

Analízis III. tételjegyzék  
2007.

1. Metrikus tér. Példák. Sorozat konvergencia, függvény folytonossága. Normált tér. Norma és metrika kapcsolata. Skalár-szorzat tér. Skalár-szorzat és norma kapcsolata. Példák: **sorozat-terek, függvény-terek**. Dimenzió.
2. Szeparábilis metrikus tér. Példák és ellenpélda. **Teljes metrikus tér**.  $\mathcal{C}([a, b])$  teljessége - és nem teljessége.
3. Lebesgue mérték bevezetése  $\mathbb{R}^n$ -ben. **Nullmértékű halmazok**. Cantor halmaz.
4. Mérhető függvények, ezek tulajdonságai. Egyszerű függvények. Lebesgue integrál. **Integrálhatóság feltétele**. Kapcsolat a Riemann integrállal.
5. Általános mértéktér, példák.  $\mathcal{L}^p(\mu)$  **terek**  $1 \leq p \leq \infty$  esetén. Teljesség.
6. Lineárisan független függvényrendszer  $\mathcal{L}^2$ -ben. **Ortonormált ill. teljes függvényrendszer**. Általános Fourier analízis.
7. Parseval egyenlőség, Riesz-Fisher tétel.  $\mathcal{L}^2(\mu)$  és  $l^2(\mu)$  **izometriája**. Általános  $\mathcal{L}^2$  terek, súlyfüggvénnyel. Ortonormált polinomrendszerek: Legendre- Hermite- Csebisev-polinomok. Haar rendszer.
8. Lineáris operátorok normált terekben. Korlátosság. Folytonosság. Példák:  $l^2$ -ben,  $\mathcal{C}([a, b])$ -ban.  $\mathcal{B}(X, Y)$  **mint normált tér**.
9. Lineáris funkcionál. Korlátosság és folytonosság. **Funkcionál normája**. **Normált tér duális tere**. Reflexív és irreflexív terek, erre példák.
10. Lineáris operátorok Banach algebrája. Invertálhatóság. **Spektrum: diszkrét és folytonos**. Operátor spektrum alaptulajdonságai.
11. **Kontrakció normált térben**. **Banach-féle fixponttétel**. Ennek következményei: gyökkeresés és Picard tétel közönséges differenciálegyenlet megoldására.
12. Riesz reprezentációs tétel. **Lineáris operátor adjungáltja Hilbert térben**. Önadjungált operátor. Példák. Normál operátor.
13. **Variációszámítás feladata**. Motiváció: fizikai példák. Optimum létezésének szükséges feltétele: **Euler egyenlet**. Speciális esetek. Többváltozós feladat.
14. Közönséges differenciálegyenlet stacionárius megoldása. **Egyensúlyi pontok: stabil, aszimptotikusan stabil, instabil**. **Ljapunov-féle stabilitási kritériumok**. Lineáris DE stabilitása, kapcsolat polinom stabilitással. Ljapunov egyenlet. Nemlineáris DE stabilitása. Linearizálással, vagy közvetlenül.
15. PDE: alapkérdések. Példák egy dimenzióban. Laplace egyenlet, Dirichlet feltétellel: változók szétválasztása és variációs technika. Hővezetés véges rúdban.