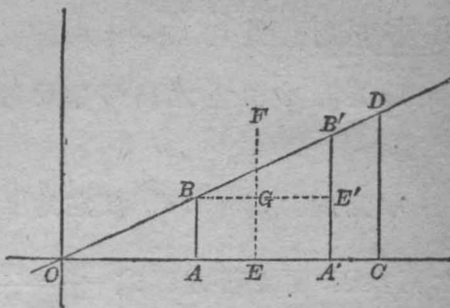
即 $x=\sqrt{ab}$

定理 VI. 若三量成連比例,則其比例中項,恆等於其兩外項之積之平方根。

39. 比例之變化(依倍分及約分變之)

於比例式,以某數乘其對應項(或比之兩項)當生如何之變化。

此事以依前述在過原點之直線(第53圖)上之點之坐標間之關係,說明之為便。



第 53 圖

如已知之二點 B 及 D 之橫線與縱線成比例,即

I. $$OA : OC = AB : CD.$$

又 II. $$OA' : OC = A'B' : CD.$$

於圖,設 $OA' = 2OA$, 則依

$$\triangle OAB \cong \triangle BE'B'.$$

得 $$E'B' = AB$$

故 $$BA = B'E' = E'A'$$

以此值代入 II. 則

$$2OA : OC = 2AB : CD$$

故通例　若 $a : b = c : d$, 成正當之比例,

則 $an : b = cn : d$ 亦成正當之比例。

定理 以同數乘比例之對應項,其所得之式亦成比例。

逆 以同數除比例之對應項,其所得之式亦成比例。

此定理亦由上之幾何學的考察看出,今更以次法證之。

取比例$(a:b=c:d)$,假定為$a:\dfrac{b}{n}=c:\dfrac{d}{n}$,此式成比例與否,恆視積方程式$\dfrac{ad}{n}=\dfrac{bc}{n}$得成立與否而定。

比例之內項得互換,故由

$$a:b=c:d \text{ 及 } an:b=cn:d$$

得

$$a:c=b:d \text{ 及 } an:cn=b:d$$

故於比例,得以同數乘其一比之兩項,或以同數除其一比之兩項。

今試以同數倍(或約)某比例之兩外項(或兩內項)如次。

取比例 $35:14=30:12$(此比例合理)以3倍其外項,則為 $105:14=30:36$ 以2約其內項,則為 $35:7=15:12$

此所得之結果不合理。(其理由若何)

該括以上各節,得次之定理。

定理　以同數乘(或除)比例中一比之兩項(或對應項)，其所得之式亦成比例。

以同數乘(或除)比例之外項(或內項。)其所得之式不成比例。

今以相等之線份 $AE(=FG)$ 加於 OA 及 OB，(第 53 圖) 則得橫線 OE 與其相屬之縱線 EF，如是，其所得之點固不在直線 OD 上，由是，其坐標之比，自不能與點 B 之坐標之比同值，卽

$$OE : EF \fallingdotseq OA : AB$$

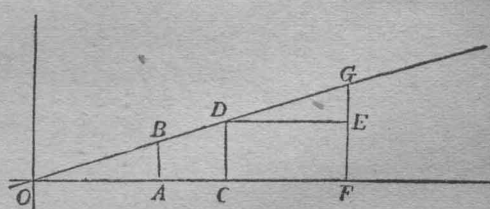
故凡比例式，不得以同數加於一比之兩項。

40. 一比之兩項之加減

比例之幾何學的圖表，更教我等以他之關係。

在第 54 圖，有次之關係。

I. $OA : OC = AB : CD$.



第 54 圖

今以橫線 OA 加於 OC，得 $OF = OC + OA$.

設立於 F 點之縱線爲 FG，則得次之比例。

II. $$OF:FG=OC:CD$$

然 $OF=OA+OC$, 且 $\triangle OAB\cong\triangle DEG$, 故 $EG=AB$, 由 $FG=AB+CD$, 今以 OF 及 FG 之此值代入 II 式, 則得

III. $$(OA+OC):(AB+CD)=OC:CD$$

依同樣之定理,可導出兩比之兩項之差。

試以具體的事實證此定理。

又將此等定理,導爲代數的。

以 III 與 I 相比較,得次之定理。

定理 在比例中,第一比之兩項和(或差)與第二比之兩項和(或差)之比恆等於對應項之比。

〔例〕 $9:5=63:35$

I $14:98=5:35$

II $4:28=9:63$

以文字表之,如次

若 $a:b=c:d$

則 (1) $a+b:c+d=b:d$

(2) $a-b:c-d=a:c$

此定理,在幾何學,化學,及商業上之核算等,屢用之。

41. 羣比例

諸比相等，疊置之，則成**羣比例**。(參看實用主義幾何學第五編第一章§254.) 如

I. $4:12=5:15=3:9=7:21$

此諸比具如何之商。

此羣比例，得記之如次

II. $4:5:3:7=12:15:9:21$

以文字表之，卽若

$$a:b=c:d=e:f=g:h=\cdots\cdots$$

則 $a:c:e:g:\cdots=b:d:f:h:\cdots\cdots$

欲由 II 式導出含 I 之各比例，當以何法求之。

二任意之比例若何結合，則得作成一羣比例。

此宜以適當之因數倍(或約)其兩比例之對應項，使之相等。

〔例〕有 (1) $3:4=6:8$

(2) $5:2=15:6$

兩比例。將 (1) 及 (2) 之第一比，依次以 5 及 3 倍之，又將 (1) 及 (2) 之第二比，依次以 5 及 2 倍之。

〔註〕5 及 3 爲以 3 及 5 除其最小公倍數 3×5 所得之數，又 5 及 2 爲以 6 及 15 除其最小公倍數 $2\times3\times5$ 所得之數。

則得(1) $15:20=30:40$

(2) $15:6=30:12$

由此兩比例,得次之羣比例。

$$15:20:6=30:40:12$$

次取 $a:b=l:m$

$b:c=p:q$

兩比例,以 p 及 m 依次倍其右邊之比,得

$$a:b=pl:pm$$

$$b:c=pm:qm$$

故 $a:b:c=pl:pm:qm$

此化異比爲同比,亦有用之算法也。

例題 1. 若 $a:b=c:d$ 求證以下各式

(1) $ac:bd=c^2:d^2$ (2) $ab:cd=a^2:c^2$

(3) $a^2:c^2=a^2-b^2:c^2-d^2$

2. 若 $a:b=a+c:b+d$ 求證

$c:d=c+a:d+b$

3. 求 $(a+b)^2$ 與 $(a-b)^2$ 之比例中項

4. 有 $a:b=c:d$ 及 $d:e=f:g$

求作羣比例。

第四編

一次方程式

第一章　方程式之原理

42. 恒等式及方程式

二量 A 與 B，其數值相合，則置等號於 A 與 B 之間，以表其值相等。即

$$A=B$$

〔例〕 3×4 與 $14-2$，其值均爲 12，故

$$3\times4=14-2$$

又 $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ 與 $\frac{a+b}{c}$，其值相同，何則，以其一式僅爲他一式之變形也。故

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

如是，以等號＝連結二量之等式，若其一邊僅爲他一邊之變形，則其式稱爲恒等式。

從來所證明之定理及公式，其以等式之形表者，均屬恆等式。

此種等式，其中所用之文字，無論以何值代之，常能合理。

〔例〕於　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

設 $a=10$, $b=7$, 或 $a=11$, $b=5$, 或與以其他之值,其兩邊恆相等。

然前述演算之方法,(如減法及除法)其所用之等式,若以任意之值代其文字,則其兩邊必不能常相等。

如由31減25,其式爲 $x+25=31$

或以4除28,其式爲 $4x=28$

此各式之兩邊,未能恆相等,欲使其兩邊相等,須與 x 以某值,始能適合。如是,在第一式須 $x=6$,在第二式須 $x=7$,此種等式(與恆等式異)對於其未知數之任意值,未能合理。即對於其未知數之某定值始能合理,而此種等式,稱爲**方程式**。

以下各方程式,須與其未知數以何值,始能適合。試以數試之。

$$7x-5=9$$

$$13-2y=7$$

$$z+1=3-z$$

$$x+1=1-x$$

所求之 x 之值,名爲方程式之根。

如是,方程式云者,謂以未知數取某定值爲條件之等式也。

43. 計算之原理

於相等之二量，以同量加之或減之，必仍得相等之量。

〔例〕於天秤之兩皿，各置四 kg，(卽公斤，或啓羅克蘭) 恆能保其平衡，則於兩皿各加一 kg，或各取去一 kg，當仍保其平衡。同樣，使其兩皿中之銅碼各爲前重之二倍，(卽 $8kg$) 必仍保其平衡。

又使其兩皿中之銅碼各爲前重之十分之一(卽 $400g$) 當仍能保其平衡。

此之考察，可更就甲乙兩人之儲蓄匣證之，如兩人原有之額相同，又依相同之方法加減，則其儲蓄額決不相異。

此爲計算之原理，卽通常所稱**公理**是也。茲述之於次。

(1) <u>以等量加等量，其和相等。</u>

(2) <u>由等量減等量，其差相等。</u>

(3) <u>以等量乘等量，其積相等。</u>

(4) <u>以等量除等量，其商相等。</u>

如是，由一等式，就其兩邊以同量加，減，乘，除。均能導出他之新等式。

44. 等式之變形

等式非量,唯表二量相等。

等式可變其形,但以不悖上記之計算原理爲限。

(1) 若於等式,以與其所含之某項異符號之量加於其兩邊,或以與某項同符號之量由其兩邊減之,則某項於其一邊消却。同時有具反對符號之項顯於他邊。此手續謂之**移項**。

〔例〕

$$\begin{array}{rl} (a+b)^3 = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ b^3 = & \qquad\qquad\qquad\quad +b^3 \\ \hline (a+b)^3\underline{-b^3} = & a^3+3a^2b+3ab^2 \end{array}$$

(用減法)

或

$$\begin{array}{rl} 7x-5 = & 3x+11 \\ 5 = & \quad 5 \\ \hline 7x \qquad = & 3x+11\underline{+5} \end{array}$$

(用加法)

(2) 若等式之兩邊有相等之項,得依加法或減法,使此相等之項消去。

〔例〕

$$\begin{array}{rl} 12x^2+13x+5 = & 12x^2+16 \\ 12x^2 \qquad\qquad = & 12x^2 \\ \hline +13x+5 = & +16 \end{array}$$

(用減法)

(3) 若等式之一項有分母得以此分母乘兩邊之諸項,使此分母消去。

〔例〕

$$\begin{array}{rl} 7x+\dfrac{3}{x}+5 = & 2x-6 \\ x \qquad = & x \\ \hline 7x^2+3+5x = & 2x^2-6x \end{array}$$

(用乘法)

(4) 若等式之數項有分母,得以其公分母乘兩邊之諸項,並約分之,使其各分母消去。

〔例〕　$\frac{3x}{8}+\frac{4}{5}=7x-\frac{11}{20}$　(公分母$=40$)

$$40=40$$

$$\frac{40\times 3x}{8}+\frac{40\times 4}{5}=40\times 7x-\frac{40\times 11}{20}\quad(\text{用約分})$$

$$15x+32=280x-22$$

(5) 若等式之諸項有公共之因數,得依除法使此因數消去。

〔例〕於　$9x^2+12x-45=0$

以 3 除其諸項,得

$$3x^2+4x-15=0$$

同樣,得由等式之一項消其因數。

〔例〕於　$ax^2+bx+c=0$, 欲由含 x^2 之項消其 a, 則以 a 除其諸項得次之結果。$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

(2) 至 (5) 統稱為消法。

45. 方程式之次數

凡方程式,其未知數僅為一乘方者,稱為一次方程式。其未知數之最高方乘為二乘方者,稱為二次方程式。為三乘方者稱為三次方程式。餘仿此。

如 $ax=b$ 或 $2x+5=6x-9$ 爲一次方程式。$2x^2-7x+18=0$, 或 $9x^2=16$ 爲二次方程式。$13x^3-8x^2=5-7x$ 爲三次方程式。某方程式含有幾個未知數,則含 xy 者爲二次式,含 xyz 或 x^2y 者爲三次式。

方程式之次數,非必一見便能判明,如此之例,宜先化之爲單簡之形。

某方程式之最單簡之形稱爲**標準之形**。

前所引除法之式 $4x=28$, 爲一元(含一未知數)一次方程式之標準之形。凡一次方程式,得改爲 $Ax=B$ 之公形,但 A 及 B 表由一項或數項而成之任意量,惟決不含未知數。

第二章 一元一次方程式

46. 一元一次方程式之圖式的解法

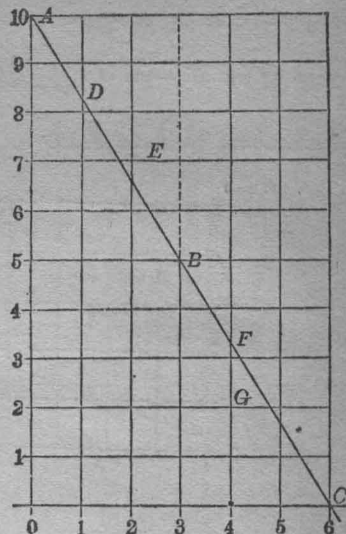
方程式 $y=-\frac{5}{3}x+10$, 屬於直線 AC, (第 55 圖) 即由縱軸上截線份 10, 且具向下率 5:3. 點 D 之坐標 $x=1$, $y=+8\frac{1}{3}$, 合於其直線之方程式,故 D 在其直線上。又點 B $(x=3, y=5)$ 及 F $(x=4,\ y=3\frac{1}{3})$ 亦然。

反之，其直線外之點如 $E\left(x=2\frac{1}{2}, y=7\right)$ $G\left(x=4\frac{1}{2}, y=2\right)$ 不合於上之方程式。

此直線與橫軸之交點之坐標 $x=6, y=0$，合於其方程式，

即 $$0=-\frac{5}{3}\times 6+10$$

然就方程式一方考之，則方程式 $0=-\frac{5}{3}x+10$，依 $x=6$ 適合，即 $x=6$，爲此一次方程式之根。



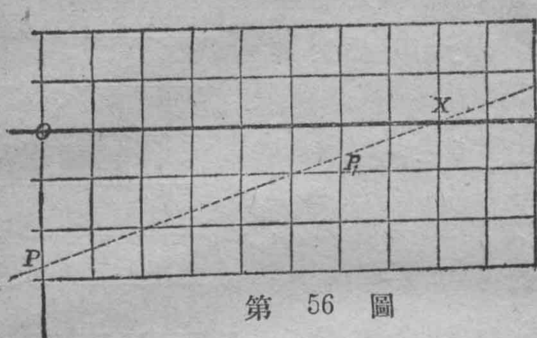
第 55 圖

故一元一次方程式 $ax+b=0$ 依某定值 x_1 (在上例爲6)適合云者，與言直線之方程式 $ax+b=y$，依此直線與橫軸之交點之坐標(卽 $x=x_1$，$y=0$)適合同意。

凡一元一次方程式，得用圖式解之。

解法 先移方程式之諸項於一邊，置 y 於他一邊。(卽書 O 字之處) 將其所得之函數方程式 $ax+b=y$ 以一直線表之，由是作其直線之圖。此直線與橫軸之交點，成坐標 $x=x_1$，$y=0$，由是 x_1 爲所與方程式之根。

欲作直線表方程式,須先知在此直線上之任意二點,而欲定此二點,則宜與橫線之任意二值,依其方程式算出與之對應之縱線。



第 56 圖

且作如此之計算時,不須化其方程式爲標準之形,$(ax+b=0)$,唯有當注意者,當移其諸項於一邊作函數方程式時,須使其分母不含未知數。

〔例〕解　$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=\frac{8}{3}$$

移其諸項於一邊。

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-\frac{8}{3}=0$$

由是,作次之函數方程式。

$$y=\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-\frac{8}{3},$$

今設 $x=0$ 則 $y=-\frac{8}{3}$, $x_1=6$ 則 $y_1=-\frac{2}{3}$

由是,作具此坐標之二點 P, P_1. 且引過此二點之直線,則此直線於具橫線 $=8$ 之點 X 截其橫軸,故 8 爲上之所與方程式之根。而欲定此根合理與否,得用此值代入其方程式證之。

又同樣,解 方程式

$$\frac{7}{5}+\frac{2(x+4)}{3x}=\frac{13}{x}$$

先作由分母消去 x 之函數方程式

$$y=\frac{7x}{5}+\frac{2(x+4)}{3}-13$$

玆算出與 $x=0$ 及 $x=-4$ 對應之縱線,尋出屬於此橫線及縱線之點,引過此二點之直線,求此直線與橫軸在何點相交。卽得所求之根。

47. 一元一次方程式之代數的解法

欲由一次方程式之標準之形,(卽 $Ax=B$) 求其未知數之值,須使未知數與其因數(係數) A 分離,其法已詳於 §44. (5) 式.

今以 A 除方程式之兩邊,得 $x=\frac{B}{A}$. 而此結果,卽爲所與方程式之根。

今以 $\frac{B}{A}$ 代所與方程式之 x, 則得 $A\cdot\frac{B}{A}=B$, 卽 $B=B$, 卽此方程式合理。

解　$4x=28$,　$11x=28$,　$7x=0$

各方程式不必皆爲單簡之形,故欲解之,必先化之爲標準之形。

由是,必須依次之手續。

〔例〕 解所與之方程式 $\dfrac{5x}{12}+\dfrac{x^2-7}{x+3}=\dfrac{17(x-3)}{12}$.

(1) 欲消去分母,先以公分母乘其諸項並約分之。

公分母爲 $12(x+3)$, 乘之, 得

$$\frac{5x\cdot 12(x+3)}{12}+\frac{12(x+3)(x^2-7)}{x+3}=\frac{17(x-3)12(x+3)}{12}$$

約分,得　$5x(x+3)+12(x^2-7)=17(x-3)(x+3)$

(2) 解去包含未知數之括弧,得

$$5x^2+15x+12x^2-84=17x^2-153$$

(3) 集其同類項,(卽同種類之項)

$$17x^2+15x-84=17x^2-153$$

(4) 消去在兩邊之相等之項,則

$$15x-84=-153$$

(5) 以諸項所含之公共因數 3 除之。

$$5x-28=-51$$

(6) 移含未知數之項於左邊,移其常數項於右邊,整列其方程式。

$$5x=+28-51$$

(7) 集其同類項

$$5x=-23$$

如是，始成標準之形。若未知數之係數爲文字，則不能計算其同類項使成單一之形，此例宜以括弧括其係數，使未知數在括弧外，即成標準之形。例如由

$$ax-2bx+cx=d-5e$$

得　$$(a-2b+c)x=d-5e \text{ (標準之形)}$$

$$A\cdot x=B$$

由第一例，得根 $x=-\dfrac{23}{5}$，由第二例得根 $x=\dfrac{d-5e}{a-2b+c}$

48. 敍述與方程式

敍述所求之值(即未知數)與所與之值之關係時，得用方程式表之。

其單簡之例，如前述諸算法之算式。

〔例〕有一所與之數(減數)爲加數，他所與之數(被減數)爲和，求其被加數，於此問題，令其所求之數爲 x，被減數爲 31，減數爲 25，則此等間之關係，用方程式 $x+25=31$ 表之適合，而此方程式之根 6，爲此問題所求之值。

又所與之積與所與之因數及所求之因數之關係，得用次之除法之算式表之。

$$x\cdot4=28$$

然通常用方程式所表之關係,不能如上記諸例之單簡。茲就作方程式之方法。述其一二要點。

(1) 先審察問題,定其相當之未知數,命之爲 x. (y 或 z)

(2) 暫視 x 爲已知數,以之行問題所述之各種計算。

(3) 就問題所述之某事項,用未知數與已知數以二樣方法表之。

(4) 以等號連結此二結果,卽成一方程式。

〔例〕父 39 歲,子 3 歲,問至何年後父年爲子年之 5 倍。

令所求之年數爲 x, 則去今 x 年後父年爲子年之 5 倍。彼時父當 $(39+x)$ 歲,子當 $(3+x)$ 歲。如是, x 年後之父年,得用兩種方法表之。(子之年亦然) 卽 $39+x$, 與子年之五倍 $=5(3+x)$, 俱可用以表父之年齡。故得次之方程式

$$39+x=5(3+x)$$

此方程式含父子現在之年齡及未知數 x, 且表 x 年後父年爲子年之 5 倍之關係。

49. 距離,時間,速度。

方程式之應用,最重要者莫如計算物體之運動,及與運動相關聯之諸問題。

運動之要素有三,卽運動所經之時間 (t), 其所生之速度 (v), 及於其間所通過之行程 (s), 是也。

同時間通過同行程,則其運動稱為等速,茲專論此種運動。

成等速之運動,其速度得用單位時間(如一秒)所通過之行程表之。

例如某物體一秒間所通過之行程為 $10m$, (卽公尺或米突)則其速度為每秒 $10m$, 由是知 2 秒間通過 $20m$,3 秒間通過 $30m$, 通例 t 秒間通過 $10tm$, 故於運動之三要素, 卽行程 (s), 速度 (v), 時間 (t) 之間, 有基本的關係, 由是得次之法則。

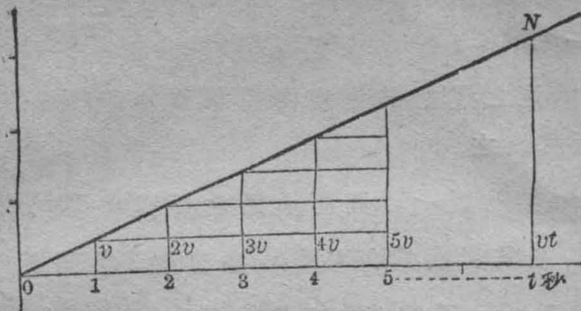
$$\text{行程} = \text{速度} \times \text{時間}$$

以文字表之, 卽 I　　$s=v.t$

故速度一定,則行程得用時間之函數表之。

欲將此關係,描寫於圖式。則以時間為橫線, 以行程為縱線, 如是, 屬於此方程式之圖, 為過零點之一直線。而依此直線得知對於時間增加之行程增加。對於時間 0, 其行程亦為 0, 又對於時間 1 之縱線 v 表其速度。(第57圖)則縱線 $2v, 3v, 4v, \cdots\cdots vt.$ 為屬於時間 $2, 3, 4, \cdots\cdots t$ 秒之行程, 由是, 其速度不外乎圖中直線 ON 之向上率。

又於 s 為定值之例, 其 v 及 t, 得以 s 表之。卽



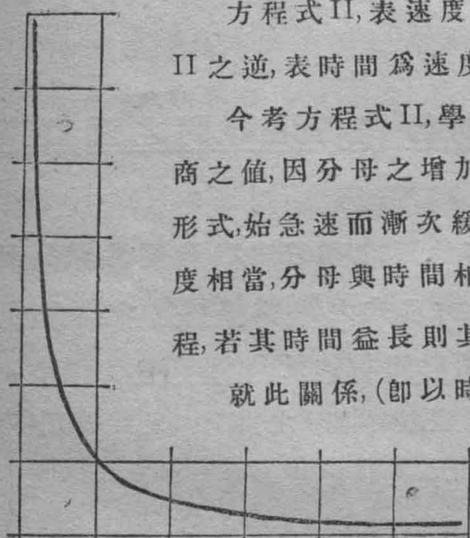
第 57 圖

II　$v=\frac{s}{t}$,　　　III　$t=\frac{s}{v}$.

方程式II,表速度爲時間之函數,III爲II之逆,表時間爲速度之函數。

今考方程式II,學者當憶及§25.所述諸商之值,因分母之增加而減少。而其減少之形式,始急速而漸次緩徐。然於此例。商與速度相當,分母與時間相當。故通過一定之行程,若其時間益長則其速度益小,

就此關係,(卽以時間之函數表其速度於圖式,)可以時間爲橫線,以與之對應之速度爲縱線(第58圖)考之。



第 58 圖

今設 $s=1m$，則得次之關係。

對於	$t=\frac{1}{5}$ 秒，得	$v=5m$
〃 〃	$t=\frac{1}{4}$ 〃 〃	$v=4$ 〃
〃 〃	$t=\frac{1}{3}$ 〃 〃	$v=3$ 〃
〃 〃	$t=\frac{1}{2}$ 〃 〃	$v=2$ 〃
〃 〃	$t=1$ 〃 〃	$v=1$ 〃
〃 〃	$t=2$ 〃 〃	$v=\frac{1}{2}$ 〃
〃 〃	$t=3$ 〃 〃	$v=\frac{1}{3}$ 〃
〃 〃	$t=4$ 〃 〃	$v=\frac{1}{4}$ 〃
〃 〃	$t=5$ 〃 〃	$v=\frac{1}{5}$ 〃 等等

此等之坐標，可定數個點列，然此諸點列，非在一直線上，乃在一種曲線上，此曲線稱爲**雙曲線**。(於此例特稱爲等邊雙曲線。)

欲作對於方程式III之圖表。則以在II式內之縱線(v)爲橫線，以其橫線(t)爲縱線。考之。(其結果與沿過O點且分兩軸間之角爲二等分之直線之周，迴轉其圖於180°同。)此例當得與前同形之曲線，

〔註〕上記之等邊雙曲線，通例表示 $y=\dfrac{a}{x}$ 或 $xy=a$ 之形之函數方程式所包含之諸關係。

例如欲作具所與面積 J 之諸矩形。則其相隣之邊 x 及 y，須適合於方程式 $J=xy$，由是，此 x 及 y，爲等

邊雙曲線上之點之坐標所限。(參看實用主義幾何學§246. 例題20)

同樣,表「波爾」之法則(卽同溫度之氣體,其立積 v 與壓力 p 成反比例之法則)(參看陳文著中等教科新式物理學§101及§118)於方程式,則 $v=\frac{\text{定數}}{p}$,若描寫於圖式,則爲等邊雙曲線。

以代數之法解運動之問題,則於三量(卽時間,速度及行程)中之二量。以已知數或未知數之項表之,以二樣方法計算其所餘之第三量。(參看前款(3).)作爲方程式。

例(1) 有每日行同行程之甲乙二使者。甲出發後,經3日,遣乙追之,乙較甲每日多行 $2\frac{1}{2}$ 里,6日之後乙追及甲。求甲之速度。

〔解〕設甲之速度爲每日 x 里,則乙之速度爲每日 $(x+\frac{5}{2})$ 里。又兩使者旅行之日數,乙爲6日,甲較乙多3日,卽9日,先將時間與速度,以已知數及未知數之項表之。次以二樣方法計算兩人通過之行程 s.

(1) $$s=x\times 9$$

(2) $$s=\left(x+\frac{5}{2}\right)\times 6.$$

由是得方程式 $9x=6\left(x+\frac{5}{2}\right)$

例 (2) 某人乘車在 A 出發。以每時 $10km$ 之速度，向離 A $30km$ 之地 B 進行，又一人經 $1\frac{1}{2}$ 時，徒步由 B 向 A 進行。徒步者之行程每時 $5km$，問兩人於何時在何地相會。

〔解〕車之速度爲每時 $10km$，徒步者之速度爲每時 $5km$，而由 A 至兩人相會之地點，之行程爲未知數，設爲 xkm，則徒步者所通過之行程，當等於 $(30-x)$，今以二樣方法計算車行之時間 t.

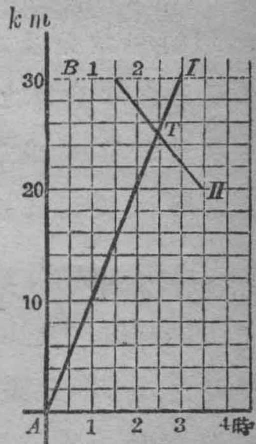
(1) $$t=\frac{x}{10} \text{ 時}$$

(2) $$t=\left(\frac{3}{2}+\frac{30-x}{5}\right) \text{時}$$

由是，得次之方程式。

$$\frac{x}{10}=\frac{3}{2}+\frac{30-x}{5}$$

此問題以圖式解之如次(第59圖)



第 59 圖

(1) 車之通路。此爲過原點 A，以比 $10:1$ 向上。

(2) 徒步者之通路。於縱軸上離零點 30 單位之距離，引橫軸之平行線。於此直線上截其時之長 $1\frac{1}{2}$ 時間。過此點引具向下率 $5:1$ 之直線。卽表徒步者之通路。(因徒步者之速度，與車之速度反對，故爲負。) 則此兩直線之交點 T 之橫線 2.5 爲所求之時間，縱線 25 爲所求之行程。

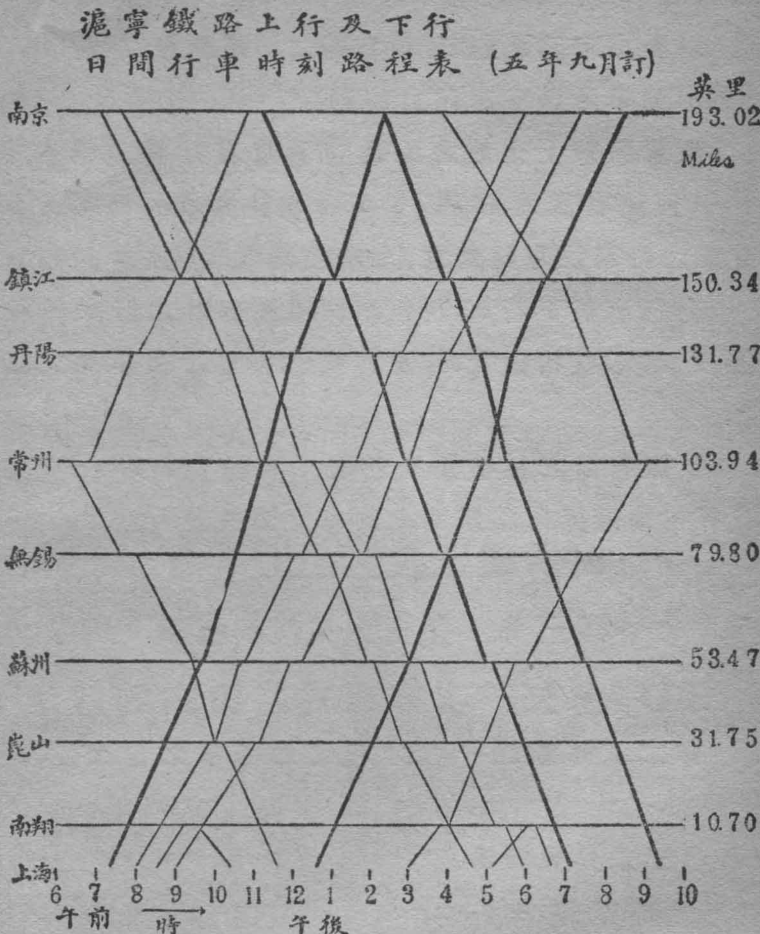
然於求速度之問題。往往有不易作其通路之圖者，如此之例，圖式的方法，頗難應用。且較作方程式解之少難。

又用此方法（卽圖式的解法）最覺便宜者，莫於工程之問題，如以一樣之速度注水於水桶之問題，及其他與此相類之問題，是也。於此等問題，當以横軸爲時間之軸，以縱軸爲分量之軸，但分量云者，爲工程之分量，或容器內之水量，等之意。而與速度相當者爲單位時間所注水量之增加，或工程之進行，由是，表工程之量或水量之增加，得用直線之向上率表之。

50. 圖式運行表

汽車（俗名火車）之運行表，用圖式表之，較僅用數字表之爲便。鐵路之當局者，於其內部，原用此種圖式表，惟對於一般公衆，乃本此圖式表作成普通之數字運行表（卽行車時刻路程表）示之耳。

此圖式表恆以時間（卽24時間，由某日之夜半至次之夜半）爲横線，取水平之位置，以列車通過之距離（以 km 或里，表之）爲縱線。又於縱軸上，用任意之縮尺記點，以示各車站之所在，列車之通路，以斜線示之，依其傾斜之大小，可知其列車之速度之大小。



第 60 圖

上圖（第60圖）爲五年九月某日午前6時至午後10時滬寧鐵路上行及下行之圖式運行表。圖中之粗線示

特別快車及快車,細線示其他各車,(卽慢車,貨車等)

以圖中車站之距離,與實際之距離比較。

示列車通過各車站之時刻。

注意路線上土地之高低,其速度若何,並在何處變更,且何處有高地,試就7時15分由上海開,2時25分到南京之特別快車討論之。(如能實地考察尤善)

上行車與下行車,在何車站或在郊野之何處相會,(交叉)試示其相會之時,及其交點與附近之車站之距離。

試據普通之數字運行表(卽開車時刻路程表)作讀者所在地附近之某鐵路之列車之圖式運行表。

第三章 多元一次方程式

51. 多元一次方程式之圖式的解法

有二未知數之一次方程式之標準之形爲

$$ax+by=c \tag{1}$$

有三未知數者爲

$$ax+by+cz=d \tag{2}$$

以下準此

$a, b, c,$ 等。謂之方程式之<u>係數</u>。(1)式之 c 及(2)式之 d,名爲<u>常數項</u>。

於此種方程式,例如 $2x+3y=4$, 求其一未知數,(如 y) 則 $y=\frac{4-2x}{3}$, 然尙含有他之未知數 x, 故此結果,尙未解完。

今有含與上相同諸未知數之第二方程式,例如 $5x+6y=7$, 則得用同樣之求法,由是,得 $y=\frac{7-5x}{6}$, 卽雙方之 y 之值相等。如是,得次之方程式。

$$\frac{4-2x}{3}=\frac{7-5x}{6}$$

此式惟含一個未知數 x, 故由是得求其根 $x=-1$, 旣知 x 之值,則以之代入前之得 y 之任何式(含 x 者),卽能決定 y 之值(卽 $+2$)

今有二方程式

I. $$ax+by=c$$

II. $$dx+ey=f$$

則得二直線,而設 x 及 y 爲在其上之任意點之坐標,則由此等方程式,得畫其二直線。今令兩式變形。

I. $$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

II. $$y=-\frac{d}{e}x+\frac{f}{e}$$

則方程式 I, 有向上率 $-\frac{a}{b}$ 及截線份 $\frac{c}{b}$, 方程式 II, 有向上率 $-\frac{d}{e}$ 及截線份 $\frac{f}{e}$. 由是易作其二直線,

(或以任意之二值代x，求其與之對應之y之值，以定對於各直線之二點，亦可。)此等之圖，有兩直線之交點之坐標。然此交點爲兩直線所公有，故其坐標，不得不與兩方程式相合。故其交點之坐標，卽爲所與之兩方程式之根。

故得次之法則。

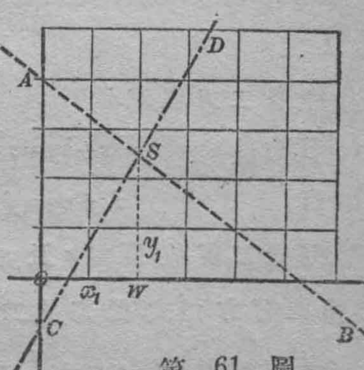
〔法則〕欲解有二未知數之兩方程式。則畫屬於兩方程式之二直線。由是求其交點之坐標，此等之坐標爲兩方程式之根。

〔例〕(第61圖)有二方程式

I.　$3x+4y=16.$

II.　$7x-4y=4$

I之截線份爲$+4$，且向上率爲$-\frac{3}{4}$，由是得直線AB。



第 61 圖

II之截線份爲-1，且向上率爲$+\frac{7}{4}$，由是得直線CD.

此二直線交於S，而交點之坐標。$x_1=+2$，$y_1=+2.5$，適合於兩方程式。何則，

I　　$3\times2+4\times\frac{5}{2}=16$

II $$7\times2-4\times\frac{5}{2}=4$$

故此交點之坐標,爲所與方程式之根。

如是,有二未知數之例,須用二方程式。

52. 多元一次方程式之代數的解法

於含三未知數以上之方程式,恆不能用圖式解之。茲先考察含三未知數之例,須有幾個方程式。

〔例〕有方程式 $2x+3y+4z=20$. 由是求其未知數 z, 得 $z=\frac{20-2x-3y}{4}$. 添以第二之方程式 $4x+2y+3z=17$. 則更得 $z=\frac{17-4x-2y}{3}$. 置此兩個 z 之值相等,得 $\frac{20-2x-3y}{4}=\frac{17-4x-2y}{3}$. 此方程式仍含有兩個未知數。故未能解。

如是,對於有三個未知數之例,僅有兩個方程式。仍未足用。然更有第三方程式 $3x+4y+2z=17$. 以之與第一(或第二)方程式,再導得含二未知數 x 及 y 之一方程式。即 $\frac{20-2x-3y}{4}=\frac{17-3x-4y}{2}$. 今得含二未知數 x 及 y 之兩個方程式。則由是可定 x 及 y 之值。又以此等之值,代入上記含 z 之任何式,可得 z 之值。

故有三個未知數之例,不得不與以三個方程式。

〔通例〕欲解含有 n 個未知數之方程式,必須先有 n 個方程式。

若所與之多元方程式非標準之形。則當依§49，與對於一未知數同樣,先化之爲標準之形。但須注意揭於次之各事。

於含未知數之方程式。若現有反數，即$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$,之形。可不消去其分母，惟對於未知數之反數。(有時對於分子之某公共因數)以新未知數代之。先依此新未知數。解其方程式。依此所求之解,易得原未知數之解。

〔例〕
$$\frac{2}{x}+\frac{9}{y}=4.$$
$$\frac{12}{x}-\frac{15}{y}=1.$$

設 $\frac{2}{x}=u,\qquad \frac{3}{y}=v.$ 則

$$u+3v=4$$
$$6u-5v=1$$

解之得 $u=1,\ v=1,$ 依之得

$$\frac{2}{x}=1,\ \frac{3}{y}=1,\ \text{由是,}\ x=2,\ y=3$$

若所與之諸方程式,其未知數與他數共同結合。則可對於如是之結合,引入新未知數解之。此所得之結果,爲如前述單簡之新方程式。

如此之結合中,其單簡且重要之形,爲未知數之和與差。若一式爲未知數之和,他一式爲未知數之差,則各未知數之值可直求得。

如　$x+y=a,\qquad x-y=b$

則可直得　$x=\dfrac{a+b}{2},\qquad y=\dfrac{a-b}{2}$

〔例 I〕解　$\dfrac{5(x+y)}{2}+\dfrac{7(x-y)}{3}=34$

$$\frac{11(x+y)}{2}-\frac{5(x-y)}{3}=34.$$

解. 先設　$\dfrac{x+y}{2}=u,\qquad \dfrac{x-y}{3}=v.$

則得方程式　$5u+7v=34,\quad 11u-5v=34.$

解之,得　$u=4,\qquad v=2.$

由是　$x+y=8,\qquad x-y=6$

故　$x=\dfrac{8+6}{2}=7,\quad y=\dfrac{8-6}{2}=1$

〔例 II〕解　$\dfrac{16x}{x+7}+\dfrac{5y}{7-y}=4$

$$\frac{24x}{x+7}+\frac{10y}{7-y}=7$$

解. 於方程式,設　$\dfrac{8x}{x+7}=u,\quad \dfrac{5y}{7-y}=v,$

則得次之形　$2u+v=4.$

$$3u+2v=7$$

解之,則　$u=1,\qquad v=2,$

由是得　$\dfrac{8x}{x+7}=1,\quad \dfrac{5y}{7-y}=2.$

更解之,得　$x=1,\qquad y=2.$

53. 消法

如前款所述，由含二未知數之二方程式，得導出含一未知數之一方程式。由含三未知數之三方程式，得導出含二未知數之二方程式。

依此類推，則含 n 個未知數之 n 個方程式，亦恆可解。漸次解之，終導出含一未知數之一方程式。

欲達到此最後之結果，有種種之方法。其一法已述於 §53. 即由多數之方程式，(含同數之未知數)得各別算出相同之一未知數。且置此等之值互相等。是也。今就此法，不厭求詳。故更說明之。

由三個所與之方程式，先算出 z 之三值。置其每二個互相等，作含 x, y, 之二方程式。更由是導出含一未知數之一方程式。此法名爲**比較消法**。或**等置法**。

故於此方法，與以下所示之他法同樣，即由含 n 個未知數之 n 個方程式。先導出含 $n-1$ 個未知數之 $n-1$ 方程式。是也。

其第二之方法，名爲**代入消法**。即以一未知數之值，(由所與方程式之一導出，尚含有他未知數者。)代入其他之諸方程式。其結果當減少方程式一個。(未知數之個數亦減少一個)

如是,將所得$n-1$個方程式,化之爲標準之形。由其一又導出未知數之一值,以之代入他方程式。依次往復行之,遂得含一未知數之一方程式。

〔例〕解 (1)　$2x+3y+4z=20$

(2)　$4x+2y+3z=17$

(3)　$3x+4y+2z=17$

解 由(1)得　$x=\dfrac{20-3y-4z}{2}$. 以之代入(2)及(3)則

$$4\times\frac{20-3y-4z}{2}+2y+3z=17$$

$$3\times\frac{20-3y-4z}{2}+4y+2z=17$$

化之爲標準之形,依次得

(4)　$4y+5z=23$

(5)　$y+8z=26$

由(5)式得$y=26-8z$,以此值代入(4)式。則

(6)　$4(26-8z)+5z=23$

是爲含一未知數之一次方程式

第三法。若所與之方程式,其同未知數之係數相等。則此等之方程式,視其符號之異同。將各邊相加或相減,以消去其未知數,其結果得少一未知數之方程式。此法名爲**加減消法**。

〔例〕解 (1) $3x+4y+5z=26$

(2) $7x-4y+z=2$

(3) $13x+4y-7z=0$

以(1)與(2)相加，得

(4) $10x+6z=28$

或 $5x+3z=14$

由(1)減(3)，得

(5) $-10x+12z=26$

或 $-5x+6z=13$

若兩方程式，其同未知數之係數不相等。則得以適當之數(求兩係數之最小公倍數)乘兩方程式，使其兩係數相等。

〔例〕解 $8x+3y=17$

$18x-5y=3$

今於兩式，欲使同未知數 x 之係數相等。則求兩係數之最小公倍數72. 以9乘第一式，以4乘第二式。則得

$$\begin{array}{r} 72x+27y=153 \\ 72x-20y=12 \\ \hline +47y=141 \end{array}$$

用減法

$$y=3$$

54. 例題

試以圖式的解法,或代數的解法及消法,求以下各方程式中 x, y, z, 之值

(1) $3x-5y=13$, $2x+7y=81$.

(2) $3x+4y=2$, $9x+20y=8$,

(3) $3x-2y=1$, $3y-4x=1$.

(4) $x+y=15$, $x-y=7$.

(5) $4x-3y=6$, $16x+12y=72$.

(6) $3x+3y=16$, $x+y=5$.

〔解〕以 3 除第一方程式之兩邊,則得 $x+y=5\frac{1}{3}$, 然第二方程式為 $x+y=5$. 即一方 $x+y$ 為 $5\frac{1}{3}$, 他一方 $x+y=5$, 故不能求其 x 及 y 之值。

〔注意〕如此之方程式,謂之**矛盾方程式**。或**悖理式**

(7) $\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}y=18$, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=21$.

(8) $\frac{1}{6}(4x-3y-7)=\frac{3}{10}x-\frac{2}{15}y-\frac{5}{6}$,

$\frac{1}{3}(y-1)+\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}y=\frac{1}{15}(y-x)+\frac{1}{6}x+\frac{11}{10}$.

(9) $(x-1)(y+9)=xy-5x+y-15$,

$(x+2)(y-7)=xy-1$.

(10) $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$, 並討論其答解。

(11) $x+y-z=1$,

$8x+3y-6z=1$,

$3z-4x-y=1$,

(12) $2x-4y+9z=28$,

$7x+3y-5z=3$,

$9x+10y-11z=4$.

(13) $x+2y+3z=3x+y+2z=2x+3y+z=6.$

(14) $y+z=2a,$

$z+x=2b$

$x+y=2c$

(15) $y+z-x=2a,$

$z+x-y=2b,$

$x+y-z=2c$

(16) 解 $ax+by+cz=d$

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

(17) 討論16題之答解。

(18) $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=\frac{n}{x}+\frac{m}{y}=1.$

55. 應用問題

(19) 甲乙二人,各有若干圓之儲蓄,今甲之儲蓄額再加26圓,則當乙之儲蓄額之3倍,又乙之儲蓄額若用去5圓,則適當甲之儲蓄額之半,問甲乙之儲蓄額各幾何。

(20) 攝氏15度之水,與66度之水,各以若干混合,則成攝氏48度之水380 kg.

(21) 有某工程,A, B兩人合做,4日成就,AC兩人合做,6日成就,B, C兩人合做,12日成就,問A, B, C三人合做,幾日成就。

(22) 甲乙二工共做一工程,m日成就,然動工n日後。甲以他事廢業,唯乙工獨做,p日完成,問此工程,唯甲工獨做,或乙工獨做,各須幾日完成。

(23) 有鎗手,向距離500公尺(m)之的擊射,發射後經$4\frac{1}{3}$秒始聞中的之響。又有離鎗手650公尺,離的400公尺,之傍觀者。聞發射之響後經$2\frac{1}{3}$秒,始聞中的之響。然則音響及鎗彈之速,各爲每秒幾公尺,但設音響與鎗彈,其速均爲等速。

(24) 在某戰爭前,計算敵軍與本軍之軍勢,敵之5人適當本軍之6人,然在戰爭時,敵損失14000人,本軍損失6000人,至戰爭後,敵之2人適當本軍之3人,然則戰爭前敵軍,本軍,各若干人。

(25) 有複線之鐵路,今在此鐵路上,有甲乙二列車,向同方向進行,甲列長60碼,乙列長72碼,而甲列以12秒經過乙列,若乙列之速增前速之半,則甲列欲經過乙列,須費時24秒,問甲乙二列車之速,各爲每時幾英里。

但1英里=1760碼,

(26) 有甲乙丙三支輪船,同往來於相同之兩港。甲船之速,每時較乙船快$\frac{1}{2}$海里。航行時間少$1\frac{1}{2}$時。乙船之速,每時較丙船快1海里之$\frac{3}{4}$,航行時間少$2\frac{1}{2}$時,問兩港間之距離幾何。

(27) 某日砲聲傳達之速,順風爲每秒$344.42m$,逆風爲每秒$335.94m$,然則在無風之空氣中音響傳達之速幾何,又此日之風之速幾何。

(28) 汽車由 A 地向 B 地進行,開行一時後,忽遇障礙,停車24分。由是增原速之 $\frac{1}{6}$,復行,及至 B 地,已過原定時刻15分。

若以原速多行5英里,始遇障礙,則當更遲2分,問原速每時幾英里,又 AB 之距離幾何。

實用主義

中學新代數

第一册 答案

第一編 四則問題解法

〔原文〕 今將第二被加數,通以 x 表之。則各匣內之銀數,得用 $s=5+x$ 表之。

若於此式,依次以 0, 1, 2, 3, 4, 等之數代 x,則其和依次取如何之值。(原書 §8.)

〔解〕 原有 $s=5+x$

令 $x=0$, 則 $s=5+0=5$.

令 $x=1$, 則 $s=5+1=6$.

令 $x=2$, 則 $s=5+2=7$.

令 $x=3$, 則 $s=5+3=8$.

令 $x=4$, 則 $s=5+4=9$.

....

〔原文〕 又別依和 $s=11+x$ 考之,以如上之自然數代 x,則其和 s 取如何之值,且如何變更。(原書 §8.)

〔解〕 原有 $s=11+x$

令 $x=0$, 則 $s=11+0=11.$

令 $x=1$, 則 $s=11+1=12.$

令 $x=2$, 則 $s=11+2=13.$

令 $x=3$, 則 $s=11+3=14.$

令 $x=4$, 則 $s=11+4=15.$

…… ………………

〔原文〕 今有一寒暖表,在午前六時指 $8°$,若每一時間水銀柱昇 $1°$,則午前十時及午後一時當指何度。將此關係以如上記之方程式表之,並以 0, 1, 2, 3, 4, 等之數代入,試示在六時以後之寒暖表之度數。(原書 §8.)

〔解〕 因水銀柱每一時間昇 $1°$,

六時至十時共 4 時間。故寒暖表當指 $8°+4°=12°$。

又午前六時至午後一時共 7 時間。故寒暖表當指 $8°+7°=15°$

表此關係之方程式爲

$$s=8+x$$

卽午前六時 $x=0$, 故 $s=8+0=8.$

„ „ 七時 $x=1$, 故 $s=8+1=9.$

„ „ 八時 $x=2$, 故 $s=8+2=10.$

„ „ 九時 $x=3$, 故 $s=8+3=11.$

„ „ 十時 $x=4$, 故 $s=8+4=12.$

卽午前十一時 $x=5$, 故 $s=8+5=13$.

〃 〃 十二時 $x=6$, 故 $s=8+6=14$.

午後一時 $x=7$, 故 $s=8+7=15$.

……………　……　……………

〔原文〕 若有 $d=100-x$, 以 $x=0, 10, 20, 30, 40$, 等代入。其差之値如何變更。(原書 §13.)

〔解〕 原有 $d=100-x$

令 $x=0$, 則 $d=100-0=100$.

令 $x=10$, 則 $d=100-10=90$.

令 $x=20$, 則 $d=100-20=80$.

令 $x=30$, 則 $d=100-30=70$.

令 $x=40$, 則 $d=100-40=60$.

……　……………

〔原文〕 試就上記之例,指明何者爲何者之函數。並附屬於如何之變數。(原書 §13.)

〔解〕 如 $d=100-x$

卽 d 爲 x 之函數。或差之變值 d 附屬於減數之變値 x。

又 $y=90°-x$

卽 y 爲 x 之函數。或 α 角之變値 y 附屬於 β 角之變

值x,卽直角三角形之兩銳角。其一銳角之變值恆爲他一銳角變值之函數。或一銳角之變值附屬於他一銳角之變值。

〔原文〕依幾何學,二等邊三角形之底角變,則其頂角恆因之而變,試以式顯明後者附屬於前者,卽後者爲前者之函數。(原書§13.)

〔解〕二等邊三角形之三角和爲$180°$,其兩底角相等。卽以x表底角β之變值。則當以差形$180°-2x$表頂角α之變值y。

卽
$$y=180°-2x$$

卽y附屬於x。y爲x之函數。

〔原文〕再就§8之例考察,試指明何者爲何者之函數,並附屬於如何之變數,又與本款所論之函數,有何相異之點。(原書§13.)

〔解〕再就§8之例考察。如　$s=5+x$。

卽s爲x之函數,或和之變值s附屬於被加數之變值x。而本款所論之函數。乃差之變值d附屬於減數之變值x,是卽兩者相異之點。

〔原文〕在算術內乘法之計算,通用九九表,此九九表.原爲重要諸數相乘之結果,其意在使讀此表者演算時較爲敏捷。

今本此理,於多項式之乘法內,揭載諸重要多項式(和,差)相乘之結果,使讀者便於演算。

此等結果,以等式表之,是謂**乘法之公式**。(原書 § 20.)

〔解〕此種公式。用處最多。於分解因數時尤爲必要。宜錄入筆記。並熟記之。

(1)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2)　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(4)　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(5)　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(6)　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(7)　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(8)　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

〔原文〕公式 1 及 2,有何相異之點。(原書 § 20.)

(1) 及 (2) 相異之點,可用複號記之。

卽　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

(1) 式用複號中之 + 號,(2) 式用複號中之 − 號。

〔原文〕試以言辭說明此等公式。(原書 § 20.)

〔解〕(1)　任意兩數量和之平方,等於其平方和,加其積之二倍。

(2) 任意兩數量差之平方,等於由其平方和減其積之二倍。

〔原文〕 公式3,與1及2有何相異之點。(原書 § 20.)

〔解〕 (1) 爲和與和之積(卽和之平方)

(2) 爲差與差之積(卽差之平方)

(3) 爲和與差之積。

玆以言辭說明(3)式如次:

(3) 任意兩數量之和與差之積,等於其平方之差

〔原文〕 試就公式4及5,舉其異同之點。(原書 § 20.)

〔解〕 (4)及(5)異同之點,亦可用複號記之。

卽 $$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

(4)式用複號中之+號,(5)式用複號中之−號。

〔原文〕 試舉6及7兩公式相異之點,更以之與公式4及5比較。(原書 § 20.)

〔解〕 (6)及(7)相異之點,亦可用複號記之。

卽 $$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$$

(6)式用複號中之上號,(7)式用複號中之下號。

又以(6)及(7)與(4)及(5)比較。

則 (4)爲和之立方

(5)爲差之立方

(6)爲$(a+b)$與(a^2-ab+b^2)之積

(7)爲$(a-b)$與(a^2+ab+b^2)之積

迥然不同。

公式(6)及(7),分解因數時亦多用。卽示任意兩數量之立方和,及任意兩數量之立方差,均可分解其因數。

〔原文〕 試舉公式8與公式1相異之點,且示若何變更,則可由公式8導出公式1。(原書§20.)

〔解〕 (8)式與(1)式相異之點,在(8)式爲兩和之積。(兩因數不同)(1)式爲和之平方。(卽因數相同)

若於公式(8),令 $a=b$,則

$$(x+b)(x+b)=(x+b)^2=x^2+2xb+b^2$$

卽導出公式1。

〔原文〕 又 $y=a-x$ (差)爲 x 之一函數。於此函數,其 x 之值增加,則 y 之值減少,然於 $y=a+x$ (和)及 $y=ax$ (積),則 x 之值增加,其函數之值亦增加。

設 x 之值連續不絕增1,試討論以自然數代 x,則其和及差當若何增加。(原書§21.)

〔解〕 以自然數代 x,則函數 $y=a-x$ 之各值爲遞降的。函數 $y=a+x$ 及 $y=ax$ 之各值爲遞昇的。卽 x 前有負號者,其函數爲遞降的。x 前無負號者,其函數爲遞昇的。

〔原文〕 考察揭於次之諸例

$y=5+x$,	$y=13+x$,	$y=x-5$
$y=5x$,	$y=9x$,	
$y=5-x$,	$y=11-2x$,	$y=3x-11$.

此等函數中,何者爲遞昇的,何者爲遞降的。(原書 § 21.)

〔解〕 依前解,知 $y=5-x$ 及 $y=11-2x$ 爲遞降的。其餘均爲遞昇的。

〔原文〕 於次之函數,以自然數 0, 1, 2, 3, 4, 等代 x, 試討論其變化。(原書 § 25.)

$$y=\frac{x}{4},\ y=\frac{x+1}{4},\ y=\frac{x-3}{3},$$

並
$$y=\frac{4}{x},\ y=\frac{5}{x+5},\ y=\frac{3}{x-5},\ y=\frac{1}{10-x}.$$

〔解〕 $y=\frac{x}{4}$, 對於 $x=1$, 得 $y=\frac{1}{4}$

„ „ $x=2$, 得 $y=\frac{1}{2}$

„ „ $x=3$, 得 $y=\frac{3}{4}$

„ „ $x=4$, 得 $y=1.$

…… ……

即 $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1<\cdots\cdots$

又 $y=\frac{x+1}{4}$, 對於 $x=0$, 得 $y=\frac{1}{4}$

„ „ $x=1$, 得 $y=\frac{1}{2}$

„ „ $x=2$, 得 $y=\frac{3}{4}$

„ „ $x=3$, 得 $y=1.$

…… ……

即　$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1<\cdots\cdots\cdots$

又　$y=\frac{x-3}{3}$, 對於 $x=1$ 得 $y=-\frac{2}{3}$

„ „ $x=2$ 得 $y=-\frac{1}{3}$

„ „ $x=3$ 得 $y=0$

„ „ $x=4$ 得 $y=\frac{1}{3}$.

…… ………

即　$-\frac{2}{3}<-\frac{1}{3}<0<\frac{1}{3}<\cdots\cdots\cdots$

以上均因分子增加而分數之值亦均等增加。

又　$y=\frac{4}{x}$, 對於 $x=1$ 得 $y=4$

„ „ $x=2$ 得 $y=2$

„ „ $x=3$ 得 $y=1\frac{1}{3}$

„ „ $x=4$ 得 $y=1$

„ „ $x=5$ 得 $y=\frac{4}{5}$

…… ……

即　$4>2>1\frac{1}{3}>1>\frac{4}{5}>\cdots\cdots\cdots$

又　$y=\frac{5}{x+5}$, 對於 $x=1$ 得 $y=\frac{5}{6}$

„ „ $x=2$ 得 $y=\frac{5}{7}$

„ „ $x=3$ 得 $y=\frac{5}{8}$

…… ……

即 $\frac{5}{6}>\frac{5}{7}>\frac{5}{8}>\cdots\cdots\cdots$

又 $y=\frac{3}{x-5}$ 對於 $x=1$ 得 $y=-\frac{3}{4}$

,, ,, $x=2$ 得 $y=-1$

,, ,, $x=3$ 得 $y=-1\frac{1}{2}$

,, ,, $x=4$ 得 $y=-3$

,, ,, $x=5$ 得 $y=\frac{3}{0}=\infty$ 或 $=0$

,, ,, $x=6$ 得 $y=3$

,, ,, $x=7$ 得 $y=1\frac{1}{2}$

,, ,, $x=8$ 得 $y=1$

$\cdots\cdots$ $\cdots\cdots$

即 $-\frac{3}{4}>-1>-1\frac{1}{2}>-3>\underset{\text{或}<\infty>}{0}<3>1\frac{1}{2}>1$

此因分母正負不定。其値之變化亦無定。

又 $y=\frac{1}{10-x}$, 對於 $x=1$ 得 $y=\frac{1}{9}$

,, ,, $x=2$ 得 $y=\frac{1}{8}$

$\cdots\cdots$ $\cdots\cdots$

,, ,, $x=9$ 得 $y=1$

,, ,, $x=10$ 得 $y=0$ 或 $=\infty$

,, ,, $x=11$ 得 $y=-1$

,, ,, $x=12$ 得 $y=-\frac{1}{2}$

$\cdots\cdots$ $\cdots\cdots\cdots$

則　$\frac{1}{9}<\frac{1}{8}<\cdots\cdots<1<\underset{\text{或}\ >0}{\infty}>-1<-\frac{1}{2}<\cdots\cdots\cdots$

由是知分母爲常數與變數之差者。不適用本款之法則。

〔原文〕例題．求以下各式之因數。(原書 § 31.)

(1)　$x^2+x=x(x+1)$

(2)　$2ax+\frac{1}{2}x=x(2a+\frac{1}{2})$

(3)　$4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot1+1^2=(2x+1)^2$

(4)　$x^2+xy+\frac{1}{4}y^2=x^2+2\cdot x(\frac{1}{2}y)+(\frac{1}{2}y)^2=(x+\frac{1}{2}y)^2$

(5)　$25a^2-b^2=(5a)^2-b^2=(5a+b)(5a-b)$

(6)　$16x^2-9y^2=(4x)^2-(3y)^2=(4x+3y)(4x-3y)$

(7)　$8a^3+b^3=(2a)^3+b^3=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

(8)　$27x^3-\frac{1}{8}y^3=(3x)^3-(\frac{1}{2}y)^3=(3x-\frac{1}{2}y)(9x^2+\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2)$

(9)　$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

(10)　$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

(11)　$3x^2-10x+3=3x^2-9x-x+3=3x(x-3)-(x-3)$

$$=(3x-1)(x-3)$$

(12)　$2x^2+11x+12=2x^2+8x+3x+12$

$$=2x(x+4)+3(x+4)$$

$$=(2x+3)(x+4)$$

(13)　$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$

(14)　$x^2-3x-28=x^2+4x-7x-28$

$$=x(x+4)-7(x+4)=(x-7)(x+4)$$

(15) $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

(16) $x^3-3x^2+x-3=x^2(x-3)+(x-3)=(x^2+1)(x-3)$

(17) $ax^3-x+a-1=a(x^3+1)-(x+1)$

$$=(x+1)a(x^2-x+1)-(x+1)$$

$$=(x+1)\{a(x^2-x+1)-1\}$$

(18) $a^2-3b^2-c^2-2ab+4bc$

$$=a^2-2ab+b^2-4b^2+4bc-c^2$$

$$=(a-b)^2-(2b-c)^2=(a+b-c)(a-3b+c)$$

第二編 坐標問題解法

〔原文〕 坐標(原書 §32.)

〔解〕 習本款時,宜加以實習。卽由甲生以一物埋於空地。以其坐標示乙生,令乙生依其坐標取回此物。

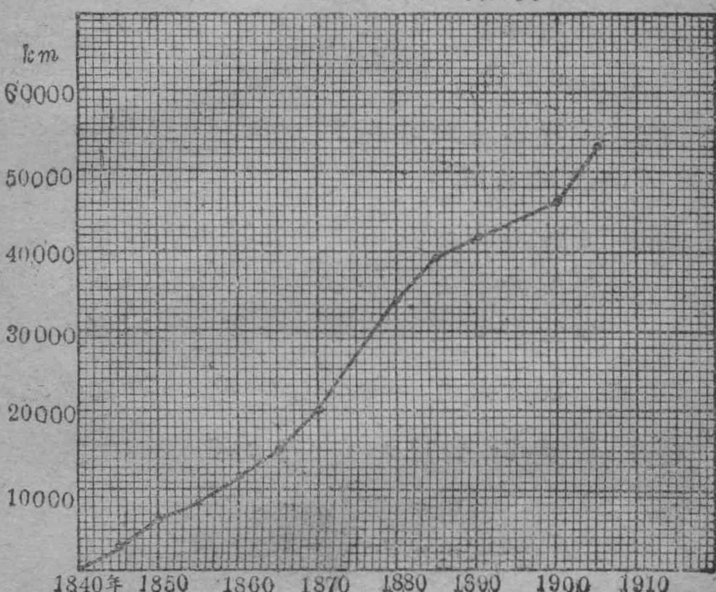
〔原文〕 又由1840年至1905年,德國鐵道增加之 *km* (公里;或啓羅米突)數,如次。

試依此諸數,顯之於圖表,(描寫)

1840年	550 *km*,	1845年	2300 *km*,	1850年	6050 *km*,
1855年	8300 *km*,	1860年	11650 *km*,	1865年	14800 *km*,
1870年	20000 *km*,	1880年	33800 *km*,	1885年	39150 *km*,
1890年	41800 *km*,	1900年	46200 *km*,	1905年	52700 *km*.

(原書 §33.)

〔解〕 今依以上各數,描爲圖表。如次



〔原文〕〔問〕示銀數之縱線,其端 i_1, i_2 i_3 等均在一直線上,何故。試依其所生之三角形之全同證明之(原書 §34.)

〔解〕其所生之三角形 $\triangle OW_1i_1$, $\triangle i_1ai_2$, $\triangle i_2bi_3$,……。依幾何學 §100. 兩三角形,若二邊及其夾角相等。則兩三角形全同。故知此等三角形全同。

由是 $Oi_1=i_1i_2=i_2i_3=\cdots\cdots$

卽其方向不變。故 i_1, i_2, i_3 等均在一直線上。

直線 I 示何事, 答 示每週均等增加之銀數。

橫線每增加一單位,直線 I 向上幾何。 答 1.

此直線與橫軸所成之角若何。 答 45°.

直線 II 之向上率幾何。 答 1:2 卽 $\frac{1}{2}$

直線 III 之向上率如何。 答 2:1 卽 2

〔原文〕考察屬於方程式 $y=3x$, $y=\frac{3}{4}x$, $y=ax$ 之直線。其各向上率若何。

〔解〕屬於 $y=3x$ 之直線,其向上率爲3:1卽3

屬於 $y=\frac{3}{4}x$ 之直線其向上率爲3:4或 $\frac{3}{4}$:1卽 $\frac{3}{4}$

屬於 $y=ax$ 之直線,其向上率爲 a:1卽 a.

〔原文〕求其對於 $x=0$, $x=7$, $x=10$, $x=20$ 之 y 之值.

〔解〕於 $y=3x$, 對於 $x=0$, 得 $y=0$

„ „ $x=7$, „ $y=21$

„ „ $x=10$, „ $y=30$

„ „ $x=20$, „ $y=60$

又於　$y=\frac{3}{4}x$, 對於 $x=0$, 得 $y=0$

　　　　　,, ,, $x=7$, ,, $y=\frac{21}{4}=5.25$

　　　　　,, ,, $x=10$, ,, $y=\frac{30}{4}=7.5$

　　　　　,, ,, $x=20$, ,, $y=\frac{60}{4}=15.$

又於　$y=ax$,

對於 $x=0$, 得 $y=0$

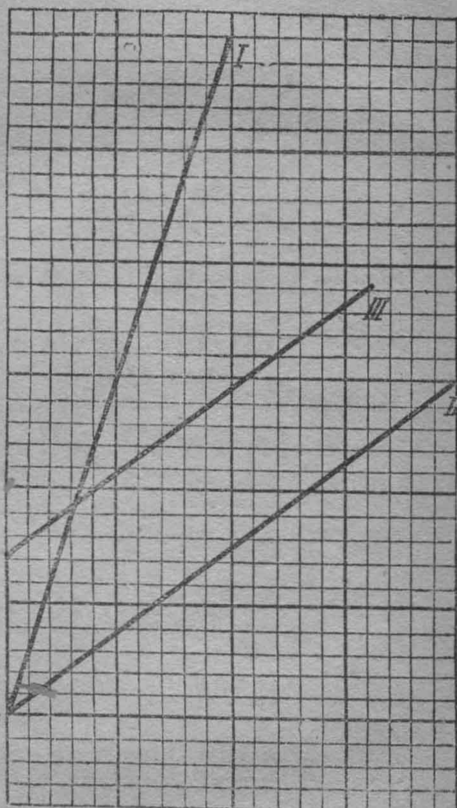
,, ,, $x=7$, ,, $y=7a$

,, ,, $x=10$, ,, $y=10a$

,, ,, $x=20$, ,, $y=20a$

〔原文〕試作圖顯此等直線。

〔解〕如右圖 I 及 II.



〔原文〕欲引直線 $y=3x$ 及 $y=\frac{3}{4}x$, 必須預知 x 及 y 之值幾組。

答. 最少須有二組。因有兩點始能晝一直線也。(以上各原文均見原書 § 34.)

〔原文〕某直線之向上率 $\frac{3}{4}$, 若由橫軸截取線份 7. 則其直線之方程式當爲 $y=\frac{3}{4}x+7$。

試作圖表之。又算對於 $x=1$, $x=2$, $x=3$ 等, 之 y 之值。以之驗與由作圖所得之縱線相合與否。(原書 §34.)

〔解〕 圖如上圖之直線 III,

又　對於 $x=1$, 得 $y=7.75$

„ „ $x=2$, „ $y=8.5$

„ „ $x=3$, „ $y=9.25$

„ „ $x=4$, „ $y=10$.

以之驗作圖所得之縱線適合。

〔原文〕 <u>已知其向上率, 與其縱軸上之截線份。則得作圖表其直線。</u>

以上觀察為基本。作圖表屬於次之諸方程式之直線。

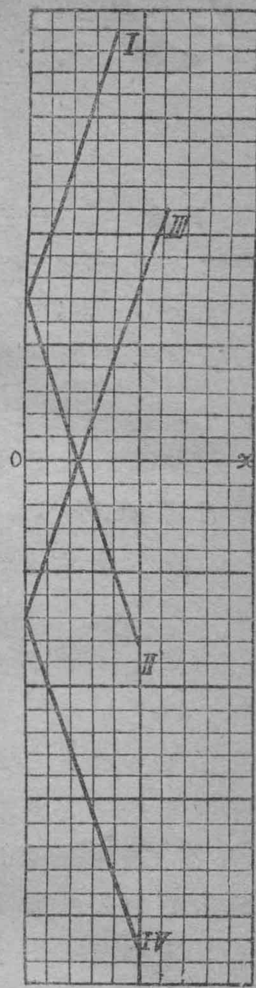
(1)　$y=3x+7$

(2)　$y=-3x+7$

(3)　$y=+3x-7$

(4)　$y=-3x-7$

〔解〕 其直線如右圖。



第三編　比例問題解法

(原書 § 41.) 例題 1. 若 $a:b=c:d$ 求證以下各式。

(1) $ac:bd=c^2:d^2$　　(2) $ab:cd=a^2:c^2$

(3) $a^2:c^2=a^2-b^2:c^2-d^2$

〔解〕 (1) 於 $a:b=c:d$

以 c 乘其兩前項，以 d 乘其兩後項。則得

$$ac:bd=c^2:d^2$$

(2) 於　$a:b=c:d$

可變為　$b:d=a:c$

以 a 乘其兩前項，以 c 乘其兩後項。

則得　$ab:cd=a^2:c^2$

(3) 於　$a:b=c:d$

以其兩邊各自乘，得

$$a^2:b^2=c^2:d^2$$

依 § 40 之定理，得

$$a^2:c^2=a^2-b^2:c^2-d^2$$

此題依代數式解之。即

$$\frac{a^2}{b^2}-1=\frac{c^2}{d^2}-1$$

得　$$\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{c^2-d^2}{d^2}$$

即　$$a^2:c^2=b^2:d^2=a^2-b^2:c^2-d^2.$$

2. 若 $a:b=a+c:b+d$ 求證 $c:d=c+a:d+b$.

〔解〕　$a:b=a+c:b+d$

可變爲　$\dfrac{a+c}{a}=\dfrac{b+d}{b}$

改爲　$\dfrac{a+c}{a}-1=\dfrac{b+d}{b}-1$

即　$\dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}$

即　$c:d=a:b=c+a:d+b$

3. 求 $(a+b)^2$ 與 $(a-b)^2$ 之比例中項。

〔解〕 設比例中項爲 x

$$x=\sqrt{(a+b)^2(a-b)^2}=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

4. 有 $a:b=c:d$ 及 $d:e=f:g$ 求作羣比例。

〔解〕 將 $a:b=c:d$ 變爲

$$c:d=a:b$$

以 b 倍 $d:e=f:g$ 之右邊之比,得

$$d:e=bf:bg$$

以 f 倍 $c:d=a:b$ 之右邊之比,得

$$c:d=af:bf.$$

由是得羣比例

$$c:d:e=af:bf:bg.$$

第四編　一次方程式之問題解法

〔原文〕以圖中車站之距離，與實際之距離比較。(原書 §50.)

原書第60圖以 $4\frac{1}{8}$ 英寸顯200英里。而1英里 $=320\times5.5\times3\times12$ 英寸。(參看算術中英美長度表。)

今　$200\times320\times5.5\times3\times12\div4\frac{1}{8}$

$=200\times320\times5.5\times3\times12\times\frac{8}{33}$

$=200\times320\times.5\times12\times8$

$=100\times320\times12\times8$

$=3072000$

卽實際之長爲原圖之長之3072000倍。故圖中車站之距離爲實際之距離之3072000分之1。卽 $1:3072000$.

〔註〕原書之圖。係五年九月所訂。滬寧鐵路行車時刻路程，於六年九月業已改訂，可依新訂之行車時刻路程表別作圖表示之。

例題　(原書 §54.)

(1)　$3x-5y=13,\qquad 2x+7y=81.$

〔解〕以7乘第一方程式之兩邊。以5乘第二方程式之兩邊，以兩邊各相加。得

$31x=496\qquad\therefore\ x=16$

$48-5y=13\qquad\therefore\ y=\frac{35}{5}=7.$

(2)　$3x+4y=2,\qquad 9x+20y=8.$

〔解〕 以 3 乘第一方程式,則得

$$9x+12y=6.$$

由是減第二方程式,則得

$$-8y=-2 \qquad \therefore \quad y=\tfrac{1}{4}$$

以此值代入任一原方程式。

如代入第一式,則得

$$3x+1=2 \qquad \therefore \quad x=\tfrac{1}{3}$$

(3) $3x-2y=1 \qquad 3y-4x=1.$

〔解〕 以 3 乘第一方程式之兩邊,以 2 乘第二方程式之兩邊。將各邊相加以消去 y,則得

$$x=5.$$

以此代入第一(或第二)方程式,得

$$y=7.$$

(4) $x+y=\overset{18}{15}, \qquad x-y=\overset{22}{7}.$

〔解〕 各邊相加,得 $2x=\overset{11}{22}$,

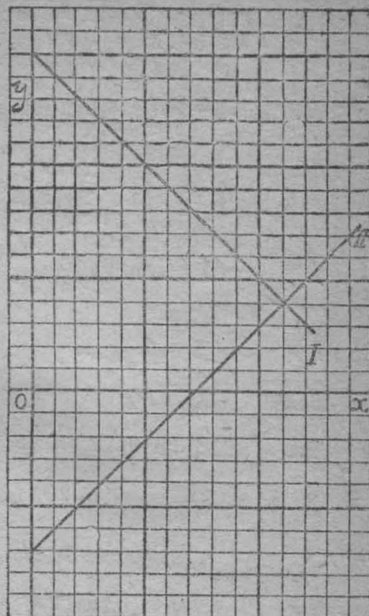
$$\therefore \quad x=11.$$

又由第一方程式之各邊,減第二方程式之各邊。

即
$$\begin{array}{r} x+y=15 \\ x-y=7 \\ \hline \end{array}$$

相減,得
$$2y=8$$

$$\therefore \quad y=4$$



此題用圖式解之如右。

I 爲表第一方程式之直線。

II 爲表第二方程式之直線。

其交點之坐標

$x_1=+11,\quad y_1=+4,$

爲所與方程式之根。

(5)　$4x-3y=6,$

$16x+12y=72$

〔解〕 以4除第二方程式之兩邊,得

$4x+3y=18$

以此式與第一方程式兩邊相加,得

$8x=24 \qquad \therefore\ x=3$

由是　$y=2.$

此題亦可用圖式解之。學者可自作圖試之。

(7)　$\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}y=18,\qquad \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=21.$

〔解〕 去分母,得

$6x+5y=540 \qquad (1)$

$2x-y=84 \qquad (2)$

以 3 乘第二方程式,得

$6x-3y=252$

以此與第一方程式兩邊相減,得

$$8y=288, \qquad \therefore \quad y=36.$$

由是 $x=60.$

(8) $\frac{1}{5}(4x-3y-7)=\frac{3}{10}x-\frac{2}{15}y-\frac{5}{6}.$

$$\frac{1}{3}(y-1)+\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}y=\frac{1}{15}(y-x)+\frac{1}{6}x+\frac{11}{10}.$$

〔解〕 以30乘第一方程式,及第二方程式以去其各分母,得

$$24x-18y-42=9x-4y-25.$$

$$10y-10+15x-9y=2y-2x+5x+33.$$

即
$$15x-14y=17.$$
$$12x-y\ =43.$$

由是得
$$x=3\tfrac{42}{51}.$$
$$y=2\tfrac{45}{51}.$$

(9) $(x-1)(y+9)=xy-5x+y-15,$ (1)

$(x+2)(y-7)=xy-1.$ (2)

〔解〕 由(1)得

$$xy+9x-y-9=xy-5x+y-15$$

即
$$14x-2y+6=0 \qquad (3)$$

同樣,由(2)得

$$7x-2y+13=0 \qquad (4)$$

由(3)減(4)，　$7x-7=0$　$\therefore\ x=1.$

由是　$y=10.$

(10)　$ax+by=c,\ a'x+b'y=c'$ 並討論其答解。

〔解〕此二方程式之圖式的解法，已述於原書 §51. 茲但討論其答解。即

若 $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ 則兩直線之交點之坐標，爲此兩方程式之根。

若 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ 又 $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ 則兩直線合爲一直線，即僅有一個方程式，其根之值不定。

即　$x_1=\pm\frac{0}{0},\quad y_1=\pm\frac{0}{0}.$

若 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ 而 $\frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'}$ 則兩直線成平行線，即其交點在無窮遠。故

$$x_1=\pm\infty,\quad y_1=\pm\infty.$$

〔注意〕若 a, a', b, b' 中有一爲 0，則二方程式中當有一式爲一元一次方程式，依一元一次方程式之圖解所求得之點，畫與縱軸或横軸平行之直線，次乃依二次方程式作傾斜之直線，則此線與前線之交點之坐標，即爲此二方程式之根。

〔增補問題〕 $ax+by=c,\ a'x+by'=c'.$

但 $a=0$，試作圖式解之。

又(10)題之代數的解法如次。

此題原解二元一次方程式，故 x 及 y 之係數原不爲0，卽 a 不爲0，則以 a' 乘(1)式之兩邊。以 a 乘(2)式之兩邊。用減法得

$$(a'b-ab')y=a'c-ac'. \tag{3}$$

I. 若 $a'b-ab'\neq 0$， 則 $y=\dfrac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$. (4)

以 y 之此值代入(1)，得

$$ax+b\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=c \quad \therefore\ x=\frac{c'b-cb'}{a'b-ab'}. \tag{5}$$

II. 若 $a'b-ab'=0$ 則由(3)不能變爲(4)。

若此時 $a'c-ac'=0$ 其 $a\neq 0$，則因

$b'=b\dfrac{a'}{a}$， $c'=c\dfrac{a'}{a}$，故(2)式變爲

$$a\frac{a'}{a}x+b\frac{a'}{a}y=c\frac{a'}{a} \tag{6}$$

卽(1)與(6)惟兩邊有乘數 $\dfrac{a'}{a}$ 之不同。

在此例(1)與(2)相合。卽僅有一個方程式，其根恆不定。

若 $a'c-ac'\neq 0$，則設 $c'=c\dfrac{a'}{a}+d$. 但 $d\neq 0$.

則(2)式變爲 $a\dfrac{a'}{a}x+b\dfrac{a'}{a}y=c\dfrac{a'}{a}+d$ (7)

然以 $\dfrac{a'}{a}$ 乘(1)之兩邊。由(7)式之兩邊減之，則得 $d=0$，卽(1)與(2)不相容。是爲悖理式。

〔注意〕 若 a, a' b, b' 中有一爲 0, 則當有一式爲一元一次方程式,可先解一元之方程式,次以其所得之值代入二元之方程式解之。

在高等數學,於 a, a', b, b' 中有一爲 0 之例,尙有許多研究,然今僅習一次方程式,此項研究,置爲後圖,可也。

(11)　$x+y-z=1,\qquad 8x+3y-6z=1,$

$3z-4x-y=1.$

〔解〕 由 (1) 得　$z=x+y-1.$

以 z 之此值代入 (2) 及 (3)

$$8x+3y-6x-6y+6=1.$$

$$3x+3y-3-4x-y=1.$$

卽　$2x-3y=-5.\qquad (4)$

$2y-x\ =4.\qquad (5)$

以 2 乘 (5),以之加於 (4),得

$y=3,$　由是　$x=2,\quad z=4.$

(12)　$2x-4y+9z=28,\qquad (1)$

$7x+3y-5z=3,\qquad (2)$

$9x+10y-11z=4.\qquad (3)$

〔解〕 由 (1) 得　$y=\frac{1}{4}(2x+9z)-7.$

以 y 之此值代入 (2) 及 (3)

$$7x+\tfrac{3}{4}(2x+9z)-21-5z=3,$$

由是 $34x+7z=96$ (4)

又 $9x+\frac{10}{4}(2x+9z)-70-11z=4,$

由是 $28x+23z=148.$ (5)

由 (4) 及 (5) 得 $x=2,\ z=4,$ 依是 $y=3.$

(13) $x+2y+3z=3x+y+2z=2x+3y+z=6.$

〔解〕 改書所與之方程式,即

$$x+2y+3z=6, \quad (1)$$

$$3x+y+2z=6, \quad (2)$$

$$2x+3y+z=6. \quad (3)$$

以 (3) 加於 (2), 由是減 (1). 則

$$2x+y=3. \quad (4)$$

以 3 乘 (3), 由是減 (1), 則

$$5x+7y=12. \quad (5)$$

以 7 乘 (4), 由是減 (5), 則

$$x=1,$$

以 x 之此值代入 (4), 則得

$$y=1.$$

以 x, y 之此值代入 (1), 則得

$$z=1.$$

(14) $y+z=2a$ (1)

$$z+x=2b \quad (2)$$

$$x+y=2c \quad (3)$$

〔解〕 加 (2) 於 (1), 以 (3) 減之, 則得

$$2z=2(a+b-c) \quad \therefore \quad z=a+b-c$$

同樣, 得　$y=c+a-b$ 及 $x=b+c-a$

(15)　$y+z-x=2a$　(1)

$z+x-y=2b$　(2)

$x+y-z=2c$　(3)

〔解〕 加 (2) 於 (1), 則

$$2z=2(a+b) \quad \therefore \quad z=a+b$$

同樣　$y=a+c,\qquad y=b+c$

(16)　$ax+by+cz=d$　(1)

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$　(2)

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$　(3)

〔解〕 以 l 乘 (2) 之兩邊, m 乘 (3) 之兩邊, 以所得之式加入 (1) 之兩邊, 則得

$$(a+la_1+ma_2)x+(b+lb_1+mb_2)y+(c+lc_1+mc_2)z$$
$$=d+ld_1+md_2$$

今以 l 及 m 之適合於

$b+lb_1+mb_2=0$　(4)

$c+lc_1+mc_2=0$　(5)

之值　$l=\dfrac{b_2c-bc_2}{b_1c_2-b_2c_1}$

$m=\dfrac{bc_1-b_1c}{b_1c_2-b_2c_1}$　代之, 則得

$$x=\frac{d(b_1c_2-b_2c_1)+d_1(b_2c-bc_2)+d_2(bc_1-b_1c)}{a(b_1c_2-b_2c_1)+a_1(b_2c-bc_2)+a_2(bc_1-b_1c)}$$

又將所與之方程式改書爲

$$by+cz+ax=d$$

$$b_1y+c_1z+a_1x=d_1$$

$$b_2y+c_2z+a_2x=d_2$$

依同樣之法得

$$y=\frac{d(c_1a_2-c_2a_1)+d_1(c_2a-ca_2)+d_2(ca_1-c_1a)}{b(c_1a_2-c_2a_1)+b_1(c_2a-ca_2)+b_2(ca_1-c_1a)}$$

同樣,得

$$z=\frac{d(a_1b_2-a_2b_1)+d_1(a_2b-ab_2)+d_2(ab_1-a_1b)}{c(a_1b_2-a_2b_1)+c_1(a_2b-ab_2)+c_2(ab_1-a_1b)}$$

〔注意〕 以上三式,惟將 a, a_1, a_2; b, b_1, b_2; c, c_1, c_2 依次更換。故 y 及 z 之值,亦可依所與之公式,直將係數更換得之。此方法稱爲輪換次序。又此題爲依未定係數求根之公式。若係數爲已知數。可用已知係數代未定係數計之。

又此三式之分母相等。毋庸重算。

(17) 討論16題之答解。

〔討論〕 (I) 先就特例 $d=d_1=d_2=0$ 論之。

卽前題之 (1), (2), (3) 變爲

$$ax+by+cz=0 \qquad (4)$$

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \qquad (5)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \qquad (6)$$

依公式，易知 $x=0$, $y=0$, $z=0$, 適合於此等方程式。而 x, y, z 之值之分母（見前題）不爲 0，卽 $a(b_1c_2-b_2c_1)+a_1(b_2c-bc_2)+a_2(bc_1-b_1c)=0$. 則 (4)，(5)，(6)，之解答不獨爲此。若係數之間有此關係。則 x, y, z 之值成 $\frac{0}{0}$ 之形。依是所與之方程式不合理，故須討論。若有此關係，則三個方程式非各自獨立。卽可由其中之二個方程式誘出其他之一方程式。何則，以 $b_2c_1-b_1c_2$ 乘 (4)，以 bc_2-b_2c 乘 (5)，以 b_1c-bc_1 乘 (6)；將所得之三式相加，依所與之關係，得 $0=0$ 之恆等式。由是知以 $b_2c_1-b_1c_2$ 乘 (4)，以 bc_2-b_2c 乘 (5)，則與 (6) 等值 卽可以 bc_1-b_1c 乘 (6) 式得之。若此關係無誤。卽得成立。則適合於方程式 (1) 及 (2) 之 x, y, z 之值，亦必適合於方程式 (3)。以 x 除此等方程式，則

$$\frac{by}{x}+\frac{cz}{x}+a=0, \quad \frac{b_1y}{x}+\frac{c_1z}{x}+a_1=0$$

依是得 $$\frac{y}{x}=\frac{ca_1-c_1a}{bc_1-b_1c}, \quad \frac{z}{x}=\frac{ab'-a'b}{bc_1-b_1c},$$

故與 x 以任意之值，可由此得 y 及 z 之值。卽不合理。

(II) 次考 d, d_1, d_2, 不悉爲 0 之例。

若任一未知數之值成 $\frac{N}{0}$ 之形。則所與之方程式不能成立。例如 x 之值成此形。卽假定

$$a(b_1c_2-b_2c_1)+a_1(b_2c-bc_2)+a_2(bc_1+b_1c)=0.$$

若所與之方程式非不能成立。則由是依理引出之方程式必合理。然以 $b_2c_1-b_1c_2$ 乘所與方程式之第一式。以 bc_2-b_2c 乘第二式，以 b_1c-bc_1 乘第三式，共相加，則 y 與 z 之係數爲零。而 x 之係數依假設爲零。故此所得之方程式之左邊爲零。其右邊則爲零。因是，此所得之方程式不能成立。故引出此等式之原方程式亦不能成立。

(III) 若未知數之一值成$\frac{0}{0}$之形。則方程式不爲不能成立則非獨立。何則。若未知數之一值成$\frac{0}{0}$之形，他未知數之值成$\frac{N}{0}$之形。而依前條所述。未知數之值成$\frac{N}{0}$之形，則所與之方程式不能成立。如設方程式爲

$ax+by+cz=d,\quad a_1x+by+cz=d_1,\quad a_2x+by+cz=d_2.$

此 y 及 z 之值成$\frac{N}{0}$之形，x 之值成$\frac{0}{0}$之形，卽非獨立。

又諸未知數之值成$\frac{0}{0}$之形，則所與方程式不能成立。如設方程式爲 $ax+by+cz=d,\ ax+by+cz=d_1$

$ax+by+cz=d_2.$

此諸未知數之值成$\frac{0}{0}$，然方程式自身之 $d,\ d_1,\ d_2$，非悉相等。易知不能成立。

(IV) 若於 x, y, z 之值,其分子悉爲 0, 則其分母當亦爲零。何則。此等分子爲零,即

$$d(b_1c_2-b_2c_1)+d_1(b_2c-bc_2)+d_2(bc_1-b_1c)=0.$$

$$d(c_1a_2-c_2a_1)+d_1(c_2a-ca_2)+d_2(ca_1-c_1a)=0.$$

$$d(a_1b_2-a_2b_1)+d_2(a_2b-ab_2)+d_2(ab_1-a_1b)=0.$$

則將此等之關係,設爲簡式,即 $Ad+Bd_1+Cd_2=0$, $A_1d+B_1d_1+C_1d_2=0$, 因 d, d_1, d_2, 非悉爲零。則依 (1) 款, $A(B_1C_2-B_2C_1)+A_1(B_2C-BC_2)+A_2(BC_1+B_1C)=0$. 而 $B_1C_2-B_2C_1=a\left\{a(b_1c_2-b_2c_1)+a_1(b_2c-bc_2)+a_2(bc_1-b_1c)\right\}$. 又 B_1C-BC_2 及 BC_1-B_1C, 可同樣表之。故前之關係當爲

$$\left\{a(b_1c_2-b_2c_1)+a_1(b_2c-bc_2)+a_2(bc_1-b_1c)\right\}^2=0.$$

(V) 前題採用之未定係數,其求 l 及 m 之二個方程式有不能成立者。此事亦當討論。因欲使此二個方程式不能成立,假定 $b_2c_1-b_1c_2=0$. 在此例內, x 之值不用所與方程式之第一式求之。常可由第二式及第三式求得。何則,以 c_2 乘所與方程式之第二式,以 c_1 乘第三式。相減,則 y 及 z 之係數爲零。可得求出 x 之一方程式。

〔例〕 假定 $4x+2y+3z=19$, $x+y+4z=9$,

$$x+2y+8z=15.$$

此 x 之值,可由第二式及第三式求得。即 $x=3$. 以 x 之此值,代入所與之三個方程式,由第一得

$2y+3z=7$, 由第二,第三得 $y+4z=6$,

由是 $y=2$, $z=1$.

又 l 及 m 之成 $\dfrac{0}{0}$ 之形。則求 l 及 m 之二方程式必非獨立。此事亦當討論。

茲 $b_2c_1-b_1c_2=0$, $bc_2-b_2c=0$, $b_1c-bc_1=0$.

此等之假設,有 $\dfrac{b_1}{b}=\dfrac{c_1}{c}$ 及 $\dfrac{b_2}{b}=\dfrac{c_2}{c}$ 之二關係。

令 $b_1=pb$, $b_2=qb$, 故 $c_1=pc$, $c_2=qc$。

依是所與之方程式得爲 $ax+by+cz=d$,

$$a_1x+pby+pcz=d_1, \qquad a_2x+qby+qcz=d_2.$$

然此爲 $ax+by+cz=d$, $\dfrac{a_1}{p}x+by+cz=\dfrac{d_1}{p}$,

$$\frac{a_2}{q}x+by+cz=\frac{d_2}{q}.$$

此 x 得由三個方程式中之任意二方程式求得。若由任意之二組,不得 x 之同值,則所與之方程式非聯立,卽不合理。若所得 x 之値相同,則所與之方程式非獨立。此例求 y 及 z 之値僅有 $by+cz$ 一個方程式,故 y 及 z 之値不定。

〔例〕 所與之方程式爲

$$x+2y+3z=10, \qquad 3x+4y+6z=23,$$

$$x+6y+9z=24,$$

由此等方程式中之任意二式,得 $x=3$.

然以 x 之此值,代入三個方程式中之任意一式,得 $2y+3z=7$, 而 y 及 z 不定。

又,若變更所與方程式之右邊,則由方程式中之任意二組。不能得 x 之同值,故所與之方程式不能成立。

〔注意〕 凡係數爲已知數者,以用消法解之爲便。若採用公式,則須注意上述各項。

(18) $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}=\dfrac{n}{x}+\dfrac{m}{y}=1.$

〔解〕 $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}=1\cdots\cdots(1),\qquad \dfrac{n}{x}+\dfrac{m}{y}=1\cdots\cdots(2).$

由 (1) 減 (2) $\qquad \dfrac{m-n}{x}+\dfrac{n-m}{y}=0.$

故 $m\neq n$, 則 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=0.$ 故 $x=y.$

以之代入 (1) 或 (2) 得 $\quad x=y=m+n$

〔討論〕 若 $m+n=0$, 或 $m-n=0$, 則此兩方程式爲不定式或不能成立。即 $m+n=0$, 則 $m=-n.$

故 (1) 及 (2) 變爲 $\quad -\dfrac{n}{x}+\dfrac{n}{y}=1. \qquad (3)$

$$\frac{n}{x}-\frac{n}{y}=-\left(-\frac{n}{x}+\frac{n}{y}\right)=1. \qquad (4)$$

(3) 與 (4) 相加得 $0=2$ 故不能成立。

又 $m-n=0$, 則 $m=n$, 即僅有一個方程式,故 x 及 y 之值不定。故此題以 $m\pm n\neq 0$ 爲限。

〔注意〕凡未定係數,其能適合之值,均有限制。宜各加以討論,始爲詳盡。而討論各種問題,原屬理論數學之事,本書注重實用,故講解中不用,玆特於問題中引其端緒,在往日之初等代數學,均喜用未定係數,並不加以討論,故不合理之特例,隨在皆有,如方程式成不定式,若僅得其一解。遂據以爲合理,則其解法當然爲誤。故未定係數之式,宜讓於高等數學,始得加以詳細之討論。絕非初學所宜。

應用問題(原書§55.)

(19) 甲乙二人,各有若干圓之儲蓄,今甲之儲蓄額再加36圓,則當乙之儲蓄額之3倍,又乙之儲蓄額用去5圓,則適當甲之儲蓄額之半,問甲乙之儲蓄額幾何。

〔解〕設甲之儲蓄額爲 x 圓,乙之儲蓄額爲 y 圓,得

$$x+36=3y \qquad (1)$$

$$y-5=\tfrac{1}{2}x \qquad (2)$$

以2乘(2)　$2y-10=x$

以 x 之此值代入(1),得

$$2y+26=3y, \qquad \therefore\quad y=26.$$

由是　　$x=42.$

若用圖式解之,則變(1)及(2)爲

$$y=+\frac{1}{3}x+12 \qquad (3)$$

$$y=+\frac{1}{2}x+5 \qquad (4)$$

即屬於(3)之直線,其截線份爲 $+12$, 向上率爲 $+\frac{1}{3}$. 屬於(4)之直線,其截線份爲 $+5$, 向上率爲 $+\frac{1}{2}$. 兩直線之交點之坐標爲 $x_1=+42$, $y_1=+26$。

學者試作圖表之,視其相合與否。

(20) 攝氏15度之水,與66度之水,各以若干混合,則成攝氏48度之水 $380kg$。

〔解〕 設15度之水爲 $x\ kg$, 66度之水爲 $y\ kg$, 則

$$x+y=380.$$

而15度及66度之水所具之熱量,恰等於混合之水所具之熱量.故得方程式

$$15x+66y=380\times48$$

解此兩方程式得

$$x=134.118, \qquad y=245.882,$$

即以15度之水 $134118\,g$, 66度之水 $245882\,g$ 混合。

(21) 有某工程。A, B 兩人合做, 4日成就. A, C 兩人合做, 6日成就。B, C 兩人合做, 12日成就, 問 A, B, C 三人合做,幾日成就。

〔解〕 設 A, B, C 各自一人獨做此工程,其成就時所經之日數,依次爲 x, y, z。

則得
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$$

兩邊各相加，以 2 除之，則得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

故三人合做所需之日數爲 4 日。

(22) 甲，乙二工共做一工程，m 日成就然動工 n 日後，甲以他事廢業。唯乙工獨做，p 日完成。問此工程唯甲工獨做，或乙工獨做，各幾日完成。

〔解〕 設甲獨自做成所需之日數爲 x 日。乙獨自做成所需之日數爲 y 日。則

$$\frac{m}{x}+\frac{m}{y}=1\cdots\cdots\cdots(1),\qquad \frac{n}{x}+\frac{n+p}{y}=1\cdots\cdots\cdots(2).$$

以 $n+p$ 乘 (1)，以 m 乘 (2)，用減法，

$\frac{mp}{x}=n+p-m$，易知 $n+p-m\neq 0$，

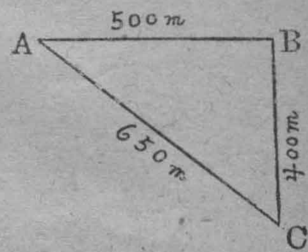
故 $x=\frac{mp}{n+p-m}$， 依是 $y=\frac{mp}{m-n}$

卽甲 $\frac{mp}{n+p-m}$ 日完成，乙 $\frac{mp}{m-n}$ 日完成。

〔討論〕 此題必 $n<m<n+p$。

(23)　有鎗手,向距離500公尺(m)之的擊射,發射後經$4\frac{1}{3}$秒始聞中的之響,又有離鎗手650公尺,離的400公尺之傍觀者。聞發射之響後,經$2\frac{1}{3}$秒。始聞中的之響,然則音響及鎗彈之速,各爲每秒幾公尺。但設音響與鎗彈其速均爲等速。

〔解〕　設鎗手與的之位置依次爲A,B,在離A $650m$,離B $400m$之人之位置爲C。



今設1秒間音響及鎗彈之速之m數依次爲x,y。則音響傳播於A,B間所需之時間爲$\frac{500}{x}$秒,鎗彈行於A,B間需$\frac{500}{y}$秒,又音響傳播於A,C間需$\frac{650}{x}$秒。傳播於B,C間需$\frac{400}{x}$秒。故依題意,得次之二方程式$\frac{500}{x}+\frac{500}{y}=4\frac{1}{3}$..(1)

$\frac{500}{x}+\frac{400}{x}-\frac{650}{x}=2\frac{1}{3}$......(2) 解此二方程式,得

$$x=375,\quad y=166\frac{2}{3},$$ 即爲所求之m數。

(24)　在某戰爭前,計算敵軍與本軍之軍勢。敵之5人適當本軍之6人,然在戰爭時敵損失14000人,本軍損失6000人,至戰爭後,敵之2人適當本軍之3人,然則戰爭前敵軍本軍各若干人。

〔解〕 設敵軍及本軍之人數,依次為 x, y, 則

$$6x=5y,\quad 3(x-14000)=2(y-6000).$$

$$\therefore\quad 3x-2y=30000.$$

即 $$3x-\frac{12}{5}x=30000.\qquad \therefore\quad x=50000.$$

依是 $y=60000.$

即戰爭前敵軍 50000 人,本軍 60000 人。

(25) 有複線之鐵路,今在此鐵路上,有甲乙二列車,向同方向進行。甲列車長 60 碼,乙列車長 72 碼,而甲列以 12 秒經過乙列,若乙列之速增前速之半,則甲列欲經過乙列,須費時 24 秒。問甲乙二列車之速,各為每時幾英里,但 1 英里 =1760 碼。

〔解〕 題云甲列以 12 秒經過乙列,則甲列速於乙列可知。今設甲乙二列車每秒之速依次為 x, y, 則

$$\frac{60+72}{x-y}=12.\qquad \frac{60+72}{x-\frac{3}{2}y}=24.$$

由是 $x=22$, $y=11$. 故各每時之速為

$$\frac{22\times60\times60}{1760}=45,\ 及\ \frac{11\times60\times60}{1760}=22\tfrac{1}{2}.$$

依是每時之速甲為 45 英里,乙為 $22\frac{1}{2}$ 英里。

(26) 有甲乙丙三支輪船,同往來於相同之兩港,甲船之速每時較乙船快 $\frac{1}{2}$ 海里。航行時間少 $1\frac{1}{2}$ 時,乙船之速較丙船快 1 海里之 $\frac{3}{4}$,航行時間少 $2\frac{1}{2}$ 時間,問兩港間之距離幾何。

〔解〕 設甲,乙,丙各每時之速依次爲 y 海里, $y-\frac{1}{2}$ 海里, $y-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$ 海里。兩港之距離爲 x 海里。

依題意　$\dfrac{x}{y-\frac{1}{2}}=\dfrac{x}{y}+1\frac{1}{2}$, 卽 $x=3y(y-\frac{1}{2})$.

又　$\dfrac{x}{y-\frac{5}{4}}=\dfrac{x}{y}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$, 卽 $x=\dfrac{16}{5}y(y-\frac{5}{4})$.

依是　$3y(y-\frac{1}{2})=\dfrac{16}{5}y(y-\frac{5}{4})$. 故 $y=\dfrac{25}{2}$,

依是　$x=3y(y-\frac{1}{2})=3\times\dfrac{25}{2}\left(\dfrac{25}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=450$.

卽所求之距離爲 450 海里。

(27) 某日砲聲傳達之速,順風爲每秒 $344.42m$, 逆風爲每秒 $335.94m$, 然則在無風之空氣中音響傳達之速幾何。又此日之風之速幾何。

〔解〕 設每秒間音響之速爲 x 公尺,風之速爲 y 公尺。則

$$x+y=344.42,$$
$$x-y=335.94. \qquad \therefore\quad 2x=680.36,$$
$$2y=8.48 \quad 依是\ x=340.18,\ y=4.24,$$

卽音之速爲 $340.18m$, 風之速爲 $4.24m$。

(28) 汽車由 A 地向 B 地進行,開行一時後,忽遇障礙,停車 24 分。由是增原速之 $\frac{1}{5}$, 復行。及至 B 地。已過原定時刻 15 分。

若以原速多行 5 英里,始遇障礙,則當更遲 2 分,問原速每時幾英里。又 A, B 之距離幾何。

〔解〕 令汽車之原速爲 x 英里。A, B 之距離爲 y 英里。

依題意 $$1+\frac{24}{60}+\frac{y-x}{(1+\frac{1}{5})x}=\frac{y}{x}+\frac{15}{60} \qquad (1)$$

又 $$1+\frac{24}{60}+\frac{5}{x}+\frac{y-x-5}{(1+\frac{1}{5})x}=\frac{y}{x}+\frac{15}{60}+\frac{2}{60} \qquad (2)$$

由 (2) 減 (1) 得 $$\frac{5}{x}-\frac{5}{(1+\frac{1}{5})x}=\frac{5}{x}-\frac{25}{6x}=\frac{2}{60}$$

去分母 $300-250=2x, \quad \therefore \quad x=25.$

依是 $y=47.5$

即原速爲每時25英里。A, B 之距離爲47.5英里。