Unterraum

Ein Unterraum U eines K-Vektorraums V besteht aus Elementen $u \in U \subseteq V$, die mit der in V definierten Addition und Skalarmultiplikation selbst einen Vektorraum bilden.

Um zu prüfen, ob $U \subset V$ ein Unterraum ist, genügt es zu zeigen, dass U bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist:

$$\begin{aligned} u, v \in U \quad &\implies \quad u + v \in U \\ s \in K, u \in U \quad &\implies \quad s \cdot u \in U\,. \end{aligned}$$

Unterräume U werden oft durch Bedingungen an die Elemente von V definiert:

$$U = \{u \in V :\, A(u)\},$$

mit einer Aussage A, die für Elemente von U erfüllt sein muss.

Beispiel

Unterräume des Vektorraums der reellen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

definiert durch zusätzliche Eigenschaften

Eigenschaft	Unterraum
(un)gerade	ja
beschränkt	ja
monoton	nein
stetig	ja
positiv	nein
linear	ja

exemplarische Begründungen

- beschränkt:

$$\begin{aligned} |f_k| \le c_k \quad &\implies \quad |f_1(x) + f_2(x)| \le |f_1(x)| + |f_2(x)| \le c_1 + c_2 \\ |f| \le c \quad &\implies \quad |sf(x)| \le sc \end{aligned}$$

  jeweils $\forall x$
  $\rightsquigarrow$ $f_1 + f_2$ und sf sind beschränkt
  $\rightsquigarrow$ Unterraumkriterium erfüllt

- monoton:

$$h(x) = \exp(x) - x \quad \text{nicht monoton wegen} \quad \lim_{x \to \pm\infty} h(x) = +\infty$$

  trotz Monotonie von $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = x$

Beispiel

Gerade in einem K-Vektorraum V:

$$U:\ u = a + tb, \quad t \in K$$

mit fest gewählten Elementen $a, b \in V$

(i) $a = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Unterraum:

$$u_1, u_2 \in U \quad \Longrightarrow \quad u_1 + u_2 = t_1 b + t_2 b = (\underbrace{t_1 + t_2}_{t})b \in U$$

$$s \in K,\ u \in U \quad \Longrightarrow \quad su = s(tb) = (st)b \in U$$

(ii) $0 \notin U$, d.h. $a \neq 0$ und $b \neq sa \quad \rightsquigarrow \quad$ kein Unterraum:

$$u \in U \quad \Longrightarrow \quad su = s(a + tb) = 0 \notin U \quad \text{für } s = 0$$