1. Absztrakt lineáris operátorok

1.1. Példák

1. Shift operátor l^2-ben. Bal- és jobb shift.

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Mátrix alakot írjátok fel S-re.

2. Fredholm operátor $\mathcal{C}([a.b])$-ben.

$$Tf(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt.$$

Példák:

- $k(s,t) = \min\{s,t\}$.
- $$k(s,t) = \begin{cases} 0 & s < t \\ 1 & s \geq t \end{cases}.$$

  Ez utóbbi Volterra típusú.

1.2. Korlátos operátor normája

(A definíció ez volt:) X és Y normált terek, $T : X \to Y$ korlátos operátor normája:

$$\|T\| = \inf\{M \ : \ \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\}$$

Állítás:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| = 1, \ x \in X\}$$

Példák

1. Véges dimenzióban, $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$. T megadása egy $m \times n$ dimenziós mátrix-szal történik. $\|T\|$ kiszámítása $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ mellett. (Lehet $n = m$, egyszerűbb.) (Egyik HF). Mindig más!

2. Shift operátorok:

$$\|T\| = 1, \qquad \|S\| = 1$$

3. $x_0 \in l_2$ rögzített,

$$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots).$$

Legyen

$$Tx = \langle x, x_0 \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k x_{0k}.$$

$\|T\| = ?$ - előadáson szerepelt.

4. Legyen $T : l^2 \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris operátor (funkcionál). Lássátok be, hogy ez a fenti alakú.

5. Fredholm operátor, a fenti speciális esetek.

Lehet még: $Tf(s) = \dfrac{1}{s} \displaystyle\int_0^s f(t)dt$, ez a CESARO operátor.

6. Differenciál operátor. $\dfrac{d}{dx} : C^1[a, b] \to C[a, b]$ lineáris, de NEM korlátos-e.