Feladatok az 1. ZH-hoz
2007. október

1. Metrikus tér, normált tér, skalárszorzat tér

1. *(8 pont)* Definiálja az l^p tereket, ahol $1 \leq p \leq \infty$.
2. *(12 pont)* Definiálja a $C([0,1])$ függvényteret a supremumnormával és a négyzetes normával. Melyik norma származik skalárszorzatból?
3. *(8 pont)* Az l^q terekben definiált normák közül melyik származik skalárszorzatból?
4. *(8 pont)* Igazolja, hogy skalárszorzatból származtatott normákra teljesül a parallelogramma szabály.
5. *(10 pont)* Igazolja, hogy $C([a,b])$ szeparábilis.
6. *(10 pont)* Igazolja, hogy $C([a,b])$ a négyzetes normával nem teljes.
7. *(10 pont)* Igazolja, hogy $C([a,b])$ a supremum normával teljes.
8. *(8 pont)* A valós számok halmaza a diszkrét metrikával teljes-e? Igazolja állítását.
9. *(10 pont)* Igazolja, hogy l^1 teljes.
10. *(8 pont)* Igazolja, hogy metrikus terekben minden Cauchy-sorozat korlátos.

2. Mértékelmélet, Lebesgue integrál, Lebesgue terek

11. *(8 pont)* A Lebesgue mérték definiciója során egyik közbülső lépés az volt, hogy minden valós részhalmazra értelmeztük a külső mértéket. Hogyan?

12. *(8 pont)* Mennyi a Cantor halmaz mértéke? Igazolja.

13. *(8 pont)* Legyen

$$H = \{(x, y) : \ x, y \epsilon \mathbb{Q}, \ 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

    Mi a fenti H halmaz Lebesgue mértéke? Indokolja meg.

14. *(6 pont)* Igazolja, hogy a

$$H = \{x \epsilon [0, 1] \ : \ x \text{ racionalis}\}$$

    halmaz Lebesgue mérhető, és mértéke 0.

15. *(4 pont)* Mit jelent az, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lebesgue mérhető?

16. *(10 pont)* Hasonlítsa össze a Lebesgue- és a Riemann integrált.

17. *(6 pont)* Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Lebesgue integrálható legyen?

18. *(12 pont)* Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ mindenütt, $\displaystyle\int_{[a,b]} f dm = 0$. Igazolja, hogy ekkor $f = 0$ majdnem mindenütt.

19. *(12 pont)* Definiálja az $L^2[0, 1]$ teret és igazolja, hogy ez valóban normált tér.

20. *(12 pont)* Definiálja az $L^\infty[0, 1]$ teret és igazolja, hogy ez valóban normált tér.

3. Fourier analízis L^2-ben

21. *(8 pont)* Legyen $R = [0, 1]$ és tekintsük az $L^2(R)$ teret. Írjon fel egy ortogonális polinomrendszert.

22. *(6 pont)*L^2-ben mit állít a Parseval egyenlőség?

23. *(6 pont)* L^2-ben mit állít az általánosított Parseval egyenlőség?

24. *(15 pont)* Adott $L^2[0, 1]$-ben a $\{\varphi, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ ortogonális függvényrendszer és $f \epsilon L^2[0, 1]$. Mi lesz az f függvény ortogonális vetülete a fenti függvényrendszer által kifeszített lienáris altérre?

25. *(8 pont)* A Haar rendszert hogyan definiáljuk?

26. *(10 pont)* Igazolja, hogy a Haar rendszer tényleg ortonormált.

27. *(15 pont)* Igazolja, hogy a Laguerre polinomok ortogonálisak. (Emlékeztetőül: ezek ortogonális polinomok $\mathbb{R}^+$-ban, az e^{-x} súlyfüggvény mellett.)

28. *(8 pont)* Fogalmazza meg a Riesz-Fisher tételt.

4. Absztrakt lineáris operátorok

29. *(10 pont)* X és Y normált terek, $T : X \to Y$ korlátos operátor. T normáját hogyan értelmezzük? Írja fel mindkét definíciót.

30. *(8 pont)* Határozza meg l^2-ben a jobb shift operátor normáját.

31. *(8 pont)* Határozza meg l^2-ben a bal shift operátor normáját.

32. *(8 pont)* Legyen $x_0 \epsilon l^2$ rögzített,
$$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots).$$
Legyen
$$Tx = \langle x, x_0 \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k x_{0k}.$$
Mi lesz a T operátor normája?

33. *(12 pont)* $C[a, b]$-ben definiáljuk az F funkcionált a következőképpen:
$$F(x) := \int_a^b x(t)dt,$$
ahol $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Igazolja, hogy
$$\|F\| = b - a.$$

34. *(15 pont)* Legyen $F : C[0, 1] \to C[0, 1]$ lineáris operátor Fredholm típusú, a
$$k(t, s) = t^2 + s^2$$
magfüggvénnyel. Mi lesz F normája?

35. *(10 pont)* Igazolja, hogy az operátor norma szubmultiplikatív: ha $T, S \epsilon \mathcal{B}(X)$ korlátos lineáris operátorok, akkor
$$\|T \cdot S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|.$$

36. *(15 pont)* Legyen $T \epsilon \mathcal{B}(X)$, ahol X Banach tér. Tegyük fel, hogy $\|T\| < 1$. Igazolja, hogy $I - T$ invertálható és írja fel inverzét.