Ch1 **Propriétés des systèmes linéaires / Stabilité**
COURS

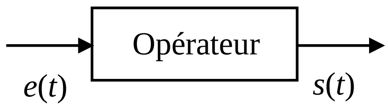
<u>Introduction</u>

En physique, toute grandeur mesurable, porteuse d'information, (t, T, P, i, u, éclairement, angle…) est appelée un *signal.*

Un *système physique* (opérateur) engendre des signaux de sortie (réponses) à partir de signaux d'entrée (excitations)

On se limite à un système physique comprenant une entrée et une sortie.

Représentation unifilaire :



<u>Exemples</u> :

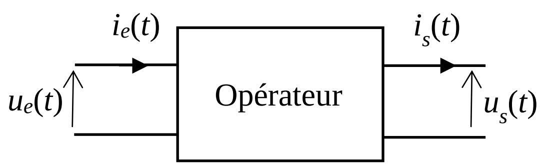
- système = solution chimique
  - entrée = volume d'acide versé
  - sortie = pH de la solution.
- système = chauffage électrique
  - entrée = intensité du courant électrique qui le traverse
  - sortie = température de la pièce.
- système = moteur électrique
  - entrée = intensité du courant électrique qui le traverse
  - sortie = vitesse de rotation

<u>Remarque</u> :

Pour effectuer les mesures des grandeurs d'entrée et de sortie, on a besoin de capteurs : voltmètre, ampèremètre, thermomètre, tachymètre, manomètre…

Dans la plupart des cas, ces capteurs convertissent la grandeur à mesurer en grandeur électrique, d'où l'importance de l'électronique en physique.

Pour des signaux électriques, on préfère souvent travailler avec une représentation bifilaire dans laquelle sont indiquées les tensions et intensités pour pouvoir accéder à la puissance.

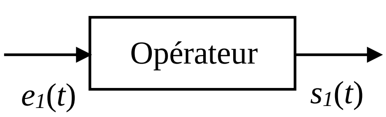


Selon le domaine de puissance dans lequel on travaille on distingue l'électronique des petits signaux (filtrage : 50Hz, égaliseur, ADSL, CPL) et l'électronique de puissance (convertisseurs : hacheurs, onduleur, lissage)

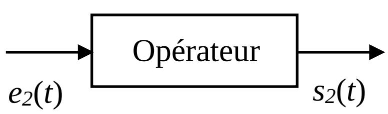
I) Système Linéaire et Invariant. Définitions.

1) <u>Système linéaire</u>

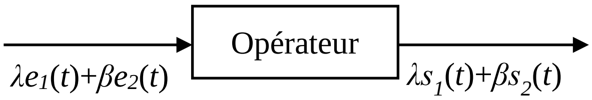
Soit un opérateur pour lequel on a :



et



L'opérateur sera alors **linéaire** si pour tous λ et β réels on a :



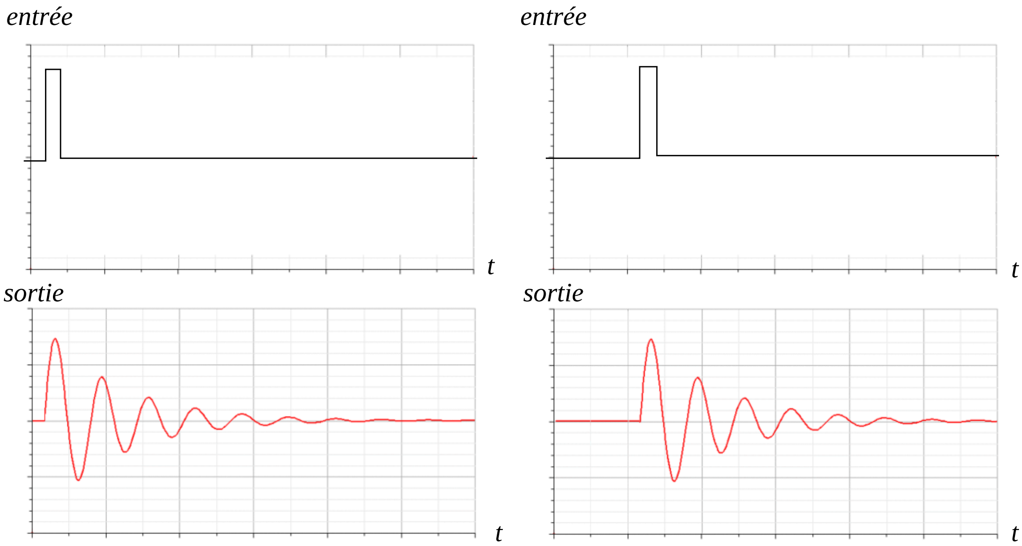
On dit qu'un système linéaire satisfait au **principe de superposition**.

2) Système invariant dans le temps

Un **système** est **invariant dans le temps** si la réponse à une excitation retardée de τ est uniquement retardée de τ.

La même entrée donne la même réponse quelle que soit le moment où on l'applique.

Exemple :



Remarque :

- Les appareils de mesure doivent être des systèmes invariants pour assurer la reproductibilité des mesures.
- En général il faut attendre l'équilibre thermique pour que le système soit invariant puisque les résistances dépendent de la température de travail.

3) Système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

C'est le cas le plus fréquent des systèmes linéaires invariants.

Mais ce n'est pas le seul (exemple du retard pur vu en SII)

Dans ce cas, le système est régi par une équation différentielle du type :

$$N_0 e(t)+\sum_{i=1}^{m} N_i \frac{d^i e}{dt^i} = D_0 s(t)+\sum_{j=1}^{n} D_j \frac{d^j s}{dt^j}$$

Le système est bien linéaire du fait de la linéarité de la dérivée et invariant grâce aux coefficients constants N_i et D_j.

L'ordre du système est l'ordre de dérivation *n* ou *m* le plus élevé

On se limite à priori à des ordres 1 ou 2 comme en première année.

On aura alors une équation du type :

$$N_0 e + N_1 \frac{de}{dt} + N_2 \frac{d^2 e}{dt^2} = D_0 s + D_1 \frac{ds}{dt} + D_2 \frac{d^2 s}{dt^2}$$

avec les coefficients constants N_i et D_j qui peuvent être éventuellement nuls.

Exemples multiples ont été vus en première année :

- Système amorti masse + ressort
- Circuits formés de *R*, *L* et *C*
- Moteur à courant continu : $J\frac{d\omega}{dt} = \Phi_{em} i - f\omega$

II) Réponse d'un système linéaire et invariant à un signal sinusoïdal

1) Régime sinusoïdal forcé :

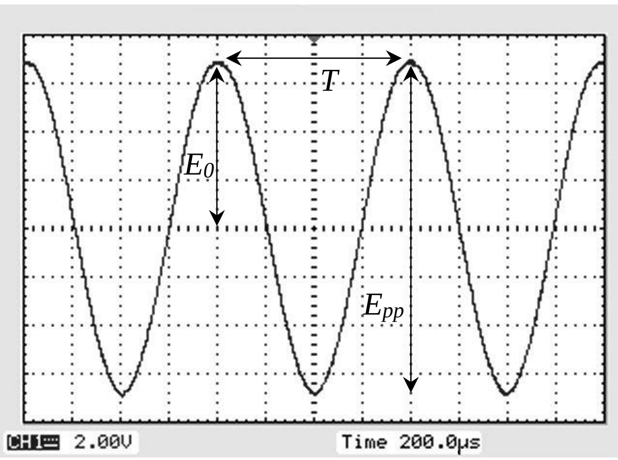
Rappel : Valeurs moyenne et efficace

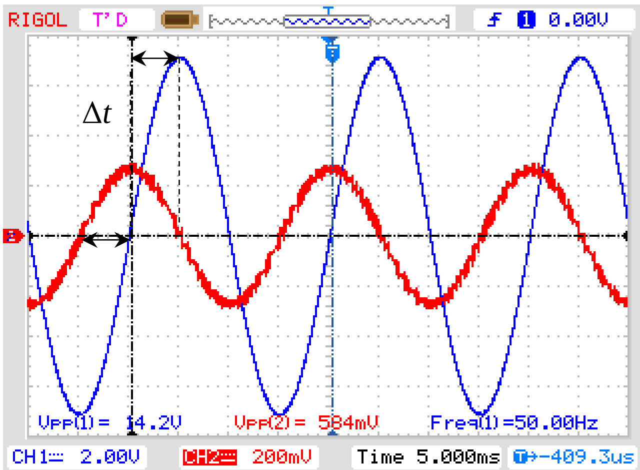
$U_{moy} = \langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$ est la valeur moyenne d'un signal *u*

$U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}$ est la valeur efficace d'un signal *u*.

Dans le cas d'un signal sinusoïdal *e* : $\langle e \rangle = E_{moy} = 0$ et $E_{eff} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}}$

Caractérisation d'un signal sinusoïdal :





Un signal sinusoïdal *e* est caractérisé par 3 grandeurs

- Sa période *T* ou sa fréquence $f = 1/T$ ou sa pulsation $\omega = 2\pi f$
- Son amplitude E_0 (valeur maximale) ou sa valeur crête à crête $E_{pp} = 2E_0$ ou sa valeur efficace $E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$
- Sa phase à l'origine φ_e ou le déphasage par rapport à un autre signal sinusoïdal.

  (Le signal rouge est en avance de $\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T}$ par rapport au signal bleu)

Un signal sinusoïdal peut alors s'écrire $\boxed{e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e)}$

Propriété :
Les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires
Conséquence :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \longrightarrow \boxed{\text{Opérateur}} \longrightarrow s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$$

Si le signal d'entrée est sinusoïdal, le signal de sortie est lui aussi sinusoïdal de **même pulsation.**

Problème de signification physique d'un signal sinusoïdal :
Un signal sinusoïdal a une extension temporelle infinie : pas de début et pas de fin !
Dans la pratique on a plutôt $e = 0$ à $t < 0$ (appareil éteint) et $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$ à $t > 0$
Pour un système régi par une équation différentielle, la sortie $s(t)$ associée à l'entrée sera de la forme :

$$s(t) = s_{\text{homogène}}(t) + s_{\text{particulière}}(t)$$

$$\text{avec } s_{\text{particulière}}(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$$

Pour un système stable (voir partie en fin de chapitre) $s_{\text{homogène}}(t) \xrightarrow[t=+\infty]{} 0$
Il y aura un régime transitoire puis l'établissement du **régime sinusoïdal forcé.**
(Possible uniquement pour un système stable)

Notations complexes :
On peut associer à tout signal sinusoïdal une représentation complexe :
Signal $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$. Représentation complexe associée :
$\underline{e}(t) = E_0 e^{j(\omega t + \varphi_e)} = E_0 e^{j\varphi_e} e^{j\omega t} = \underline{E_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{E_m} = E_0 e^{j\varphi_e}$ amplitude complexe de e
Signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$. Représentation complexe associée :
$\underline{s}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi_s)} = S_0 e^{j\varphi_s} e^{j\omega t} = \underline{S_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{S_m} = S_0 e^{j\varphi_s}$ amplitude complexe de s

Intérêts :

- l'équation différentielle est aussi vérifiée par les représentations complexes si le système est linéaire
- La dérivée par rapport au temps d'une représentation complexe équivaut à une multiplication par $j\omega$

Remarque :
Le régime sinusoïdal forcé permet de vérifier rapidement si le système est linéaire ou non.
On fixe $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$
Si la sortie, au bout d'un éventuel régime transitoire n'est pas sinusoïdale de même pulsation alors le système n'est pas linéaire : il y a création d'harmoniques.

2) Fonction de transfert

Définition : fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{\underline{s(t)}}{\underline{e(t)}}=\dfrac{\underline{S_m}}{\underline{E_m}}=\dfrac{S_0}{E_0}e^{j(\varphi_s-\varphi_e)}$

Gain : $G(\omega)=\dfrac{S_0}{E_0}$

= Module de la fonction de transfert

= Rapport des amplitudes

Phase : $\varphi(\omega)=\varphi_s-\varphi_e$

= Argument de la fonction de transfert

= Déphasage de la sortie par rapport à l'entrée

Donc si $e(t)=E_0\cos(\omega t+\varphi_e)$ est connue et qu'on connait aussi la fonction de transfert du système, on connait le signal de sortie :

$$s(t)=\left|\underline{H}(j\omega)\right|E_0\cos\left(\omega t+\varphi_e+\arg(\underline{H}(j\omega))\right)$$

Forme de la fonction de transfert pour des systèmes d'ordre 1 ou 2.

Un système linéaire d'ordre 2 est régi par une équation différentielle du type :

$$N_0e+N_1\frac{de}{dt}+N_2\frac{d^2e}{dt^2}=D_0s+D_1\frac{ds}{dt}+D_2\frac{d^2s}{dt^2}$$

Cette équation différentielle est également vérifiée par les représentations complexes en régime sinusoïdal forcé puisque le système est linéaire.

$$N_0\underline{e}+N_1\frac{d\underline{e}}{dt}+N_2\frac{d^2\underline{e}}{dt^2}=D_0\underline{s}+D_1\frac{d\underline{s}}{dt}+D_2\frac{d^2\underline{s}}{dt^2}$$

Ce qui équivaut à : $N_0\underline{e}+N_1(j\omega)\underline{e}+N_2(j\omega)^2\underline{e}=D_0\underline{s}+D_1(j\omega)\underline{s}+D_2(j\omega)^2\underline{s}$

On peut donc obtenir la fonction de transfert du système :

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{N_0+N_1j\omega+N_2(j\omega)^2}{D_0+D_1j\omega+D_2(j\omega)^2}=\frac{\text{polynôme en } j\omega \text{ d'ordre 2}}{\text{polynôme en } j\omega \text{ d'ordre 2}}$$ (N_2 ou D_2 peuvent être nuls)

Pour un système d'ordre1 on obtient par un raisonnement similaire :

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{N_0+N_1j\omega}{D_0+D_1j\omega}=\frac{\text{polynôme en } j\omega \text{ d'ordre 1}}{\text{polynôme en } j\omega \text{ d'ordre 1}}$$ (N_1 ou D_1 peuvent être nuls)

Autre définition de l'ordre d'un système :

L'ordre d'un système est aussi l'ordre le plus élevé des polynômes du dénominateur ou du numérateur de la fonction de transfert.

Remarque :

Le raisonnement inverse est également valable : **à partir de la fonction de transfert on peut retrouver l'équation différentielle qui régit le système** quel que soit le signal d'entrée

3) Représentation de la fonction de transfert

Gain en décibels : $G_{dB}(\omega)=20\log G(\omega)$

Définition du diagramme de Bode : Un diagramme de Bode est constitué de **2 courbes**

- Gain en décibels en fonction de $\log f$ ou $\log\omega$ ou $\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ ou $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
- Phase en fonction de la même abscisse.

(avec f_0 ou ω_0 fréquence ou pulsation caractéristiques du système, définies dans l'énoncé)

Comment tracer un diagramme de Bode ?

- Expérimentalement : point par point
- A partir de la fonction de transfert : python ou tracé asymptotique

Utilisation d'un diagramme de Bode ?

- permet de connaitre la nature du système linéaire, son ordre, le domaine de fréquences utiles…
- permet de trouver $s(t)$ connaissant $e(t)$

Pulsation de résonance : pulsation pour laquelle le gain est maximum : $\boxed{G(\omega_{rés}) = G_{\max}}$

Pulsation(s) de coupure à 3 dB : ω_c définie par les égalités suivantes

$$\boxed{G_{dB}(\omega_c) = G_{dB\max} - 3dB \Leftrightarrow G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}}$$

Fréquence de coupure associée $\boxed{f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}}$

Bande passante : domaine de fréquence ou de pulsation dans lequel les inégalités suivantes sont vérifiées $\boxed{G_{dB}(\omega) \geq G_{dB\max} - 3dB \Leftrightarrow G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}}$

III) Analyse de Fourier

1) Décomposition en série de Fourier

Développement en série de Fourier d'une fonction u périodique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\boxed{u(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)} \quad \text{ou} \quad \boxed{u(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)}$$

Composante continue : $V_0 = \langle u \rangle$, valeur moyenne de la fonction v

Composante Fondamentale : $V_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

Harmonique de rang n : $V_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$

Calcul des coefficients de Fourier :

$$A_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \quad ; B_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \quad \text{et } V_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

2) Spectre de Fourier

Spectre d'un signal : **Tracé des V_n en fonction de la pulsation ou de la fréquence**.

Rq : on peut retrouver la valeur efficace à partir du spectre.

$$\left\langle u^2(t)\right\rangle = V_{eff}^2 = V_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left\langle V_n^2\cos^2\left(n\omega_0 t+\varphi_n\right)\right\rangle = V_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{V_n^2}{2}$$

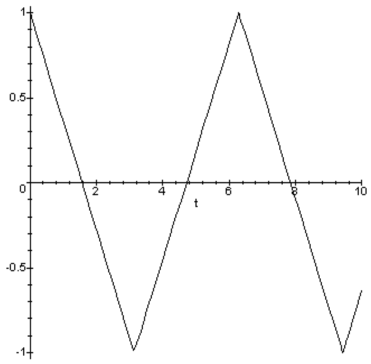
Spectre d'un signal sinusoïdal : ne contient que le fondamental

Cas d'un signal triangulaire :

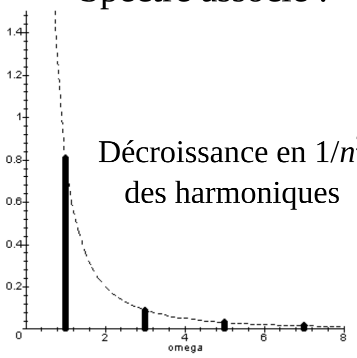
Développement en série de Fourier d'un signal triangulaire (si la fonction est paire) :

$$u(t)=\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\left(\omega t\right)+\frac{1}{3^2}\cos\left(3\omega t\right)+...+\frac{1}{\left(2p+1\right)^2}\cos\left((2p+1)\omega t\right)+...\right]$$

Signal triangulaire :



Spectre associé :



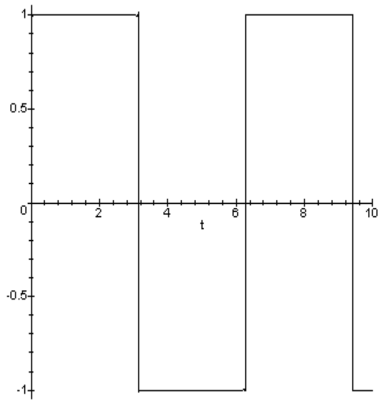
- Ne contient que des harmoniques impaires
- Décroissance en $1/n^2$ de ces harmoniques

Cas d'un signal créneau :

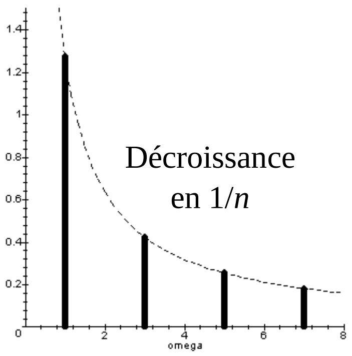
Développement en série de Fourier d'un signal créneau (si la fonction est impaire) :

$$u(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\omega t\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\omega t\right)+...+\frac{1}{2p+1}\sin\left((2p+1)\omega t\right)+...\right]$$

Signal créneau :



Spectre associé :



- Ne contient que des harmoniques impaires
- Décroissance en $1/n$ de ces harmoniques

Comment obtenir un spectre ?

- Par calcul « à la main »
- Par traitement informatique : *Fast Fourier Transform* (FFT)

Remarque : on ne peut pas retrouver le signal à partir du spectre (il manque les déphasages)

3) Action d'un système linéaire

Méthode pour obtenir le signal de sortie

1- On effectue le développement en série de Fourier du signal d'entrée : c'est **l'analyse de Fourier**
2- On calcule la réponse du système à chaque harmonique
3- On fait la **synthèse de Fourier** du signal de sortie en sommant les différentes réponses.

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

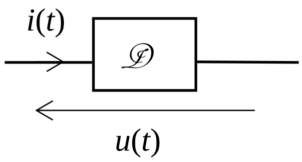
$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\underline{H}(jn\omega_0)\right| E_n \cos\left(n\omega_0 t + \varphi_n + \arg\left(\underline{H}(jn\omega_0)\right)\right)$$

Un système linéaire ne peut pas créer de nouvelles harmoniques
Un opérateur non linéaire peut enrichir le spectre de nouvelles harmoniques
C'est un critère pour vérifier la linéarité d'un système

IV) Exemples d'étude fréquentielle

1) Les impédances complexes

On étudie un dipôle linéaire $\mathscr{D}$
On travaille en régime sinusoïdal forcé :



$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ avec φ le déphasage de *u* par rapport à *i*

Impédance complexe : $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \dfrac{\underline{\underline{U_m}}}{\underline{I_m}} = \dfrac{U_0}{I_0} e^{j\varphi}$

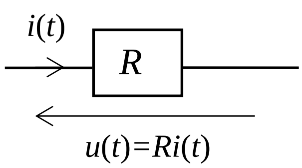
C'est un coefficient complexe caractéristique du dipôle en régime sinusoïdal forcé.
Il s'exprime en ohms.

On peut aussi définir l'admittance complexe du dipôle $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$ en Ω^{-1} ou S (Siemens)

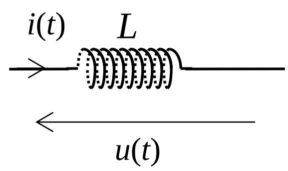
Les 3 dipôles linéaires de base :

- Le conducteur ohmique :

Il est caractérisé par sa résistance *R* (Ω) telle que $u(t) = Ri(t)$
En représentation complexe : $\underline{u}(t) = R\underline{i}(t)$ et donc $\boxed{\underline{Z} = R}$
Son comportement est indépendant de la fréquence de travail.



- <u>La bobine :</u>



Elle est caractérisée par son inductance L (H) telle que $u(t) = L\dfrac{di}{dt}$

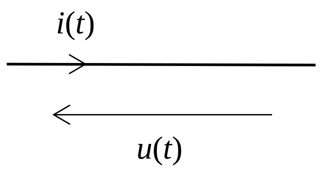
En représentation complexe : $\underline{u}(t) = L\dfrac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\underline{i}(t)$ et donc $\boxed{\underline{Z} = jL\omega}$

Comportement fréquentiel :

À basses fréquences : $\omega \to 0$

$|\underline{Z}| \to 0$ donc $U_0 \to 0$

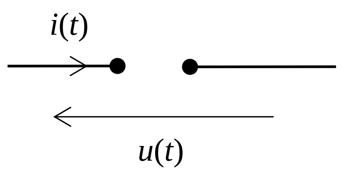
La bobine équivaut à un fil



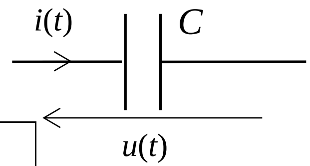
À hautes fréquences : $\omega \to +\infty$

$|\underline{Z}| \to +\infty$ donc $I_0 \to 0$

La bobine équivaut à une coupure



- <u>Le condensateur :</u>



Il est caractérisé par sa capacité C (F) telle que $i(t) = C\dfrac{du}{dt}$

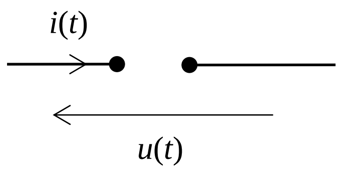
En représentation complexe : $\underline{i}(t) = C\dfrac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega\underline{u}(t)$ et donc $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}}$

Comportement fréquentiel :

À basses fréquences : $\omega \to 0$

$|\underline{Z}| \to +\infty$ donc $I_0 \to 0$

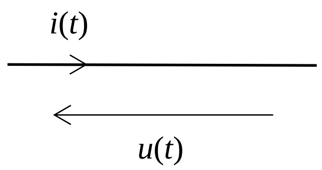
Le condensateur équivaut à une coupure



À hautes fréquences : $\omega \to +\infty$

$|\underline{Z}| \to 0$ donc $U_0 \to 0$

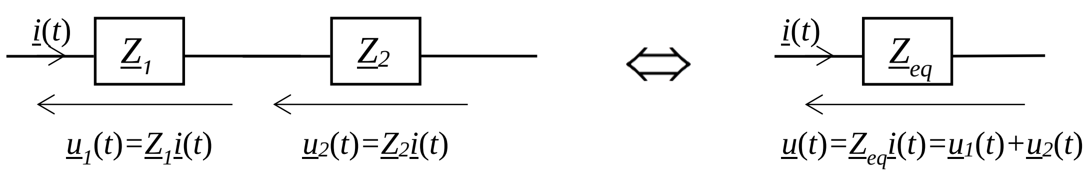
Le condensateur équivaut à un fil



<u>Association d'impédances complexes :</u>

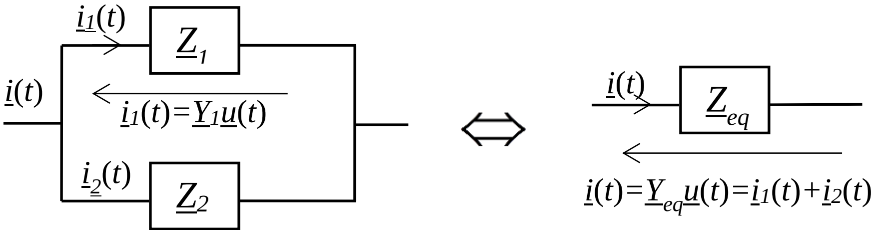
Des impédances complexes s'associent comme des résistances :

En série :



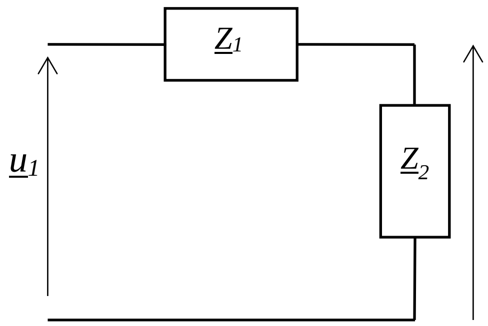
$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

En parallèle :



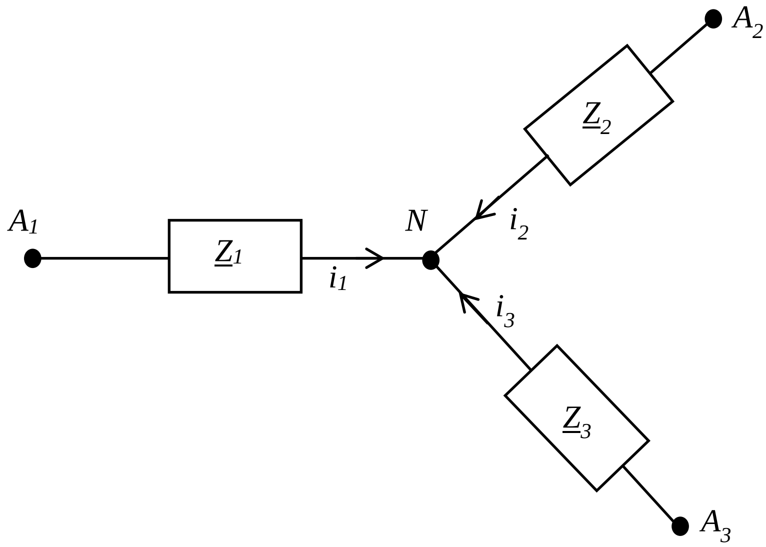
$$\boxed{\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

Pont diviseur de tension :



$$\boxed{\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{u}_1}$$

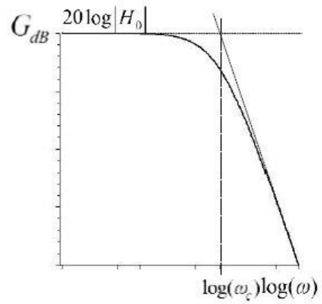
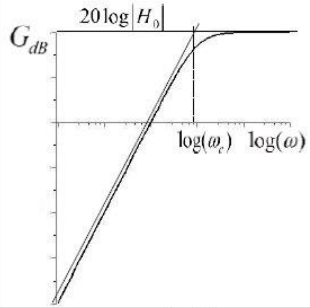
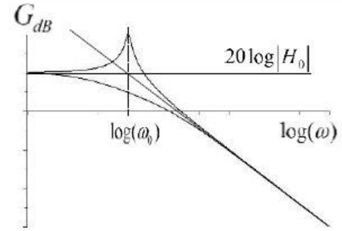
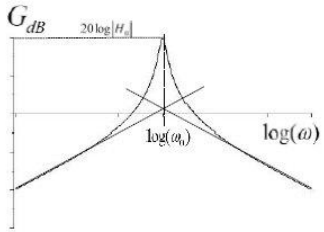
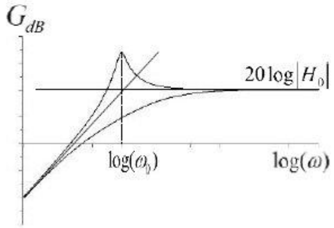
Loi des nœuds en termes de potentiels :
La somme des intensités des courants entrants dans un nœud est nulle.
On exprime les représentations complexes des intensités en fonctions des différences de potentiels et des impédances :



$$\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\boxed{\frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_N}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_N}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_3 - \underline{V}_N}{\underline{Z}_3} = 0}$$

2) Exemples de filtres : voir en applications de cours
   a) RC d'ordre 1
   b) RLC série Passe bas
   c) RLC série Passe bande

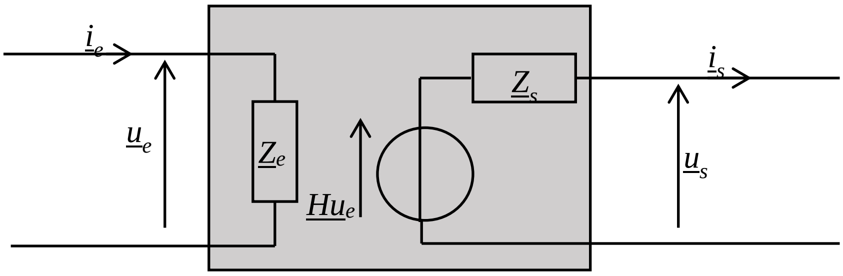
3) Tableau récapitulatif des filtres d'ordre 1 et 2 :

Fonction de transfert	$\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$	$\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$	$\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{1}{1 + \dfrac{j\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$	$\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{\dfrac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 + \dfrac{j\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$	$\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + \dfrac{j\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$
Ordre du filtre	ordre 1	ordre1	ordre 2	ordre 2	ordre 2
Nature du filtre	passe bas	passe haut	passe bas	passe bande	passe haut
Diagramme de Bode en gain					
Pente des asymptotes	-20 dB/déc intégrateur à HF	+20 dB/déc dérivateur à BF	-40 dB/déc	+/- 20 dB/déc	+40 dB/déc
Intersection des asymptotes	pulsation de coupure ω_c	pulsation de coupure ω_c	ω_0	Pulsation de résonance ω_0	ω_0
Bande passante	$[0, \dfrac{\omega_c}{2\pi}]$	$[\dfrac{\omega_c}{2\pi}, +\infty[$		$\Delta f = \dfrac{f_0}{Q}$	
Rotation de phase	$\|\Delta\varphi\| = \dfrac{\pi}{2}$	$\|\Delta\varphi\| = \dfrac{\pi}{2}$	$\|\Delta\varphi\| = \pi$	$\|\Delta\varphi\| = \pi$	$\|\Delta\varphi\| = \pi$

V) Modélisation d'un quadripôle linéaire

1) Caractérisation d'un quadripôle linéaire

Tout quadripôle linéaire peut être modélisé de la façon suivante :



Impédance d'entrée du système : $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$

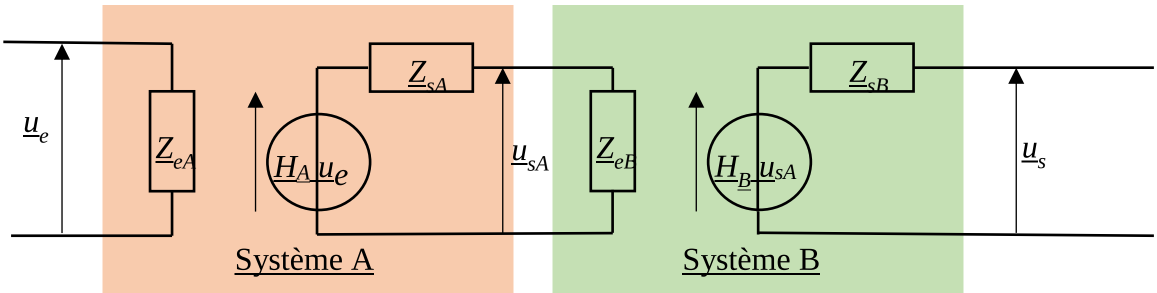
Impédance de sortie du système : $\underline{Z_s} = -\dfrac{\underline{u_s}}{\underline{i_s}}$ calculée pour une entrée nulle

Tout quadripôle linéaire est caractérisé par la donnée de :

- son diagramme de Bode ou sa fonction de transfert
- ses impédances d'entrée et de sortie

2) Association en cascade

On associe 2 quadripôles linéaires : le système A et le système B

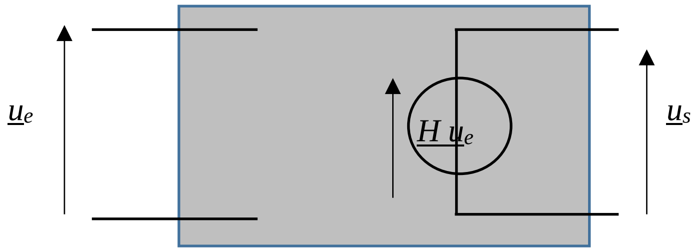


Pont diviseur de tension à la sortie du système A : $\underline{u_{sA}} = \dfrac{\underline{Z_{eB}}}{\underline{Z_{eB}} + \underline{Z_{sA}}}\underline{H_A}\,\underline{u_e}$

On veut que le système A ne soit pas perturbé par le branchement du système B.

Le système linéaire B doit posséder une grande impédance d'entrée.
Le système linéaire A doit posséder une faible impédance de sortie.

Cas idéal pour une association en cascade :



Dans ce cas le système ne perturbe pas le montage en amont et il ne sera pas perturbé par un montage en aval.
On obtient alors le diagramme de Bode d'un ensemble mis en cascade facilement en additionnant les diagrammes de Bode de chaque système.

VI) Stabilité d'un système linéaire d'ordre 1 ou 2

1) Définition de la stabilité

Pour un système régi par une équation différentielle linéaire, la sortie s(t) associée à l'entrée sera de la forme :

$$s(t) = s_{\text{homogène}}(t) + s_{\text{particulière}}(t)$$

Un système est stable $\Leftrightarrow s_{\text{homogène}}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Cette condition porte donc sur le régime libre de l'opérateur = sans excitation.
Le régime libre ne diverge pas pour un opérateur stable.

2) Stabilité d'un système d'ordre 1

La solution homogène vérifie l'équation différentielle $D_0 s(t) + D_1 \dfrac{ds}{dt} = 0$

de solution $s(t) = A\exp\left(-\dfrac{D_0}{D_1}t\right) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Le système sera stable si D_0 et D_1 sont de même signe pour que τ soit positif.

Trajectoire de phase

On représente $\dfrac{ds}{dt}$ en fonction de s

C'est une droite qui passe par l'origine de pente $-\dfrac{1}{\tau}$

Pour un système stable $\tau>0$ le point se rapproche de 0
Pour un système stable $\tau<0$ le point s'éloigne de 0

3) Stabilité d'un système d'ordre 2

La solution homogène vérifie l'équation différentielle $D_0 s(t) + D_1 \dfrac{ds}{dt} + D_2 \dfrac{d^2 s}{dt^2} = 0$

Équation caractéristique associée $D_0 + D_1 r + D_2 r^2 = 0$
Selon le signe du discriminant, différents régimes libres sont possibles.

- Si $\Delta > 0$:
  2 racines réelles à l'équation caractéristique r_1 et r_2
  La solution homogène s'écrit : $s(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$
  Elle tend vers zéro si $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$
  Dans ce cas le système est stable. Il y aura un régime transitoire apériodique.

Sinon le système est instable. La solution diverge.

On sait que $r_1 r_2 = \dfrac{D_0}{D_2}$

Pour que r_1 et r_2 soient toutes les 2 négatives, il faut que D_0 et D_2 soient de même signe.

De plus on a $r_1 + r_2 = -\dfrac{D_1}{D_2}$ qui sera négatif donc D_1 et D_2 sont de même signe.

Ainsi le système sera stable si les 3 coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe.

- Si $\Delta < 0$:
  2 racines complexes conjuguées $r_+ = \alpha + j\omega_p$ et $r_- = \alpha - j\omega_p$

  avec $\alpha = -\dfrac{D_1}{2D_2}$ et $\omega_p = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2D_2}$

  La solution homogène s'écrit $s(t) = A\exp(\alpha t)\cos(\omega_p t + \varphi)$

  Le système sera stable si $\alpha < 0$ soit si D_1 et D_2 sont de même signe.
  Sachant de plus que le discriminant doit être négatif, il faut D_0 et D_2 soient aussi de même signe.
  Le système sera donc stable si les 3 coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe.
  On aura alors un régime transitoire pseudopériodique.
  Sinon le système est instable et la solution diverge.

- Si $\Delta = 0$
  Cas limite entre les 2 précédents.

  1 racine double $r = -\dfrac{D_1}{2D_2}$

  La solution homogène s'écrit $s(t) = (A + Bt)\exp(rt)$

  Il faut donc $r < 0$ pour que le système soit stable.
  Soit D_1 et D_2 de même signe. De plus comme le discriminant est nul il faut que D_2 et D_0 soient de même signe.

4) <u>Conclusion</u>

Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients de l'équation différentielle homogène sont tous de même signe.

Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement les coefficients du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe.